

โปรแกรมเชื่อมต่อกับผู้ใช้ทางกราฟิกในการหาสมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ด้วย
โปรแกรม MATLAB

ปริญญานิพนธ์
ของ
วิรัช สิริทรัพย์ไพบูลย์

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
เมษายน 2551

โปรแกรมเชื่อมต่อกับผู้ใช้ทางกราฟิกในการหาสมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ด้วย
โปรแกรม MATLAB

ปริญญานิพนธ์
ของ
วิรัช สิริทรัพย์ไพบูลย์

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
เมษายน 2551
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

โปรแกรมเชื่อมต่อกับผู้ใช้ทางกราฟิกในการหาสมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ด้วย
โปรแกรม MATLAB

บทคัดย่อ
ของ
วิรัช สิริทรัพย์ไพบูลย์

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
เมษายน 2551

วิรัช สิริทรัพย์ไพบูลย์ (2551). โปรแกรมเชื่อมต่อกับผู้ใช้ทางกราฟิกในการหาสมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ด้วยโปรแกรม MATLAB. ปรินซ์นิพนธ์ วศ.ม. (เครื่องกล). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม : พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทวิวัชร วีระเกล้า, พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อโณทัย สุขแสงพนมรุ้ง.

ในงานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อออกแบบและสร้างโปรแกรม Graphical User Interface สำหรับรับค่าอินพุตค่าตัวแปรต่างๆ ที่ใช้ในการคำนวณเพื่อหาสมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ รวมถึงการแสดงผลเอาต์พุตหลังการคำนวณในรูปแบบที่เหมาะสมด้วยโปรแกรม MATLAB และสามารถหาค่า Moment of Inertia ของแขนกลรูปทรงเรขาคณิตอย่างง่ายเพื่อนำมาช่วยให้หาสมการการเคลื่อนที่ได้ถูกต้องยิ่งขึ้น

การดำเนินการวิจัยนี้ได้ออกแบบและสร้างสมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ด้วยทฤษฎีของออยเลอร์-ลากรานจ์ และวิเคราะห์ปัญหาของหุ่นยนต์แบบ Forward Kinematics ผู้ใช้ต้องมีข้อมูลที่เป็นตาราง D-H (Denavit-Hartenberg) อินพุตที่โปรแกรมโดยที่ผู้ใช้สามารถอินพุตค่าที่เป็นเชิงตัวเลขหรือค่าที่เป็นตัวแปรก็ได้ ซึ่งโปรแกรมจะนำค่าที่ได้ไปคำนวณต่อโดยใช้ฟังก์ชัน Symbolic ถ้าค่าที่อินพุตเป็นตัวแปร ค่าผลลัพธ์คำตอบที่ได้จะติดเป็นตัวแปรเช่นกัน ในส่วนการอินพุตค่าโมเมนต์ความเฉื่อยที่เป็นรูปทรงเรขาคณิตอย่างง่าย ผู้ใช้สามารถเลือกได้ง่ายโดยมีรูปภาพมาประกอบให้เลือกและใส่ค่าตัวแปรต่างๆ ดังรูป การแสดงผลของผลลัพธ์คำตอบสามารถแสดงออกมาได้หลายโปรแกรม แล้วแต่ผู้จะเป็นผู้เลือก เพื่อที่สามารถนำไปประยุกต์กับโปรแกรมอื่นเพื่อหาคำตอบที่เป็นเชิงตัวเลขได้อีกครั้ง

จากการทดสอบโปรแกรมพบว่าวิธีการหาสมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ด้วยโปรแกรมนั้นมีความถูกต้อง เมื่อแสดงใน โปรแกรม แต่เมื่อผลที่ได้ออกมาให้รูปแบบของ Microsoft Office Word หรือโปรแกรมอื่น จะไม่สามารถทำให้อยู่ในรูปของสมการที่เข้าใจได้ง่าย ดังนั้นจึงต้องเข้าใจในตัวแปรของสมการดังกล่าวด้วย

THE GRAPHIC USER INTERFACE FOR THE EQUATIONS OF MOTION ROBOT
USING MATLAB PROGRAM

AN ABSTRACT

BY

WIRAT SIRISAPPAIBUN

Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the
Master of Engineering Degree in Mechanical Engineering
at Srinakharinwirot University

April 2008

Wirat Sirisappaibun. (2008). *The Graphic User Interface for The Equations of Motion Robot Using MATLAB Program*. Master thesis, M.Eng. (Mechanical Engineering).

Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Lt.Col. Asst. Prof. Dr. Tawiwat Veeraklaew , Lt.Col. Asst. Prof. Dr. Anotai Suksangpanomrung.

In this thesis have the objective for designs and construction Graphical User Interface for input the variable at use in the computation for find dynamic equation of a robot include outcome calculation show in the format that is appropriate with a program MATLAB and find inertia momentum of arm simply geometric for bring to help give can seek dynamic equation is correct increasingly.

Operation researched this design and construction equation of robot motion describing by Euler-Lagrange equations and analytical robotic manipulators in term of Forward Kinematics, D-H (DENAVID-HARTENBERG) can be incorporated to the program including the digital and variable inputs. MATLAB program determines the data by symbolic function, if input is the variable then the outcome is also the variable, in case of input the inertia momentum is simply geometry the user simply chose by have the picture assemble and input variable follow picture the expression of result can be illustrated in many programs base on user preference which aims to apply with the other program that generates the result as digital once again.

From program tested discover that the method find dynamic equation of a robot with program has the justice, when show in program but when at get come out give the format of MS. Word or a program is other will can not display in format of the equation that simply understand thus then must understand in the variable of the equation with.

ปริญญานิพนธ์
เรื่อง

โปรแกรมเชื่อมต่อกับผู้ใช้ทางกราฟิกในการหาสมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ด้วยโปรแกรม MATLAB

ของ
วิรัช สิริทรัพย์ไพฑูรย์

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เพ็ญสิริ จีระเดชากุล)

วันที่..... เดือน เมษายน พ.ศ. 2551

คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์
..... ประธาน
(พ.ท.ผศ.ดร.ทวีวัชร วีระแก้วน)

..... กรรมการ
(พ.ท.ผศ.ดร.อโณทัย สุขแสงพนมรุ้ง)

คณะกรรมการสอบปากเปล่า
..... ประธาน
(รศ.ดร.เศรษฐพงศ์ มะลิสวรรณ)

..... กรรมการ
(พ.ท.ผศ.ดร.ทวีวัชร วีระแก้วน)

..... กรรมการ
(พ.ท.ผศ.ดร.อโณทัย สุขแสงพนมรุ้ง)

..... กรรมการ
(ผศ.วิจิต บัวแก้ว)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ สำเร็จได้ด้วยความสามารถของ พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทวีวัชร วีระเกล้าว ประธานกรรมการควบคุมการทำปริญญานิพนธ์ และ พันโท ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อโณทัย สุขแสงพนมรุ้ง กรรมการควบคุมการทำปริญญานิพนธ์ ที่กรุณาให้คำปรึกษา แนะนำและให้ความช่วยเหลือแก้ไขความบกพร่องและปัญหาต่างๆ อีกทั้งให้กำลังใจขณะดำเนินการทำปริญญานิพนธ์ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงตลอดไป

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วิชิต บัวแก้ว ที่ช่วยตรวจแก้ปริญญานิพนธ์ และให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ต่องานวิจัย

ขอขอบคุณบิดา มารดา ตลอดจนเพื่อนร่วมงานทุกท่าน ในความสนับสนุน ช่วยเหลือและให้กำลังใจ เป็นอย่างดีตลอดเวลา

ขอขอบคุณเพื่อนร่วมชั้นรุ่นที่ 3 และรุ่นพี่รุ่นน้องในโครงการความร่วมมือหลักสูตรปริญญาโท มศว. และ รร.จปร. สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล ทุกท่านที่ให้ความช่วยเหลือและเป็นกำลังใจตลอดมา

วิรัช สิริทรัพย์ไพฑูรย์

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ.....	1
ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	1
ขอบเขตของการวิจัย.....	2
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	2
2 งานวิจัยและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง.....	3
ทบทวนงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	3
ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง.....	4
3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	24
การกำหนดปัญหาหุ่นยนต์.....	24
การแก้ปัญหาเชิงสัญลักษณ์.....	28
ลำดับขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม.....	30
4 ผลการทดสอบและวิเคราะห์ผลการทดสอบ.....	31
ผลการทดสอบ.....	31
วิเคราะห์ผลการทดสอบ.....	39
5 สรุปและวิจารณ์.....	40
สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ.....	40
ข้อเสนอแนะ.....	41
บรรณานุกรม.....	42

สารบัญ(ต่อ)

บทที่	หน้า
ภาคผนวก.....	44
อภิธานศัพท์.....	70
คำอธิบายสัญลักษณ์.....	72
ประวัติย่อผู้วิจัย.....	73

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 ค่าตัวแปร D-H ของหุ่นยนต์แบบแขนกลที่มีลักษณะเป็นข้อต่อแบบงอ	25
2 ค่าตัวแปร D-H ของหุ่นยนต์สแตมฟอร์ด	27
3 ค่าตัวแปร D-H ของหุ่นยนต์สกาลาร์	28

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 แสดงตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวล	5
2 แท่งกลมขนาดเล็ก ส่วนที่แรงโน้มถ่วงคือมวล dm เล็ก ๆ ที่แบ่งในช่วง dx	6
3 แสดงภาพประกอบทฤษฎีแกนขนาน	8
4 แสดงแกนที่ติดกับเฟรมของแขนกลรูปทรงคล้ายข้อศอก	10
5 แสดงการตั้งเฟรมตามวิธีเดนาวิต-ฮาร์เทนเบอร์ก	12
6 แขนกลที่มีลักษณะเป็นข้อต่อแบบงอ 2 ข้อต่อ	24
7 กำหนดพิกัด DH เฟรมสำหรับหุ่นยนต์สเตมฟอร์ด	26
8 กำหนดพิกัด DH เฟรมสำหรับหุ่นยนต์สกาลาร์	27
9 แสดงลำดับขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมแบบย่อ	30
10 แสดงตัวแปรที่มีในแขนกลที่มีลักษณะเป็นข้อต่อแบบงอ 2 ข้อต่อ	31
11 แสดงตัวแปรที่มีในหุ่นยนต์สเตมฟอร์ด	36
12 แสดงตัวแปรที่มีในหุ่นยนต์สกาลาร์	38

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในยุคสมัยที่เทคโนโลยีมีการพัฒนาเจริญก้าวหน้าขึ้น งานภาคอุตสาหกรรมกลับมีความต้องการจ้างแรงงานจำนวนมาก ทำให้ต้นทุนการผลิตของแต่ละโรงงานเพิ่มสูงขึ้น ประกอบกับงานอุตสาหกรรมบางอย่างอันตรายและมีความเสี่ยงสูง หรือเป็นงานที่ต้องการความรวดเร็วและแม่นยำในการผลิต ทำให้หุ่นยนต์กลายมาเป็นทางออกของงานภาคอุตสาหกรรม

หุ่นยนต์สามารถทำงานได้แบบอัตโนมัติ โดยมีอุปกรณ์ควบคุมให้หุ่นยนต์ทำงานตามเป้าหมายที่กำหนด ในกระบวนการทำงานที่ดำเนินไปอย่างช้า ๆ นั้น จะสามารถควบคุมตัวแปรด้วยมือหรือเครื่องมือพื้นฐานได้ แต่สำหรับกระบวนการที่ต้องการความรวดเร็วและถูกต้องสูง เราไม่อาจสามารถควบคุมด้วยมือได้ เพื่อหลีกเลี่ยงความล่าช้าและไม่สม่ำเสมอของมนุษย์ จึงมีผู้นำเอาคอมพิวเตอร์มาประยุกต์เข้ากับหุ่นยนต์ ทำให้เกิดผลสำเร็จของการควบคุมอย่างรวดเร็ว เทียบตรง และมีเสถียรภาพ

ในการควบคุมการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์นั้น มีตัวแปรหลายอย่างที่เราเกี่ยวข้อง และมีการคำนวณที่ซับซ้อนหลายขั้นตอน อาจทำให้เกิดความผิดพลาดได้ง่าย การนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์มาใช้จึงเป็นอีกวิธีหนึ่งในการแก้ไขปัญหา และส่งผลให้การควบคุมการเคลื่อนที่ถูกต้อง แม่นยำ และรวดเร็วมากยิ่งขึ้น

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

- 1.2.1 เพื่อออกแบบและสร้างโปรแกรมเชื่อมต่อกับผู้ใช้ทางกราฟิกสำหรับรับค่าอินพุตค่าตัวแปรต่างๆ ที่ใช้ในการคำนวณเพื่อหาสมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ รวมถึงการแสดงผลเอาต์พุตหลังการคำนวณในรูปแบบที่เหมาะสมด้วยโปรแกรม MATLAB
- 1.2.2 เพื่อออกแบบและสร้างโปรแกรมเชื่อมต่อกับผู้ใช้ทางกราฟิกจาก MATLAB เพื่อหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรูปทรงเรขาคณิตอย่างง่าย

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

- 1.3.1 โปรแกรมเชื่อมต่อกับผู้ใช้ทางกราฟิกสามารถรองรับจำนวนแขนต่อ (Link) ที่มีในระบบได้ไม่จำกัดจำนวน แต่ในงานวิจัยนี้จะทดสอบเพียง 6 แขนต่อ
- 1.3.2 สร้างและแสดงผลสมการการเคลื่อนที่ให้ออกมาในรูปแบบของ MATLAB และ Microsoft Office Word
- 1.3.3 วิเคราะห์ปัญหาของหุ่นยนต์แบบหาคศาสตร์ไปข้างหน้า (Forward Kinematics)
- 1.3.4 ใส่รูปแบบของโมเมนต์ความเฉื่อยของแขนต่อที่มีรูปทรงเรขาคณิตอย่างง่ายได้ เช่น ทรงวงกลม ทรงวงรี ทรงกระบอก ทรงพีระมิด ทรงพาราโบลอย เป็นต้น
- 1.3.5 สามารถหาโมเมนต์ความเฉื่อยของแขนต่อที่แกนหมุน ณ จุดใด ๆ

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- 1.4.1 ช่วยในด้านการเรียนการสอน โดยผู้ที่กำลังศึกษาหรือสนใจเรื่องหุ่นยนต์สามารถนำสมการการเคลื่อนที่ ที่ได้จากการคำนวณด้วยมือมาตรวจสอบกับโปรแกรม
- 1.4.2 ผลของการวิจัยจะทำให้โปรแกรมคอมพิวเตอร์สามารถหาสมการการเคลื่อนที่ได้อย่างรวดเร็ว แม่นยำและถูกต้อง
- 1.4.3 ผลของการวิจัยจะทำให้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยรูปทรงต่างๆ ทั้งที่มีรูปทรงเรขาคณิตอย่างง่าย
- 1.4.4 เป็นการสร้างองค์ความรู้พื้นฐาน เพื่อที่จะพัฒนาไปสู่ความรู้ทางวิชาการและวิทยาการที่สูงขึ้น
- 1.4.5 เป็นแนวทางในการสร้างและพัฒนาโปรแกรมที่เกี่ยวกับหุ่นยนต์ในอนาคต
- 1.4.6 สามารถนำเอาข้อมูลทฤษฎีที่ได้จากการศึกษางานวิจัยนี้ ไปวิเคราะห์ร่วมกับงานวิจัยอื่นที่มีลักษณะคล้ายคลึงกันได้

บทที่ 2

งานวิจัยและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และนำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

1. ทบทวนงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 ทบทวนงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการออกแบบหุ่นยนต์จะต้องมีการคำนวณหาส่วนต่างๆมากมาย หนึ่งในนั้นมีการหาสมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ ซึ่งถือว่าสำคัญอย่างมาก โดยสมการการเคลื่อนที่จะเป็นตัวกำหนดเส้นทางการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ให้เป็นไปตามที่ต้องการ จึงได้มีการคิดค้นพัฒนาโปรแกรมเพื่อช่วยในการคำนวณหา อาทิเช่น

เครื่องมือที่ใช้เกี่ยวกับหุ่นยนต์ในโปรแกรม MATLAB (Robotics Toolbox for MATLAB) , 2000 มีฟังก์ชันให้เลือกใช้มากมายและเป็นประโยชน์ในเรื่องหุ่นยนต์ เช่น จลนศาสตร์ (Kinematics) การเคลื่อนที่และการสร้างเส้นทางการเคลื่อนที่ เครื่องมือนี้ยังมีประโยชน์สำหรับการจำลองผลการวิเคราะห์จากการทดลองด้วยหุ่นยนต์จริง โดยหลักๆใช้วิธีของจลนศาสตร์และการเคลื่อนที่ของการผสมผสานจุดต่อหลายรูปร่าง ซึ่งแบบหุ่นยนต์ที่ใช้ก็รู้จักกันดีเช่น พูม่า 560 (Puma 560) และ สแตมฟอร์ดอาร์ม (Stanford Arm) ฟังก์ชันของเครื่องมือที่ใช้เช่น เวกเตอร์ การเปลี่ยนรูปของวัตถุที่ประกอบเข้ากันและการแบ่งภาควรระนาบทั้งสี่ซึ่งจำเป็นกับการแทนค่าของจุดสามมิติและการพลิกหักเห จะส่งผลให้การแสดงภาพกราฟิกท่าทางของหุ่นยนต์ได้ดีอีกด้วย เพียงให้ค่า DH (Denavit and Hartenberg Parameters) หุ่นยนต์ก็จะสามารถเคลื่อนเป็นลำดับจากจุดข้อต่อไปหาจุดอ้างอิงผลที่ได้รับจากโปรแกรมคือ จุดตำแหน่งที่แสดงในกราฟฟิกซึ่งสามารถนำไปเปรียบเทียบกับวิธีการอื่นที่หาได้และได้ภาษาโปรแกรมหลัก (Source Code) ซึ่งนั่นจะเป็นประโยชน์สำหรับการทำความเข้าใจและการเรียนการสอน

Web Enabled Robot Design and Dynamic Control Simulation Software Solutions From Task Points Description โดย ทาเลค โซบฮา สารอช พาเทลและไบล หวัง (Tarek Sobh, Sarosh Patel and Bei Wang) แห่งมหาวิทยาลัยบริจพอร์ท, 2005 ได้ร่วมกันสร้างเว็บไซต์สำหรับการออกแบบหุ่นยนต์ และการจำลองการเคลื่อนที่ โดยได้จากรายละเอียดของจุดงาน การรวมโปรแกรมต่างๆ และการคำนวณอย่างมีประสิทธิภาพด้วยการใช้หลักคณิตศาสตร์และความสามารถของ MATLAB การกำหนดตำแหน่งและความเร็วของแต่ละจุด โปรแกรมจะออกแบบหุ่นยนต์ 3 ระดับขึ้นความเสรีให้

เรียบร้อย โดยใช้หลักการคำนวณของตัวแปรทางการเคลื่อนที่ที่เหมาะสม อาทิเช่น ความยาวของข้อต่อมวลและโมเมนต์ความเฉื่อย

สรุปจากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องทำให้ทราบว่ามีการพยายามสร้างโปรแกรมช่วยในการออกแบบหุ่นยนต์ให้มีความถูกต้องและง่ายต่อการศึกษาเรียนรู้ ซึ่งส่วนใหญ่จะสร้างจากการอ้างอิงรูปแบบหุ่นยนต์ที่เป็นมาตรฐาน จำกัดจำนวนข้อต่อ (Link) ของแขนหุ่นยนต์และออกแบบเป็นแบบสำเร็จรูป โดยไม่สามารถจะบ่งบอกหรือแสดงสมการการเคลื่อนที่ที่คำนวณได้ด้วยโปรแกรม ซึ่งจะนำมาศึกษาเปรียบเทียบความถูกต้องหลังคำนวณได้ด้วยมือจากที่ศึกษามา จึงทำให้ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะศึกษาและสร้างโปรแกรมที่สามารถคำนวณหาสมการการเคลื่อนที่ ให้แสดงอยู่ในรูปแบบต่าง ๆ เพื่อสะดวกต่อการนำไปใช้งาน โดยโปรแกรมสามารถหาจำนวนข้อต่อได้ไม่จำกัดจำนวน อีกทั้งสามารถกำหนดรูปทรงของข้อต่อ ในรูปทรงเรขาคณิตอย่างง่ายในรูปทรงต่าง ๆ ได้ด้วย ซึ่งจะทำให้สมการการเคลื่อนที่ที่มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น

2.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.2.1 โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุ (Moment of Inertia of the Mass)

2.2.1.1 จุดศูนย์กลางมวล (Center of Mass; CM)

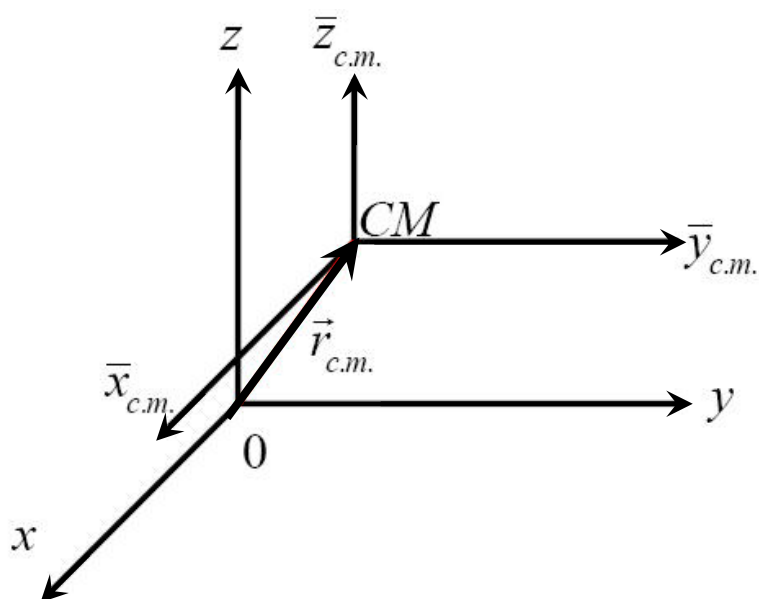
จุดศูนย์กลางมวลถือว่าเป็นจุดเสมือนมวลสำหรับวัตถุขนาดใหญ่ หรือระบบอนุภาครวมอยู่ที่จุดนั้น โดยปกติจุดศูนย์กลางมวลและจุดศูนย์กลางความถ่วง จะเป็นจุดเดียวกันและอาจอยู่ภายในหรือภายนอกวัตถุก็ได้ ถ้าวัตถุมีขนาดใหญ่มาก ในทำนองเดียวกันกับจุดศูนย์กลางความถ่วงก็จะหาจุดศูนย์กลางมวล

$$\bar{x}_{c.m.} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m} \quad (2.1)$$

$$\bar{y}_{c.m.} = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m} \quad (2.2)$$

$$\bar{z}_{c.m.} = \frac{\sum z_i m_i}{\sum m} \quad (2.3)$$

ให้ $\bar{x}_{c.m.}$, $\bar{y}_{c.m.}$, $\bar{z}_{c.m.}$ คือ จุดพิกัดของจุดศูนย์กลางมวล ถ้าให้ $\vec{r}$ เป็นเวกเตอร์ ตำแหน่งของจุดศูนย์กลางมวล จะได้ $\vec{r}_{c.m.} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}$ เทียบกับแกนพิกัด xyz กับแกนพิกัด $\bar{x}_{c.m.}$, $\bar{y}_{c.m.}$, $\bar{z}_{c.m.}$ จะมีจุดกำเนิดที่จุดศูนย์กลางมวล



