กระแสโจเซพสันชนิดตรงในระบบรอยต่อตัวนำยวดยิ่ง/ ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร / ตัวนำยวดยิ่ง

ปริญญานิพนธ์

ของ

เกริก ศักดิ์สุภาพ

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

มิถุนายน 2549

กระแสโจเซพสันชนิดตรงในระบบรอยต่อตัวนำยวดยิ่ง/ ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร / ตัวนำยวดยิ่ง

ปริญญานิพนธ์

ของ

เกริก ศักดิ์สุภาพ

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
มิถุนายน 2549

กระแสโจเซพสันชนิดตรงในระบบรอยต่อตัวนำยวดยิ่ง/ ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร / ตัวนำยวดยิ่ง

บทคัดย่อ

ของ

เกริก ศักดิ์สุภาพ

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

มิถุนายน 2549

เกริก ศักดิ์สุภาพ (2549). *กระแสโจเซพสันชนิดตรงในระบบรอยต่อตัวนำยวดยิ่ง / ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร / ตัวนำยวดยิ่ง.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. (ฟิสิกส์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม : ผู้ช่วยศาสตราจารย์นิรมล ปีตะนีละผลิน, ศาสตราจารย์ ดร.สุทัศน์ ยกส้าน .

ได้วิจัยเรื่องกระแสโจเซพสันชนิดตรงในระบบรอยต่อที่ประกอบด้วยตัวนำยวดยิ่งชนิดที่ 1/ ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร / ตัวนำยวดยิ่งชนิดที่ 2 เพื่อหากระแสโจเซพสันเป็นฟังก์ชันของตัวแปรต่างๆ เช่น ศักย์ฉนวน ค่ากำแพงศักย์ และอุณหภูมิ โดยใช้สมการบีดีจี และสูตรกระแสโจเซพสันของฟูรูซากิ กับซูกาดะ(Furusaki , Tsukada. 1991 : 299)

ผลการวิจัยได้สูตรกระแสโจเซพสันที่ยืนยันว่าถูกต้องเพราะเมื่อลดรูปสมการแล้วให้ผลตรงกับงานวิจัยระบบรอยต่อกระแสโจเซพสันรูปแบบต่างๆ ที่ได้มีผู้ทำไว้แล้ว และได้สูตรใหม่ซึ่งน่าจะสามารถนำไปใช้อธิบายหรือทำนายผลการทดลองใหม่ๆได้ด้วย

DIRECT JOSEPHSON CURRENT IN A SUPERCONDUCTOR / FERROMAGNETIC INSULATOR /SUPERCONDUCTOR JUNCTION

AN ABSTRACT

BY

KRIRK SAKSUPAB

Presented in partial fulfillment of the requirements
for the Master of Education degree in Physics
at Srinakharinwirot University
June 2006

Krirk Saksupab. (2006). *Direct Josephson Current in a Superconductor /Ferromagnetic Insulator / Superconductor Junction .* Master thesis, M.Ed. (Physics). Bangkok : Graduate school, Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Assistant Professor Niramol Pitanilaphalin , Professor.Dr.Suthat Yoksan .

The purpose of this research is to derive a formula for the direct Josephson current in a superconductor /ferromagnetic insulator / superconductor junction by using the BdG equation and the Josephson current formula of Furusaki and Tsukada. The resulting formula is found to be correct because it recovers all the formulas for various types of superconducting junction as obtained by other investigation under suitable boundary conditions. New formulas are also derived which can be used to explain or predict new experimental results.

ปริญญานิพนธ์
เรื่อง

กระแสโจเซพสันชนิดตรงในระบบรอยต่อตัวนำยวดยิ่ง/
ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร / ตัวนำยวดยิ่ง

ของ
นายเกริก ศักดิ์สุภาพ

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

....คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เพ็ญสิริ จีระเดชากุล)
วันที่..........เดือน.......................พ.ศ. ....

คณะกรรมการสอบปริญญานิพนธ์

.... ประธานควบคุมปริญญานิพนธ์
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์นิรมล ปีตะนีละผลิน)

.... กรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์
(ศาสตราจารย์ ดร. สุทัศน์ ยกส้าน)

.... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(อาจารย์สมศักดิ์ มณีรัตนะกูล)

.... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(รองศาสตราจารย์ ดร. รัศมีดารา หุ่นสวัสดิ์)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้เป็นงานวิจัยฟิสิกส์ทฤษฎี ซึ่งสำเร็จลงได้ด้วยการชี้แนะและชี้นำการทำงานจาก ศาสตราจารย์ ดร. สุทัศน์ ยกส้าน จนทำให้งานวิจัยสำเร็จลุล่วงได้ และรวมทั้งความเมตตาและความใจกว้างของท่านที่มีต่อผู้วิจัยตลอดระยะเวลาของการทำงานวิจัยที่ผ่านมา ผู้วิจัยมีความรู้สึกซาบซึ้งและขอกราบขอบพระคุณท่านเป็นอย่างสูง

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ นิรมล ปีตะนีละผลิน ที่ให้คำแนะนำเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆเพิ่มเติมเกี่ยวกับปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ และต้องกราบขอบพระคุณอาจารย์สมศักดิ์ มณีรัตนะกูล และรองศาสตราจารย์.ดร.รัศมีดารา หุ่นสวัสดิ์ ที่ให้ความอนุเคราะห์เป็นคณะกรรมการในการสอบปากเปล่า

ขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์อาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์ ที่ได้ให้ความรู้และคำปรึกษาแก่ผู้วิจัยตลอดการศึกษาที่ผ่านมา

ขอขอบคุณพี่บำเหน็จ สุดชมโฉม ที่ให้ความช่วยเหลือแนะนำแก่ผู้วิจัยเป็นอย่างดี และขอบคุณเพื่อนนิสิตปริญญาโท รวมทั้งพนักงานในภาควิชาฟิสิกส์ทุกคนที่ได้ให้ความช่วยเหลือและกำลังใจในหลายๆเรื่องแก่ผู้วิจัยตลอดเวลาที่ผ่านมา

และท้ายที่สุด ผู้วิจัยต้องขอกราบขอบพระคุณ บิดา – มารดา และบุคคลในครอบครัวเป็นอย่างสูงที่ได้ให้การสนับสนุนแก่ผู้วิจัยมาโดยตลอด

เกริก ศักดิ์สุภาพ

สารบัญ

บทที่ หน้า

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ หน้า

บัญชีภาพประกอบ(ต่อ)

ภาพประกอบ หน้า

บัญชีภาพประกอบ(ต่อ)

ภาพประกอบ หน้า

บทที่ 1
บทนำ

ภูมิหลัง

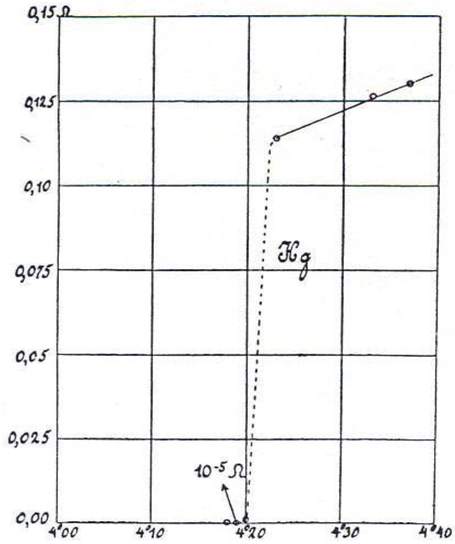
ราวคริสตศตวรรษที่ 18 นักฟิสิกส์ได้พยายามลดอุณหภูมิของก๊าซต่าง ๆลงจนก๊าซกลายสถานะเป็นของเหลว และก็ได้พบว่าของเหลวที่ได้มีคุณสมบัติที่ไม่เคยคาดฝันมาก่อน ในปี ค.ศ. 1908 คาเมอร์ลิงห์ โอนเนส (citing Onnes Kamerlingh. 1911:1206-1226) ที่มหาวิทยาลัยไลเดน (Leiden) สามารถทำก๊าซฮีเลียมให้เป็นของเหลวได้สำเร็จเป็นครั้งแรก

ตามปกติ ในการเปลี่ยนสถานะจากก๊าซเป็นของเหลวนั้น นักฟิสิกส์ใช้วิธีเพิ่มความดัน เพราะความดันทำให้โมเลกุลของก๊าซอยู่ใกล้ชิดกันมากขึ้น เป็นผลให้แรงยึดเหนี่ยวระหว่างโมเลกุลมากขึ้น ส่งผลให้โมเลกุลของก๊าซไม่สามารถเคลื่อนที่สะเปะสะปะได้อีกต่อไป จนในที่สุดก๊าซก็เปลี่ยนสถานะเป็นของเหลว อย่างไรก็ตาม ถ้าขณะทำการทดลองอุณหภูมิของก๊าซสูงกว่าอุณหภูมิวิกฤต (Critical Temperature) ก๊าซจะไม่สามารถเปลี่ยนสภาพเป็นของเหลวได้ถึงแม้ความดันที่ใช้กระทำต่อก๊าซจะสูงเพียงใดก็ตาม

ก่อนปี ค.ศ. 1879 นักฟิสิกส์ประสบความสำเร็จในการเปลี่ยนก๊าซหลายชนิดให้เป็นของเหลวได้ แต่สำหรับก๊าซไฮโดรเจน ไนโตรเจนและออกซิเจนยังไม่มีใครสามารถทำให้เป็นของเหลวได้ ความล้มเหลวนี้จึงทำให้นักวิทยาศาสตร์บางคนคิดว่า ก๊าซทั้งสามชนิดเป็นก๊าซถาวร (permanent gas) จนกระทั่งถึงปี ค.ศ.1887 แคล์ลิเตก์ (Cailletet) นักวิทยาศาสตร์ชาวฝรั่งเศสสามารถทำให้ก๊าซออกซิเจนเป็นของเหลวได้ที่อุณหภูมิ 90.2 K และอีก 6 ปี ต่อมานักวิทยาศาสตร์ประสบความสำเร็จในการทำไนโตรเจนให้เป็นของเหลวที่อุณหภูมิ 77.4 K ในปี ค. ศ. 1898 เซอร์ เจมส์ ดีวาร์ (Sir James Dewar) ก็สามารถทำให้ไฮโดรเจน เป็นของเหลวได้ที่อุณหภูมิ 20.4 K

โดยปกติ เวลาอุณหภูมิลดต่ำ การสั่นของโมเลกุลในสสารโดยอิทธิพลของความร้อนจะลดลงด้วย ยังผลให้แรงยึดเหนี่ยวระหว่างโมเลกุลเพิ่มขึ้น จนกระทั่งถึงระดับที่สามารถเปลี่ยนของเหลวไปเป็นของแข็งได้ แต่สำหรับฮีเลียมเหลว ความรู้ฟิสิกส์ดั้งเดิมไม่สามารถอธิบายพฤติกรรมที่ประหลาดของฮีเลียมได้ เพราะได้มีการคำนวณพบว่าฮีเลียมยังคงสถานะเป็นของเหลวที่ศูนย์องศาสัมบูรณ์ถึงแม้อะตอมจะไม่มีการเคลื่อนไหวใด ๆเพราะอิทธิพลของความร้อนก็ตาม ในการทดลองระยะแรก ๆ ออนเนส รู้สึกประหลาดใจในความหนาแน่นของฮีเลียมเหลวที่น้อยมาก คือน้อยกว่าน้ำถึงแปดเท่า การมีความหนาแน่นน้อยแสดงว่าอะตอมของฮีเลียมอยู่ห่างกันมาก ดังนั้นจึงเป็นการยากที่จะทำให้ฮีเลียมเป็นของแข็งได้ แต่หลังจากที่ออนเนสประสบความสำเร็จในการทำอุณหภูมิของสสารให้ลดต่ำจนใกล้ศูนย์องศาสัมบูรณ์และทำฮีเลียมให้เป็นของเหลวแล้ว ออนเนสได้ทดลองพบอีกว่า สสารที่มีอุณหภูมิต่ำมากจะแสดงปรากฏการณ์แปลก ๆที่ไม่มีใครพบมาก่อน

ออนเนสจึงเริ่มศึกษาสมบัติด้านกายภาพของสารที่มีอุณหภูมิต่ำมาก และในปี ค.ศ. 1911 ออนเนส พบตัวนำยวดยิ่ง (superconductor) ซึ่งแสดงคุณสมบัติของการไร้ความต้านทานไฟฟ้า เมื่อสารเหล่านั้นมีอุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตและสภาวะไร้ความต้านทานไฟฟ้าสามารถเกิดได้ในโลหะบริสุทธ์และในโลหะผสมที่มีสารเจือ (impurity)



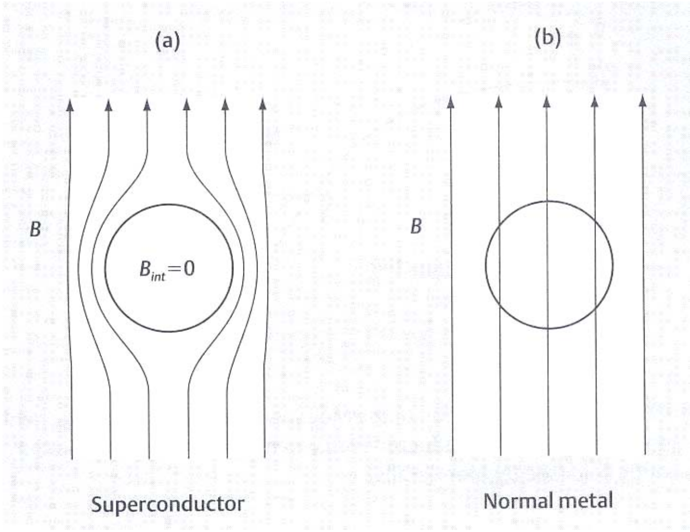
ภาพประกอบ 1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสภาพต้านทานไฟฟ้ากับอุณหภูมิของปรอทบริสุทธิ์ที่ทำการทดลองโดยออนเนส

ที่มา : Buckel.(1991).*Superconductivity Fundamentals and Applications*.p.1.