ภาพประกอบ 1 แสดงตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวล (CM)

2.2.1.2 วิธีคำนวณหาโมเมนต์ความเฉื่อย (Moment of Inertia)

$I = \sum m_i r_i^2$ เป็นสมการที่หาโมเมนต์ความเฉื่อยในกรณีที่มีมวลเป็นจุด แต่ถ้ามวลมีรูปทรงขนาดใหญ่และเนื้อวัตถุกระจายอย่างสม่ำเสมอจะต้องใช้วิธีการอินทิเกรตแทนโดยแบ่งมวลของวัตถุออกเป็นชิ้นเล็ก ๆ มีค่า dm อยู่ห่างจากแกนหมุนเป็นระยะ r โมเมนต์ความเฉื่อยของอนุภาคเล็กๆ นี้จะเป็น

$$dI = r^2 dm \quad (2.4)$$

โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุทั้งก้อน

$$I = \int r^2 dm \quad (2.5)$$

ถ้า ρ เป็นความหนาแน่นของวัตถุ และ dV เป็นปริมาตรเล็ก

$$dm = \rho dV \quad (2.6)$$

แทนในสมการ(2.5) จะได้

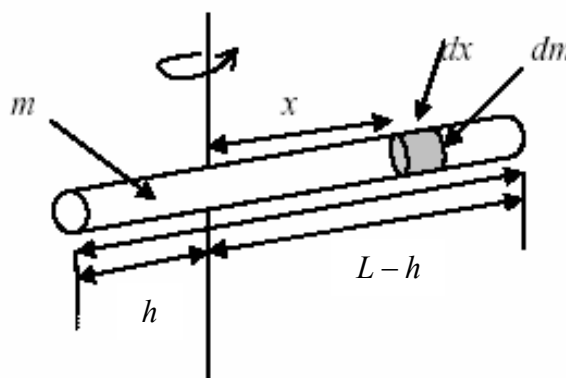
$$I = \int r^2 \rho dV \quad (2.7)$$

การกระจายของมวลเป็นเนื้อเดียวสม่ำเสมอ ความหนาแน่นจะคงที่ สามารถนำออกนอกเครื่องหมายอินทิกรัลได้

$$I = \rho \int r^2 dV \quad (2.8)$$

dV คือปริมาตรเล็กๆ ของมวล dm จึงมีลักษณะเหมือนจุด

ดังเช่น วิธีคำนวณหาโมเมนต์ความเฉื่อยของแท่งกลมขนาดเล็ก มวล m ยาว l เนื้อวัตถุกระจายสม่ำเสมอ แกนหมุนตั้งฉากกับจุด O ห่างจากปลายแท่งข้างหนึ่งเป็นระยะ h แบ่งแท่งกลมเป็นช่วงเล็กๆ dx ห่างจากจุด O เป็นระยะ x อัตราส่วนของมวลก็เช่นเดียวกัน dm ต่อมวลทั้งก้อน m จะเท่ากับ อัตราส่วนของ dx กับความยาวทั้งหมด l ดังนี้



ภาพประกอบ 2 แท่งกลมขนาดเล็ก ส่วนที่แรเงาคือมวล dm เล็กๆ ที่แบ่งในช่วง dx

ดังนั้นจะได้

$$\frac{dm}{m} = \frac{dx}{l} \quad (2.9)$$

$$dm = \frac{m dx}{l} \quad (2.10)$$

แทนค่า dm ลงในสมการ (2.5) และอินทิเกรตบนแกน x จาก $-h$ ถึง $l-h$ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \int x^2 dm \\
 &= \frac{m}{l} \int_{-h}^{l-h} x^2 dx \\
 &= \frac{m}{l} \frac{x^3}{3} \Big|_{-h}^{l-h} \\
 &= \frac{1}{3} m(l^2 - 3lh + 3h^2)
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

สมการ (2.11) ที่ได้ สามารถหาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนหมุนได้ทุก ๆ แกน ตัวอย่างเช่น ถ้าแกนหมุนอยู่ที่ปลายทางด้านซ้าย $h = 0$ จะได้

$$I = \frac{1}{3} ml^2 \tag{2.12}$$

แกนหมุนอยู่ที่ปลายทางด้านขวา $h = l$ จะได้

$$I = \frac{1}{3} ml^2$$

เท่ากันเพราะมวลมีลักษณะสมมาตร ทั้งซ้ายขวา

ถ้าแกนหมุนผ่านจุดศูนย์กลางมวล $h = \frac{l}{2}$

$$I = \frac{1}{12} ml^2 \tag{2.13}$$

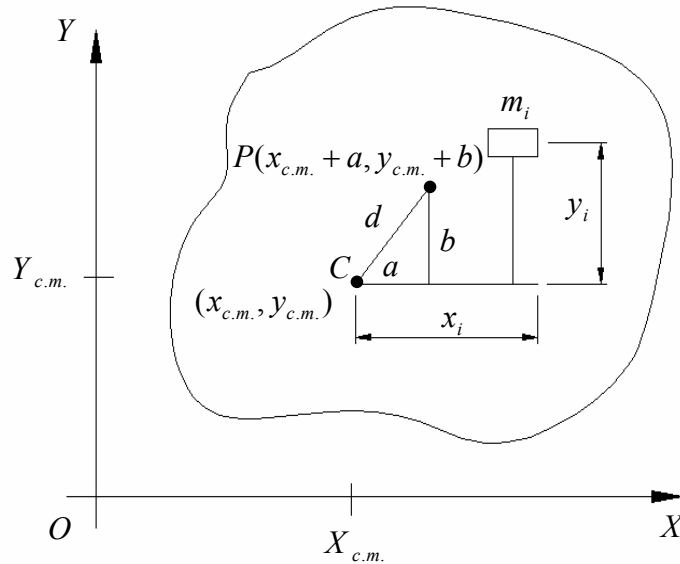
2.2.1.3 ทฤษฎีแกนขนาน (Parallel Axis Theorem)

รอบแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล แทนด้วย $I_{c.m.}$ แต่ถ้าเราต้องการหาโมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนหมุนใหม่ที่ขนานกับแกนหมุนเดิมเป็นระยะ d ก็สามารถคำนวณหาได้ โดยใช้ทฤษฎีของสไตเนอร์ (Steiner's Theorem) หรือทฤษฎีแกนขนาน (Parallel Axis Theorem) ซึ่งเขียนเป็นรูปของสมการได้ว่า

$$I = I_{c.m.} + md^2 \tag{2.14}$$

$I_{c.m.}$ คือโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุมวล m รอบแกนหมุนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล

I คือโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรอบแกนซึ่งขนานกับแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลและห่างเป็นระยะ d



ภาพประกอบ 3 แสดงภาพประกอบทฤษฎีแกนขนาน

การพิสูจน์หาความสัมพันธ์ของสมการ (2.14) เราจะกำหนดให้จุด C เป็นจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุรูปใด ๆ มีพื้นที่ภาคตัดขวางดังภาพประกอบ 3 มีพิกัดที่ $(x_{c.m.}, y_{c.m.}, z_{c.m.} = 0)$ ให้แกนหมุนที่ผ่านจุด C มีทิศตั้งฉากกับระนาบของกระดาษและแกนหมุนที่จุด P ซึ่งมีแกนขนานกับแกนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล P จะมีจุดพิกัดอยู่ที่ $(x_{c.m.} + a, y_{c.m.} + b, z_{c.m.} = 0)$ และระยะระหว่างแกนทั้งสองมีค่า d ซึ่งเท่ากับ $\sqrt{a^2 + b^2}$ จะทำให้อนุภาคมวล m_i อยู่ห่างจากจุด $c = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ และจุด $P = \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2}$ ค่าโมเมนต์ของความเฉื่อยรอบแกนที่ผ่านจุด P มีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} I &= \sum m_i \{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2\} \\ &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2a \sum m_i x_i - 2b \sum m_i y_i + (a^2 + b^2) \sum m_i \end{aligned}$$

เนื่องจากค่า $x_{c.m.}$ และ $y_{c.m.}$ เป็น 0 เพราะเป็นจุดศูนย์กลางมวล ดังนั้น

$$\begin{aligned} \sum m_i x_i &= x_{cm} \sum m_i = 0 \\ \sum m_i y_i &= y_{cm} \sum m_i = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) + (a^2 + b^2) \sum m_i \\
 I &= I_{cm} + Md^2
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

2.2.2 สมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ (Dynamic Equations for Robot)

2.2.2.1 ทฤษฎีจลนศาสตร์ (Kinematics Theory)

จุดมุ่งหมายของการวิเคราะห์จลนศาสตร์ เหมือนกับหุ่นยนต์สามารถคิดได้ ตามที่กำหนดข้อต่อเชื่อมต่อกันที่ข้อต่อต่างชนิดกัน ถ้าข้อต่อสามารถเหมือนกันได้ยิ่งทำให้ง่ายยิ่งขึ้น เช่น ข้อต่อหมุน (Revolute Joint) หรือ ข้อต่อเลื่อน (Prismatic Joint) หรือนอกจากนั้นเป็นรูปทรงซับซ้อนกว่าได้ เช่น ลูกบอลและข้อต่อที่เป็นเบ้า (จากที่กล่าวมา ข้อต่อหมุน เป็นเหมือนจุดแกว่งและหมุนรอบแกนเดียว ข้อต่อเลื่อน เคลื่อนที่เป็นเส้นตรงตามแกนๆ เดียว กล่าวคือ ยืดหรือหดเข้า) ความแตกต่างระหว่าง 2 อย่างนั้นคือ ประการแรก ข้อต่อมีเพียง หนึ่งระดับชั้นความเร็วของการเคลื่อนที่ มุมของการหมุนในกรณีของข้อต่อหมุนและถ้าเป็นการเคลื่อนที่แบบเส้นตรงในกรณีของข้อต่อเลื่อน ในทางตรงกันข้าม ลูกบอลและข้อต่อแบบเบ้ามีสองระดับชั้นความเร็ว

สมมติให้หุ่นยนต์ มีข้อต่อจำนวน $n+1$ ข้อต่อ จาก 0 ถึง n เริ่มต้นจากฐานของหุ่นยนต์ เป็นข้อต่อที่ 0 จำนวนข้อต่อเริ่มจาก 1 ถึง n และลำดับข้อต่อที่ i เป็นจุดในช่องว่างที่ข้อต่อ $i-1$ และ i ที่ต่อกัน ข้อต่อที่ i เปลี่ยนมาใช้แทนเป็น q_i ในกรณีของข้อต่อหมุน q_i เป็นมุมของการหมุน และในกรณีของข้อต่อเลื่อน q_i เป็นระยะข้อต่อเคลื่อนที่ สมมติให้ A_i เป็นโฮโมจีเนียเมตริกนั้นเปลี่ยนรูปตำแหน่งของจุดจากเฟรม i ถึงเฟรม $i-1$ เมตริก A_i ไม่คงที่แต่จะแตกต่างตามรูปร่างของหุ่นยนต์ที่เปลี่ยนไป อย่างไรก็ตามสมมติให้ทุกข้อต่อทั้งที่หมุนหรือเลื่อนเป็น A_i คือที่มี q_i เป็นฟังก์ชันของข้อต่อเดียวที่เปลี่ยนแปลงเท่านั้น จะได้

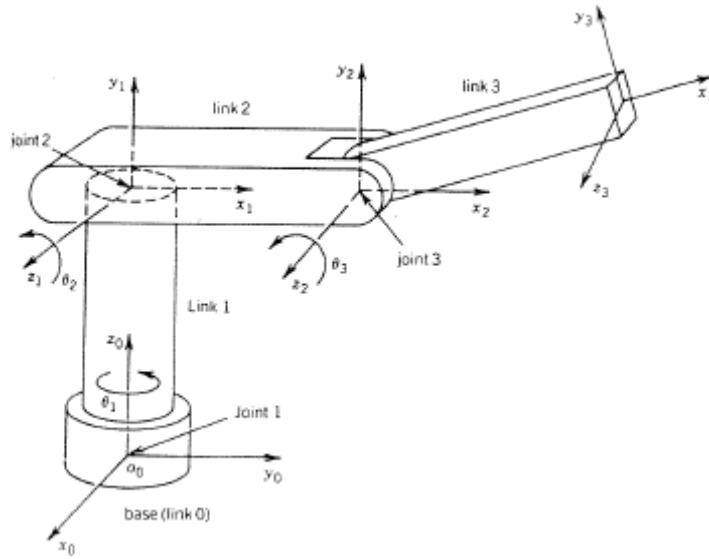
$$A_i = A_i(q_i) \tag{2.16}$$

ขณะที่โฮโมจีเนียเมตริกนั้นเปลี่ยนรูปตำแหน่งของจุดจากเฟรม j ถึงเฟรม i เรียกได้ว่าเป็น ทราจექทอรีเมชันเมตริก และใช้แทนเป็น T_i^j จะได้ว่า

$$T_i^j = A_{i+1}A_{i+2}...A_{j-1}A_j \text{ if } i < j \tag{2.17}$$

$$T_i^j = I \text{ if } i = j \tag{2.18}$$

$$T_i^j = (T_j^i)^{-1} \text{ if } j > i \tag{2.19}$$



ภาพประกอบ 4 แสดงแกนที่ติดกับเฟรมของแขนกลรูปทรงคล้ายข้อศอก

ตำแหน่งและการหักเหของจุดรับแรงสุดท้ายด้วยส่วนของจุดตั้งต้นหรือฐานเฟรมที่สามเวกเตอร์ d_0^n และเป็น 3x3 โรเตชันเมตริก R_0^n โดยลำดับและกำหนดเป็นโฮโมจีเนียสเมตริก

$$H = \begin{bmatrix} R_0^n & d_0^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

ดังนั้นตำแหน่งและการหักเหของจุดรับแรงสุดท้ายในส่วนของเฟรมตั้งต้นจะแสดงได้ว่า

$$H = T_0^n = A_1(q_1) \dots A_n(q_n) \quad (2.21)$$

แต่ละโฮโมจีเนียสทรานฟอร์มเมชัน A_i เป็นแบบนี้

$$A_i = \begin{bmatrix} R_{i-1}^i & d_{i-1}^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$T_i^j = A_{i+1} \dots A_j = \begin{bmatrix} R_i^j & d_i^j \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

เมตริก R_i^j แสดงการหักเหของเฟรม j สัมพันธ์กับโครง i และให้ส่วนที่หมุนของเมตริก A ตามที่

$$R_i^j = R_i^{i+1} \dots R_{j-1}^j \quad (2.24)$$

เวกเตอร์ d_i^j จะยอมให้ติดกันไปตามหลัก ทั้งหมดนี้จะถูกใช้ในเรื่องของเมตริกจาโคเบียน

$$d_i^j = d_i^{j-1} + R_i^{j-1} d_{j-1}^j \quad (2.25)$$

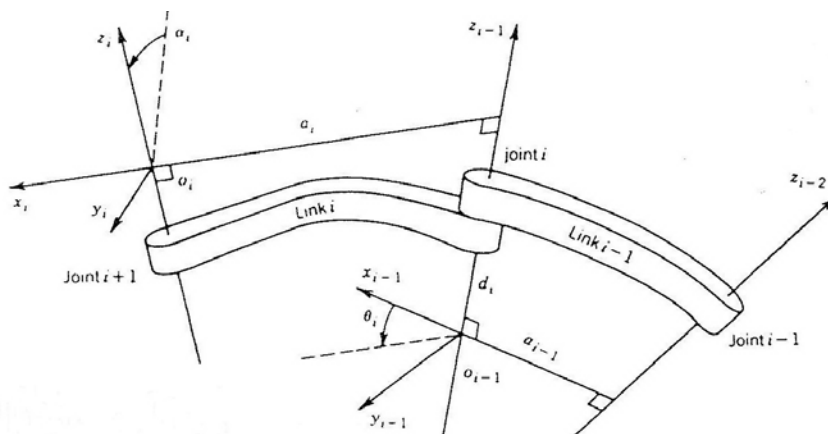
2.2.2.2 เดนาวิต-ฮาร์เทนเบอร์ก (Denavit-Hartenberg)

Denavit-Hartenberg หรือ แบบแผน D-H ในความเป็นแบบแผนแต่ละโฮโมจีเนียส ทราจิกฟอร์มเมชัน A_i เป็นการนำเสนอตามที่ผลคูณของสี่ลักษณะพื้นฐานในการเปลี่ยนรูป

$$A_i = Rot_{z_i \theta_i} Trans_{z_i d_i} Trans_{x_i a_i} Rot_{x_i \alpha_i} \quad (2.26)$$

$$= \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & 0 \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} c_{\alpha_i} & s_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i} c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

ที่สี่ขนาด $\theta_i, a_i, d_i, \alpha_i$ เป็นตัวแปรของข้อต่อ i และจุดต่อ i เป็นตัวแปรต่างๆใน (2.26) โดยปกติจะแทนความหมายตามนี้ a_i ใช้เรียกแทนความยาว α_i ใช้เรียกแทนการบิด d_i ใช้เรียกแทนระยะที่เยื่อนออกมาและ θ_i ใช้เรียกแทนมุม เมื่อเมตริก A_i เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียวซึ่งเกิดขึ้นมาจากสามสิ่งที้นอกเหนือไปกว่าสี่ขนาดของค่าคงที่ที่ได้มาจากข้อต่อ ในขณะที่สี่ตัวแปรจะมี θ_i ของจุดต่อหมุนและ d_i ของจุดต่อเลื่อนเป็นค่าไม่คงที่ของจุดต่อนั้นๆ



ภาพประกอบ 5 แสดงการตั้งเฟรมตามวิธีเดนาวิต-ฮาร์เทนเบิร์ก (DENAVID-HARTENBERG)

เป็นการตั้งเฟรมบนข้อต่อต่างๆ โดยใช้วิธีของเดนาวิต-ฮาร์เทนเบิร์ก (DENAVID-HARTENBERG) จุดกำเนิดของเฟรมที่ $i(0_i)$ จะอยู่บนจุดตัดระหว่างข้อต่อ $i+1$ กับเส้นตั้งฉากระหว่างข้อต่อ i กับ $i+1$

แกน x_i จะอยู่บนข้อต่อ $i+1$

แกน y_i จะอยู่บนเส้นตั้งฉากระหว่างข้อต่อ i กับ ข้อต่อ $i+1$

แกน z_i จะเป็นไปตามกฎมือขวา

a_i คือ ความยาวของเส้นตั้งฉากระหว่าง z_{i-1} กับ z_i

d_i คือ ระยะระหว่าง x_{i-1} กับ x_i ตามแนวแกน z_{i-1}

α_i คือ มุมระหว่าง z_{i-1} กับ z_i วัดรอบแกน x_i ตามกฎมือขวา

θ_i คือ มุมระหว่าง z_{i-1} กับ z_i วัดรอบแกน z_{i-1} ตามกฎมือขวา

2.2.2.3 จาโคเบียน (Jacobian)

การพิจารณาหลักจลศาสตร์ของแขนกล จะนำไปสู่ความเร็วของหุ่นยนต์ซึ่งมีความสัมพันธ์ของความเร็วจะหาได้โดยการใช้จาโคเบียน ซึ่งจะแปลงค่าระหว่างอินพุตที่จุดเริ่มต้นกับเอาท์พุตที่ปลายแขนกล จาโคเบียน มีความสำคัญมากในการวิเคราะห์และการควบคุมการเคลื่อนไหวของหุ่นยนต์เพราะจะทำให้ได้มาซึ่งสมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ได้ในที่สุด สำหรับหุ่นยนต์ที่มีข้อต่อจำนวน n ข้อต่อ จะสามารถหาจาโคเบียน ได้โดยการแปลงค่าระหว่างเวกเตอร์ความเร็วของจุดต่อจำนวน n เวกเตอร์ กับ 6 เวกเตอร์ความเร็วของจุดปลายแขนกล ซึ่งจะมีทั้งความเร็วเชิงเส้นและความเร็วเชิงมุม

เมื่อพิจารณาหุ่นยนต์ที่มีข้อต่อจำนวน n ข้อต่อ จะทำให้มีการเปลี่ยนของจุดต่อจำนวน $q_1, \dots, q_n$ จะได้ว่า

$${}^0_nT(q) = \begin{bmatrix} {}^0_nR(q) & {}^0_nP(q) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