โดยได้พบว่าที่อุณหภูมิ –269 องศาเซลเซียส (4 K) ปรอทบริสุทธิ์หมดสภาพต้านทานไฟฟ้าอย่างฉับพลัน ออนเนส เรียกอุณหภูมิที่ตัวนำหมดสภาพต้านทานไฟฟ้าว่า อุณหภูมิวิกฤต ก่อนปี ค.ศ. 1986 ได้มีการทดลองพบ อุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งชนิดสารประกอบคู่และธาตุ เช่น ไนโอเบียมเยอรมาเนียม (Nb_3Ge) และสังกะสี (Zn) มีค่าเท่ากับ 23.2 K และ 9.2 K ตามลำดับ ซึ่งเป็นสถิติอุณหภูมิที่ต่ำมากเมื่อเปรียบเทียบกับอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยวดยิ่งสมัยปัจจุบันนี้

ตัวนำยวดยิ่งในสนามแม่เหล็ก

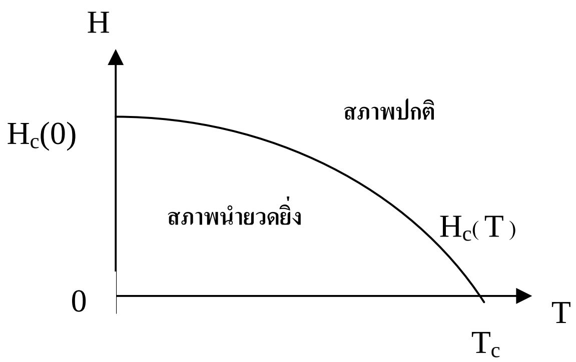
ในปี ค. ศ. 1933 ไมส์สเนอร์และออคเซนเฟลด์ (Ketterson.;& Buckel. 1999 :2 ;citing Meissner & Ochsenfeld. 1933 : 787) ได้พบสมบัติพื้นฐานที่สำคัญอีกประการหนึ่งของตัวนำยวดยิ่ง คือ สนามแม่เหล็กไม่สามารถทะลุเข้าไปในสารที่เป็นตัวนำยวดยิ่งได้เมื่อตัวนำมีอุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤต แต่เมื่ออุณหภูมิสูงกว่าอุณหภูมิวิกฤตซึ่งตัวนำยวดยิ่งกลายสภาพเป็นตัวนำปกติ สนามแม่เหล็กสามารถที่จะทะลุทะลวงเข้าไปได้



ภาพประกอบ 2 ปรากฏการณ์ไมสส์เนอร์(Meissner effect)
ที่มา : Ketterson.,& Song. (1991).Superconductivity. p.3.

ดังที่กล่าวมาแล้วว่า สนามแม่เหล็กไม่สามารถทะลุผ่านเข้าไปในสารที่อยู่ในสภาพนำยวดยิ่งได้ แต่ก็มีสนามแม่เหล็กบ้างที่บริเวณใต้ผิวนอกของตัวนำยวดยิ่งเล็กน้อยจึงเรียกความหนาของชั้นที่มีสนามแม่เหล็กนี้ว่า ความลึกในการเจาะทะลุทะลวงของสนาม (field penetration depth , λ) ซึ่งเป็นเอกลักษณ์ที่สำคัญอีกประการของสภาพนำยวดยิ่งคือ ความเข้มสนามแม่เหล็กจะลดลงแบบเอกซ์โปเนนเชียลตามความลึก

แต่ถ้าเราเพิ่มความเข้มสนามแม่เหล็กจนถึงค่าหนึ่ง คือ H_c ซึ่งเรียกว่าสนามวิกฤต(critical field) แล้วจะพบว่าสภาพนำยวดยิ่งถูกทำลาย และสารจะกลับมาเป็นตัวนำปกติ ค่าสนามวิกฤตนี้ขึ้นกับอุณหภูมิ ซึ่งเมื่ออุณหภูมิมีค่าเข้าใกล้อุณหภูมิวิกฤต ความเข้มของสนามวิกฤตก็จะมีค่าน้อยลง ดังภาพประกอบ 3 ซึ่งแสดงสนามวิกฤตที่แปรตามอุณหภูมิ



ภาพประกอบ 3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามแม่เหล็กวิกฤตกับอุณหภูมิ
ที่มา : Kersin, & Wolf.(1990).*Superconductivity*.p.10.

พบว่า สนามวิกฤตมีค่ามากที่สุด ที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ และที่อุณหภูมิวิกฤต สนามแม่เหล็กวิกฤตมีค่าเป็นศูนย์ เขียนความสัมพันธ์ของสนามวิกฤตกับอุณหภูมิ (Kresin and Wolf. 1990 :10) ได้ดังนี้

$$H_c(T) = H_c(0)\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right] \tag{1.1}$$

เมื่อ $H_c(T)$ คือ สนามวิกฤตที่อุณหภูมิ T องศาสัมบูรณ์ใดๆ

$H_c(0)$ คือ สนามวิกฤตที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์

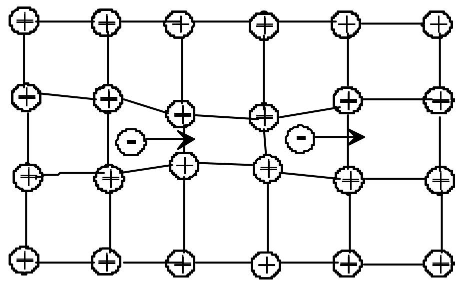
และ T_c คือ อุณหภูมิวิกฤต

ดังนั้นตัวนำยวดยิ่งจะเปลี่ยนเป็นตัวนำปกติเมื่อเพิ่มความเข้มของสนามแม่เหล็ก หรือเพิ่มอุณหภูมิ

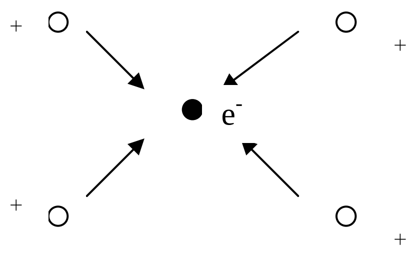
ความลึกลับของปรากฏการณ์สภาพนำยวดยิ่ง

ปัญหาที่เกี่ยวกับสาเหตุที่ทำให้เกิดสภาพนำยวดยิ่ง ได้ท้าทายสมองของนักวิทยาศาสตร์ชั้นนำของโลก เช่น ไอน์สไตน์ (Einstein) ไฮเซนเบอร์ก (Heisenberg) แลนเดา (Landau) บล็อก (Bloch) เฟรงเกล (Frenkel) เป็นต้น แต่ก็ไม่มีนักวิทยาศาสตร์ท่านใดประสบความสำเร็จในการอธิบายสมบัติต่างๆ ของสภาพนำยวดยิ่งได้หมดซึ่งแสดงให้เห็นถึงความยากที่จะศึกษาปัญหานี้ ใน ค.ศ. 1957 ทฤษฎีของสภาพนำยวดยิ่งเชิงจุลภาคได้ถือกำเนิด ซึ่งนับเป็นเวลาเกือบครึ่งศตวรรษหลังจากที่ได้มีการค้นพบปรากฏการณ์นี้ จึงเป็นการยากที่จะสรุปเป็นอย่างอื่นนอกจากว่าปริศนาสภาพนำไฟฟ้ายวดยิ่งเป็นเรื่องลึกลับที่สุดปัญหาหนึ่งของฟิสิกส์ยุคใหม่

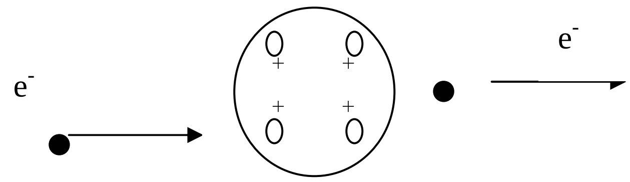
ทฤษฎีที่ประสบความสำเร็จในการอธิบายคุณสมบัติทั่วไปของตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิต่ำ คือ ทฤษฎีของบารดีน คูเปอร์ และชริฟเฟอร์ (Bardeen , Cooper and Schrieffer) ซึ่งเรียกโดยย่อว่า ทฤษฎีบีซีเอส (BCS Theory) ทฤษฎีนี้อธิบายว่าปัจจัยสำคัญที่ทำให้ตัวนำปกติเป็นตัวนำยวดยิ่งได้คือ การจับคู่ของอิเล็กตรอนซึ่งเรียกว่า คู่คูเปอร์ (Cooper pair) เมื่ออิเล็กตรอนเคลื่อนที่ไปในแลตทิซ (lattice) มันจะทำอันตรกิริยากับอิออนบวกในแลตทิซจนแลตทิซเสียรูปทรง ดังภาพประกอบ 4 เพราะอันตรกิริยาแบบอิเล็กตรอน-แลตทิซ (electron - lattice - electron) ที่เกิดขึ้นเมื่ออิเล็กตรอนเคลื่อนที่ผ่านเข้าไปในระหว่างกลุ่มอิออนที่มีประจุบวกซึ่งอยู่บนแลตทิซโดยอิเล็กตรอนจะดึงดูดอิออนบวกในบริเวณรอบๆให้เคลื่อนที่เข้าใกล้ทำให้แลตทิซเสียรูป มีผลทำให้บริเวณรอบๆ อิเล็กตรอนมีความหนาแน่นของอิออนบวกเพิ่มมากขึ้น ซึ่งความหนาแน่นอิออนบวกนี้มีผลกระทบต่ออิเล็กตรอนอีกตัวหนึ่งที่อยู่ในบริเวณนั้น คือ อิเล็กตรอนตัวนั้นจะถูกกลุ่มกลุ่มอิออนบวกดึงดูดเข้าไปทำให้ดูเสมือนว่าอิเล็กตรอนตัวแรกดึงดูดอิเล็กตรอนตัวหลังตามปกติเมื่ออิออนบวกในแลตทิซสั่น จะเกิดคลื่นซึ่งคลื่นนี้มีกำเนิดมาจากอิเล็กตรอนที่เคลื่อนที่เข้าไปข้างในแลตทิซแล้วรบกวนอิออนบวกในแลตทิซที่สั่น เรียกอนุภาคของคลื่นในแลตทิซว่า โฟนอน(phonon) การรับ– คาย หรือแลกเปลี่ยนโฟนอนระหว่างอิเล็กตรอนแสดงให้เห็นว่าจะเกิดแรงดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนที่สามารถชนะแรงอันตรกิริยาผลักแบบคูลอมบ์ได้ อิเล็กตรอนจึงสามารถจับกันเป็นคู่คูเปอร์ได้ และคู่คูเปอร์นี้ประกอบด้วยอิเล็กตรอนที่มีโมเมนตัมและสปินเท่ากันแต่มีทิศทางตรงกันข้ามและเรียกระยะห่างระหว่างอิเล็กตรอนคู่หนึ่งๆว่าความยาวอาพันธ์(coherent length , ζ) และเมื่ออุณหภูมิเพิ่มสูงอิออนบวกในแลตทิซจะสั่นเนื่องจากถูกอิทธิพลของความร้อนมาก ทำให้อันตรกิริยาผลักแบบคูลอมบ์มีค่ามากกว่าอันตรกิริยาดึงดูด อิเล็กตรอนจึงไม่สามารถจับคู่กันเป็นคู่คูเปอร์ได้