เมื่อ $q = (q_1, \dots, q_n)^T$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์ของตัวแปรจุดต่อ เมื่อหุ่นยนต์มีการเคลื่อนที่ $q_i(t)$ จะทำให้มีการเปลี่ยนแปลงสองลักษณะคือ การเลื่อนตำแหน่งและการหมุน ดังนั้นจึงสามารถหาความเร็วเชิงเส้นและความเร็วเชิงมุมด้วยการคิดเทียบกับเวลาที่เปลี่ยนแปลงไปคือ

$$\begin{bmatrix} V_i \\ \omega_i \end{bmatrix} = J_i \dot{q} \quad (2.29)$$

จะได้ว่า $J_i = \begin{bmatrix} J_{vi} \\ \dots \\ J_{\omega i} \end{bmatrix}$

โดยที่ เมตริก J_i ถูกเรียกว่าจาโคเบียนซึ่งจะมีขนาดเท่ากับ $6 \times n$ เมื่อ n คือจำนวนของข้อต่อ

2.2.2.4 สมการออยเลอร์-ลากรางจ์ (Euler-Lagrange Equations)

ในหัวข้อนี้ได้อธิบายการหาสมการในหัวข้อเรื่องโฮโลโนมิกคอนสเทรนต์ (Holonomic Constraints) เมื่อแรงบังคับมีค่าสอดคล้องกับงานที่เกิดขึ้น ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่แบบออยเลอร์ – ลากรางจ์ (Euler-Lagrange Equations) มี 2 วิธีเป็นอย่างน้อยที่จะหาสมการนี้ วิธีที่น่าเสนอ ณ ที่นี้ อาศัยการแทนที่ แต่อย่างไรก็ตามสามารถหาสมการนี้ได้ด้วยหลักการของฮามินตัน

เมื่อระบบประกอบด้วย k อนุภาค ซึ่งสัมพันธ์กับ $r_1, \dots, r_k$ ถ้าอนุภาคเหล่านี้เคลื่อนที่อิสระโดยไม่มีข้อจำกัดแล้ว ก็เป็นการง่ายที่จะอธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาคนั้นๆ โดยการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของวัตถุมีค่าเท่ากับแรงภายนอกที่มีต่อสิ่งนั้น อย่างไรก็ตามการเคลื่อนที่ของอนุภาคถูกบังคับ แรงที่นำมาคิดจะประกอบด้วยแรงภายนอกและแรงบีบบังคับ ซึ่งนั่นก็คือยังต้องการแรงบังคับเพิ่มอีกหนึ่งแรง อธิบายง่าย ๆ ก็คือ สมมุติว่าระบบประกอบด้วย 2 อนุภาค ซึ่งมาเชื่อมต่อกันด้วยเชือกที่ไร้น้ำหนัก ความยาวเท่ากับ l ดังนั้น r_1 และ r_2 เท่ากับ

$$\|r_1 - r_2\| = l_1 \text{ or } (r_1 - r_2)^T (r_1 - r_2) = l^2 \quad (2.30)$$

ถ้ามีแรงจากภายนอกมากระทำต่อแต่ละอนุภาคแล้ว อนุภาคละเหล่านี้จะถูกระงับไว้ แต่เฉพาะจากแรงภายนอกเท่านั้น ยังรวมไปถึงแรงที่มาจากเชือกด้วยทิศทาง $r_2 - r_1$ ประกอบกับขนาดที่เหมาะสม ดังนั้นเพื่อที่จะหาการเคลื่อนที่ของอนุภาคทั้งสองนี้ สามารถทำได้โดย วิธีแรก

คำนวณจากแรงภายนอกแต่ละแรงที่มากระทำโดยแรงบังคับที่เกิดขึ้นอยู่ในลำดับของสมการ วิธีที่สอง คำนวณจากวิธีวิเคราะห์ซึ่งไม่อาศัยแรงบังคับ (ซึ่งไม่จำเป็นต้องรู้แรงบังคับ) ซึ่งวิธีที่สองนี้เป็นที่นิยมมากกว่าวิธีแรกเพราะว่าโดยทั่วไปแล้วต้องคำนวณหาแรงบังคับที่เกิดขึ้น จุดประสงค์ของหัวข้อนี้คือ ศึกษาวิธีที่สอง

เริ่มต้นจากการอธิบายคำ “Holonomic” คือ แรงบังคับที่เกิดขึ้นบนของค่าพิกัด k เป็น $r_1, \dots, r_k$ เมื่อแรงนี้เท่ากันจะเกิดสมการ

$$g_i(r_1, \dots, r_k) = 0, i = 1, \dots, l \quad (2.31)$$

ถ้าสิ่งที่เกิดขึ้นมีลักษณะตรงกันข้ามกับสิ่งที่กล่าวมา จะเรียกว่า “Nonholonomic” แรงบังคับดังกล่าว (2.30) กำหนดโดยการเชื่อมต่อกันของ 2 อนุภาค ด้วยเชือกที่ไร้น้ำหนัก ซึ่งนั่นก็คือ ไฮโดโมนิคคอนสเทรนท์ ส่วนตัวอย่างของนอนไฮโดโมนิคคอนสเทรนท์พิจารณาจากการเคลื่อนที่ของ อนุภาคหนึ่งๆ ภายใน หนึ่งความยาวรัศมีของทรงกลม ρ ที่จุดศูนย์กลาง บริเวณจุดเริ่มต้นของระบบ ค่าพิกัดในกรณีนี้ค่าพิกัดเวกเตอร์ r ของอนุภาค สัมพันธ์กับแรงบังคับ

$$\|r\| \leq \rho \quad (2.32)$$

การเคลื่อนที่ของอนุภาค จะมีแรงบังคับ ดังนั้นอนุภาคยังคงรักษาระยะห่างจากพื้นผิว วัตถุทรงกลม แต่เมื่อใดก็ตามที่อนุภาคเข้าใกล้จนสัมผัสกับพื้นผิววัตถุทรงกลม มันก็เท่ากับแรงบังคับ นั่นเอง

ถ้าระบบขึ้นอยู่กับไฮโดโมนิคคอนสเทรนท์ l เมื่อนั้นให้คำนึงถึงนิยามของระบบคอนสเทรนท์ที่มี l ระดับขึ้นความเสรีมากกว่าระบบอันคอนสเทรนท์เล็กน้อย ในกรณีนี้ ก็อาจเป็นไปได้ที่จะแสดงค่า ค่าพิกัดของ k อนุภาคในเทอม ของ n ค่าพิกัดทั่วไป $q_1, \dots, q_n$ ส่วนในความหมายอื่น เรา คาดว่าค่าพิกัดของอนุภาคที่แตกต่างกัน ขึ้นอยู่กับชุดของแรงบังคับ ซึ่งสามารถแสดงดังลักษณะต่อไปนี้

$$r_i = r_i(q_1, \dots, q_n), i = 1, \dots, k \quad (2.33)$$

โดยที่ $q_1, \dots, q_n$ เป็นอิสระจากกัน จริงๆ แล้วแนวคิดของค่าพิกัดทั่วไปถูกนำมาใช้เมื่ออนุภาคมีปริมาณ มากมายไม่จำกัดจำนวน ตัวอย่างเช่น วัตถุคงตัวรูปแบบแท่งที่มีอนุภาคอยู่มากมาย แต่เนื่องจาก

ระยะห่างระหว่าง 2 อนุภาคถูกจำกัดตลอดการเคลื่อนที่ของแท่นวัตถุดังกล่าว ดังนั้นเพียงแค่ค่าพิกัด 6 จุดก็เพียงพอที่เราจะระบุค่าพิกัดของอนุภาคใดๆ ในแท่นวัตถุข้างต้นได้อย่างสมบูรณ์แบบ โดยเฉพาะอย่างยิ่งสามารถใช้ ค่าพิกัด 3 จุด เพื่อบ่งชี้ตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลของแท่นวัตถุ และใช้มุมออยเลอร์ 3 มุมเพื่อกำหนดทิศทางของแท่นวัตถุ และเพื่อให้ง่ายต่อการอธิบายเราจะสมมติให้จำนวนของอนุภาคถูกจำกัด โดยทั่วไปค่าพิกัดทั่วไป ก็คือตำแหน่งที่ตั้ง หรือมุม เป็นต้น เราสามารถกำหนดความหมายของตัวแปรของจุดต่อสัญลักษณ์ $q_1, \dots, q_n$ ให้อย่างชัดเจน เพราะตัวแปรของจุดต่อเหล่านี้จะแสดงสัญลักษณ์เป็นชุดของค่าพิกัดทั่วไป สำหรับหุ่นยนต์ที่มีข้อต่อจำนวน n ข้อ

เมื่อเรากล่าวถึงเวกซ์วลดิสเพลสเมนต์ (Virtual Displacements) (การแทนที่ที่เกิดขึ้นจริง) มันคือชุดของ $\delta r_1, \dots, \delta r_k$ ของการแทนที่ที่ไม่สามารถนับได้ โดยสอดคล้องกันกับแรงบังคับ ตัวอย่างเช่น เมื่อพิจารณาถึงแรงบังคับอย่างเช่นในสมการ (2.30) และสมมติให้ r_1, r_2 ถูกกระจายเป็น $r_1 + \delta r_1, r_2 + \delta r_2$, ตามลำดับ ดังนั้นเพื่อให้สัมพันธ์กับแรงบังคับ เราต้องทำให้อยู่ในสมการดังนี้

$$(r_1 + \delta r_1 - r_2 - \delta r_2)^T (r_1 + \delta r_1 - r_2 - \delta r_2) = l^2 \quad (2.34)$$

จากนั้นเมื่อเรากระจายสมการดังกล่าวข้างต้น และถือเอาความจริงที่ว่าค่าพิกัดเดิม r_1, r_2 สัมพันธ์กับแรงบังคับ ทำให้เราตัดพจน์กำลังสองของ $\delta r_1, \delta r_2$ จะได้ว่า

$$(r_1 - r_2)^T (\delta r_1 - \delta r_2) = 0 \quad (2.35)$$

ดังนั้นตำแหน่งที่ยู่ยากของสองอนุภาคต้องสอดคล้องกับสมการข้างต้น เพื่อว่าตำแหน่งที่ยู่ยากจะได้สัมพันธ์กับแรงบังคับ (2.30) คู่ของเวกเตอร์ ที่ไม่สามารถวัดค่าได้ $\delta r_1, \delta r_2$ ซึ่งสัมพันธ์กับ (2.35) นั้นประกอบด้วย ชุดของเวกซ์วลดิสเพลสเมนต์

เหตุผลของการใช้ค่าพิกัดทั่วไปก็เพื่อที่จะหลีกเลี่ยงการจัดการความสัมพันธ์ที่ซับซ้อนดังเช่นในสมการ (2.35) และถ้ายังมีสมการ (2.33) อยู่จะพบว่าชุดของเวกซ์วลดิสเพลสเมนต์ ค่อนข้างกระชับดังเช่น

$$\delta r_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j, i = 1, \dots, k \quad (2.36)$$

โดยที่เวกซ์วลดิสเพลสเมนต์ $\delta q_1, \dots, \delta q_n$ ของค่าพิกัดทั่วไป คือการไม่มีแรงบังคับ (ซึ่งนั่นก็ทำให้กลายเป็น ค่าพิกัดทั่วไป)

ต่อไปจะอธิบายระบบแรงบังคับในสภาวะสมดุล โดยกำหนดให้แต่ละอนุภาคอยู่ในสภาวะสมดุล จากนั้นให้แรงสุทธิของแต่ละอนุภาค เป็นศูนย์ ซึ่งก็เท่ากับว่า งานที่ทำในแต่ละชุดของเวกเตอร์ดิสเพลสเมนต์เป็นศูนย์ ด้วยดังนั้น

$$\sum_{i=1}^k F_i^T \delta r_i = 0 \quad (2.37)$$

โดยที่ F_i คือ แรงทั้งหมดต่ออนุภาค i ตามที่ได้อ้างไว้ข้างต้น แรง F_i จึงเป็นค่ารวมของสองแรง หนึ่งคือ แรงที่กระทำต่ออนุภาคจากภายนอก f_i และสองคือแรงบังคับ $f_i^{(a)}$ โดยสมมติให้งานทั้งหมดกระทำด้วยแรงบังคับซึ่งสัมพันธ์หรือเกี่ยวข้องกับชุดของเวกเตอร์ดิสเพลสเมนต์ใดๆที่เป็นศูนย์ ดังสมการ

$$\sum_{i=1}^k (f_i^{(a)})^T \delta r_i = 0 \quad (2.38)$$

สิ่งที่กล่าวมาข้างต้นจะถูกตอ้งก็ต่อเมื่อ แรงบังคับระหว่างคู่ของอนุภาค มุ่งตรงไปตามเส้นรัศมีซึ่งเชื่อมต่อกันระหว่างสองอนุภาคนั้นๆ โดยการแทนที่สมการ (2.38) เข้าไปใน (2.37) จะได้ผลลัพธ์ดังในสมการ

$$\sum_{i=1}^k f_i^T \delta r_i = 0 \quad (2.39)$$

ความสมบูรณ์แบบของสมการดังกล่าวคือ จะไม่มีแรงบังคับที่ไม่รู้ค่ามาเกี่ยวข้องกับในสมการนี้เลย แต่จะใช้เฉพาะแรงภายนอกที่รู้ค่า สมการนี้แสดงหลักการของงานที่เกิดขึ้นจริง ซึ่งกล่าวไว้ว่า งานที่ทำโดยแรงภายนอกสัมพันธ์กับชุดของเวกเตอร์ดิสเพลสเมนต์ที่เป็นศูนย์ จำไว้ว่า หลักการนี้ใช้ไม่ได้กับทุกงาน แต่สมการ (2.38) ต้องยังคงอยู่ นั่นคือแรงบังคับที่ไม่ทำงาน ฉะนั้นถ้ากล่าวถึงหลักการของงานที่เกิดขึ้นจริงก็สามารถวิเคราะห์กลศาสตร์ของระบบโดยปราศจากการหาค่าแรงบังคับ

มันง่ายที่จะพิสูจน์หลักการของงานที่เกิดขึ้นจริง เมื่อไหร่ก็ตามแรงบังคับระหว่างคู่ของอนุภาค มุ่งตรงไปตามแรงที่เชื่อมกันระหว่างตำแหน่งที่ค่าพิกัดของอนุภาคทั้งสอง โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อถูกบังคับในรูปแบบสมการ (2.30) ซึ่งเป็นหลักการของการประยุกต์ใช้ เมื่อพิจารณาถึง แรงบังคับแรงเดียวจากสมการ (2.30) จะต้องออกแรงโดยเชือกที่ไถ่น้ำหนัก ดังนั้นแรงต้องมุ่งตรงไปตามเส้นรัศมีระหว่างอนุภาคทั้งสอง หรืออาจกล่าวว่า แรงที่กระทำต่ออนุภาคที่หนึ่งด้วยเชือก จะต้องอยู่ในฟอร์มของ

$$f_1^{(a)} = c(r_1 - r_2) \quad (2.40)$$

สำหรับค่าคงตัว c (ซึ่งจะเปลี่ยนแปลงเมื่อ อนุภาคมีการเคลื่อนที่) ตามกฎของแรงกระทำและแรงปฏิกิริยา, แรงที่กระทำต่ออนุภาคที่สองด้วยเชือกต้องมีค่าเป็นลบ หรือตรงกันข้ามกับสมการข้างต้น นั่นคือ

$$f_2^{(a)} = -c(r_1 - r_2) \quad (2.41)$$

ตอนนี้ทราบแล้วว่า งานที่กระทำโดยแรงบังคับซึ่งสัมพันธ์กับชุดของเวกซ์ลดิสเพลซเมนต์ คือ

$$(f_1^{(a)})^T \delta r_1 + (f_2^{(a)})^T \delta r_2 = c(r_1 - r_2)^T (\delta r_1 - \delta r_2) \quad (2.42)$$

แต่ในสมการ (2.35) แสดงให้เห็นชุดของเวกซ์ลดิสเพลซเมนต์ ส่วนสมการข้างบนผลลัพธ์ต้องเป็นศูนย์ ดังนั้นหลักการของงานที่เกิดขึ้นจริงซึ่งนำไปใช้ในระบบใดๆ จะถูกบังคับโดยสมการ (2.30) เหตุผลเดียวกันสามารถนำไปใช้กับระบบที่ประกอบด้วยหลายอนุภาค ซึ่งแต่ละคู่ของอนุภาคเชื่อมกันด้วยเชือกที่ไร้น้ำหนักซึ่งจำกัดความยาวเช่นในกรณีของระบบที่ถูกกำหนดไว้สำหรับหลายแรงบังคับเหมือนในสมการ (2.30)

ส่วนข้อกำหนดที่ว่า การเคลื่อนที่ของวัตถุที่มีความคงตัวสามารถแสดงได้เท่ากับข้อบังคับที่ว่าระยะทางระหว่างคู่ของจุดใดๆ ต่อวัตถุยังมีความคงตัว แม้ว่าวัตถุจะมีการเคลื่อนที่เหมือนกับการบังคับที่ไม่จำกัดในแบบสมการ (2.30) ดังนั้นหลักการของงานที่เกิดขึ้นจริงถูกนำไปใช้เมื่อ ความแข็งแรงคงตัวเป็นเพียงแรงบังคับต่อการเคลื่อนไหวนั้น มีบางสถานการณ์ที่หลักการนี้ไม่ได้ถูกนำไปใช้เช่น เมื่ออยู่ในสนามแม่เหล็ก อย่างไรก็ตาม ในทุกเหตุการณ์ที่กล่าวขึ้นนี้ เราสมมุติให้หลักการของงานที่เกิดขึ้นนั้นใช้ได้จริง

ในสมการที่ (2.39) เวกซ์ลดิสเพลซเมนต์ δr_i ไม่เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้นเราไม่สามารถสรุปได้จากสมการนี้ ซึ่งแต่ละสัมประสิทธิ์ f_i เท่ากับศูนย์โดยไม่ขึ้นตรงต่อกัน และเพื่อที่จะประยุกต์เหตุผลดังกล่าว ต้องเปลี่ยนรูปเป็นค่าพิกัดทั่วไป และก่อนที่จะเปลี่ยนรูป เราถือว่าระบบนั้นไม่จำเป็นต้องอยู่ในสมดุล ซึ่งเรียกระบบดังกล่าวว่า “หลักการของ D'Alembert” ได้กล่าวไว้ว่า เมื่อมีการให้แรงซึ่งสมมุติขึ้นเป็นค่า p_i กระทำต่ออนุภาค i โดยแต่ละ i ที่ p_i คือ แรงเคลื่อนที่ของอนุภาค i เมื่อแต่ละอนุภาคอยู่ในสมดุล ดังนั้นถ้ามีการดัดแปลงสมการ (2.37) ด้วยการแทนที่ F_i โดย $F_i - \dot{p}_i$

เมื่อนั้น ผลลัพธ์ของสมการจะใช้ได้จริงสำหรับระบบที่เราเลือก และทำให้สามารถตัดแรงบังคับก่อนที่จะใช้หลักการของงานที่เกิดขึ้นจริง ดังแสดงใน

$$\sum_{i=1}^k f_i^T \delta r_i - \sum_{i=1}^k \dot{p}_i^T \delta r_i = 0 \quad (2.43)$$

สมการข้างต้นไม่ได้หมายความว่า แต่ละสัมประสิทธิ์ของ δr_i เท่ากับศูนย์ แต่มีวัตถุประสงค์แสดงแต่ละ δr_i ในเทอมที่เกี่ยวข้องกับเวกซ์วลดิสเพลสเมนต์ของค่าพิกัดทั่วไป อย่างเช่นที่ทำในสมการ (2.36) ดังนั้นงานที่เกิดขึ้นจริงกระทำโดยแรง f_i จะได้

$$\sum_{i=1}^k f_i^T \delta r_i = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n f_i^T \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \psi_j \delta q_j \quad (2.44)$$

โดยที่

$$\psi_j = \sum_{i=1}^k f_i^T \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \quad (2.45)$$

ซึ่งถูกเรียกว่า แรงทั่วไป ลำดับที่ j จำไว้ว่า ψ_j ไม่จำเป็นต้องมีมิติของแรง ขณะเดียวกับที่ q_j ก็ไม่ต้องมีมิติของความยาว อย่างไรก็ตาม $\psi_j \delta q_j$ ต้องมีมิติของงานเสมอ

จากนั้นทำให้เราศึกษาถึงผลรวมลำดับที่ 2 ของสมการ (2.43) เนื่องจาก $p_i = m_i \dot{r}_i$

$$\sum_{i=1}^k \dot{p}_i^T \delta r_i = \sum_{i=1}^k m_i \ddot{r}_i^T \delta r_i = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n m_i \ddot{r}_i^T \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (2.46)$$

จากนั้นเมื่อนำผลลัพธ์ของการดิฟเฟอเรนเชียล (Differentiate) มาใช้ จะเห็นได้ว่า

$$\sum_{i=1}^k m_i \ddot{r}_j^T \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{d}{dt} \left[m_i \dot{r}_i^T \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right] - m_i \dot{r}_i^T \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right] \right\} \quad (2.47)$$

เมื่อดิฟเฟอเรนเชียล สมการ (2.33) ด้วยการใช้อนุกรมลูกโซ่ (Chain Rule) ทำให้ได้

$$v_j = \dot{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (2.48)$$

สังเกตจากสมการข้างบนซึ่ง

$$\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \quad (2.49)$$

และ

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial v_i}{\partial q_j} \quad (2.50)$$

โดย สมการ (2.40) เปลี่ยนแบบสมการ (2.48) การแทนที่ของสมการ (2.49) และ (2.50) เข้าไปในสมการ (2.47) และให้ $\dot{r}_i = v_i$ จะได้

$$\sum_{i=1}^k m_i \ddot{r}_i^T \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{d}{dt} \left[m_i v_j^T \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} \right] - m_i v_i^T \frac{\partial v_i}{\partial q_j} \right\} \quad (2.51)$$

เมื่อเรากำหนดให้ พลังงานจลน์ (พลังงานของการเคลื่อนที่) เป็นปริมาณที่นับได้

$$K = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} m_i v_i^T v_i \quad (2.52)$$

ดังนั้นผลรวมข้างต้นสามารถแสดงให้กระชับขึ้นด้วย

$$\sum_{i=1}^k m_i \ddot{r}_i^T \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} \quad (2.53)$$

การแทนที่ของ สมการ (2.53) เข้าไปในสมการ (2.46) พบว่า ผลรวมลำดับที่ 2 ใน สมการ (2.43) คือ

$$\sum_{i=1}^k \dot{p}_i^T \delta r_i = \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} \right\} \delta q_j \quad (2.54)$$