ภาพประกอบ 4 แสดงการสูญเสียรูปทรงของแลตทิซเมื่ออิเล็กตรอนเคลื่อนที่เข้าไประหว่าง
อิออนในแลตทิซและทำอันตรกิริยาของคู่อิเล็กตรอนทำให้เกิดคู่คูเปอร์
(Tsuei & Kirtley. 1996 : 6)



ภาพประกอบ 5 แสดงอิเล็กตรอนในตัวนำยวดยิ่งเมื่อเคลื่อนที่ผ่านกลุ่มอิออนที่มีประจุบวก

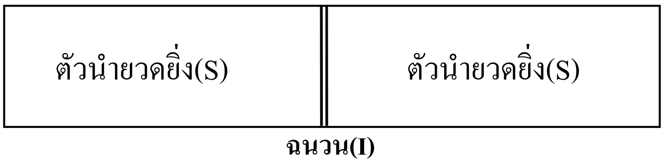


ภาพประกอบ 6 แสดงการดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนโดยใช้กลุ่มอิออนที่มีประจุบวกเป็นสื่อ

การที่อิเล็กตรอนสองตัวมาจับคู่กันทำให้อิเล็กตรอนต้องสูญเสียพลังงานไปส่วนหนึ่ง พลังงานที่หายไปนี้ทำให้เกิดช่องว่างพลังงาน (energy gap , Δ) สำหรับตัวนำยวดยิ่งที่เป็นไปตามทฤษฎีบีซีเอส(ตัวนำยวดยิ่งที่อุณหภูมิต่ำ) คู่คูเปอร์จะมีโมเมนตัมลัพธ์เป็นศูนย์ ($l = 0$) เราเรียกตัวนำยวดยิ่งชนิดนี้ว่า ตัวนำยวดยิ่งชนิดคลื่นเอส (s-wave) ตามปกติช่องว่างพลังงานที่ผิวเฟร์มีเกิดขึ้นได้สองลักษณะ คือ ช่องว่างพลังงานที่ไม่ขึ้นกับทิศทาง(isotropic) คือขนาดของช่องว่างที่ผิวเฟร์มี มีค่าสม่ำเสมอในทุกทิศทางและช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับทิศทาง(anisotripic) คือ ขนาดของช่องว่างพลังงานที่ผิวเฟร์มี มีค่าไม่สม่ำเสมอคือไม่เท่ากันในทุกทิศทุกทาง

ปรากฏการณ์โจเซพสัน

ในปี ค.ศ. 1962 โจเซพสัน (Josephson . 1962 : 251) ได้พบปรากฏการณ์ซึ่งต่อมาเรียกว่าปรากฏการณ์โจเซพสัน(Josephson effect) โดยโจเซพสันได้คำนวณ พบว่าในระบบที่ประกอบด้วย แผ่นตัวนำยวดยิ่งสองแผ่นประกบกันและคั่นระหว่างกันด้วยฉนวนบางๆ
(ดังภาพประกอบ 7) จะมีกระแสยวดยิ่ง (Supercurrent) ชนิดตรงไหลผ่านรอยต่อได้ทั้งๆที่ระหว่างรอยต่อของตัวนำยวดยิ่งไม่มีความต่างศักย์ไฟฟ้า จึงเรียกกระแสยวดยิ่งชนิดตรงนี้ว่า กระแสโจเซพสัน (Josephson current) และเรียกระบบที่มีรอยต่อระหว่างตัวนำยวดยิ่งทั้งสองว่า ระบบรอยต่อโจเซพสัน (Josephson junction)



ภาพประกอบ 7 แสดงระบบรอยต่อโจเซฟสัน $S/I/S$ ที่เกิดจากตัวนำยวดยิ่งสองตัวประกบ
กันโดยมีฉนวนบางๆคั่น

โจเซพสันพบว่ากระแสโจเซพสันชนิดตรงนั้นจะมีค่าขึ้นกับเฟสของฟังก์ชันคลื่นของคู่คูเปอร์ ในตัวนำยวดยิ่งทั้งสองถ้ากำหนดเฟสของค่าพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบสภาพนำยวดยิ่ง (Superconducting order parameter) ของตัวนำยวดยิ่งทางซ้าย เป็น ϕ_1 และตัวนำยวดยิ่งทางขวา เป็น ϕ_2 ค่ากระแสโจเซพสันจะเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$I = I_c \sin(\phi_2 - \phi_1) \tag{1.2}$$

เมื่อ I_c เป็นค่ากระแสยวดยิ่งสูงสุดที่ไหลผ่านรอยต่อโจเซฟสันและ $(\phi_2 - \phi_1) = \Delta\phi$ เป็นความต่างเฟสของฟังก์ชันคลื่น ในรอยต่อโจเซพสัน ความสัมพันธ์ในสมการ(1.2) เรียกว่าความสัมพันธ์ ดีซี-โจเซพสัน (dc-Josephson relation) และจากสมการ (1.2) พบว่า

(ก) เมื่อ $\phi_2 - \phi_1 > 0$ กระแสโจเซพสันชนิดตรง I มีการไหลจากตัวนำยวดยิ่งทางขวาไปยังตัวนำยวดยิ่งทางซ้าย

(ข) เมื่อ $\phi_2 - \phi_1 < 0$ กระแสโจเซพสันชนิดตรง I จะไหลในทิศตรงข้ามกับกรณี (ก)

(ค) เมื่อ $\phi_2 - \phi_1 = n\pi$, n เป็นจำนวนเต็ม กระแสโจเซพสันชนิดตรงจะเป็นศูนย์

ตามปกติค่าของ I_c ขึ้นกับพารามิเตอร์ต่างๆมากมาย เช่น กำแพงศักย์ระหว่างฉนวนกับตัวนำยวดยิ่ง และความหนาของฉนวน เป็นต้น

ปรากฏการณ์โจเซพสันกระแสตรงจึงเป็นปรากฏการณ์หนึ่งในธรรมชาติของสภาพนำยวดยิ่งซึ่งได้มีการพบว่ากระแสยวดยิ่งสามารถไหลผ่านรอยต่อที่มีฉนวนบางๆคั่นได้ทั้งๆที่รอยต่อไม่มีความต่างศักย์ไฟฟ้าตกคร่อมรอยต่อเลยจึงแตกต่างจากการไหลของกระแสไฟฟ้าของอนุภาคอิเล็กตรอนเดี่ยวในตัวนำธรรมดาที่จะต้องไบอัส(Bias)แรงดันกระแสจึงจะสามารถไหลผ่านรอยต่อได้ ธรรมชาติที่น่าทึ่งเช่นนี้จึงนับเป็นสิ่งที่ท้าทายทั้งนักทฤษฎีและนักทดลองที่จะศึกษาธรรมชาติและทำการทดลองใหม่ๆเพื่อให้เข้าใจธรรมชาติของปรากฏการณ์นี้อย่างกระจ่าง

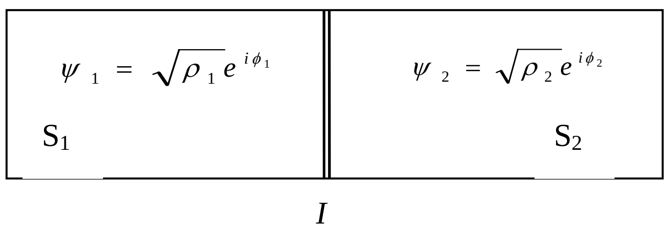
บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการคำนวณหากระแสโจเซพสันชนิดตรงในระบบที่มีรอยต่อซึ่งประกอบด้วยตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร/ตัวนำยวดยิ่งชนิดแม่เหล็กเฟอร์โร ได้นำเสนอเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้

1. ทฤษฎีกระแสโจเซพสันชนิดตรงของฟายน์แมน (R. P. Feynman)
2. สมการบีดีจี (Bogoliubov de-Gennes equation)
3. การสะท้อนแบบแอนเดรฟ (Andreev reflection)
4. ทฤษฎีของปรากฏการณ์โจเซพสันชนิดตรง
5. ทฤษฎีกระแสโจเซพสันชนิดตรงในระบบที่มีรอยต่อตัวนำยวดยิ่ง/ฉนวน/ตัวนำยวดยิ่งของ ฟูรูซากิ กับ ซูกาดะ (Furusaki and Tsukada)

1. ทฤษฎีกระแสโจเซพสันชนิดตรงของฟายน์แมน

ฟายน์แมน (R. P. Feynman.1965: 273)ได้อธิบายการเกิดปรากฏการณ์โจเซพสัน โดยการใช้กลศาสตร์ควอนตัมหาสูตรแสดงความสัมพันธ์ระหว่างกระแสกับความต่างเฟสของพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบในตัวนำยวดยิ่งทั้งสอง โดยฟายน์แมนได้กำหนดฟังก์ชันคลื่นของคู่คูเปอร์ ดังภาพประกอบ 8 เป็น ψ_1 สำหรับตัวนำยวดยิ่งด้านซ้ายและψ_2 สำหรับตัวนำยวดยิ่งด้านขวา



ภาพประกอบ 8 S $_1$และ S_2 แทนตัวนำยวดยิ่งที่1 และตัวนำยวดยิ่งตัวที่ 2 ที่มีฟังก์ชันคลื่น ψ_1, ψ_2 ตามลำดับ และ I เป็นฉนวนที่มีความบางมาก

เมื่อกำหนดฟังก์ชันคลื่นของคู่คูเปอร์

$$\psi_k = \rho_k^{1/2} e^{i\phi_k} \qquad (k = 1,2) \tag{2.1}$$

ในที่นี้ ρ_k เป็นความหนาแน่นของคู่คูเปอร์ในตัวนำยวดยิ่งตัวที่ k

และ ϕ_k เป็นเฟสของฟังก์ชันคลื่นคู่คูเปอร์ในตัวนำยวดยิ่งตัวที่ k

เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของ ฟังก์ชันคลื่นทั้งสอง เป็นไปตามสมการโชรดิงเงอร์ (Schrödinger) คือ

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t} &= \mu_1\psi_1 + K\psi_2 \\ i\hbar\frac{\partial\psi_2}{\partial t} &= \mu_2\psi_2 + K\psi_1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

เมื่อ $\mu_k (k = 1,2)$ แทน พลังงานศักย์เคมีของตัวนำยวดยิ่งตัวที่ k

K แทนค่าคงที่ของอันตรกิริยาคู่ควบระหว่างตัวนำยวดยิ่งที่ 1 กับ 2

และ $\hbar$ คือ ค่านิจของพลังค์หารด้วย 2π โดย $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

หาอนุพันธุ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันคลื่นตามสมการ (2.1) เทียบกับเวลา จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi_1}{\partial t} &= \frac{1}{2\sqrt{\rho_1}}\frac{\partial\rho_1}{\partial t}e^{i\phi_1} + \sqrt{\rho_1}\,i\frac{\partial\phi_1}{\partial t}e^{i\phi_1} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial t} &= \frac{1}{2\sqrt{\rho_2}}\frac{\partial\rho_2}{\partial t}e^{i\phi_2} + \sqrt{\rho_2}\,i\frac{\partial\phi_2}{\partial t}e^{i\phi_2} \end{aligned} \tag{2.3}$$

แทนค่า $\frac{\partial\psi_1}{\partial t}, \psi_1$ และ ψ_2 ลงในสมการที่ (2.2) จะได้

$$i\hbar\left[\frac{1}{2\sqrt{\rho_1}}\frac{\partial\rho_1}{\partial t}e^{i\phi_1} + \sqrt{\rho_1}\,i\frac{\partial\phi_1}{\partial t}e^{i\phi_1}\right] = \mu_1\sqrt{\rho_1}e^{i\phi_1} + K\sqrt{\rho_2}e^{i\phi_2}$$

นำ $\frac{-i}{\hbar}e^{-i\phi_1}$ คูณตลอด

$$\frac{1}{2\sqrt{\rho_1}}\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + i\sqrt{\rho_1}\frac{\partial\phi_1}{\partial t} = -i\frac{\mu_1\sqrt{\rho_1}}{\hbar} - i\frac{K\sqrt{\rho_2}}{\hbar}[\cos\varphi + i\sin\varphi]$$