และสุดท้าย เมื่อรวมสมการ (2.54) และ สมการ (2.34) จะให้

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} - \psi_j \right\} \delta q_j = 0 \quad (2.55)$$

เนื่องจากเวกซ์ลดิสพเลขเมนต์ δq_j เป็นค่าอิสระ ดังนั้นเราสามารถสรุปได้ว่า แต่ละสัมประสิทธิ์ในสมการ (2.45) เท่ากับศูนย์ นั่นก็คือ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} = \psi_j, j = 1, \dots, n \quad (2.56)$$

ถ้าแรงทั่วไป ψ_j คือผลรวมของแรงทั่วไป ที่ถูกกระทำจากภายนอกและแฝงอยู่ ถ้าหากว่า มีฟังก์ชัน τ_j และ $V(q)$ ดังนั้น

$$\psi_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + \tau_j \quad (2.57)$$

ทำให้สมการ (2.56) เขียนอยู่ในรูปของ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \tau_j \quad (2.58)$$

โดยที่ $L = K - V$ คือ ลากรานจ์เจียน (Lagrangian) ของระบบฟังก์ชัน V คือ พลังงานศักย์ของระบบ และฟังก์ชัน K คือพลังงานจลน์ของระบบ จำไว้ว่า สมการ (2.56) และ (2.58) คือ สมการลากรานจ์เจียน หรือ สมการออยเลอร์-ลากรานจ์ของการเคลื่อนที่

2.2.2.5 สมการของการเคลื่อนที่ (Equation of Motion)

ในที่นี้เราใช้สมการออยเลอร์-ลากรานจ์ ที่หาได้ในหัวข้อที่ผ่านมา เพื่อนำมาเป็นกรณีศึกษา เมื่อกำหนดให้มี 2 เงื่อนไขคือ อันดับแรกพลังงานจลน์คือฟังก์ชันยกกำลังสองของเวกเตอร์ $\dot{q}$ ซึ่งอยู่ในรูปแบบของ

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^n d_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j := \frac{1}{2} \dot{q}^T D(q) \dot{q} \quad (2.59)$$

โดยที่ $n \times n$ “เมตริกความเฉื่อย” $D(q)$ คือ ค่าสมมาตรและเป็นบวก สำหรับแต่ละ $q \in \mathbb{R}^n$ อันดับสองพลังงานศักย์ $V = V(q)$ ไม่ขึ้นอยู่กับค่า $\dot{q}$ ได้กล่าวถึงการควบคุมหุ่นยนต์ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าวนี้ไปเรียบร้อยแล้ว

สมการออยเลอร์-ลากรางจ์ สำหรับระบบข้างต้นสามารถหาได้ดังนี้ เนื่องจาก

$$L = K - V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} d_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q) \quad (2.60)$$

จึงได้

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_i d_{kj}(q) \dot{q}_j \quad (2.61)$$

และ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_i d_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{i,j} \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (2.63)$$

ดังนั้นสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ สามารถเขียนได้เป็น

$$\sum_j d_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{i,j} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{\partial V}{\partial q_k} = \tau_k$$

$$k = 1, \dots, n \quad (2.64)$$

อาศัยการสลับ ลำดับของผลรวมและสมบัติการสมมาตรทำให้เราได้

$$\sum_{i,j} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (2.65)$$

เนื่องจาก

$$\sum_{i,j} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_{i,j} \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (2.66)$$

ดังนั้นจะได้

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right\} \quad (2.67)$$

หรือที่เรียกกันว่า “สัญลักษณ์คริสโทฟี” สำหรับค่าคงตัว k เราให้ $c_{ijk} = c_{jik}$ ซึ่งจะช่วยลดการคำนวณสัญลักษณ์เหล่านี้ สุดท้ายถ้าให้

$$\phi_k = \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (2.68)$$

ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการออยเลอร์-ลากรางจ์ได้เป็น

$$\sum_j d_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{i,j} c_{ijk}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + \phi_k(q) = \tau_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.69)$$

จากสมการข้างต้น สามารถแบ่งได้ออกเป็น 3 เทอม เทอมแรก เกี่ยวข้องกับ อนุพันธ์อันดับสองของค่าพิกัดทั่วไป เทอมที่สอง คือ สมการกำลังสองในเทอมของอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ q โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์ขึ้นอยู่กับ q จากนั้นทำให้สามารถจัดแบ่งออกเป็น 2 กลุ่มย่อย คือเทอมที่เกี่ยวข้องกับผลคูณของ q_i^2 เรียกว่า “เหวี่ยงออกจากศูนย์กลาง” ในขณะที่อีกเทอมหนึ่งเกี่ยวข้องกับผลคูณของ $q_i q_j$ เมื่อ $i \neq j$ หรือเรียกว่า “Coriolis” ส่วนเทอมที่สามเกี่ยวข้องกับเฉพาะค่า q แต่ไม่รวมอนุพันธ์ของ q ซึ่งจะเข้าใจง่ายขึ้นเมื่อทำการดิฟเฟอเรนเชียลพลังงานจลน์ และทำให้สามารถเขียน (2.69) ให้อยู่ในเมตริกแบบดังนี้

$$D(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) = \tau \quad (2.70)$$

โดยที่ k, j^{th} เป็นส่วนของเมตริก $C(q, \dot{q})$ ถูกนิยามให้เป็น

$$\begin{aligned} c_{kj} &= \sum_{i=1}^n c_{ijk}(q) \dot{q}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial d_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i \end{aligned} \quad (2.71)$$

จากนั้นเราหาความสัมพันธ์ระหว่าง เมตริกความเฉื่อย $D(q)$ และเมตริก $C(q, \dot{q})$ ที่ปรากฏอยู่ใน (2.70) ซึ่งเป็นความสัมพันธ์พื้นฐานของปัญหาที่เกิดขึ้นกับการผสมการควบคุม

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

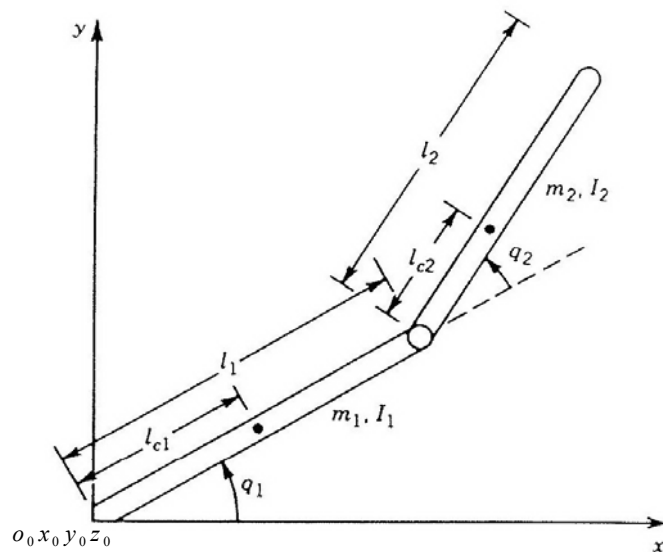
ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. การกำหนดปัญหาหุ่นยนต์ (State of The Problem Robot)
2. การแก้ปัญหาเชิงสัญลักษณ์ (Symbolic Methods)
3. ลำดับขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม (Workflow Program)

3.1 การกำหนดปัญหาหุ่นยนต์ (State of the Problem Robot)

กำหนดปัญหาของหุ่นยนต์ที่มีลักษณะและรูปแบบที่แตกต่างกัน โดยนำมาแก้ปัญหาในรูปแบบของโปรแกรมเพื่อใช้เป็นตัวอย่างตั้งต้นและทดสอบโปรแกรม

กรณีที่ 1 เป็นหุ่นยนต์แบบแขนกลที่มีลักษณะแบนและมีข้อต่อแบบงอ โดยมีลักษณะเป็นข้อต่อ 2 ข้อต่อ โดยให้เฟรมหลักคือ $o_0x_0y_0z_0$ เป็นจุดกำเนิด ดังภาพประกอบ 6



ภาพประกอบ 6 แขนกลที่มีลักษณะเป็นข้อต่อแบบงอ 2 ข้อต่อ

จากตาราง 1 ค่า D-H จะมีตัวแปรเพียงตัวเดียวเป็นตัวแปรของมุมคือ θ ดังนั้นเพื่อให้่ายในการเขียนจึงเป็น c_i ใช้สำหรับ $\cos \theta_i$ ถ้าเป็น $\theta_1 + \theta_2$ ก็ให้เป็น θ_{12} และ $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ เป็น c_{12}

โดยกำหนดให้

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

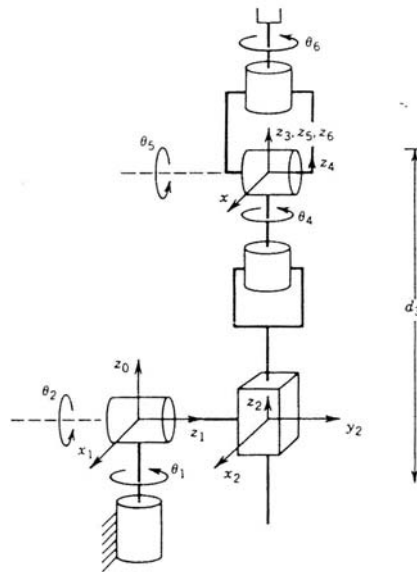
$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

จากค่าที่ได้จากเมตริกทั้งสอง จะทำให้สามารถหาตาราง D-H ของหุ่นยนต์ จากที่ a_i คือ ความยาวของเส้นตั้งฉากระหว่าง z_{i-1} กับ z_i เรียกว่า Link Length ในกรณีนี้แขนกลที่ 1 มีค่าคงที่เป็น l_1 ส่วนแขนกลที่ 2 มีค่าคงที่เป็น l_2 ตามรูป d_i คือ ระยะระหว่าง x_{i-1} กับ x_i ตามแนวแกน z_{i-1} เรียกว่า Link Offset ในกรณีนี้มีค่าเป็น 0 ทั้งสองแขน α_i คือ มุมระหว่าง z_{i-1} กับ z_i วัดรอบแกน x_i ตามกฎมือขวา เรียกว่า Link Twist ในกรณีนี้มีค่าเป็น 0 ทั้งสองแขน θ_i คือ มุมระหว่าง z_{i-1} กับ z_i วัดรอบแกน z_{i-1} ตามกฎมือขวา เรียกว่า Joint Angle ในกรณีนี้มีแขนกลที่ 1 มีค่าเปลี่ยนแปลงตามเวลาเป็น $q_1(t)$ ส่วนแขนกลที่ 2 มีค่าเปลี่ยนแปลงตามเวลาเป็น $q_2(t)$ นำไปใส่ในตารางจะได้

ตาราง 1 ค่าตัวแปร D-H ของหุ่นยนต์แบบแขนกลที่มีลักษณะเป็นข้อต่อแบบงอ

Link	link offset (d_i)	link length (a_i)	link twist (α_i)	joint angle (θ_i)
1	0	l_1	0	$q_1(t)$
2	0	l_2	0	$q_2(t)$

กรณีที่ 2 เป็นหุ่นยนต์สเตมฟอร์ด โดยมีลักษณะเป็นรูปทรงกลมที่มีรูปแบบของข้อต่อแรกเป็นแบบหมุน ข้อต่อที่สองเป็นแบบหมุน ข้อต่อที่สามเป็นแบบเลื่อน (Revolute Revolute Prismatic) ด้วยการที่แต่ละข้อต่อเป็นทรงกลม หุ่นยนต์มีระยะตั้งฉากของข้อต่อตำแหน่งที่เป็นไหล่นั้นมีความซับซ้อนเล็กน้อยซึ่งจะคล้ายกับการปัญหาทางจลนศาสตร์แบบไปข้างหน้าและแบบย้อนกลับ ดังภาพประกอบ



ภาพประกอบ 7 กำหนดพิกัด DH เฟรมสำหรับหุ่นยนต์สแตมฟอร์ด

โดยกำหนดให้

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

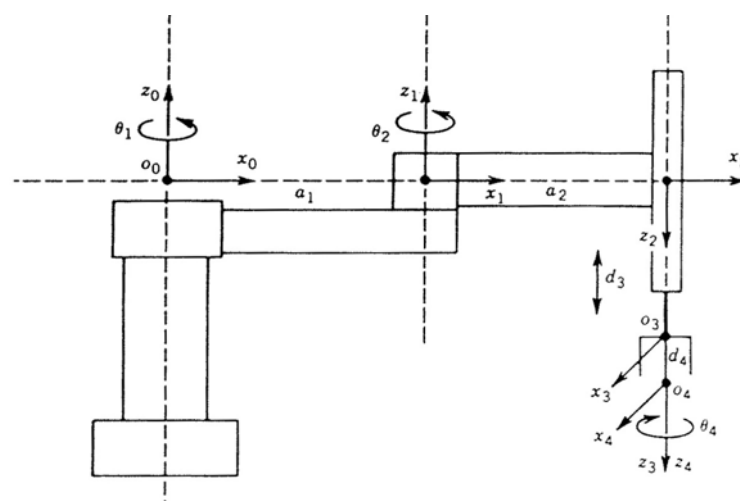
$$A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

ตาราง 2 ค่าตัวแปร D-H ของหุ่นยนต์สแตมฟอร์ด

Link	link offset (d_i)	link length (a_i)	link twist (α_i)	joint angle (θ_i)
1	0	0	-90	$\theta(t)$
2	d_2	0	+90	$\theta(t)$
3	$d(t)$	0	0	0
4	0	0	-90	$\theta(t)$
5	0	0	+90	$\theta(t)$
6	0	0	0	$\theta(t)$

กรณีที่ 3 เป็นหุ่นยนต์สกาลาร์ โดยมีลักษณะรูปแบบของแขนข้อต่อแรกเป็นแบบหมุน ข้อต่อที่สองเป็นแบบหมุน ข้อต่อที่สามเป็นแบบเลื่อน (RRP) และข้อต่อมีหนึ่งระดับขั้นความเสรี ซึ่งเคลื่อนที่เป็นวงรอบแกนแนวตั้ง ชั้นแรกเป็นที่ตั้งและติดกับแกนของจุดต่อ เมื่อทุกแกนของจุดต่อขนานกันจะทำให้มีความอิสระบ้างในตำแหน่งเริ่มต้น ดังภาพประกอบ 8



ภาพประกอบ 8 กำหนดพิกัด DH เฟรมสำหรับหุ่นยนต์สกาลาร์

โดยกำหนดให้

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

ตาราง 3 ค่าตัวแปร D-H ของหุ่นยนต์สกาลาร์

Link	link offset (d_i)	link length (a_i)	link twist (α_i)	joint angle(θ_i)
1	0	a_1	0	$\theta(t)$
2	0	a_2	0	$\theta(t)$
3	$d(t)$	0	180	0
4	d_4	0	0	$\theta(t)$

3.2 การแก้ปัญหาเชิงสัญลักษณ์ (Symbolic Methods)

ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ด้วยโปรแกรมมีวิธีการมากมายหลายแบบ ซึ่งในแต่ละแบบจะใช้วิธีการที่ต่างกันซึ่งผลลัพธ์ที่ได้ก็แตกต่างกันตามวิธีการนั้น ๆ ส่วนใหญ่จะใช้องการกระทำที่เป็นตัวเลขเพื่อหาคำตอบของผลลัพธ์ที่ต้องการทำให้ยุ่งยากและเสียเวลา ในงานวิจัยนี้ได้เลือกใช้วิธีการแบบเชิงสัญลักษณ์ (Symbolic Methods) ซึ่งสามารถหาค่าต่าง ๆ เหล่านี้โดยไม่ต้องกำหนดค่าที่เป็นตัวเลขหรือจำนวนให้เป็นค่าเชิงตัวเลขแต่จะกำหนดค่าตัวแปรหรือจำนวนให้เป็นสัญลักษณ์ที่เรียกว่า Symbolic ก่อนแล้วจึงใช้ฟังก์ชันหาค่าผลลัพธ์ที่ต้องการ จะทำให้ได้ผลลัพธ์ที่เป็นคำตอบที่เป็นจริงได้สมการหรือค่าที่ยังติดเป็นตัวแปรที่เป็นเชิงสัญลักษณ์และผลลัพธ์ที่เป็นจำนวนจริงทั้งนี้เพื่อความ

สะดวกรวดเร็วในการหาค่าผลลัพธ์ที่ต้องการ โดยสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับโปรแกรมอื่นๆ หรือนำมาแทนค่าเพื่อหาคำตอบที่เป็นจำนวนจริงได้ อีกทั้งจะทำให้การสร้างโปรแกรมและตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมทำได้ง่ายมาก

ในงานวิจัยนี้ได้ใช้วิธีการแบบเชิงสัญลักษณ์ ในรูปที่เป็นแบบเมตริก สมการ ฟังก์ชัน ดังนี้

จากลักษณะของตารางค่า D-H parameter จะเป็นเมตริกขนาด 4 คูณจำนวนของแขนกล (n) เป็นเมตริกที่รับค่าจากโจทย์ โดยสามารถใส่ค่าที่เป็นทั้งเชิงตัวเลขและเชิงตัวแปรได้ จะทำให้เป็นในรูปแบบของเชิงสัญลักษณ์ได้โดยการสร้างเมตริกเตรียมไว้ที่เป็นเชิงสัญลักษณ์ ที่มีขนาด $4 \times n$ และมีค่าเริ่มต้นที่ศูนย์ จากนั้นจึงทำการรับค่าเข้ามาใส่ในเมตริกอีกครั้ง

$$dh(1:4,1:n) = sym([0])$$

ค่าของมวล ก็เช่นกันสามารถใส่ค่าได้ทั้งเชิงตัวเลขและเชิงตัวแปร เพื่อให้ง่ายขึ้นจึงสร้างเป็นเมตริกไว้รับค่าและนำไปคำนวณต่อ

$$m(1,n) = sym([0])$$

หรือเมตริกที่ได้จากการคำนวณในโปรแกรมก่อน จึงต้องได้ทำการเตรียมเมตริกที่เป็นเชิงสัญลักษณ์ก่อนแล้วจึงรับค่าที่ได้จากการคำนวณมาใส่อีกครั้งเช่น ในเมตริกจาโคเบียน ที่มีขนาด $6 \times n$

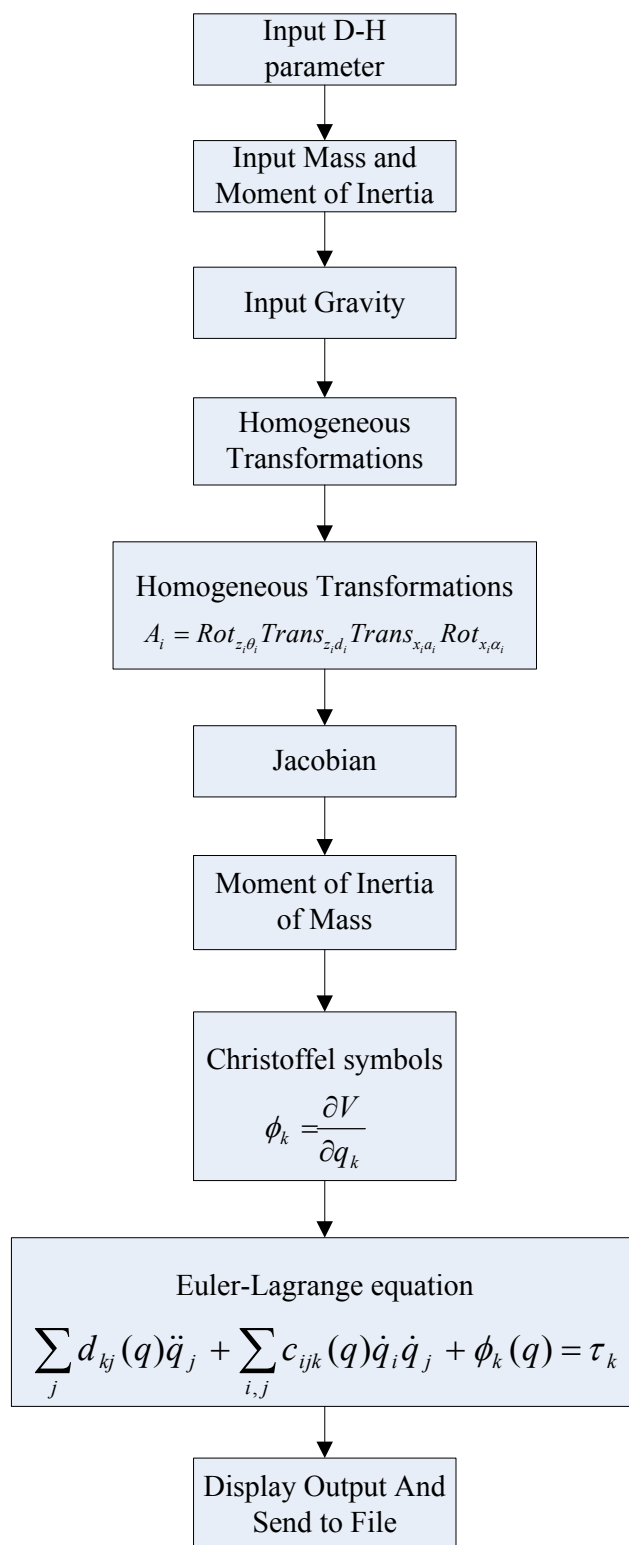
$$J(6,n) = sym([0])$$

ในงานวิจัยนี้ส่วนใหญ่ได้นำเอาฟังก์ชัน Symbolic มาใช้ร่วมกับฟังก์ชันใน Evaluation ซึ่งจะทำให้ตัวอักษรสามารถทำให้เป็นสมการได้ และนำเอาตัวแปรที่เป็นเชิงสัญลักษณ์ มาคำนวณต่อในสมการนั้นอย่างเช่น ในการคำนวณหาค่าพลังงานศักย์ของแต่ละแขนกล

$$eval(['V' n' = -g \times transpose(G) \times d0' n' \times m('n')'])$$

โดยมี $V = -g \times transpose(G) \times d0 \times m$ (และ) ที่เป็นตัวอักษรเพื่อสร้างสมการ ซึ่งในค่าตัวอักษรนั้นมีค่าที่เป็นเชิงสัญลักษณ์ อยู่เมื่อนำไปคำนวณต่อก็จะได้ค่าผลลัพธ์ได้เลย