เมื่อ $\varphi = \phi_2 - \phi_1$ และ $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

นำ $2\sqrt{\rho_1}$ คูณตลอด

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + i2\rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = -i\frac{2\mu_1\rho_1}{\hbar} - \frac{2i\sqrt{\rho_1\rho_2}}{\hbar} K[\cos\varphi + i\sin\varphi]$$

แยกส่วนจริงและส่วนจินตภาพของสมการออกมา ดังนั้น

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \frac{2K}{\hbar}\sqrt{\rho_1\rho_2}\sin\varphi \tag{2.4}$$

และ

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} = -\frac{\mu_1}{\hbar} - \frac{K}{\hbar}\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}\cos\varphi \tag{2.5}$$

ในทำนองเดียวกันเมื่อแทนค่า $\frac{\partial \psi_2}{\partial t}, \psi_1, \psi_2$ ใน(2.2) จะได้

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} = -\frac{2K}{\hbar}\sqrt{\rho_1\rho_2}\sin\varphi \tag{2.6}$$

และ

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} = -\frac{\mu_2}{\hbar} - \frac{K}{\hbar}\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}\cos\varphi \tag{2.7}$$

พิจารณากรณีที่ $\rho_1 \equiv \rho_2 \equiv \rho_0$ (กรณีตัวนำยวดยิ่งทั้งสองข้างของฉนวนเป็นชนิดเดียวกัน) สมการ (2.4) และ (2.6) แสดงว่า

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_1}{\partial t} \tag{2.8}$$

ความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าของคู่อิเล็กตรอน (pair current density) I มีค่าเป็น

$$\frac{I}{2e} = \frac{\partial \rho_2}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_1}{\partial t} \qquad (2.9)$$

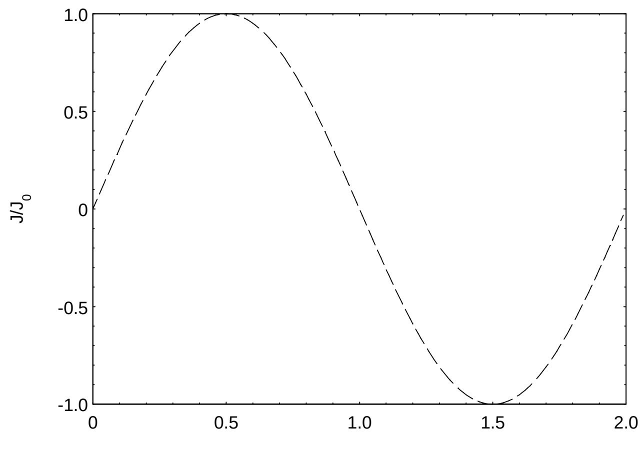
จาก (2.4) และ (2.6) จะได้เป็น

$$I = \frac{4eK}{\hbar} \rho_0 \sin \varphi \qquad (2.10)$$

ดังนั้นค่ากระแสวิกฤตโจเซพสันตามวิธีคิดของฟายน์แมน คือ

$$I_C = \frac{4eK\rho_0}{\hbar} \qquad (2.11)$$

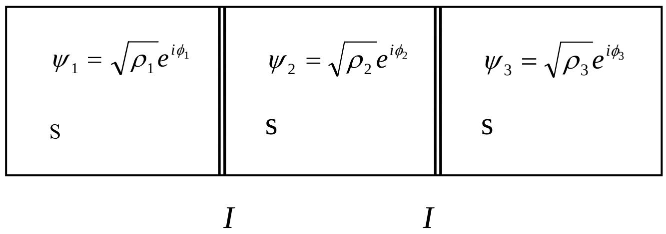
จะเห็นได้ว่า I_C ที่ได้ขึ้นกับ K และ ρ_0 และนี่คือค่ากระแสที่มากที่สุดที่ไหลผ่านรอยต่อ



ภาพประกอบ 9 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง I / I_c กับ φ

กรณี ระบบรอยต่อตัวนำยวดยิ่ง/ฉนวน/ตัวนำยวดยิ่ง/ฉนวน/ตัวนำยวดยิ่ง

ในปี ค.ศ. 2002 ทีเม่ย (T.Mei .2002 : 3965-3705) ได้ศึกษากระแสโจเซพสันชนิดตรงในระบบที่ประกอบด้วยรอยต่อที่เป็นตัวนำยวดยิ่ง/ฉนวน/ตัวนำยวดยิ่ง/ฉนวน/ตัวนำยวดยิ่ง(superconductor/insulator/superconductor/insulator/superconductor)โดยการใช้กลศาสตร์ควอนตัมหาสูตรแสดงความสัมพันธ์ระหว่างกระแสกับความต่างเฟสของฟังก์ชันคลื่นของคู่คูเปอร์ตามวิธีคิดของฟายน์แมน



ภาพประกอบ 10 S_1, S_2 และ S_3 แทนตัวนำยวดยิ่ง ที่มีฟังก์ชันคลื่น ψ_1,ψ_2,ψ_3 ตามลำดับ และ I เป็นฉนวนที่มีความบางมาก

เมื่อกำหนดฟังก์ชันคลื่นของคู่คูเปอร์

$$\psi_k = \rho_k^{1/2} e^{i\phi_k} \qquad (k = 1,2,3) \tag{2.12}$$

ในที่นี้ ρ_k เป็นความหนาแน่นของคู่คูเปอร์ในตัวนำยวดยิ่งตัวที่ k

และ ϕ_k เป็นเฟสของฟังก์ชันคลื่นคู่คูเปอร์ในตัวนำยวดยิ่งตัวที่ k

เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของ ฟังก์ชันคลื่น เป็นไปตามสมการโชรดิงเงอร์(Schrödinger) คือ

$$i\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t}=\mu_1\psi_1+K_{21}^{\mathrm{I}}\psi_2 \tag{2.13}$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi_2}{\partial t}=\mu_2\psi_2+K_{12}^{\mathrm{I}}\psi_1+K_{32}^{\mathrm{II}}\psi_3 \tag{2.14}$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi_3}{\partial t}=\mu_3\psi_3+K_{23}^{\mathrm{II}}\psi_2 \tag{2.15}$$

เมื่อ $\mu_k\,(k=1,2,3)$ แทน พลังงานศักย์เคมีของตัวนำยวดยิ่งตัวที่ k

$K_{lm}^{n}\left(n=\mathrm{I},\mathrm{II}\,;l,m=1,2,3\right)$ แทน ค่าคงที่ของอันตรกิริยาคู่ควบระหว่างตัวนำยวดยิ่ง l,m ที่อยู่ใกล้กัน

และ $\hbar$ คือ ค่านิจของพลังค์หารด้วย 2π โดย $\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$

หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันคลื่นตามสมการ (2.12) เทียบกับเวลา จะได้

$$\frac{\partial\psi_k}{\partial t}=\frac{1}{2\sqrt{\rho_k}}\frac{\partial\rho_k}{\partial t}e^{i\phi_k}+\sqrt{\rho_k}\,i\frac{\partial\phi_k}{\partial t}e^{i\phi_k}\qquad(k=1,2,3) \tag{2.16}$$

แทนค่า $\dfrac{\partial\psi_1}{\partial t},\psi_1$ และ ψ_2 ลงในสมการที่ (2.13) และทำการแยกส่วนจริงและส่วนจินตภาพ

จะได้

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t}=\frac{2K_{21}^{\mathrm{I}}}{\hbar}\sqrt{\rho_1\rho_2}\sin\left(\phi_2-\phi_1\right) \tag{2.17}$$

และ

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial t}=-\frac{\mu_1}{\hbar}-\frac{K_{21}^{\mathrm{I}}}{\hbar}\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}\cos\left(\phi_2-\phi_1\right) \tag{2.18}$$

ในทำนองเดียวกันเมื่อแทนค่า $\frac{\partial \psi_2}{\partial t}, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ ใน (2.14) จะได้

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} = -\frac{2K_{12}^{\mathrm{I}}}{\hbar}\sqrt{\rho_1 \rho_2}\sin(\phi_2 - \phi_1) + \frac{2K_{32}^{\mathrm{II}}}{\hbar}\sqrt{\rho_2 \rho_3}\sin(\phi_3 - \phi_2) \tag{2.19}$$

และ

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} = -\frac{\mu_2}{\hbar} - \frac{2}{\hbar}K_{12}^{\mathrm{I}}\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\cos(\phi_1 - \phi_2) - \frac{K_{32}^{\mathrm{II}}}{\hbar}\sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_2}}\cos(\phi_3 - \phi_2) \tag{2.20}$$

ในทำนองเดียวกันเมื่อแทนค่า $\frac{\partial \psi_3}{\partial t}, \psi_2, \psi_3$ ใน(2.15) จะได้

$$\frac{\partial \rho_3}{\partial t} = \frac{2K_{23}^{\mathrm{II}}}{\hbar}\sqrt{\rho_2 \rho_3}\sin(\phi_2 - \phi_3) \tag{2.21}$$

และ

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial t} = -\frac{\mu_3}{\hbar} - \frac{K_{23}^{\mathrm{II}}}{\hbar}\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_3}}\cos(\phi_2 - \phi_3) \tag{2.22}$$

ถ้า $\rho_1 \equiv \rho_2 \equiv \rho_3 = \rho_0$ (กรณีตัวนำยวดยิ่งชนิดเดียวกัน) และ

$$K_{12}^{\mathrm{I}} = K_{21}^{\mathrm{I}} = K^{\mathrm{I}} \tag{2.23}$$

$$K_{23}^{\mathrm{II}} = K_{32}^{\mathrm{II}} = K^{\mathrm{II}} \tag{2.24}$$

ความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าของคู่อิเล็กตรอน (pair current density) I มีค่าเป็น

$$\frac{I}{2e} = \frac{\partial \rho_2}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_1}{\partial t} \tag{2.25}$$

ความหนาแน่นกระแส I_1, I_2 ในบริเวณรอยต่อ I, II เขียนได้เป็น

$$I_1 = \frac{4K^{\mathrm{I}}\rho_0 A}{\hbar}\sin(\phi_2 - \phi_1) \tag{2.26}$$

และ

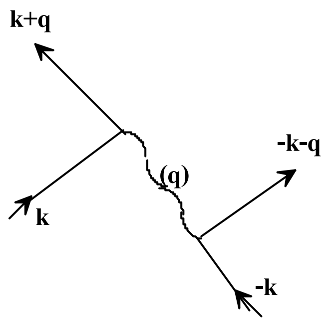
$$I_2 = \frac{4K^{\mathrm{II}}\rho_0 A}{\hbar}\sin(\phi_3 - \phi_2) \tag{2.27}$$

เมื่อ A เป็นพารามิเตอร์ที่ใช้ทำตัวนำยวดยิ่ง

งานวิจัยของ T.Mei. นั้นมีสมการของฟังก์ชันคลื่นที่ไม่สม่ำเสมอ ผลการวิจัยจึงยังไม่ถูกต้อง

2.สมการบีดีจี

ในตัวนำยวดยิ่งสภาพนำยวดยิ่ง (superconductivity) เกิดจากอิเล็กตรอนที่มีโมเมนตัม $\vec{k}$ สปิน↑ กับอิเล็กตรอนที่มีโมเมนตัม $-\vec{k}$ สปิน↓ จับคู่กันเป็นคู่คูเปอร์(Cooper pair) กระบวนการรับและคายโฟนอน (ภาพประกอบ 11) ทำให้โมเมนตัมลัพธ์ของคู่คูเปอร์มีค่าคงที่เท่ากับศูนย์ การมีคู่คูเปอร์เป็นสาเหตุที่ทำให้เกิดสภาพนำยวดยิ่ง



ภาพประกอบ 11 แสดงแผนภาพของฟายน์แมน (Feynman diagram) ของคู่คูเปอร์แบบทฤษฎีบีซีเอส อิเล็กตรอนโมเมนตัม $\vec{k}$ สปิน↑ รับโฟนอนที่มีโมเมนตัม $\vec{q}$ จากอิเล็กตรอนที่มีโมเมนตัม $-\vec{k}$ สปิน ↓

ทฤษฎีบีซีเอสได้กำหนดฮามิลโทเนียนของคู่คูเปอร์ในตัวนำยวดยิ่งบริสุทธิ์

$$\hat{H} = \int dx\,\hat{\psi}^{+}_{\alpha}(x,t)H_0\hat{\psi}_{\alpha}(x,t) + \int dx dx'\hat{\psi}^{+}_{\downarrow}(x',t)\hat{\psi}^{+}_{\uparrow}(x,t)V(x-x')\hat{\psi}_{\uparrow}(x,t)\hat{\psi}_{\downarrow}(x',t) \quad (2.28)$$

เมื่อ $\hat{\psi}(x,t)$ เป็นตัวดำเนินการทำลายของสนามเฟร์มีออนของอิเล็กตรอน

$\hat{\psi}^{+}(x,t)$ เป็นตัวดำเนินการสร้างของสนามเฟร์มีออนของอิเล็กตรอน

α เป็นสปินของเฟร์มีออนซึ่งในที่นี้คืออิเล็กตรอนจึงมีค่า↑ และ↓

$V(x-x')$ เป็นพลังงานของอันตรกริยาระหว่างอิเล็กตรอนมีค่าเท่ากับ $-g\delta(x-x')$

g เป็นค่าคงตัว และ $\delta(x-x')$ คือ ดิแรกเดลต้าฟังก์ชัน

และ H_0 เป็นฮามิลโทเนียนพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนเดี่ยวอิสระ

คุณสมบัติของตัวดำเนินการของสนามเฟร์มีออน(fermion field) เป็นดังนี้

$$\left[\hat{\psi}_\alpha(x,t),\hat{\psi}_\beta(x',t)\right]_+ = 0\,,\left[\hat{\psi}^+_\alpha(x,t),\hat{\psi}^+_\beta(x',t)\right]_+ = 0$$

และ

$$\left[\hat{\psi}_\alpha(x,t),\hat{\psi}^+_\beta(x',t)\right]_+ = \delta_{\alpha\beta}\delta(x-x') \qquad (2.29)$$

เมื่อ α,β เป็นดัชนีสปิน $\uparrow,\downarrow$

$\delta_{\alpha\beta}$ เป็นฟังก์ชันโครเนกเกอร์เดลต้า

และสัญลักษณ์ $[\ ]_+$ คือ anti-commutation นั้นคือ

$$[A,B]_+ = AB + BA \qquad (2.30)$$

สำหรับวิธีการหาสมการของการเคลื่อนที่ของ $\hat{\psi}_\uparrow(x,t)$ กับ $\hat{\psi}^+_\downarrow(x,t)$ สามารถทำได้โดยใช้วิธีการของไฮเซนเบอร์ก(Heisenberg ' s picture) ที่กำหนดรูปแบบของสมการของการเคลื่อนที่จากความสัมพันธ์

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\psi}_\uparrow(x,t)}{\partial t} = \left[\hat{\psi}_\uparrow(x,t),\hat{\overline{H}}\right] \qquad (2.31)$$

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\psi}^+_\downarrow(x,t)}{\partial t} = \left[\hat{\psi}^+_\downarrow(x,t),\hat{\overline{H}}\right] \qquad (2.32)$$

โดยที่ $\hat{\overline{\mathrm{H}}}$ เป็นฮามิลโทเนียนยังผล(Effective Hamiltonian) ของสมการ (2.28) ในที่นี้คือ

$$\hat{\overline{H}} = \int dx\,\hat{\psi}_\alpha{}^+(x,t)H_0\hat{\psi}_\alpha(x,t)$$

$$+\int dx\left\{\Delta^+(x)\hat{\psi}_\uparrow(x,t)\hat{\psi}_\downarrow(x,t) + \Delta(x)\hat{\psi}^+_\downarrow(x,t)\hat{\psi}^+_\uparrow(x,t)\right\} \qquad (2.33)$$

เมื่อ $\Delta(x)$ กับ $\Delta^{+}(x)$ คือพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบของสภาพนำยวดยิ่ง (Superconducting order parameter)

ซึ่งได้กำหนดให้

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= -g\left\langle \hat{\psi}_{\uparrow}(x,t)\hat{\psi}_{\downarrow}(x,t)\right\rangle \\ \Delta^{+}(x) &= -g\left\langle \hat{\psi}_{\downarrow}^{+}(x,t)\hat{\psi}_{\uparrow}^{+}(x,t)\right\rangle\end{aligned} \tag{2.34}$$

จากสมการ (2.31)และ (2.32) จะได้สมการการเคลื่อนที่ของ $\hat{\psi}_{\uparrow}(x,t)$ และ $\hat{\psi}_{\downarrow}^{+}(x,t)$ ดังนี้

$$i\hbar\frac{\partial \hat{\psi}_{\uparrow}(x,t)}{\partial t} = H_0\hat{\psi}_{\uparrow}(x,t) - \Delta(x)\hat{\psi}_{\downarrow}^{+}(x,t) \tag{2.35}$$

$$i\hbar\frac{\partial \hat{\psi}_{\downarrow}^{+}(x,t)}{\partial t} = -H_0^{+}\hat{\psi}_{\downarrow}^{+}(x,t) - \Delta^{+}(x)\hat{\psi}_{\uparrow}(x,t) \tag{2.36}$$

และในการแปลงแบบโบโกลีวบอพ(Bogoliubov 's transformation) เขียนสนามของอิเล็กตรอนให้อยู่ในเทอมของสนามของอนุภาคควอไซดังนี้

$$\begin{bmatrix}\hat{\psi}_{\uparrow}(x,t)\\ \hat{\psi}_{\downarrow}^{+}(x,t)\end{bmatrix} = \sum_{n}\begin{bmatrix}u_n(x) & v_n(x)\\ -v_n^{+}(x) & u_n^{+}(x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\gamma}_{n\uparrow}\\ \hat{\gamma}_{n\downarrow}^{+}\end{bmatrix} \tag{2.37}$$

ในสนามของอนุภาคควอไซหากให้ $\hat{\gamma}_{n\uparrow}$ (annihilation operator)และ $\hat{\gamma}^{+}_{n\downarrow}$ (creation operator) เป็นฟังก์ชันของเวลา

$$\begin{bmatrix} \hat{\gamma}_{n\uparrow} \\ \hat{\gamma}^{+}_{n\downarrow} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} e^{-i\frac{\in_n t}{\hbar}} \tag{2.38}$$

เมื่อให้ $C_2 = 0$ สมการ (2.37) คือ

$$\begin{bmatrix} \hat{\psi}_{\uparrow}(x,t) \\ \hat{\psi}^{+}_{\downarrow}(x,t) \end{bmatrix} = \sum_n \begin{bmatrix} u_n(x) \\ -v^{+}_n(x) \end{bmatrix} C_1 e^{-i\frac{\in_n t}{\hbar}} \tag{2.39}$$

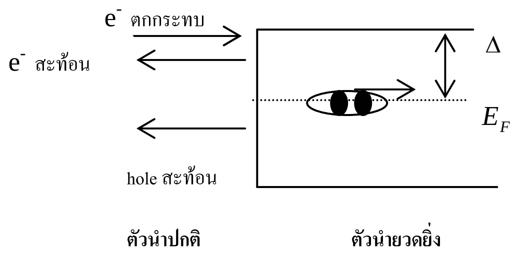
และเมื่อแทนค่าสมการ (2.39) ลงในชุดสมการ (2.35) กับ (2.36) จะได้สมการเมทริกซ์ใหม่ที่เรียกว่า สมการบีดีจี (Bogoliubov de-Gennes equation) ดังนี้

$$\in_n \begin{bmatrix} u_n(x) \\ v^{+}_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_0 & \Delta(x) \\ \Delta^{+}(x) & -H^{+}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n(x) \\ v^{+}_n(x) \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

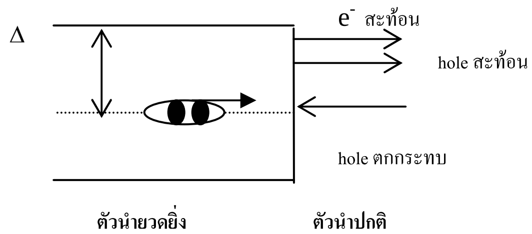
สมการ(2.40)ใช้สำหรับศึกษาธรรมชาติของอนุภาคในตัวนำยวดยิ่งและสมการนี้มีความสำคัญต่อการคำนวณกระแสโจเซพสันมากเมื่อเราพิจารณาปัญหาการกระเจิง (Scattering problem) ของอนุภาคควอไซอิเล็กตรอนหรืออนุภาคควอไซโฮลที่ระบบที่เป็นรอยต่อโจเซพสัน (Josephson junction)

3. การสะท้อนแบบแอนเดรฟ

พิจารณารอยต่อระหว่างตัวนำปกติกับตัวนำยวดยิ่ง ที่มีช่องว่างพลังงานเท่ากับ Δ



ภาพประกอบ 12 การสะท้อนแบบแอนเดรฟเป็นการสะท้อนในตัวนำปกติทางด้านซ้ายที่อิเล็กตรอนซึ่งมีพลังงานน้อยกว่า Δ ได้เปลี่ยนเป็น โฮล (โฮล ก็คือ อิเล็กตรอน แต่มีประจุบวก และมีโมเมนตัม $\vec{k}$ มีทิศตรงข้าม) แล้วทำให้เกิดคู่คูเปอร์ในตัวนำยวดยิ่งทางด้านขวา(S_R)



ภาพประกอบ 13 เป็นการสะท้อนที่ โฮลในตัวนำปกติ ได้เปลี่ยนเป็น อิเล็กตรอนแล้วทำให้เกิดคู่คูเปอร์ในตัวนำยวดยิ่งทางซ้าย (S_L)

เมื่อพิจารณาจากภาพประกอบ 12 และ ภาพประกอบ 13 ขณะที่อิเล็กตรอนในตัวนำปกติพุ่งชนตัวนำยวดยิ่งด้านขวา(S_R) ณ ตำแหน่งที่พลังงานของอิเล็กตรอน (E) เท่ากับความสูงของกำแพงศักย์ ซึ่งเกิดจาก พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบ โมเมนตัมจะมีค่าเท่ากับศูนย์ ($\vec{k}=0$) และ ณ ตำแหน่งนี้อิเล็กตรอนจะสะท้อนกลับ ทำให้เกิดอิเล็กตรอนที่มีทิศของโมเมนตัมและสปิน กลับ เรียกว่า โฮล ทั้งนี้เพราะขณะอิเล็กตรอนเคลื่อนที่เข้าใกล้ ตัวนำยวดยิ่ง พลังงานของอิเล็กตรอนจะลดลงๆ ทั้งนี้ เพราะ กำแพงศักย์อันเกิดจาก Δ มีค่าเพิ่มมากขึ้น

จากกฎอนุรักษ์พลังงาน

จะเห็นได้ว่า $\vec{k}$ จะลดลงเรื่อย จนเมื่อ $E = V$ เราจะได้

$$\frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} = E - V$$

$$\frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} = 0$$

นั้นคือ $\vec{k} = 0$ (2.41)

เมื่อ E คือ พลังงานทั้งหมดของอิเล็กตรอน

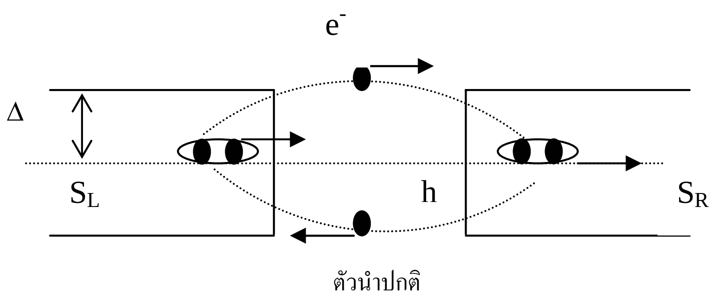
V คือ พลังงานศักย์

m คือ มวลของอิเล็กตรอน มีค่า 9.1 x 10^{-31} kg

$\hbar$ คือ ค่าคงตัวของพลังค์ (Planck' s constant) ที่หารด้วย 2π จึงมีค่า 1.054 x 10^{-34} Js

$\vec{k}$ คือ เวกเตอร์คลื่น เท่ากับ $\frac{2\pi}{\lambda}$ ทำให้ $\hbar k$ คือ โมเมนตัม