3.3 ลำดับขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม (Workflow Program)



ภาพประกอบ 9 แสดงลำดับขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมแบบย่อ

บทที่ 4

ผลการทดสอบและวิเคราะห์ผลการทดสอบ

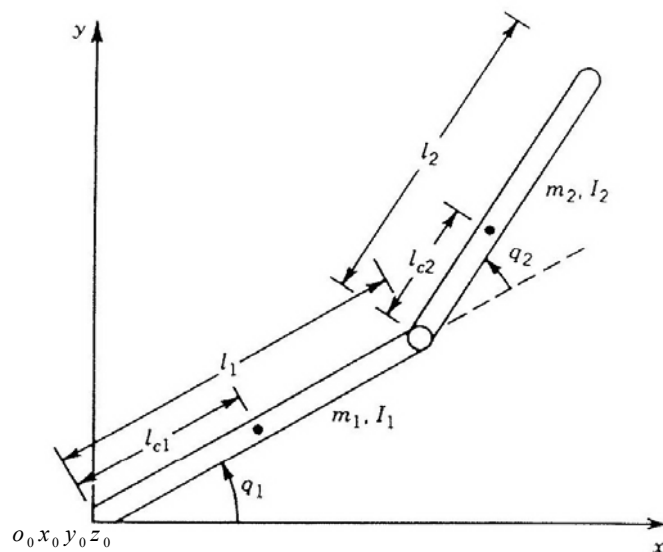
ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยนำเสนอผลงาน ดังนี้

1. ผลการทดสอบ
2. วิเคราะห์ผลการทดสอบ

4.1 ผลการทดสอบ

ผลการทดสอบในงานวิจัยนี้คือความถูกต้องของโปรแกรม การที่จะหาความถูกต้องของโปรแกรม ก่อนอื่นเราต้องทราบถึงผลลัพธ์สุดท้ายหรือคำตอบที่ได้จากกระบวนการคำนวณก่อน หลังจากนั้นแล้วจึงนำเอามาเปรียบเทียบกับคำตอบที่ได้จากโปรแกรม และการทดสอบผลคำตอบระหว่างที่โปรแกรมกำลังดำเนินการหรือตรวจคำตอบของสมการบางช่วงในโปรแกรมเพื่อเป็นการทดสอบความถูกต้องทั้งหมดของโปรแกรม ดังนั้นจึงแบ่งปัญหาเป็น 3 กรณีให้ผลของปัญหาทดสอบไม่ให้ตรงจุดกันโดยข้อแรกหาผลลัพธ์สุดท้ายที่เป็นสมการการเคลื่อนที่ กรณีที่สองหาเวกเตอร์ z_i ที่จะเตรียมไปหาเมตริกจาโคเบียน กรณีที่สามหาเมตริกจาโคเบียน

จากกรณีที่ 1 เป็นหุ่นยนต์แบบแขนกลที่มีลักษณะแบนและมีข้อต่อแบบงอ โดยมีลักษณะเป็นข้อต่อ 2 ข้อต่อ โดยให้เฟรมหลักคือ $o_0x_0y_0z_0$ เป็นจุดกำเนิด ดังภาพประกอบ 10



ภาพประกอบ 10 แสดงตัวแปรที่มีในแขนกลที่มีลักษณะเป็นข้อต่อแบบงอ 2 ข้อต่อ

จะได้เมตริก T ดังนี้

$$T_0^1 = A_1$$

$$T_0^2 = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ที่สำคัญสองค่าที่ใส่เข้าในท้ายหลักของ T_2 คือค่า x และ y ส่วนประกอบของจุด o_2 ในเฟรมหลัก จะเป็น

$$x = l_1 c_1 + l_2 c_{12}$$

$$y = l_1 s_1 + l_2 s_{12}$$

ค่าที่ได้คือค่าพิกัดของจุดปลายในเฟรมหลัก การหมุนของส่วนที่สองของ T_2 จะให้ส่วนกลับของเฟรม $o_2 x_2 y_2 z_2$ สัมพันธ์มายังเฟรมหลัก

เมื่อข้อต่อทั้งสองเหมือนกันคือแบบหมุน เมตริกจาโคเบียนในกรณีนี้จะเป็น 6×2 ในรูปแบบ

$$J(q) = \begin{bmatrix} z_0 \times (o_2 - o_0) & z_1 \times (o_2 - o_1) \\ z_0 & z_1 \end{bmatrix}$$

แสดงการคำนวณได้

$$o_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$o_1 = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$o_2 = \begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z_0 = z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

แสดงการคำนวณจากความต้องการจะได้

$$J = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

พิจารณาจากภาพประกอบ 10 ให้ q_i เป็นมุมของข้อต่อ, m_i เป็นมวลของข้อต่อ i , l_i เป็นความยาวของข้อต่อ i , l_{ci} เป็นระยะจากข้อต่อก่อนหน้าถึงจุดกึ่งกลางมวลของข้อต่อ i และ I_i เป็นโมเมนต์ความเฉื่อยของข้อต่อ i จากเงื่อนไขของจาโคเบียนในการคำนวณพลังงานจลน์ จะได้

$$v_{c1} = J_{v_{c1}} \dot{q}$$

$$J_{v_{c1}} = \begin{bmatrix} -l_{c1} \sin q_1 & 0 \\ l_{c1} \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$v_{c2} = J_{v_{c2}} \dot{q}$$

$$J_{v_{c2}} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin q_1 - l_{c2} \sin(q_1 + q_2) & -l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos q_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) & l_{c2} \cos(q_1 + q_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ด้วยเหตุนี้ส่วนการเคลื่อนย้ายของพลังงานจลน์เป็น

$$\frac{1}{2} m_1 v_{c1}^T v_{c1} + \frac{1}{2} m_2 v_{c2}^T v_{c2} = \frac{1}{2} \dot{q} \{ m_1 J_{v_{c1}}^T J_{v_{c1}} + m_2 J_{v_{c2}}^T J_{v_{c2}} \} \dot{q}$$

การหมุนของพลังงานจลน์ทั้งหมดของระบบเป็น

$$\frac{1}{2} \dot{q}^T \left\{ I_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + I_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \dot{q}$$

ขณะนี้เริ่มเข้าสู่รูปแบบของเมตริกความเฉื่อย $D(q)$ ตามที่มุ่งหมายโดยการแทนค่า 2 เมตริกใน (3.18) และ (3.19) ตามลำดับ ดังนั้น

$$D(q) = m_1 J_{v_{c1}}^T J_{v_{c1}} + m_2 J_{v_{c2}}^T J_{v_{c2}} + \begin{bmatrix} I_1 + I_2 & I_2 \\ I_2 & I_2 \end{bmatrix}$$

ทำให้ได้ผลลัพธ์จากการคูณและใช้กฎของเมตริกเอกลักษณ์ ของสมการ $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$ จะได้

$$\begin{aligned} d_{11} &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_1 + I_2 \\ d_{12} &= d_{21} = m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos q_2) + I_2 \\ d_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + I_2 \end{aligned}$$

สามารถคำนวณหาสัญลักษณ์ครีชีโทพี โดยกำหนดให้เป็น

$$\begin{aligned} c_{111} &= \frac{1}{2} \frac{\partial d_{11}}{\partial q_1} = 0 \\ c_{121} &= c_{211} = \frac{1}{2} \frac{\partial d_{11}}{\partial q_2} = -m_2 l_1 l_{c2} \sin q_2 = h \\ c_{221} &= \frac{\partial d_{12}}{\partial q_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial d_{22}}{\partial q_1} = h \\ c_{112} &= \frac{\partial d_{21}}{\partial q_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial d_{11}}{\partial q_2} = -h \\ c_{122} &= c_{212} = \frac{1}{2} \frac{\partial d_{22}}{\partial q_1} = 0 \\ c_{222} &= \frac{1}{2} \frac{\partial d_{22}}{\partial q_2} = 0 \end{aligned}$$

ต่อมาเป็นพลังงานศักย์ใช้ผลรวมของทั้งสองข้อต่อ สำหรับพลังงานศักย์ต่อละข้อต่อใช้มวลคูณความเร่งของแรงโน้มถ่วงและความสูงของจุดกึ่งกลางมวล ดังนั้น

$$V_1 = m_1 g l_{c1} \sin q_1$$

$$V_2 = m_2 g (l_1 \sin q_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2))$$

$$V = V_1 + V_2 = (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \sin q_1 + m_2 l_{c2} g \sin(q_1 + q_2)$$

จากนี้ไปฟังก์ชัน ϕ_k แทนค่า

$$\phi_k = \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

จะได้

$$\phi_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1} = (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos q_1 + m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2)$$

$$\phi_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2} = m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2)$$

สุดท้ายสามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ของระบบในรูปของสมการ ออยเลอร์-ลากรางจ์

$$\sum_j d_{kj}(q) \ddot{q}_j + \sum_{i,j} \left\{ \frac{\partial d_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial d_{ij}}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{\partial V}{\partial q_k} = \tau_k$$

$$k = 1, \dots, n$$

แทนค่าตัวแปรในสมการและตัดเทอมสมการที่เป็นศูนย์ จะได้

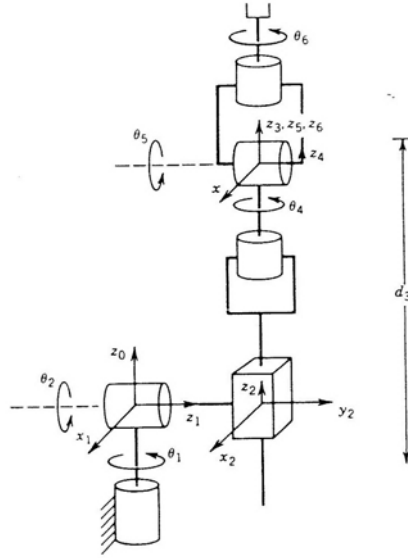
$$d_{11} \ddot{q}_1 + d_{12} \ddot{q}_2 + c_{121} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + c_{211} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + c_{221} \dot{q}_2^2 + \phi_1 = \tau_1$$

$$d_{21} \ddot{q}_1 + d_{22} \ddot{q}_2 + c_{112} \dot{q}_1^2 + \phi_2 = \tau_2$$

ถ้าในกรณีที่เป็นเมตริก $C(q, \dot{q})$ จะได้เป็น

$$C = \begin{bmatrix} h\dot{q}_2 & h\dot{q}_2 + h\dot{q}_1 \\ -h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

กรณีี่ 2 เป็นหุ่นยนต์สแตมฟอร์ด โดยมีลักษณะเป็นรูปทรงกลมที่มีรูปแบบของข้อต่อเป็นแบบหมุน หมุน เลื่อน (RRP) ด้วยการที่แต่ละข้อต่อเป็นทรงกลม หุ่นยนต์มีระยะตั้งฉากของข้อต่อตำแหน่งที่เป็นไหล่นั้นมีความซับซ้อนเล็กน้อยซึ่งจะคล้ายกับการปัญหาทางจลนศาสตร์แบบไปข้างหน้าและแบบย้อนกลับ ดังรูป



ภาพประกอบ 11 แสดงตัวแปรที่มีในหุ่นยนต์สแตมฟอร์ด

T_0^6 จะได้

$$T_0^6 = A_1 \dots A_6 = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & d_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & d_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ที่

$$r_{11} = c_1[c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] - s_1(s_4c_5c_6 + c_4c_6)$$

$$r_{21} = s_1[c_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_2s_5c_6] + c_1(s_4c_5c_6 + c_4c_6)$$

$$r_{31} = -s_2(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_2s_5c_6$$

$$r_{12} = c_1[-c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6] - s_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6)$$

$$r_{22} = s_1[-c_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + s_2s_5s_6] + c_1(-s_4c_5s_6 + c_4c_6)$$

$$r_{32} = s_2(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_2s_5s_6$$

$$r_{13} = c_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) - s_1s_4s_5$$

$$r_{23} = s_1(c_2c_4s_5 + s_2c_5) + c_1s_4s_5$$

$$r_{33} = -s_2c_4s_5 + c_2c_5$$

$$d_x = c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 + d_6 (c_1 c_2 c_4 s_5 + c_1 c_5 s_2 - s_1 s_4 s_5)$$

$$d_y = s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 + d_6 (c_1 s_4 s_5 + c_2 c_4 s_1 s_5 + c_5 s_1 s_2)$$

$$d_z = c_2 d_3 + d_6 (c_2 c_5 - c_4 s_2 s_5)$$

มี 3 ข้อต่อที่เป็นแบบเลื่อน (Prismatic) และที่ $o_3 = o_4 = o_5$ ซึ่งเป็นผลมาจากข้อต่อที่เป็นรูปทรงกลม และการกำหนดเฟรม โดยมีจุดร่วมกำเนิดที่ o จะได้รูปแบบของจาโคเบียนเป็น

$$J = \begin{bmatrix} z_0 \times (o_6 - o_0) & z_1 - (o_6 - o_1) & z_2 & z_3 - (o_6 - o) & z_4 - (o_6 - o) & z_5 - (o_6 - o) \\ z_0 & z_1 & 0 & z_3 & z_4 & z_5 \end{bmatrix}$$

ที่ R_o^j เป็นส่วนที่หมุนของ T_o^j ด้วยเหตุนี้จึงเป็นสิ่งเดียวที่จำเป็นด้วยการคำนวณเมตริก T_o^j ด้วยการคำนวณจาโคเบียน นำออกมาคำนวณตามเงื่อนไขสำหรับหุ่นยนต์สเตมฟอร์ด

$$o_6 = (d_x, d_y, d_z)^T = \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 + d_6 (c_1 c_2 c_4 s_5 + c_1 c_5 s_2 - s_1 s_4 s_5) \\ s_1 s_2 d_3 - c_1 d_2 + d_6 (c_1 s_4 s_5 + c_2 c_4 s_1 s_5 + c_5 s_1 s_2) \\ c_2 d_3 + d_6 (c_2 c_5 - c_4 s_2 s_5) \end{bmatrix}$$

$$o_3 = o_4 = o_5 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 \\ c_2 d_3 \end{bmatrix}$$

จะได้เวกเตอร์ z_i เป็น

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$z_1 = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

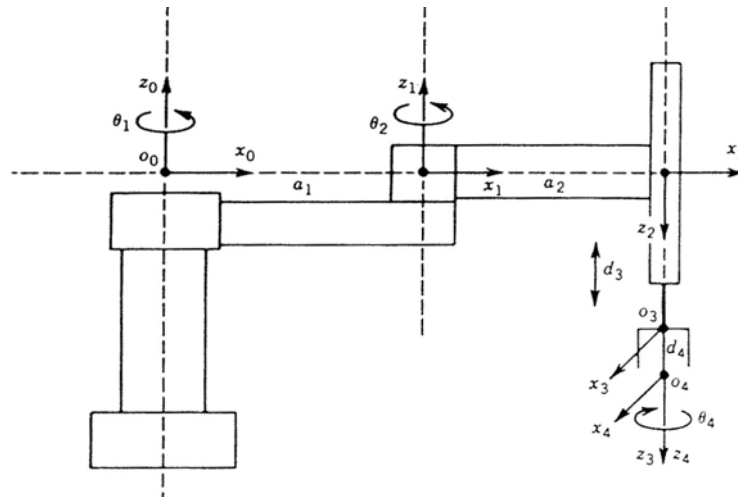
$$z_2 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 \\ s_1 s_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$z_3 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 \\ s_1 s_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$z_4 = \begin{bmatrix} -c_1 c_2 s_4 - s_1 c_4 \\ -s_1 c_2 s_4 + c_1 c_4 \\ s_2 s_4 \end{bmatrix}$$

$$z_5 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 c_4 s_5 - s_1 s_4 s_5 + c_1 s_2 c_5 \\ s_1 c_2 c_4 s_5 + c_1 s_4 s_5 + s_1 s_2 c_5 \\ -s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5 \end{bmatrix}$$

กรณีี่ 3 เป็นหุ่นยนต์สกาลาร์ โดยมีลักษณะรูปแบบของแขนข้อต่อเป็นแบบหมุน หมุน เลื่อน (RRP) และข้อต่อมีหนึ่งระดับชั้นความเร็ว ซึ่งเคลื่อนที่เป็นวงรอบแกนแนวตั้ง ชั้นแรกเป็นที่ตั้งและติดกับแกนของจุดต่อ เมื่อทุกแกนของจุดต่อขนานกันจะทำให้มีความอิสระบ้างในตำแหน่งเริ่มต้นดังภาพ



ภาพประกอบ 13 แสดงตัวแปรที่มีในหุ่นยนต์สกาลาร์

จากสมการ Forward Kinematic ดังนั้นจะได้

$$T_0^4 = A_1 \dots A_4 = \begin{bmatrix} c_{12}c_4 + s_{12}s_4 & -c_{12}s_4 + s_{12}c_4 & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ s_{12}c_4 - c_{12}s_4 & -s_{12}s_4 - c_{12}c_4 & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 & 0 & -1 & d_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อข้อต่อ 1,2 และ 4 เป็นแบบหมุนและข้อต่อ 3 เป็นแบบเลื่อน และตั้งแต่นำ $o_4 - o_3$ ขนานตาม z_3 รูปแบบของจาโคเบียนจะได้

$$J = \begin{bmatrix} z_0 \times (o_4 - o_0) & z_1 \times (o_4 - o_1) & z_2 & 0 \\ z_2 & z_1 & 0 & z_3 \end{bmatrix}$$

แสดงการคำนวณได้

$$\begin{aligned} o_1 &= \begin{bmatrix} a_1 c_1 \\ a_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ o_2 &= \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \\ o_4 &= \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ d_3 - d_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน $z_0 = z_1 = k$ และ $z_2 = z_3 = -k$ ดังนั้นจาโคเบียนของหุ่นยนต์สกาลาร์คือ

$$J = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 c_{12} & 0 & 0 \\ a_1 c_1 - a_2 c_{12} & a_2 c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4.2 วิเคราะห์ผลการทดสอบ

จากคำตอบของปัญหาทั้ง 3 กรณีที่ได้ เมื่อนำไปเปรียบเทียบกับคำตอบจากโปรแกรมแล้วตรงกัน จึงวิเคราะห์ได้ว่าโปรแกรมถูกต้อง ส่วนเรื่องของความยากง่ายในการใช้งานโปรแกรม ขึ้นอยู่กับผู้ที่มีประสบการณ์การใช้ MATLAB มากน้อยและมีความรู้เรื่องตัวแปรสมการการเคลื่อนที่หุ่นยนต์เพียงใด ซึ่งในโปรแกรมได้มีเมนูสำหรับช่วยเหลือในส่วนของตัวแปรของสมการ

บทที่ 5

สรุปและวิจารณ์

5.1 สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ

จากปัญหาเป็น 3 กรณีให้ผลของปัญหาทดสอบไม่ให้ตรงจุดกันโดยกรณีแรกเป็นเป็นหุ่นยนต์แบบแขนกลที่มีลักษณะแบนและมีข้อต่อแบบงอ โดยมีลักษณะเป็นข้อต่อ 2 ข้อต่อ จะทำการหาผลลัพธ์สุดท้ายที่เป็นสมการการเคลื่อนที่ จากผลการทดสอบปรากฏว่าได้สมการที่คำนวณคือ

$$d_{11}\ddot{q}_1 + d_{12}\ddot{q}_2 + c_{121}\dot{q}_1\dot{q}_2 + c_{211}\dot{q}_1\dot{q}_2 + c_{221}\dot{q}_2^2 + \phi_1 = \tau_1$$

ซึ่งตรงกับที่ได้จากโปรแกรมจากนั้นทำการทดสอบกรณีที่ 2 เป็นหุ่นยนต์สเตมฟอร์ด โดยมีลักษณะเป็นรูปทรงกลมที่มีรูปแบบของข้อต่อเป็นแบบหมุน หมุน เลื่อน (RRP) ด้วยการที่แต่ละข้อต่อเป็นทรงกลม หุ่นยนต์มีระยะตั้งฉากของข้อต่อตำแหน่งที่เป็นโหล่นั้นมีความซับซ้อนเล็กน้อย จะทำการหาเวกเตอร์ z_i ที่จะเตรียมไปหาเมตริกจาโคเบียน จากผลการทดสอบปรากฏว่าได้สมการที่คำนวณค่า z_i ตรงกับที่ได้จากโปรแกรมจากนั้นทำการทดสอบกรณีที่ 3 เป็นหุ่นยนต์สกาลาร์ โดยมีลักษณะรูปแบบของแขนข้อต่อเป็นแบบหมุน หมุน เลื่อน (RRP) และข้อต่อมีหนึ่งระดับขั้นความเร็ว ซึ่งเคลื่อนที่เป็นวงรอบแกนแนวตั้ง ด้วยการหาเมตริกจาโคเบียน จากผลการทดสอบปรากฏว่าได้สมการที่คำนวณคือ

$$J = \begin{bmatrix} -a_1s_1 - a_2s_{12} & -a_2c_{12} & 0 & 0 \\ a_1c_1 - a_2c_{12} & a_2c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ซึ่งตรงกับที่ได้จากโปรแกรม จากการทดสอบทั้ง 3 กรณีจึงสรุปได้ว่าโปรแกรมสามารถให้ผลลัพธ์คำตอบของสมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ได้อย่างถูกต้อง

โดยทั่วไปการสร้างโปรแกรมจะมีหลักในการทดสอบหลายรูปแบบขึ้นอยู่กับลักษณะของการใช้งานในโปรแกรมนั้นๆ ในงานวิจัยนี้จะเลือกหลักในการทดสอบโปรแกรม 2 หลักคือ คำนวณถูกต้อง และใช้งานง่าย สะดวก จากผลการทดสอบทำให้ทราบได้ว่าวิธีการหาสมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ด้วยโปรแกรมนั้นมีความถูกต้อง เมื่อแสดงใน โปรแกรม แต่เมื่อผลที่ได้ออกมาให้รูปแบบของ

Microsoft Office Word หรือโปรแกรมอื่น จะไม่สามารถทำให้อยู่ในรูปของสมการที่เข้าใจได้ง่าย ดังนั้นจึงต้องมีคู่มือการใช้งานโปรแกรมและตัวช่วยเหลือสำหรับอธิบายค่าความหมายของตัวแปรต่างๆ ในสมการและอธิบายที่มาของการหาค่าตัวแปรนั้นๆ เพื่อไม่ให้ผู้ใช้ใส่ค่าผิดพลาดและได้ผลคำตอบที่ไม่ถูกต้อง ในส่วนการใช้งานจากการออกแบบหน้าจอที่ทำให้ผู้ใช้โปรแกรมสะดวกและง่าย โดยการออกแบบให้แสดงผลคำตอบทันทีที่หน้าจอั้นเลยเพื่อตรวจทานคำตอบและง่ายต่อการปรับเปลี่ยนค่าที่ป้อนให้ในตอนแรก อีกส่วนของการออกแบบโปรแกรมให้สะดวก โดยการนำรูปภาพมาประกอบให้ผู้ใช้เป็นผู้เลือกเงื่อนไขแล้วโปรแกรมจะแสดงรูปภาพตามเงื่อนไขที่เลือกและใส่ค่าตัวแปรตามรูปภาพประกอบ

5.2 ข้อเสนอแนะ

5.2.1 ข้อเสนอแนะทั่วไป

การทำงานวิจัยครั้งนี้ได้ดำเนินการหาโมเมนต์ความเฉื่อยของแขนกลที่เป็นรูปทรงเรขาคณิตอย่างง่าย ซึ่งจะถูกจำกัดให้สามารถเลือกใช้ได้แต่เฉพาะในโปรแกรมที่กำหนดให้ ไม่สามารถเพิ่มเติม หรือแก้ไขได้จึงทำให้บางปัญหาไม่สามารถตอบโจทย์ได้

5.2.2 ข้อเสนอแนะงานวิจัยครั้งต่อไป

ในการพัฒนาครั้งต่อไปอาจทำให้สามารถหาโมเมนต์ความเฉื่อยของแขนกลที่เป็นรูปทรงใดๆ ก็ได้ขึ้นอยู่กับผู้กำหนด ซึ่งอาจสามารถรับค่าข้อมูลที่เป็นภาพจากแบบหรือภาพ 3 มิติจากโปรแกรมที่ใช้สำหรับออกแบบ หรือเพิ่มเติมโปรแกรมในเรื่องของการควบคุมแรงของหุ่นยนต์ในการเคลื่อนที่ จะทำให้หุ่นยนต์เคลื่อนที่ได้อย่างมีประสิทธิภาพมากขึ้นจากเดิมอีก

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

มนัส สังวรศิลป์; และ วรรัตน์ ภัทรอมรกุล. (2543). *คู่มือ MATLAB ฉบับสมบูรณ์*. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์อินโฟเพรส.

Spong, MW.; & Vidyasagar, M. (1986). *Robot Dynamics and Control*, John Wiley and Sons.

Tarek Sobh, Sarosh Patel and Bei Wang (2005) .*Web Enabled Robot Design and Dynamic Control Simulation Software Solutions From Task Points Description*. School of Engineering University of Bridgeport.

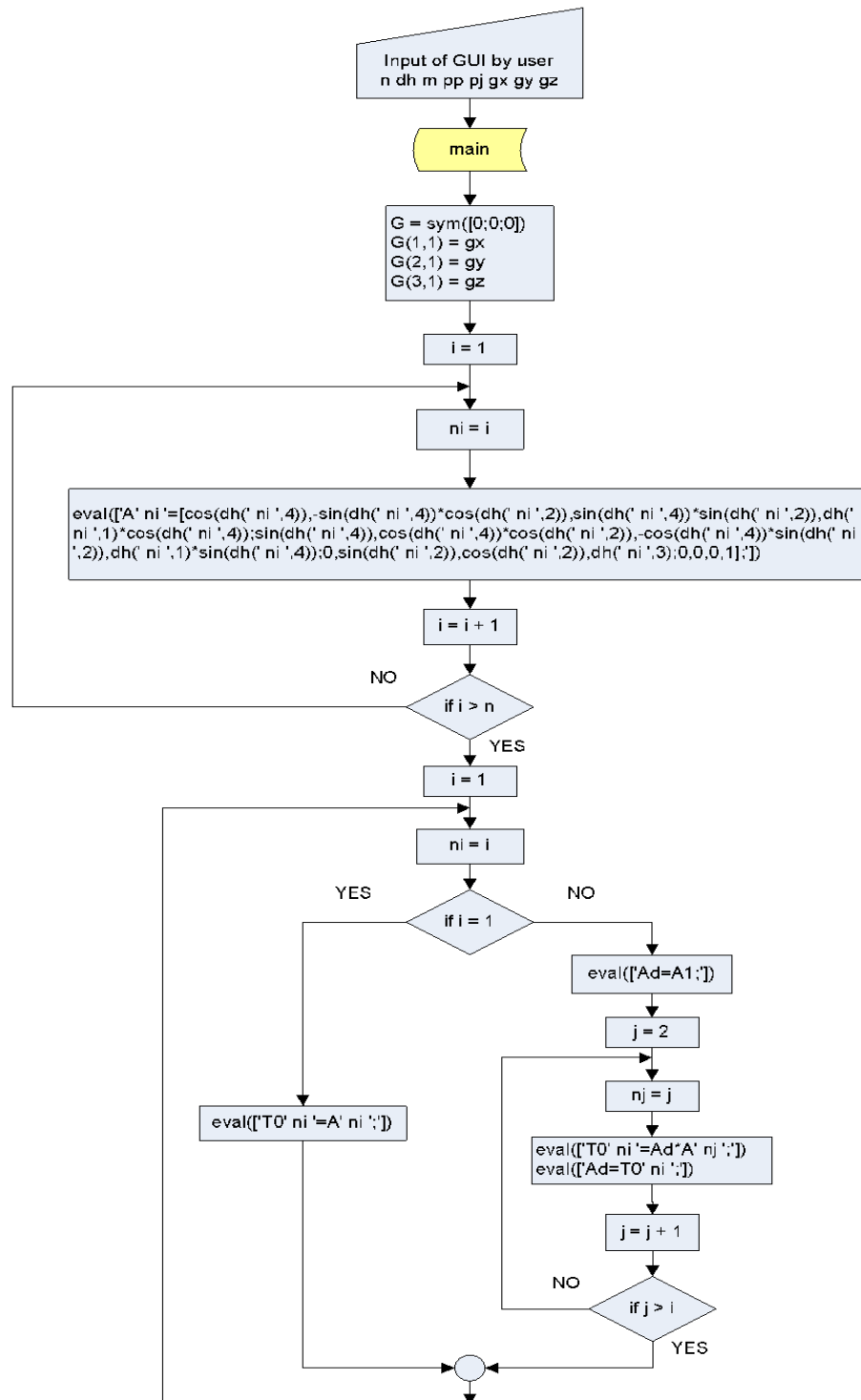
P.I. Corke. (1996). *A Robotics Toolbox for MATLAB*. *IEEE Robotics and Automation Magazine*. Volume 3(1), March 1996 P. 24-32

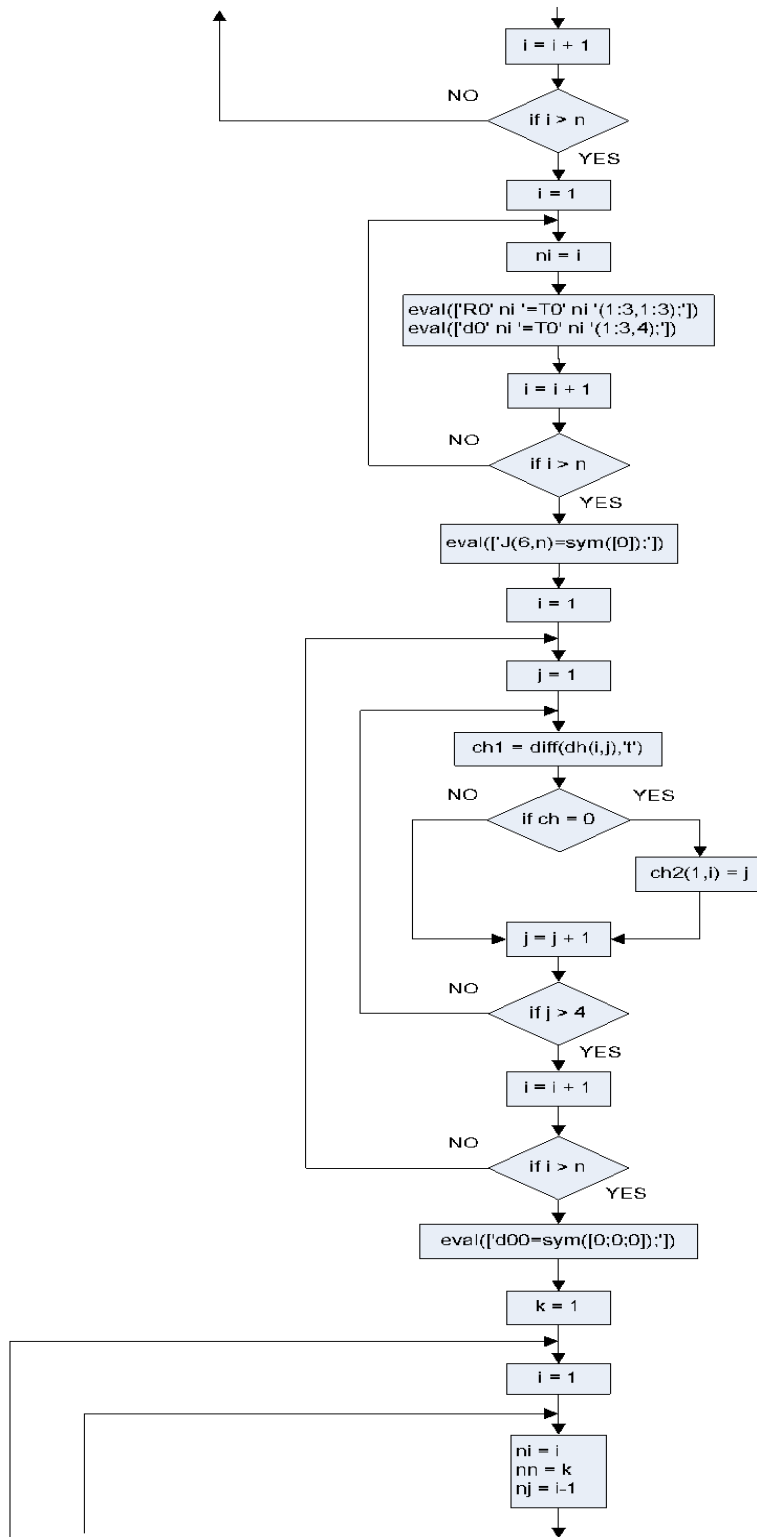
Mark, WS. (1989). *Robot Dynamics and Control*. University of Illinois at Urbana-Champaign.

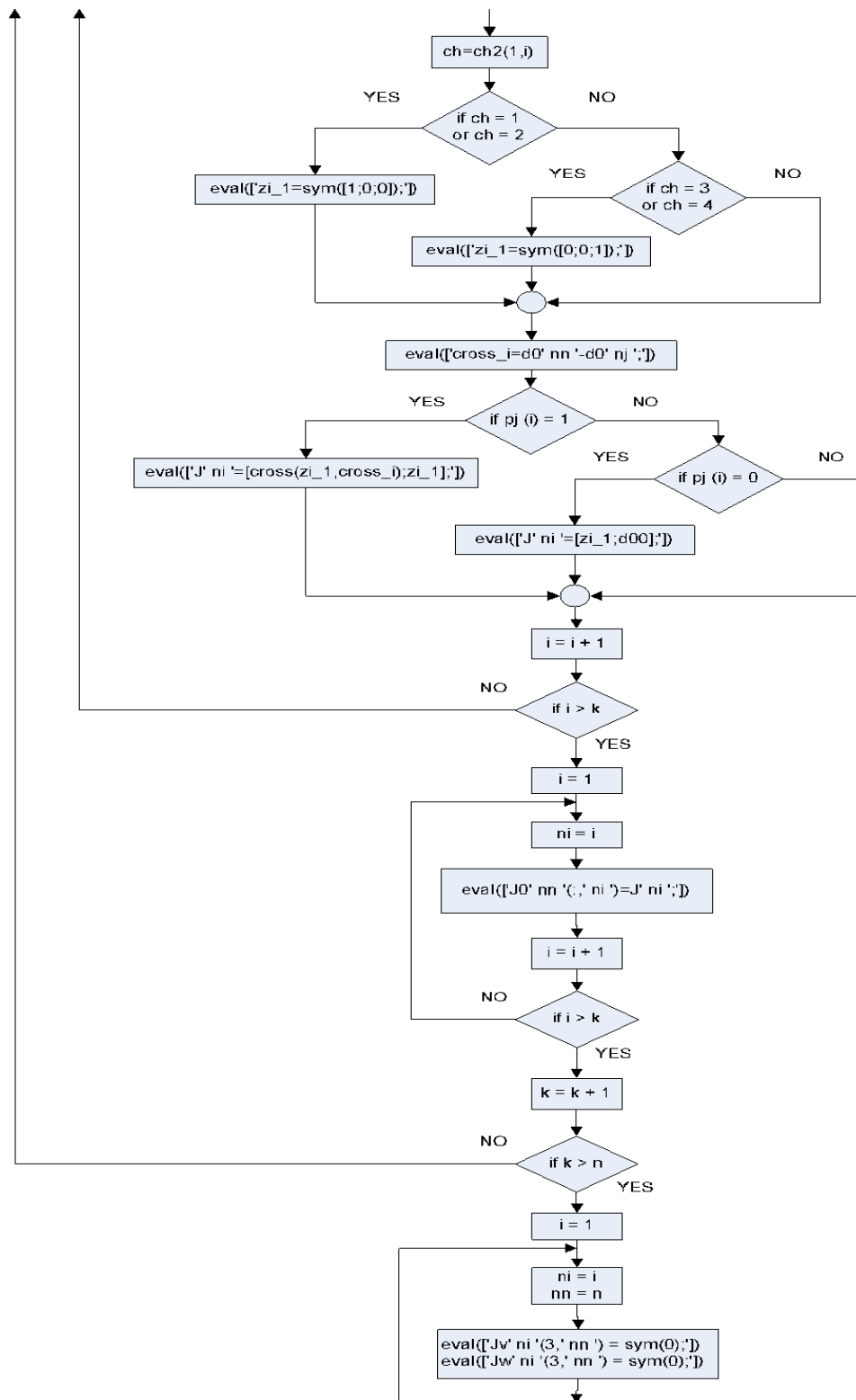
ภาคผนวก

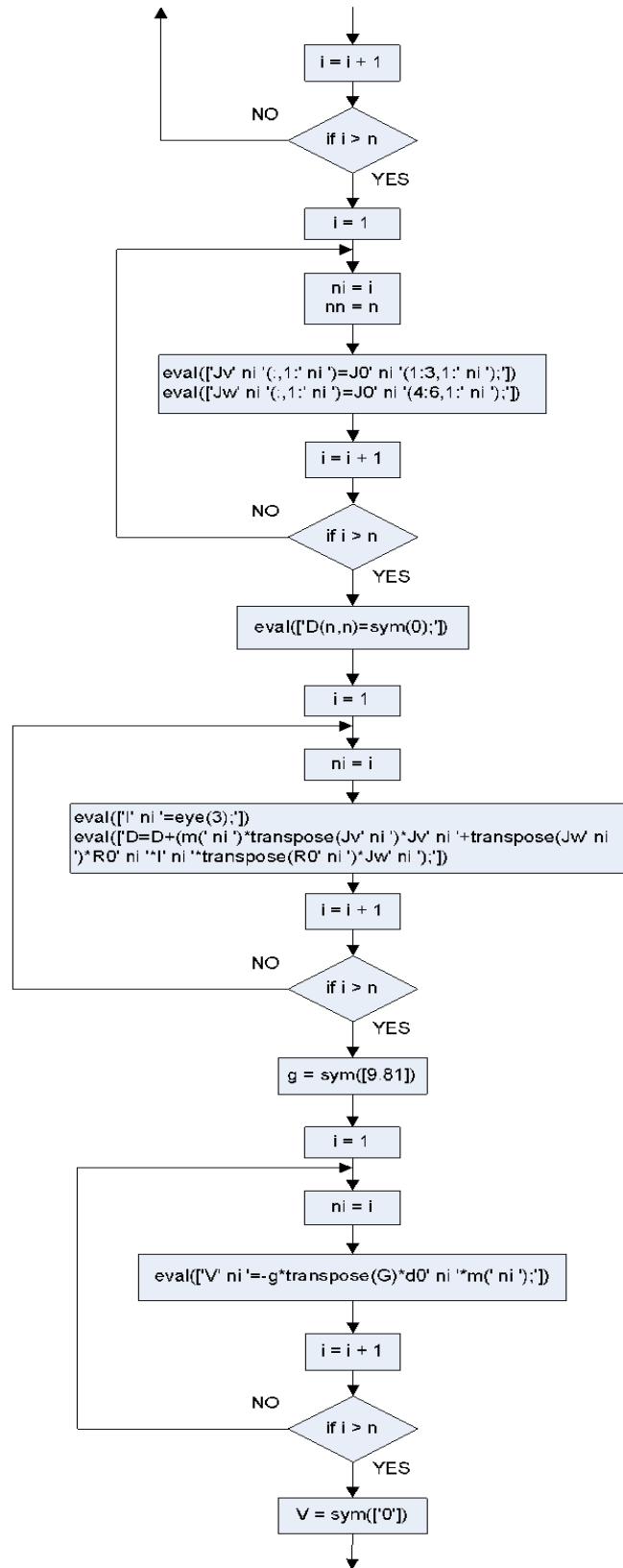
ภาคผนวก

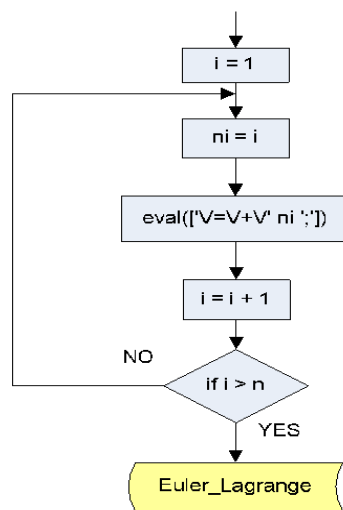
แผนผังแสดงการเชื่อมโยงในกระบวนการทำงานของโปรแกรม