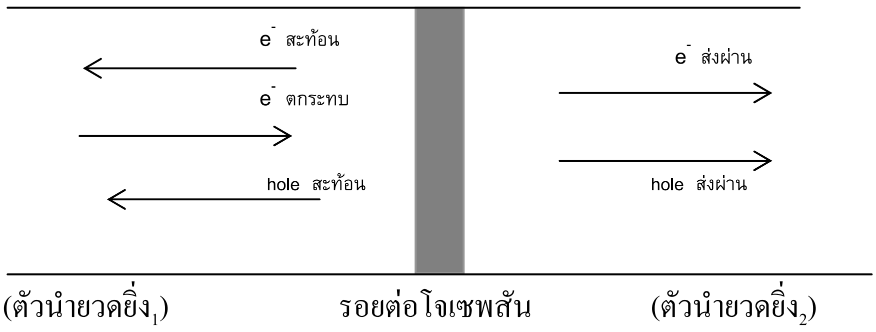
ตำแหน่งที่ $\vec{k} = 0$ คือ ตำแหน่งที่อิเล็กตรอนวกกลับ ซึ่งจะเห็นว่าขณะที่ในตอนแรกอิเล็กตรอนพุ่งชนแผ่นตัวนำยวดยิ่งสมมติอิเล็กตรอนมีสปินชี้ขึ้น $\uparrow$ และเมื่อสะท้อนกลับออกมา เป็น โฮล ซึ่งมีสปินชี้ลง $\downarrow$ ดังนั้น เพื่อให้โมเมนตัมของระบบในตัวนำยวดยิ่งคงที่จะต้องมีคู่คูเปอร์เกิด ซึ่งมีสปินเป็น $\uparrow\downarrow$ คู่อิเล็กตรอนที่เกิดขึ้นใหม่ เป็นคู่คูเปอร์ (Cooper pair) ในกรณีอนุภาคโฮล ที่สะท้อนในตัวนำปกตินั้น เวลาปะทะตัวนำยวดยิ่งที่อยู่ด้านซ้าย S_L ก็จะสะท้อนกลับให้อิเล็กตรอน ซึ่งจะทำให้เกิดคู่คูเปอร์ใหม่ในตัวนำยวดยิ่งด้านขวา S_R เช่นกัน วัฏจักรการถ่ายเทคู่คูเปอร์ จากตัวนำยวดยิ่งทางซ้ายไปยังตัวนำยวดยิ่งทางขวา จึงดำเนินต่อไปเป็นกระแสโจเซพสันชนิดตรงไหลจากตัวนำยวดยิ่งหนึ่งไปสู่อีกตัวนำหนึ่ง



ภาพประกอบ 14 การถ่ายเทคู่คูเปอร์จากตัวนำยวดยิ่งด้านซ้ายไปยังตัวนำยวดยิ่งทางด้านขวาซึ่งอธิบายได้จากการสะท้อนแบบแอนเดรฟ

4. ทฤษฎีของปรากฏการณ์โจเซฟสันชนิดตรง

การหากระแสโจเซฟสันอีกวิธีหนึ่งคือ การพิจารณาปัญหาของการกระเจิง(Scattering problem)ที่รอยต่อโจเซฟสัน เพื่อหาค่าแอมปลิจูดการสะท้อนแบบแอนเดรฟ ฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคควอไซที่สะท้อนและส่งผ่านหาได้จากผลเฉลยของสมการบีดีจี



ภาพประกอบ 15 แสดงภาพการกระเจิงของอนุภาคควอไซชนิดอิเล็กตรอนที่รอยต่อโจเซฟสัน

ในปี ค.ศ.1991 ฟูรูซากิ กับ ซูกาดะ (Furusaki , Tsukada. 1991 : 299)ได้คำนวณกระแสโจเซฟสัน ในระบบที่เป็นรอยต่อโจเซฟสันซึ่งประกอบด้วย ตัวนำยวดยิ่ง$_1$/ฉนวน/ตัวนำยวดยิ่ง$_2$ นี้เป็นงานวิจัยที่สำคัญซึ่งจะถูกอ้างอิงเพื่อประยุกต์หากระแสโจเซฟสันชนิดตรงในระบบรอยต่อโจเซฟสันแบบต่างๆเสมอ ในการคำนวณ ฟูรูซากิ กับ ซูกาดะ ได้นิยามให้การเคลื่อนที่ของอนุภาคควอไซเป็นไปตามสมการ บีดีจี คือ

$$\hat{\mathrm{H}}\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}) \tag{2.42}$$

เมื่อ

$$\hat{\mathrm{H}} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\vec{r}) - E_F(\vec{r})\right) & \Delta(\vec{r}) \\ \Delta^*(\vec{r}) & -\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\vec{r}) - E_F(\vec{r})\right) \end{pmatrix}$$

และเมื่อ $\Psi(\vec{r})$ เป็นฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคควอไซที่ตำแหน่ง $\vec{r}$, m เป็นมวลอิเล็กตรอน $\Delta(\vec{r})$ เป็นค่าช่องว่างพลังงานที่ตำแหน่ง $\vec{r}$, $U(\vec{r})$ เป็นพลังงานศักย์ที่ตำแหน่ง $\vec{r}$ และ $E_F(\vec{r})$ เป็นพลังงานเฟร์มีที่ตำแหน่ง $\vec{r}$

การคำนวณพิจารณาปัญหาการกระเจิงของอนุภาคควอไซ กำหนดให้ที่ผิวรอยต่อมีพลังงานศักย์ของฉนวนเป็น

$$U(x) = V\delta(x) \qquad (2.43)$$

เมื่อ V คือ ความสูงของกำแพงศักย์

ให้ค่าช่องว่างพลังงานของตัวนำยวดยิ่งทั้งสอง

$$\Delta(x) = \begin{cases} \Delta_1 e^{i\phi_1}, x \le 0 \\ \Delta_2 e^{i\phi_2}, x \ge 0 \end{cases} \qquad (2.44)$$

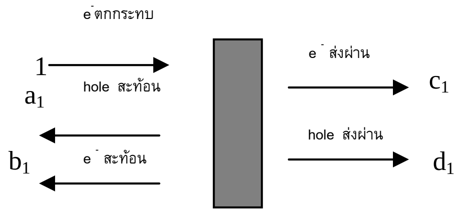
และ ค่าพลังงานเฟร์มี

$$E_F(x) = \begin{cases} E_{F1} & , x \le 0 \\ E_{F2} & , x \ge 0 \end{cases} \qquad (2.45)$$

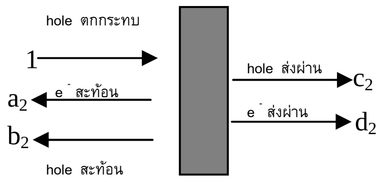
เมื่อตำแหน่ง $x = 0$ คือ ตำแหน่งของฉนวน ที่ถือว่ามีความบางมาก

การกระเจิงที่รอยต่อโจเซพสันสามารถกำหนดรูปแบบได้ถึง 4 รูปแบบดังนี้

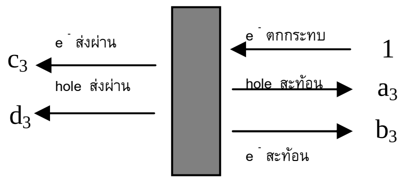
<u>รูปแบบที่</u> 1



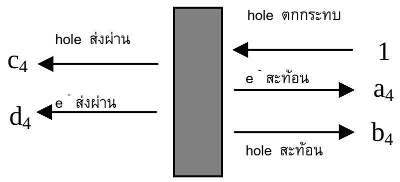
<u>รูปแบบที่</u> 2



<u>รูปแบบที่</u> 3



<u>รูปแบบที่</u> 4



ภาพประกอบ 16 แสดงรูปแบบการกระเจิงของคลื่นอนุภาคควอไซทั้งอิเล็กตรอนและโฮล ที่ระบบรอยต่อโจเซพสันทั้ง 4 รูปแบบ

โดยที่ อิเล็กตรอน ที่มีทิศพุ่งไปทางขวา $\longrightarrow$ เฟสอยู่ในรูปของ $e^{ik^e x}$ หรือ $e^{ik^+ x}$

อิเล็กตรอน ที่มีทิศไปทางซ้าย $\longleftarrow$ เฟสอยู่ในรูปของ $e^{-ik^e x}$ หรือ $e^{-ik^+ x}$

โฮล ที่มีทิศไปทางขวา $\longrightarrow$ เฟสอยู่ในรูปของ $e^{-ik^h x}$ หรือ $e^{-ik^- x}$

โฮล ที่มีทิศไปทางซ้าย $\longleftarrow$ เฟสอยู่ในรูปของ $e^{ik^h x}$ หรือ $e^{ik^- x}$

ฟังก์ชันคลื่นในการกระเจิงที่รอยต่อโจเซพสันทั้ง4รูปแบบสามารถเขียนได้ดังนี้คือ

$$\psi_1(x)=\begin{cases}\exp\left(ik_1^+x\right)\begin{pmatrix}u_1e^{i\phi_1/2}\\ v_1e^{-i\phi_1/2}\end{pmatrix}+a_1\exp\left(ik_1^-x\right)\begin{pmatrix}v_1e^{i\phi_1/2}\\ u_1e^{-i\phi_1/2}\end{pmatrix}+b_1\exp\left(-ik_1^+x\right)\begin{pmatrix}u_1e^{i\phi_1/2}\\ v_1e^{-i\phi_1/2}\end{pmatrix}, & x\le 0\\ c_1\exp\left(ik_2^+x\right)\begin{pmatrix}u_2e^{i\phi_2/2}\\ v_2e^{-i\phi_2/2}\end{pmatrix}+d_1\exp\left(-ik_2^-x\right)\begin{pmatrix}v_2e^{i\phi_2/2}\\ u_2e^{-i\phi_2/2}\end{pmatrix} & ,x\ge 0\end{cases}$$

$$\psi_2(x)=\begin{cases}\exp\left(-ik_1^-x\right)\begin{pmatrix}u_1e^{i\phi_1/2}\\ v_1e^{-i\phi_1/2}\end{pmatrix}+a_2\exp\left(-ik_1^+x\right)\begin{pmatrix}v_1e^{i\phi_1/2}\\ u_1e^{-i\phi_1/2}\end{pmatrix} & \\ +b_2\exp\left(ik_1^+x\right)\begin{pmatrix}u_1e^{i\phi_1/2}\\ v_1e^{-i\phi_1/2}\end{pmatrix} & ,x\le 0\\ c_2\exp\left(-ik_2^-x\right)\begin{pmatrix}u_2e^{i\phi_2/2}\\ v_2e^{-i\phi_2/2}\end{pmatrix}+d_2\exp\left(ik_2^-x\right)\begin{pmatrix}v_2e^{i\phi_2/2}\\ u_2e^{-i\phi_2/2}\end{pmatrix} & ,x\ge 0\end{cases}$$

$$\psi_3(x)=\begin{cases}c_3\exp\left(-ik_1^+x\right)\begin{pmatrix}u_1e^{i\phi_1/2}\\ v_1e^{-i\phi_1/2}\end{pmatrix}+d_3\exp\left(ik_1^-x\right)\begin{pmatrix}v_1e^{i\phi_1/2}\\ u_1e^{-i\phi_1/2}\end{pmatrix} & ,x\le 0\\ \exp\left(-ik_2^+x\right)\begin{pmatrix}u_2e^{i\phi_2/2}\\ v_2e^{-i\phi_2/2}\end{pmatrix}+a_3\exp\left(-ik_2^-x\right)\begin{pmatrix}v_2e^{i\phi_2/2}\\ u_2e^{-i\phi_2/2}\end{pmatrix} & \\ +b_3\exp\left(-ik_2^+x\right)\begin{pmatrix}u_2e^{i\phi_2/2}\\ v_2e^{-i\phi_2/2}\end{pmatrix} & ,x\le 0x\ge 0\end{cases}$$

$$\psi_4(x)=\begin{cases}c_4\exp\left(ik_1^-x\right)\begin{pmatrix}u_1e^{i\phi_1/2}\\ v_1e^{-i\phi_1/2}\end{pmatrix}+d_4\exp\left(-ik_1^+x\right)\begin{pmatrix}v_1e^{i\phi_1/2}\\ u_1e^{-i\phi_1/2}\end{pmatrix} & ,x\le 0\\ \exp\left(ik_2^-x\right)\begin{pmatrix}u_2e^{i\phi_2/2}\\ v_2e^{-i\phi_2/2}\end{pmatrix}+a_4\exp\left(ik_2^+x\right)\begin{pmatrix}v_2e^{i\phi_2/2}\\ u_2e^{-i\phi_2/2}\end{pmatrix} & \\ +b_4\exp\left(-ik_2^-x\right)\begin{pmatrix}u_2e^{i\phi_2/2}\\ v_2e^{-i\phi_2/2}\end{pmatrix} & ,x\le 0x\ge 0\end{cases}$$