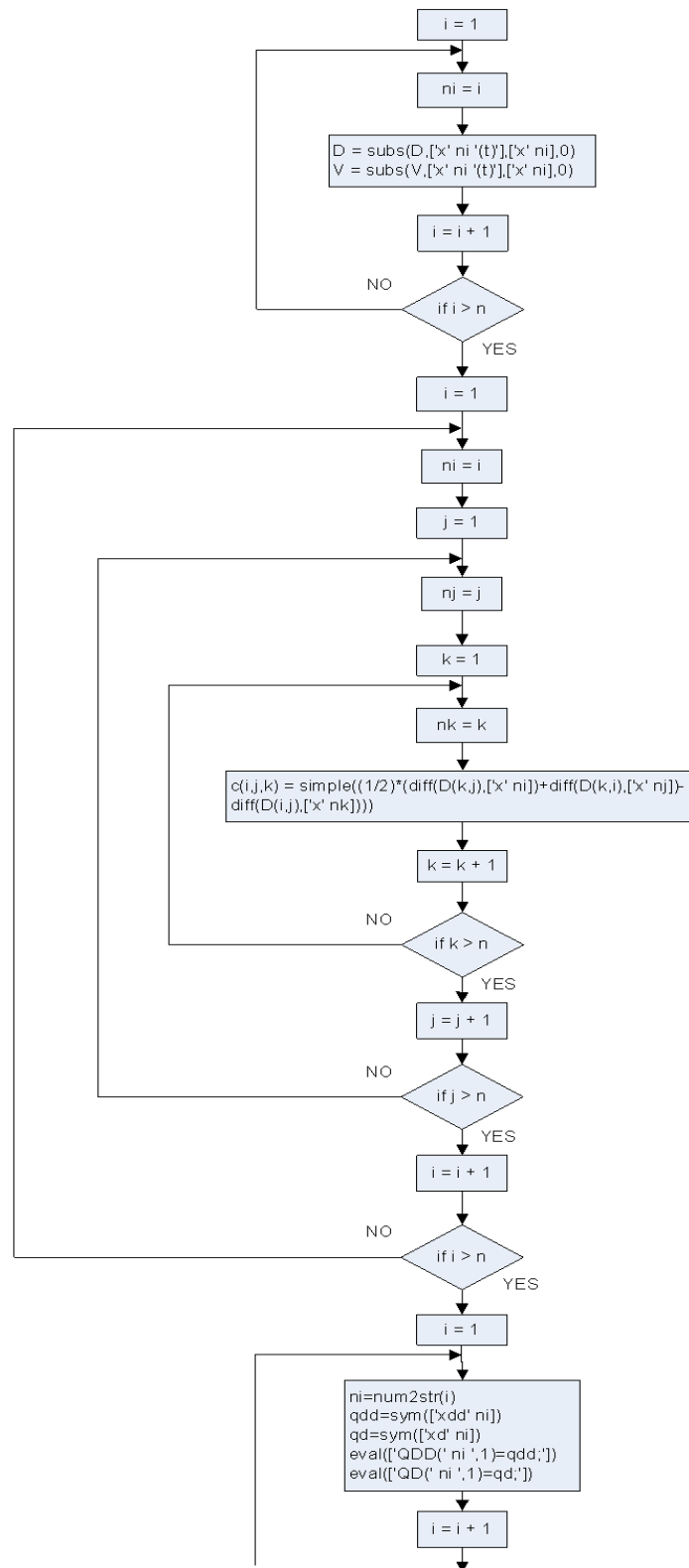


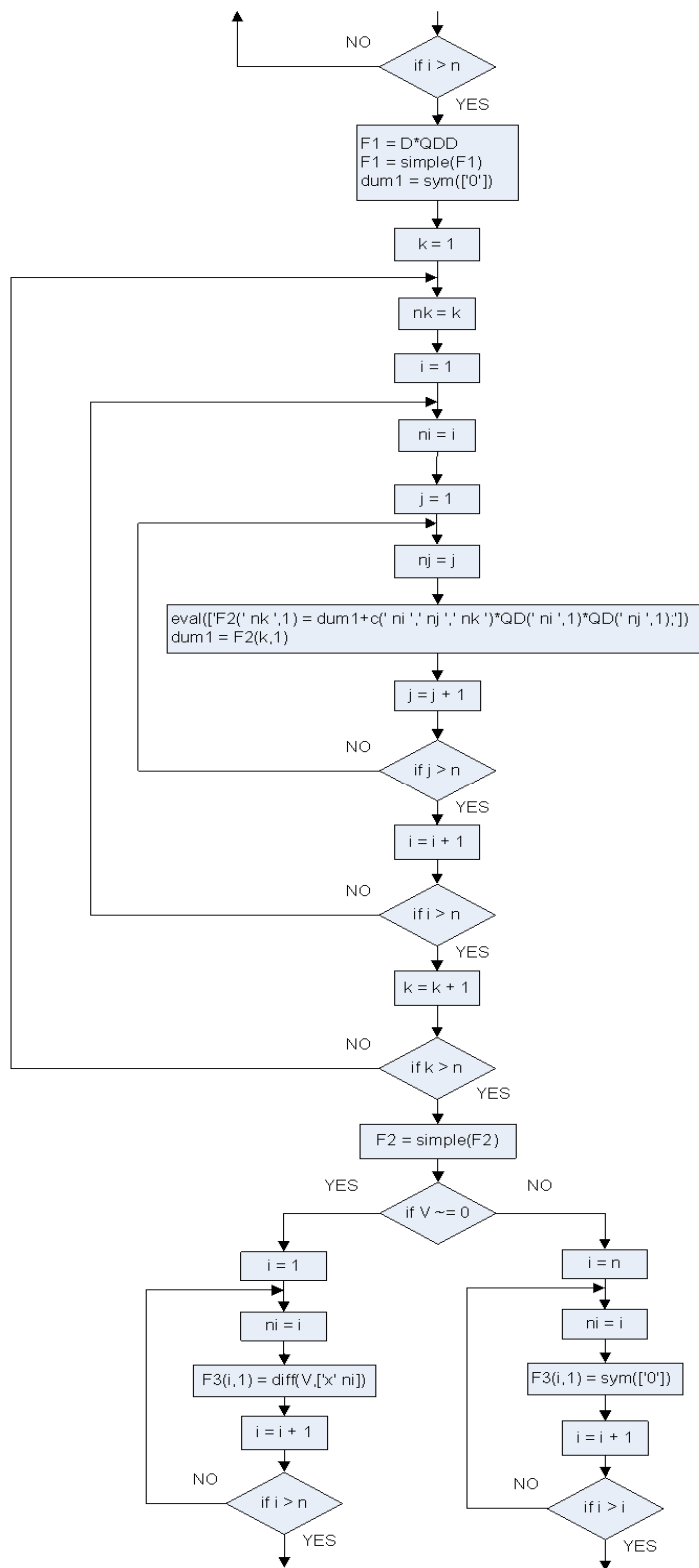


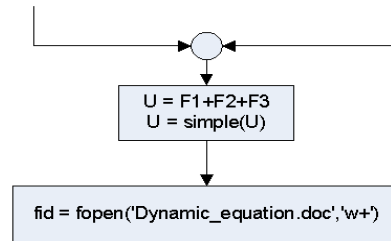




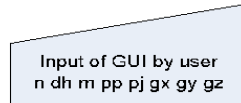








รายละเอียดของแต่ละขั้นตอน (Detail of Algorithm)



สร้างหน้าจอรับค่าต่าง ๆ ที่ได้จากผู้ใช้และสร้างเป็นตัวแปรเก็บค่าตามลักษณะข้อมูลที่จะนำไปคำนวณต่อ

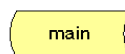
n เป็นตัวแปรแบบตัวเลข ที่มีค่าเท่ากับจำนวนของแขนกล

dh เป็นตัวแปรแบบ symbolic เมตริก ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนแขนกล n และมี 4 หลักซึ่งค่าของแต่ละหลัก คือ Link Length , Link Twist , Link offset และ Joint Angle ตามลำดับ ซึ่งเป็นตาราง D-H parameter

m เป็นตัวแปรแบบ symbolic เมตริก ที่มีจำนวน 1 แถวและมีจำนวนหลักเท่ากับจำนวนของแขนกล ซึ่งเป็นมวลของแต่ละแขนตามลำดับ

pj เป็นตัวแปรแบบเมตริก ที่มีจำนวน 1 แถวและมีจำนวนหลักเท่ากับจำนวนของแขนกล ซึ่งถ้าแขนกลที่เป็นแบบเลื่อน (prismatic) มีค่าเป็น 0 แต่ถ้าแขนกลเป็นแบบหมุน (revolute) จะมีค่าเป็น 1

G เป็นตัวแปรแบบ symbolic เมตริก ซึ่งเป็นค่าของจุด Gravity ที่มีขนาด 1 แถว 3 หลักหลักแรกคือ gx เป็นค่าของจุดฐานในแนวแกน x หลักที่ 2 คือ gy เป็นค่าของจุดฐานในแนวแกน y หลักที่ 3 คือ gz เป็นค่าของจุดฐานในแนวแกน z

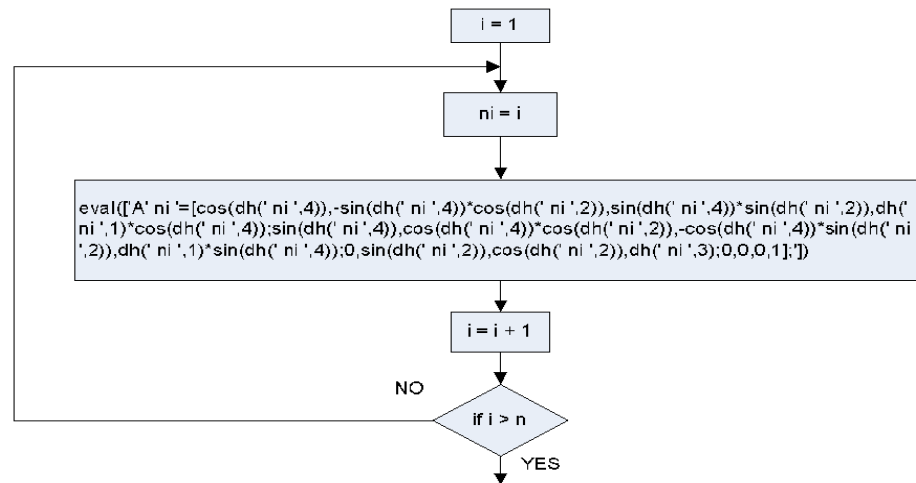


เรียกไฟล์ที่ชื่อ main.m ขึ้นมาใช้

```

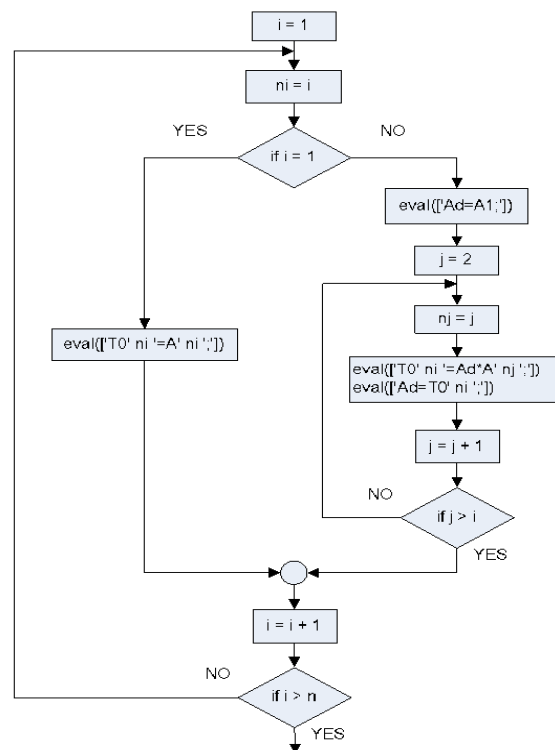
G = sym([0;0;0])
G(1,1) = gx
G(2,1) = gy
G(3,1) = gz
  
```

นำค่า gx gy และ gz ที่ได้รับจากหน้าจอมาใส่ในเมตริก G

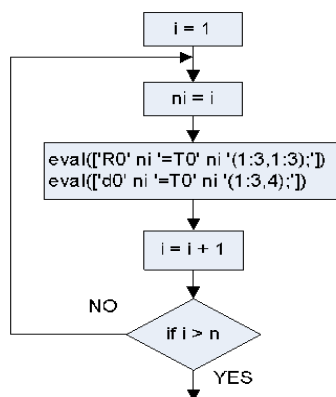


ใช้สมการที่ (2.27) สร้างเมตริก $A(n) =$

$$\begin{bmatrix}
 \cos(dh(n,4)) & -\sin(dh(n,4)) * \cos(dh(n,2)) & \sin(dh(n,4)) * \sin(dh(n,2)) & dh(n,1) * \cos(dh(n,4)) \\
 \sin(dh(n,4)) & \cos(dh(n,4)) * \cos(dh(n,2)) & -\cos(dh(n,4)) * \sin(dh(n,2)) & dh(n,1) * \sin(dh(n,4)) \\
 0 & \sin(dh(n,2)) & \cos(dh(n,2)) & dh(n,3) \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}$$



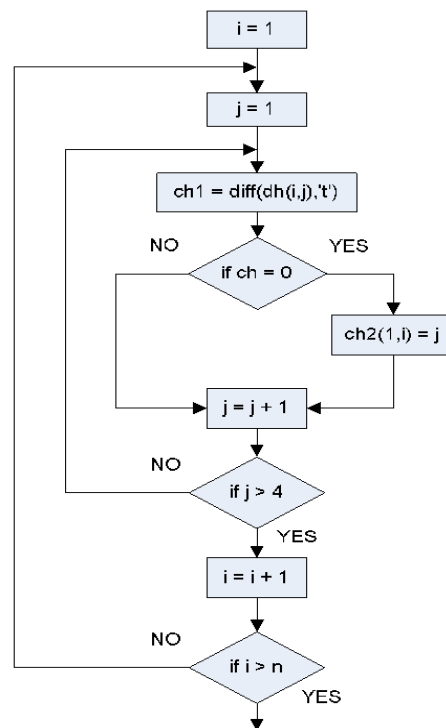
ใช้สมการที่ (2.23) ถ้าแขนกลแรก $n = 1$ จะได้เมตริก $T01$ มีค่าเท่ากับเมตริก A แต่ถ้าเป็นแขนกลที่ตำแหน่ง $n > 1$ จะได้ $T0(n) = Ad \times A(n)$ โดยที่ Ad เป็นเมตริกของ $A(n-1)$



ใช้สมการที่ (2.23) $T_i^J = A_{i+1} \dots A_J = \begin{bmatrix} R_i^J & d_i^J \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ในการค่าของ R_i^J และ d_i^J

```
eval(['J(6,n)=sym([0]);'])
```

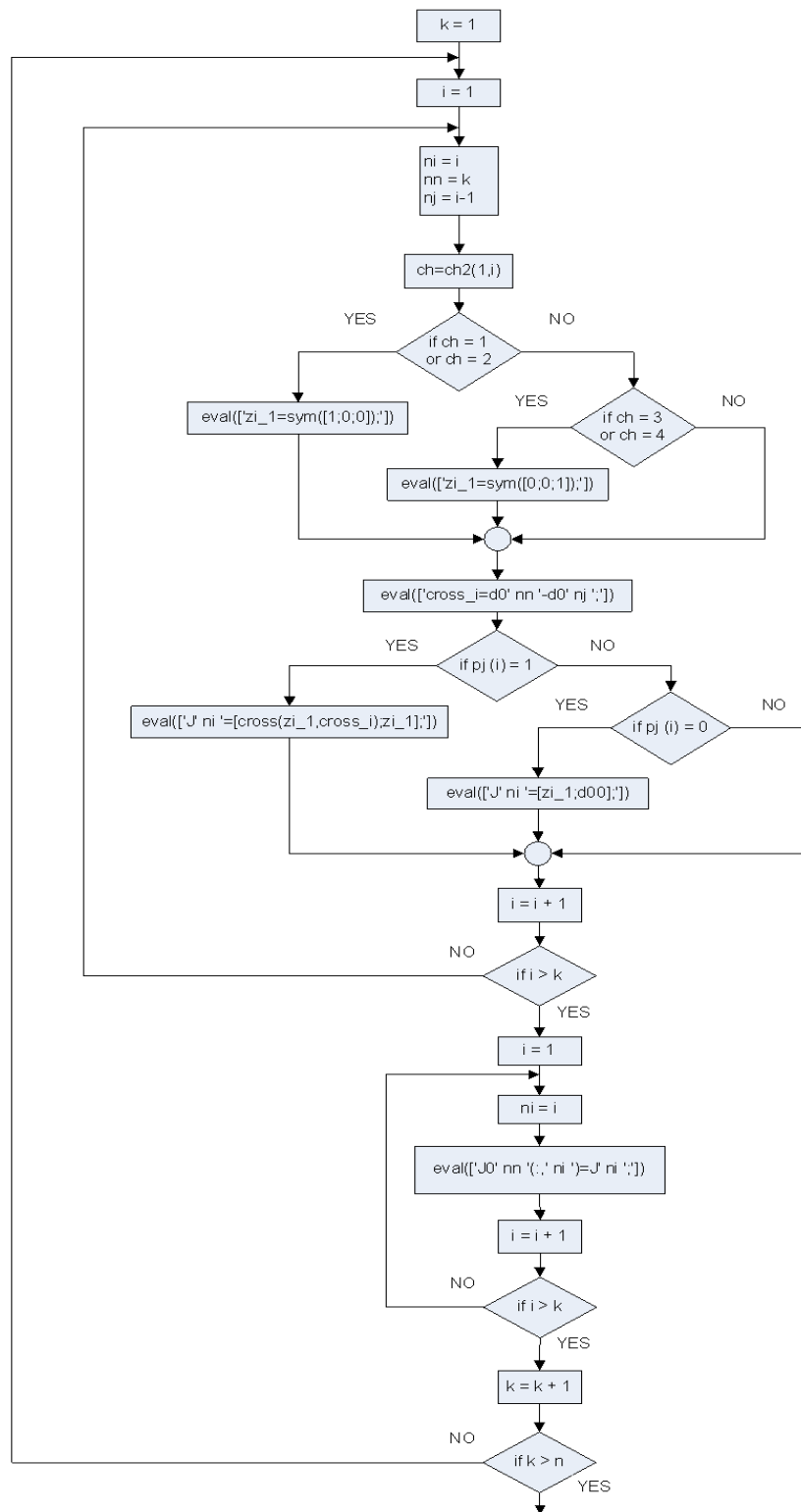
เตรียมเมตริกจาโกเบียน J ที่มีขนาด $(6, n)$



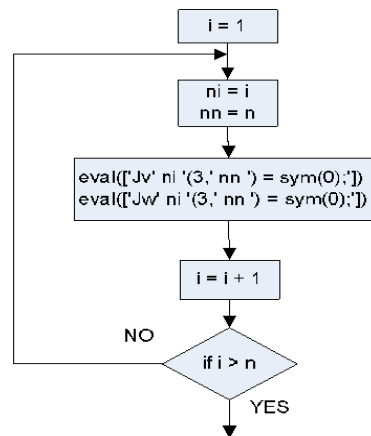
ใช้กฎลูกโซ่ (chain rule) ทำการหาอนุพันธ์ ตาราง dh เทียบ t เพื่อให้ทราบค่าหรือตำแหน่งที่มีการเคลื่อนที่

```
eval(['d00=sym([0,0;0;:])'])
```

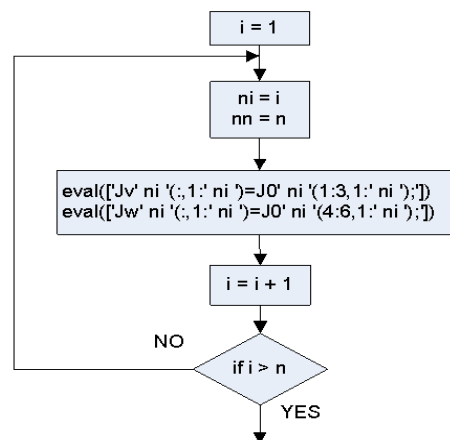
เตรียมเมตริกตำแหน่งของจุดปลายข้อต่อ $d00$ ซึ่งเป็น symbolic ที่มีขนาด (1,3)



นำค่า ch ที่ได้มาทำการแยกแกนของการหมุน (z_{i-1}) จากนั้นถ้าแกนกลเป็นแบบเลื่อน (prismatic) จะเป็นการเคลื่อนที่แบบเชิงเส้น ความเร็วเป็นความเร็วเชิงเส้น จะได้ $\frac{\partial d_0^n}{\partial q_i} = z_{i-1}$ แต่ถ้าแกนกลเป็นแบบหมุน (revolute) จะเป็นการเคลื่อนที่แบบเชิงมุม ความเร็วเป็นความเร็วเชิงมุม จะได้ $\frac{\partial d_0^n}{\partial q_i} = z_{i-1} \times (o_n - o_{i-1})$



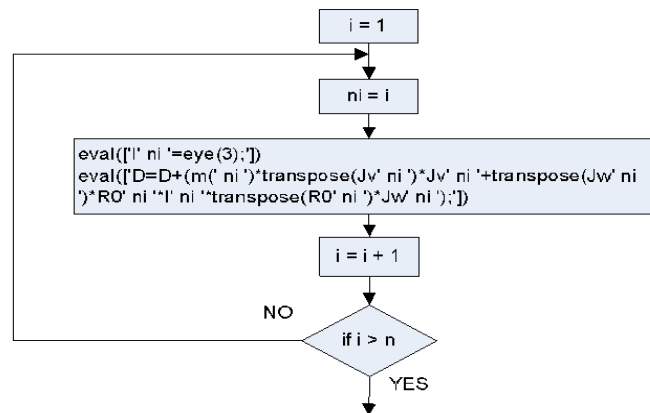
เตรียมเมตริก Jv และ Jw ที่มีขนาด $(3 \times n)$ ซึ่งเป็นเมตริกจาโคเบียน ที่ Jv เป็นเมตริกจาโคเบียนของความเร็วเชิงเส้น จะมีค่าที่ต่อเมื่อข้อต่อของตำแหน่งในเมตริก dh เป็นข้อต่อแบบเลื่อน Jw เป็นเมตริกจาโคเบียนของความเร็วเชิงมุม จะมีค่าที่ต่อเมื่อข้อต่อของตำแหน่งในเมตริก dh เป็นข้อต่อแบบหมุน



ใช้สมการที่ (2.29) ค่าของ J_v ได้มาจากเมตริก $J0(n)(1:3,1:n)$ ส่วน J_w ได้มาจาก เมตริก $J0(n)(4:6,1:n)$

```
eval(['D(n,n)=sym(0);'])
```

เตรียมเมตริกความเฉื่อย (Inertia Matrix) D ที่มีขนาด (n, n)



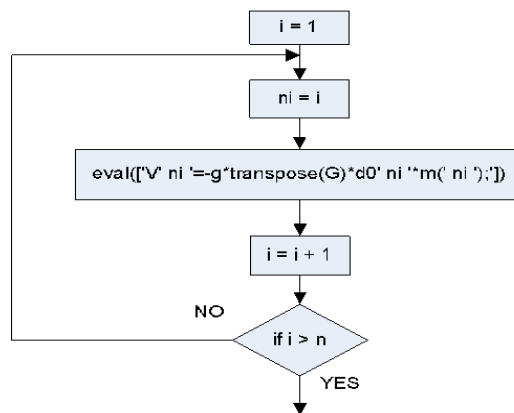
สร้างเมตริก $I(n)$ เป็นเมตริกเอกลักษณ์ที่มีขนาด $n \times n$

จากสมการที่ (2.59) จะได้ $D(q) = \sum_{i=1}^n [m_i J_{v_i}(q)^T J_{v_i}(q) + J_{w_i}(q)^T R_i(q) I_i R_i(q)^T J_{w_i}(q)]$

สร้างเมตริก $D = D + (m(n) \times \text{transpose}(J_v(n)) \times J_v(n) + \text{transpose}(J_w(n)) \times R0(n) \times I(n) \times \text{transpose}(R0(n)) \times J_w(n))$

```
g = sym([9.81])
```

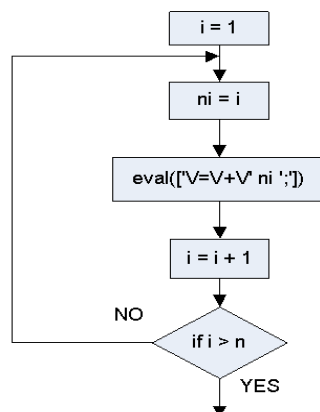
g เป็นตัวแปรแบบ symbolic มีค่าเท่ากับ 9.81 เป็นค่าแรงศูนย์กลางของโลก (Gravity)



สร้างสมการพลังงานศักย์จาก $V(n) = -g \times \text{transpose}(G) \times d0(n) \times m(n)$

$V = \text{sym}([0])$

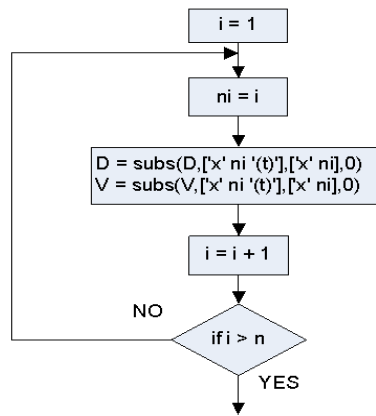
เตรียมตัวแปร V โดยให้เป็นตัวแปรแบบ symbolic ที่มีค่าเป็น 0 เพื่อรอรับค่าเข้ามา



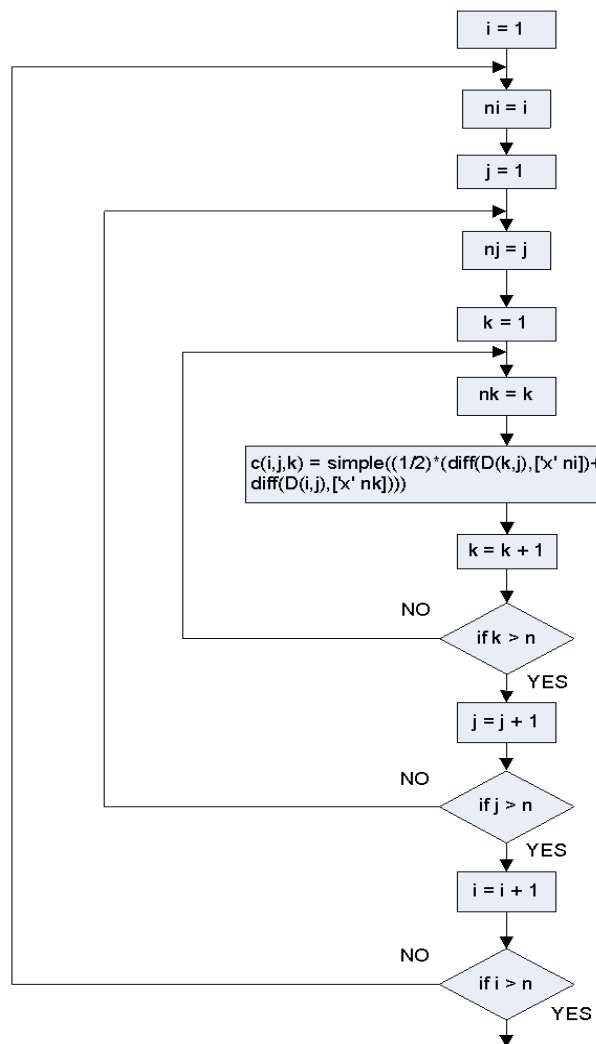
ค่าพลังงานศักย์ V เป็นค่าผลรวมพลังงานศักย์ทั้งระบบจะได้จาก $V = V + V(n)$

Euler_Lagrange

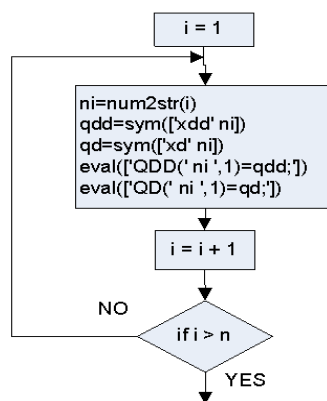
เรียกไฟล์ Euler_Lagrange.m ขึ้นมาคำนวณต่อ



ปรับค่าของเมตริก D และ V ให้ในเมตริกมีแต่ค่า $x(n)(t)$ โดยถ้ามีค่าอื่นอยู่ในเมตริกให้นำ 0 เข้าไปแทนค่า t จะได้ $x(n)(0)$



สร้างเมตริกคริสโทเฟล (Christoffel) c ที่มีขนาด (n,n,n) ดังสมการ (2.67)

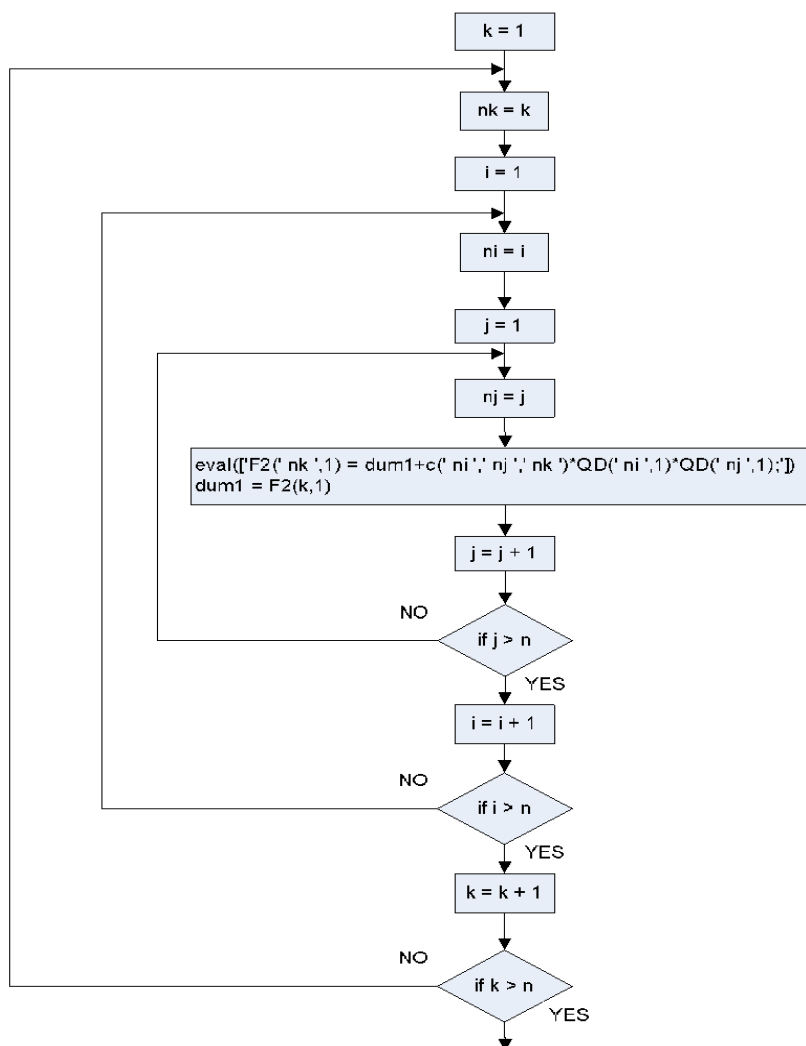


สร้างตัวแปร symbolic $QD = \dot{q}$ เป็น $QD = qd$ และ $QDD = \ddot{q}$ เป็น $QDD = qdd$

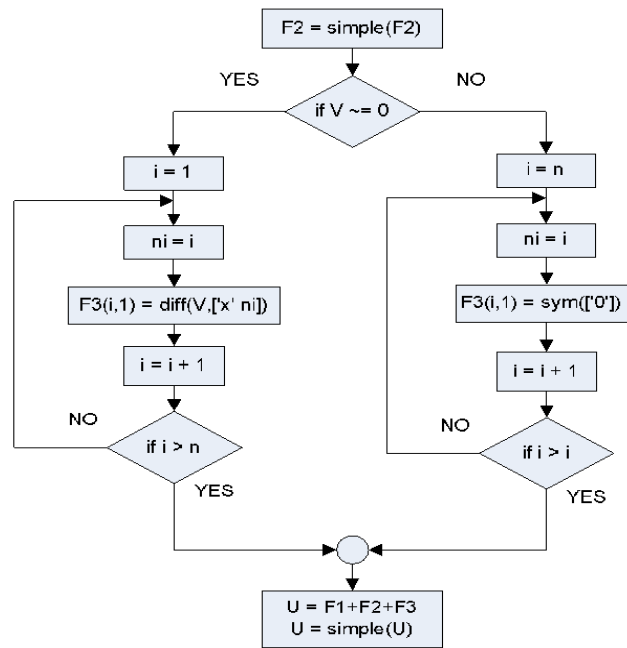
```

F1 = D*QDD
F1 = simple(F1)
dum1 = sym('0')
  
```

จากสมการที่ (2.70) ในเทอมแรกคือ $D(q)\ddot{q}$ จะได้ $F1 = D \times QDD$ หลังจากนั้นทำการลดรูปหรือทำให้เป็นสมการอย่างง่ายโดยใช้ฟังก์ชัน `simple` ของโปรแกรม



จากสมการที่ (2.70) เทอมที่สอง $C(q, \dot{q})\dot{q}$ จะได้ $F2 = \sum_{i=1}^n C_{ijk} \times QD_n \times QD_{n-1}$



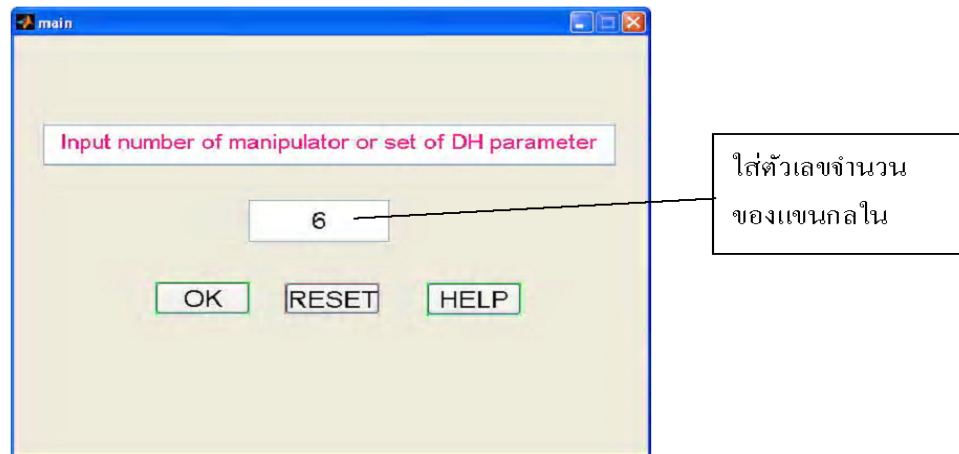
ลจรูปสมการที่สอง ถ้าพลังงานศักย์ไม่เท่ากับศูนย์ เทอมที่สาม ϕ_k จะทำการหาอนุพันธ์จากสมการที่ (2.68) แต่ถ้าเท่ากับศูนย์ เทอมที่สาม ϕ_k ก็จะมีค่าเท่ากับศูนย์เช่นกัน หลังจากนั้นรวมทั้งสามเทอมให้เป็นค่า U เสร็จแล้วลจรูปสมการ U

```
fid = fopen('Dynamic_equation.doc','w+')
```

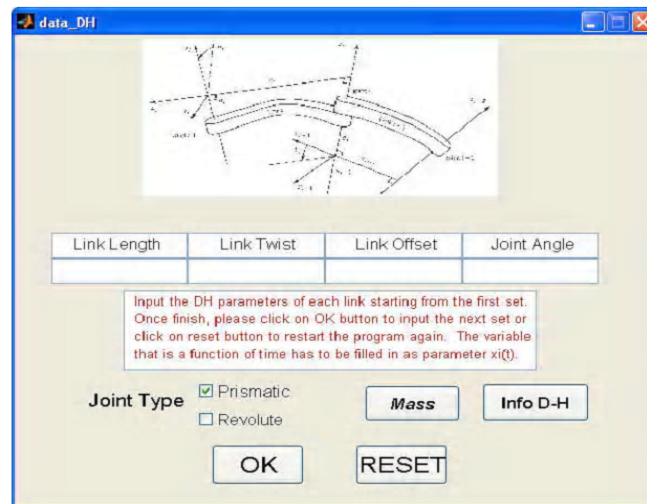
สร้างไฟล์ที่มีชื่อว่า *Dynamic_equation.doc* และเขียนค่าลงไฟล์นั้น เป็นไฟล์ของ โปรแกรม MS. Word

คู่มือการใช้โปรแกรมเชื่อมต่อกับผู้ใช้ทางกราฟิกในการหาสมการการเคลื่อนที่หุ่นยนต์

หน้าจอแรกเป็นการรับค่าจำนวนของแขนกล ซึ่งในหน้าจอนี้จะมีปุ่ม HELP ที่จะเป็คู่มือฉบับนี้สำหรับช่วยเหลือและเป็นแนวในการใช้โปรแกรมนี้ทั้งหมด



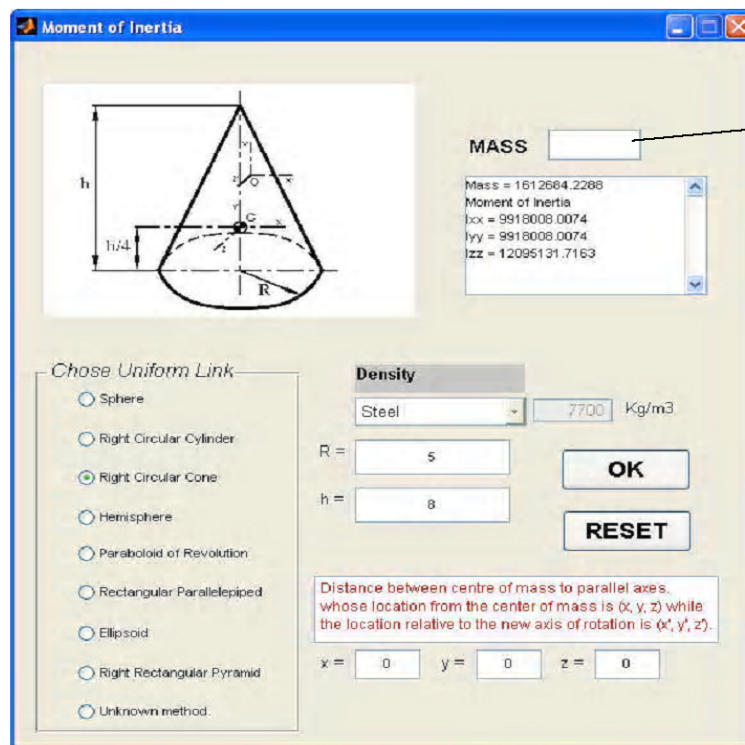
หลังจากใส่จำนวนของแขนกลแล้วจากนั้นมาใส่ข้อมูล D-H ของแขนกลนั้น ๆ ซึ่งมีข้อมูลของ Link Length, Link Twist, Link Offset และ Join Angle ดังรูป (อธิบายที่มาของค่าต่าง ๆ ที่ปุ่ม Info D_H) ค่าทั้งหมดสามารถใส่ได้ทั้งแบบเป็นตัวเลขและแบบตัวแปร ในค่าที่ไม่คงที่หรือค่าที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาให้ใส่ค่าตัวแปรเช่น $x_i(t)$ ที่ i เป็นลำดับที่ของแขนกล ขั้นตอนถัดมาเลือกประเภทของจุดต่อเป็นแบบเลื่อน (Prismatic) หรือแบบหมุน (Revolute) ที่ขาดไม่ได้ก็คือค่าของรายละเอียดของมวล ซึ่งต้องกดปุ่ม mass เพื่อเปิดหน้าจอรับค่าของมวล



หน้าจอรับค่าของมวลซึ่งจะนำไปทำการคำนวณหาโมเมนต์ความเฉื่อย โดยประกอบด้วย ส่วนหลัก 3 ส่วน คือ

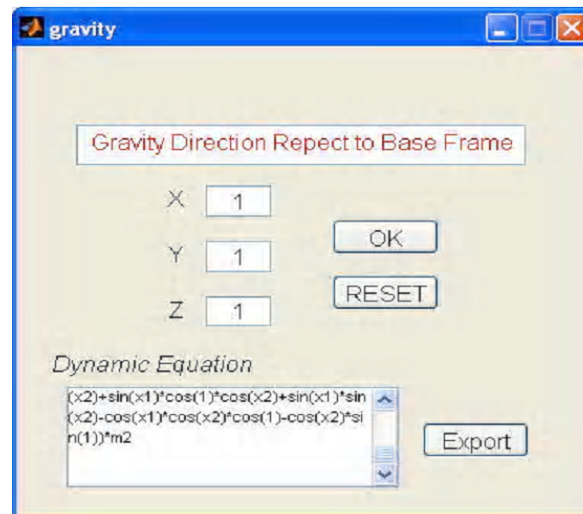
1. รูปร่างและขนาด ด้วยการเลือกรูปร่างของแขนกลจากที่โปรแกรมกำหนดซึ่งเป็นรูปร่างทรงเรขาคณิตอย่างง่าย เมื่อเลือกรูปร่างที่ต้องการแล้ว ให้ใส่ค่าขนาดของรูปร่างดังกล่าว
2. ระยะตำแหน่งการหมุน โดยเป็นค่าที่วัดจากจุด $G(x,y,z)$ ถึง $O(x',y',z')$ ดังภาพ
3. ความหนาแน่นของมวล (Density) สามารถเลือกจากโปรแกรมและสามารถใส่ค่าเองโดยเลือกเป็น User Define แล้วใส่ค่าความหนาแน่นที่มีหน่วยเป็น Kg/m^3

แต่ถ้าไม่ต้องการนำค่าโมเมนต์ความเฉื่อยมาคำนวณสามารถใส่ค่ามวลที่ช่อง mass ได้โดยใส่ได้ทั้งค่าที่เป็นตัวเลขและค่าที่เป็นตัวแปร

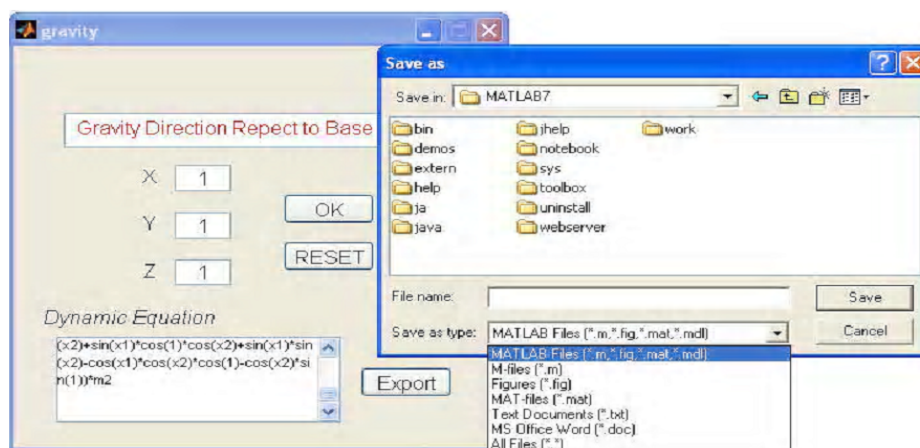


ใส่ค่าตัวแปรของ
มวลเช่น m_1 , m_2
เช่น ๑๕๐.

หน้าจอสุดท้ายเป็นการรับค่าของระยะจากแนวแกนหลักถึงจุดกำเนิดของเฟรมแต่ละแกน เมื่อใส่ค่าครบแล้วกดปุ่ม OK โปรแกรมจะแสดงสมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ในระบบที่หาในช่อง Dynamic Equation ดังภาพ



ถ้าต้องการให้ผลลัพธ์ที่ได้ ออกมาในรูปแบบของไฟล์ ให้กดปุ่ม Export เพื่อเลือกที่เก็บไฟล์และตั้งชื่อของไฟล์นั้น โดยสามารถเก็บเป็นไฟล์ได้หลายรูปแบบดังภาพ



อภิธานศัพท์

อภิธานศัพท์

Holonomic Constraints

แรงบังคับที่เกิดขึ้น

Homogeneous Matrix

โฮโมจีเนียสเมตริก

Jacobian

จาโคเบียน

Jacobian Matrix

จาโคเบียนเมตริก

Lagrange Method

วิธีของลากรางจ์

Lagrange Multipliers

ตัวคูณลากรางจ์

Nonholonomic Constraints

แรงที่เกิดขึ้นตรงข้ามกับแรงบังคับ

Numerical Method

วิธีเชิงตัวเลข

Optimum

ค่าที่เหมาะสมที่สุด

Prismatic Joint

จุดต่อแบบเลื่อน

Revolute Joint

จุดต่อแบบหมุน

Rotation Matrix

เมตริกที่ได้จากการที่วัตถุหมุนรอบแกนใด ๆ

Symbolic Method

วิธีเชิงสัญลักษณ์

Transformation Matrix

เมตริกที่ได้จากการเปลี่ยนรูปของวัตถุ

Virtual Displacements

การเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นจริง

คำอธิบายสัญลักษณ์

A_i	คือโฮโมจีเนียเมตริก (Homogeneous Matrix)
D	คือเมตริกความเฉื่อย
f_i	คือแรงที่กระทำต่ออนุภาคจากภายนอก
$f_i^{(a)}$	คือแรงบังคับ
F_i	คือแรงทั้งหมดต่ออนุภาค i
I_i	คือโมเมนต์ความเฉื่อยของข้อต่อ i
J_i	คือจาโคเบียนเมตริก (Jacobian Matrix)
K	คือพลังงานจลน์
L	คือลากรางจ์เจียน (Lagrangian)
m_i	คือมวลของข้อต่อ i
p_i	คือแรงเคลื่อนที่ของอนุภาค i
R_0^n	คือเมตริกที่ได้จากการที่วัตถุหมุนรอบแกนใด ๆ (Rotation Matrix)
T_i^j	คือทรานฟอร์มเมชันเมตริก (Transformation Matrix)
V	คือพลังงานศักย์
δr_i	คือการเคลื่อนที่ที่เกิดขึ้นจริง (Virtual Displacements)
ψ_j	คือผลรวมของแรงทั่วไปที่ถูกกระทำจากภายนอกและแรงที่แฝงอยู่ภายใน
ϕ_k	คือสัญลักษณ์คริสโตเฟล (Christoffel Symbols)

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นายวิรัช สิริทรัพย์ไพบูลย์
วันเดือนปีเกิด	10 สิงหาคม 2522
สถานที่เกิด	กรุงเทพมหานคร
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	56/113 ถ.พหลโยธิน สายใหม่ กทม. 10220
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2537	มัธยมศึกษาตอนต้น จากโรงเรียนฤทธิยะวรรณาลัย กรุงเทพมหานคร
พ.ศ. 2538	มัธยมศึกษาตอนปลาย จากโรงเรียนดอนเมืองทหารอากาศบำรุง กรุงเทพมหานคร
พ.ศ. 2542	อุดมศึกษาประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง จากสถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขตนนทบุรี จ.นนทบุรี
พ.ศ. 2546	อุดมศึกษาอุตสาหกรรมศาสตรบัณฑิต (อศ.บ. อุตสาหกรรม) จากสถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขตนนทบุรี จ.นนทบุรี
พ.ศ. 2551	บัณฑิตศึกษาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วศ.ม. เครื่องกล) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