เมื่อ $$k_{1,2}^{\pm} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\left(E_{F1,2} \pm \Omega_{1,2}\right)}$$

$$u_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\Omega_{1,2}}{E}\right)}, \qquad v_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\Omega_{1,2}}{E}\right)},$$

$$\Omega_{1,2} = \sqrt{E^2 - \Delta_{1,2}^2(T)} \text{ และกำหนดให้ } \varphi = \left(\phi_2 - \phi_1\right)$$

(2.46)

ในการหาสมการกระแสโจเซพสันจะอาศัยสมการของความต่อเนื่อง(Equation of continuity) ที่กำหนดไว้ดังนี้คือ

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_e + \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{I}_e + S = 0 \tag{2.47}$$

เมื่อ

$$\rho_e = -e\sum_{\sigma}\Psi_{\sigma}^{+}(x,t)\Psi_{\sigma}(x,t) \tag{2.48}$$

$$\mathrm{I}_e = -\frac{e\hbar}{m}\mathrm{Im}\sum_{\sigma}\Psi_{\sigma}^{+}(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{\sigma}(x,t) \tag{2.49}$$

และ $$S = \frac{4e}{\hbar}\mathrm{Im}\left[\Delta(x)\Psi_{\uparrow}^{+}(x,t)\Psi_{\downarrow}^{+}(x,t)\right] \tag{2.50}$$

เมื่อ $\Psi_\sigma(x,t)$ เป็นตัวดำเนินการทำลายของสนามอิเล็กตรอนและ $\Psi_\sigma^+(x,t)$ เป็นตัวดำเนินการสร้างของสนามอิเล็กตรอน สำหรับค่ากระแสโจเซพสันที่ไหลผ่านรอยต่อโจเซพสันหาได้จากผลรวมของ

$$I_J = \langle \mathrm{I}_e \rangle + \int_x^0 dx \langle S \rangle \tag{2.51}$$

และในการหาค่ากระแสโจเซพสันทำได้โดยใช้ กรีนฟังก์ชัน $G_{\omega_n}(x,x')$ ที่หาค่าได้จากการแทนค่า $E \to i\omega_n$

$$\langle \mathrm{I}_e \rangle = \frac{e\hbar}{2im} \lim_{x \to x'} \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} Tr\{G_{\omega_n}(x,x')\}$$

$$= \frac{e\Delta_1(T)}{2\hbar} \frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} \frac{1}{\Omega_{n1}} \left(k_{n1}^+ + k_{n1}^-\right) \left(\frac{a_1(\varphi, i\omega_n)}{k_{n1}^+} - \frac{a_2(\varphi, i\omega_n)}{k_{n1}^-} \right) \exp\{-i(k_{n1}^+ - k_{n1}^-)x\} \tag{2.52}$$

และ

$$\int_x^0 dx \langle S \rangle = \frac{e\Delta_1(T)}{2\hbar} \frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} \frac{1}{\Omega_{n1}} \left(k_{n1}^+ + k_{n1}^-\right) \left(\frac{a_1(\varphi, i\omega_n)}{k_{n1}^+} - \frac{a_2(\varphi, i\omega_n)}{k_{n1}^-} \right) \left(1 - \exp\{-i(k_{n1}^+ - k_{n1}^-)x\}\right) \tag{2.53}$$

$$I_J = \frac{e\Delta_1(T)}{2\hbar} \frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} \frac{1}{\Omega_{n1}} \left(k_{n1}^+ + k_{n1}^-\right) \left(\frac{a_1(\varphi, i\omega_n)}{k_{n1}^+} - \frac{a_2(\varphi, i\omega_n)}{k_{n1}^-} \right) \tag{2.54}$$

กำหนด $a_2(\varphi,E)/k_{n1}^-$ มีค่าเท่ากับ $a_1(-\varphi,E)/k_{n1}^+$ ดังนั้นกระแสโจเซฟสันชนิดตรงจากสมการ(2.54) ได้เป็น

$$I_J = \frac{e\Delta_1(T)}{2\hbar}\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\frac{1}{\Omega_{n1}}\left(k_{n1}^+ + k_{n1}^-\right)\left(\frac{a_1(\varphi,i\omega_n)}{k_{n1}^+} - \frac{a_1(-\varphi,i\omega_n)}{k_{n1}^+}\right) \tag{2.55}$$

เมื่อกำหนดให้ $\beta = \dfrac{1}{k_B T}$, $k_{n1}^{\pm} = \dfrac{2m}{\hbar}\sqrt{\left(E_{F1} \pm i\Omega_{n1}\right)}$

$$\Omega_{1n} = \sqrt{\omega_n^2 + \Delta_1^2(T)} \quad \text{และ} \quad \omega_n = \pi k_B T(2n+1) \tag{2.56}$$

ในการคำนวณค่าแอมปลิจูดการสะท้อนแบบแอนเดรฟ (Andreev reflection amplitudes) หาได้จากสมการของเงื่อนไขค่าขอบเขต

$$\lim_{x\to 0^-}\psi_1(x) = \lim_{x\to 0^+}\psi_1(x) \tag{2.57}$$

และ

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\partial\psi_1(x)}{\partial x} - \lim_{x\to 0^-}\frac{\partial\psi_1(x)}{\partial x} = \frac{2mV}{\hbar^2}\lim_{x\to 0^+}\psi(x) \tag{2.58}$$

ค่าแอมปลิจูดการสะท้อนแบบแอนเดรฟจากรอยต่อโจเซฟสันแบบ $S_1/I/S_2$ คือ

$$a_1(\varphi,E) = \frac{E\left(\Delta_2(T)\cos\varphi - \Delta_1(T)\right) - i\Delta_2\Omega_1\sin\varphi}{E^2 - \Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\varphi + \mathrm{P}\Omega_1\Omega_2} \tag{2.59}$$

นิยามให้

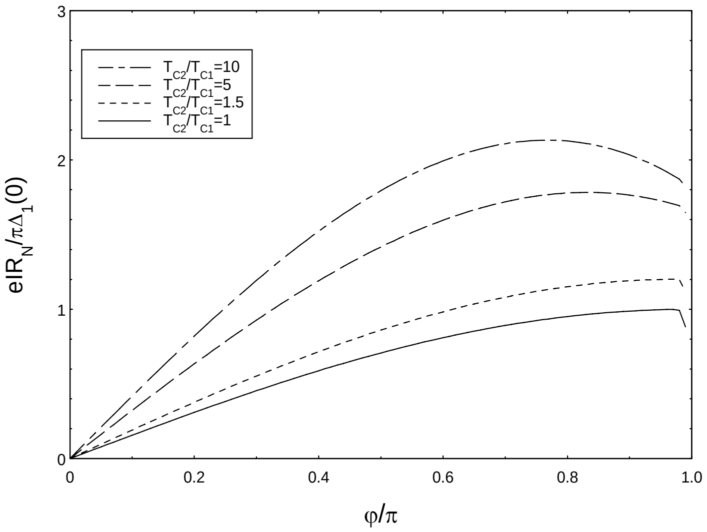
$$\mathrm{P} = \frac{k_{F1}^2 + k_{F1}^2 + \left(\frac{2mV}{\hbar^2}\right)^2}{2k_{F1}k_{F2}} \tag{2.60}$$

การคำนวณกระแสโจเซพสันโดย ฟูรูซากิ กับ ซูกาดะ (Furusaki and Tsukada) ในที่สุดได้ค่าดังนี้

$$\frac{eI\ R_N}{\pi\Delta_1(0)} = \frac{\Delta_1(T)\Delta_2(T)\ T}{\Delta_1(0)}(1+P)\times$$

$$\sum_{\omega_n} \frac{\sin\phi}{\Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi + \omega_n^2 + P\sqrt{\omega_n^2 + \Delta_1^2(T)}\sqrt{\omega_n^2 + \Delta_2^2(T)}} \tag{2.61}$$

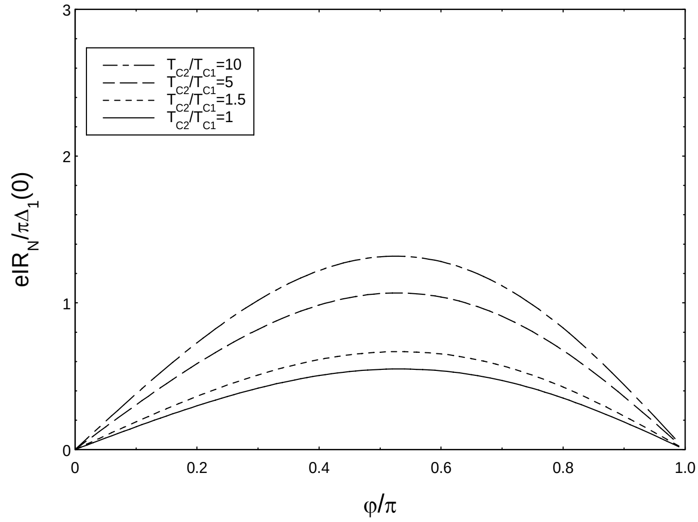
เมื่อความต้านทานในสถานะปกติของรอยต่อกำหนดจากสมการ $R_N = 2\pi\hbar(1+\mathrm{P})/4e^2$



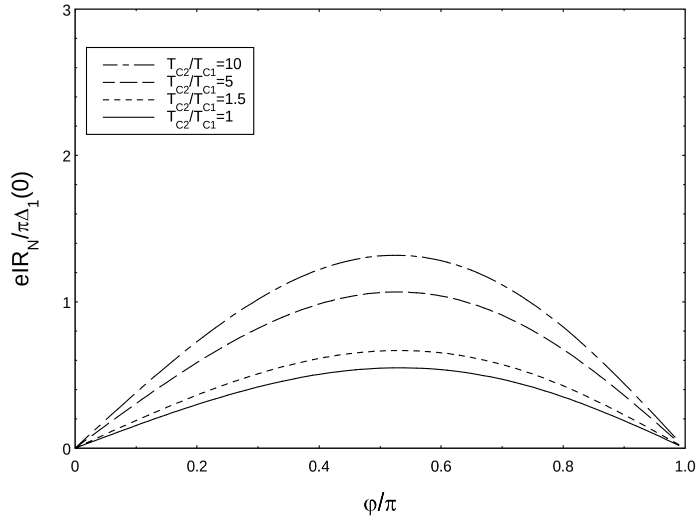
ภาพประกอบ 17 แสดงกราฟระหว่าง $eIR_N/\pi\Delta_1(0)$ กับ ค่า φ/π ที่ค่า $P=1, T/T_{C1}=0.01$

ภาพประกอบ 18 แสดงกราฟระหว่าง $eIR_N/\pi\Delta_1(0)$ กับ ค่า φ/π ที่ค่า $P=1\ , T/T_{C1}=0.2$

จากภาพประกอบ17 และ 18 เป็นกราฟความสัมพันธ์ระหว่างกระแสโจเซพสัน กับค่ามุม φ ที่ค่าต่างๆ จะเห็นว่ากระแสโจเซพสันชนิดตรงมีค่าลดลงเมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้น โดยจะเป็นศูนย์เมื่อ $T \to T_C$ กระแสโจเซพสันจะมีค่ามากที่สุดที่อุณหภูมิ 0 องศาสัมบูรณ์



ภาพประกอบ 19 แสดงกราฟระหว่าง $eIR_N / \pi\Delta_1(0)$ กับ ค่า φ/π ที่ค่า $P = 5$, $T / T_{C1} = 0.01$



ภาพประกอบ 20 แสดงกราฟระหว่าง $eIR_N / \pi\Delta_1(0)$ กับ ค่า φ/π ที่ค่า $P = 5$, $T / T_{C1} = 0.2$

จากภาพประกอบ 19 และ 20 เป็นกราฟความสัมพันธ์ระหว่างกระแสโจเซพสันกับค่ามุม φ ที่ค่าต่างๆ โดยพบว่ากระแสโจเซพสันชนิดตรงมีค่าลดลงเมื่ออุณหภูมิเพิ่มขึ้น และเมื่อค่าศักย์ฉนวนปกติ (P) มีค่าเพิ่มขึ้น กระแสโจเซพสันจะไหลผ่านลดลง ณ ทุกๆค่า φ

กระแสโจเซฟสันชนิดตรงในระบบรอยต่อตัวนำยวดยิ่ง/ฉนวนปกติ/ตัวนำยวดยิ่ง

ในการคำนวณหาสูตรของกระแสโจเซฟสันชนิดตรงนอกเหนือจากการอธิบายโดยการใช้กลศาสตร์ควอนตัมแล้ว อีกวิธีหนึ่งคือพิจารณาการส่งผ่านและการสะท้อนของอิเล็กตรอนที่บริเวณรอยต่อโจเซฟสันเพื่อหาค่าแอมปลิจูดของโฮลที่สะท้อนแบบแอนเดรฟ โดยการคำนวณจากฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคควอไซที่ตกกระทบ สะท้อน และส่งผ่านโดยการแก้สมการบีดีจี (Bogoliubov - de Gennes Equation)

กำหนดให้ฟังก์ชันคลื่นของคู่คูเปอร์ในตัวนำยวดยิ่งตัวที่ 1 คือ

$$\psi_1 = e^{ik_1^e x}\begin{bmatrix} u_1 e^{i\phi_1/2} \\ v_1 e^{-i\phi_1/2} \end{bmatrix} + a e^{ik_1^h x}\begin{bmatrix} v_1 e^{i\phi_1/2} \\ u_1 e^{-i\phi_1/2} \end{bmatrix} + b e^{-ik_1^e x}\begin{bmatrix} u_1 e^{i\phi_1/2} \\ v_1 e^{-i\phi_1/2} \end{bmatrix} \quad ; x \le 0 \tag{2.62}$$

และฟังก์ชันคลื่นของคู่คูเปอร์ในตัวนำยวดยิ่งตัวที่ 2 คือ

$$\psi_2 = c e^{ik_2^e x}\begin{bmatrix} u_2 e^{i\phi_2/2} \\ v_2 e^{-i\phi_2/2} \end{bmatrix} + d e^{-ik_2^h x}\begin{bmatrix} v_2 e^{i\phi_2/2} \\ u_2 e^{-i\phi_2/2} \end{bmatrix} \qquad ; x \ge 0 \tag{2.63}$$

เมื่อ a คือ สัมประสิทธิ์การสะท้อนแบบแอนเดรฟของอนุภาคโฮล

b คือ สัมประสิทธิ์การสะท้อนของอนุภาคอิเล็กตรอน

c คือ สัมประสิทธิ์การส่งผ่านของอิเล็กตรอน

d คือ สัมประสิทธิ์การส่งผ่านของโฮล

และ

$$k^e = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\left[E_F + \sqrt{E^2 - \Delta^2(T)}\right]^{1/2} \tag{2.64}$$

$$k^h = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\left[E_F - \sqrt{E^2 - \Delta^2(T)}\right]^{1/2} \tag{2.65}$$

$$u_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{1 - \frac{\Delta^2(T)}{E^2}}\right] \tag{2.66}$$

$$v_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{\Delta^2(T)}{E^2}}\right] \tag{2.67}$$

เมื่อค่า $\Delta(T)$ เป็นช่องว่างพลังงานของตัวนำยวดยิ่งทั้งสอง

E_F เป็นพลังงานเฟร์มีของตัวนำยวดยิ่งทั้งสอง

$E,\ k_{1,2}^{e,h}$ เป็นพลังงานและเลขคลื่นของอนุภาคควอไซอิเล็กตรอนและโฮลในตัวนำยวดยิ่ง

ϕ_1,ϕ_2 เป็น เฟสของฟังก์ชันคลื่นในตัวนำยวดยิ่งตัวที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

โดยที่ อิเล็กตรอน ที่มีทิศพุ่งไปทางขวา $\longrightarrow$ เฟสอยู่ในรูปของ $e^{ik^e x}$

อิเล็กตรอน ที่มีทิศไปทางซ้าย $\longleftarrow$ เฟสอยู่ในรูปของ $e^{-ik^e x}$

โฮล ที่มีทิศไปทางขวา $\longrightarrow$ เฟสอยู่ในรูปของ $e^{-ik^h x}$

โฮล ที่มีทิศไปทางซ้าย $\longleftarrow$ เฟสอยู่ในรูปของ $e^{ik^h x}$

ในการหาค่าแอมปลิจูดการสะท้อนแบบแอนเดรฟ จากการคำนวณ หาได้จากเงื่อนไขค่าขอบเขตที่บริเวณรอยต่อ $(x = 0)$ คือ

$$\psi_2\left(x = 0^+\right) = \psi_1\left(x = 0^-\right) \tag{2.68}$$

และ

$$\left[\frac{d\psi_2}{dx}\right]_{x=0^+} - \left[\frac{d\psi_1}{dx}\right]_{x=0^-} = \frac{2mV}{\hbar^2}\psi_2\left(x = 0^+\right) \tag{2.69}$$

เมื่อ V คือ กำแพงศักย์ของฉนวนปกติ

จากสมการ(2.62) , (2.63) เมื่อใช้เงื่อนไขขอบเขต จากสมการ(2.68) จะได้

$$av_1e^{i\phi_1/2} + bu_1e^{i\phi_1/2} - cu_2e^{i\phi_2/2} - dv_2e^{i\phi_2/2} \quad = \quad -u_2e^{i\phi_1/2} \tag{2.70}$$

$$au_1e^{-i\phi_1/2} + bv_1e^{-i\phi_1/2} - cv_2e^{-i\phi_2/2} - du_2e^{-i\phi_2/2} \quad = \quad -v_1e^{i\phi_1/2} \tag{2.71}$$

และจากสมการ(2.62) , (2.63) เมื่อใช้เงื่อนไข(2.69) จะได้สมการอีกชุดหนึ่งคือ

$$av_1e^{i\phi_1/2} - bu_1e^{i\phi_1/2} - cu_2e^{i\phi_2/2}\left(1 - \frac{2mV}{\hbar^2 ik_F}\right) + dv_2e^{i\phi_2/2}\left(1 + \left(\frac{2mV}{\hbar^2 ik_F}\right)\right) = -u_1e^{i\phi_1/2} \tag{2.72}$$

$$au_1e^{-i\phi_1/2} - bv_1e^{-i\phi_1/2} - cu_2e^{-i\phi_2/2}\left(1 - \frac{2mV}{\hbar^2 ik_F}\right) + dv_2e^{-i\phi_2/2}\left(1 + \left(\frac{2mV}{\hbar^2 ik_F}\right)\right) = -v_1e^{i\phi_1/2} \tag{2.73}$$

จาก (2.70) ,(2.71), (2.72) และ (2.73)สามารถเขียนรวมเป็นสมการเมทริกซ์ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} v_1e^{i\phi_1/2} & u_1e^{i\phi_1/2} & -u_2e^{i\phi_2/2} & -v_2e^{i\phi 2/2} \\ u_1e^{-i\phi_1/2} & v_1e^{-i\phi_1/2} & -v_2e^{-i\phi_2/2} & -u_2e^{-i\phi_2/2} \\ v_1e^{i\phi_1/2} & -u_1e^{i\phi_1/2} & -u_2e^{i\phi_2/2}\left(1-\frac{2mV}{\hbar^2 ik_F}\right) & v_2e^{i\phi_2/2}\left(1+\frac{2mV}{\hbar^2 ik_F}\right) \\ u_1e^{-i\phi_1/2} & -v_1e^{-i\phi_1/2} & -v_2e^{-i\phi_2/2}\left(1-\frac{2mV}{\hbar^2 ik_F}\right) & u_2e^{-i\phi_2/2}\left(1+\frac{2mV}{\hbar^2 ik_F}\right) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} u_1e^{i\phi_1/2} \\ v_1e^{-i\phi_1/2} \\ u_1e^{i\phi_1/2} \\ v_1e^{-i\phi_1/2} \end{bmatrix} \tag{2.74}$$

กำหนดให้

$$A = v_1 e^{i\phi_1/2} \qquad B = u_1 e^{i\phi_1/2}$$

$$C = u_2 e^{i\phi_2/2} \qquad D = v_2 e^{i\phi_2/2}$$

และ

$$K = \left(1 - \frac{2mV}{\hbar^2 i k_F}\right) \tag{2.75}$$

นำตัวแปรต่างๆในสมการ (2.75) แทนลงในสมการเมทริกซ์ (2.74) จะได้

$$\begin{bmatrix} A & B & -C & -D \\ B^* & A^* & -D^* & -C^* \\ A & -B & -KC & K^*D \\ B^* & -A^* & -KD^* & K^*C^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B \\ -A^* \\ -B \\ -A^* \end{bmatrix} \tag{2.76}$$

คำนวณหาสัมประสิทธิ์การสะท้อนแบบแอนเดรฟที่รอยต่อ(ค่า $a\ (\varphi, E)$) จากสมการเมทริกซ์ (2.76) โดยใช้กฎของคราเมอร์ได้ดังนี้คือ

$$a(\varphi, E) = \frac{\begin{vmatrix} -B & B & -C & -D \\ -A^* & A^* & -D^* & -C^* \\ -B & -B & -KC & K^*D \\ -A^* & -A^* & KD^* & K^*C^* \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B & -C & -D \\ B^* & A^* & -D^* & -C^* \\ A_1 & -B & -KC & K^*D \\ B^* & -A^* & KD^* & K^*C^* \end{vmatrix}} \tag{2.77}$$

เมื่อกำหนดให้เมทริกซ์หลักคือ

$$[M]=\begin{bmatrix} A & B & -C & -D \\ B^* & A^* & -D^* & -C^* \\ A & -B & -KC & K^*D \\ B^* & -A^* & KD^* & K^*D^* \end{bmatrix} \tag{2.78}$$

เมื่อได้ค่าของ $Det[M]$ แล้วจากนั้นก็หาค่าของ $Det[a]$

$$\det[a]=\begin{bmatrix} B & B & -C & -D \\ -A* & A^* & -D^* & -C^* \\ -B & -B & -KC & K^*D \\ -A* & -A^* & KD^* & K^*D^* \end{bmatrix}$$

(2.79)

เนื่องจาก $UV = \frac{\Delta(T)}{2E}$ และ $U^2 - V^2 = \frac{\Omega}{E}$ (2.80)

$$a\ (\varphi,E)=\frac{\frac{2\Delta(T)}{e}\left[\cos\phi-1+i\sin\phi\sqrt{1-\frac{\Delta^2(T)}{E^2}}\right]}{2\left\{1-\frac{\Delta^2(T)}{E^2}\cos\phi+\left(1-\frac{\Delta^2(T)}{E^2}\right)1+\left(\frac{\sqrt{2}mV}{\hbar^2 k_F}\right)^2\right\}} \tag{2.81}$$

แทนค่าของ E ด้วย $i\omega_n$

$$a(\phi, i\omega_n) = \frac{\Delta(T)\left[i\omega_n(\cos\phi - 1) - \sin\phi\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2(T)}\right]}{-\left[\omega_n^2 + \Delta^2(T)\ \cos\phi + \left(\omega_n^2 + \Delta^2(T)\right)\left[1 + \left(\frac{\sqrt{2}mV}{\hbar^2 k_F}\right)^2\right]\right]}$$

(2.82)

โดยในที่นี้ $\phi = \phi_L - \phi_R$ แทน ความต่างเฟสของพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบในตัวนำยวดยิ่งทั้งสอง

จากสมการ (2.82) เพื่อแทนค่า ϕ ด้วย $-\phi$ ได้

$$a(-\phi, i\omega_n) = \frac{\Delta(T)\left[i\omega_n(\cos\phi - 1) + \sin\phi\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2(T)}\right]}{-\left[\omega_n^2 + \Delta^2(T)\ \cos\phi + \left(\omega_n^2 + \Delta^2(T)\right)\left[1 + \left(\frac{\sqrt{2}mV}{\hbar^2 k_F}\right)^2\right]\right]}$$

(2.83)

ดังนั้น $a\ (\phi, i\omega_n) - a\ (-\phi, i\omega_n)$

$$= \frac{\left[2\Delta(T)\sin\phi\sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2(T)}\right]}{\left[\omega_n^2 + \Delta^2(T)\ \cos\phi + \left(\omega_n^2 + \Delta^2(T)\right)\left[1 + \left(\frac{\sqrt{2}mV}{\hbar^2 k_F}\right)^2\right]\right]}$$

(2.84)

กำหนดให้ $\Omega = \sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2(T)}$ และ $Z = 1 + (\frac{\sqrt{2}mV}{\hbar^2 k_F})^2$

$$\frac{a\ (\phi, i\omega_n) - a\ (-\phi, i\omega_n)}{\Omega} = \frac{[2\Delta(T)\sin\phi]}{[\omega_n^2 + \Delta^2(T)\cos\phi + Z(\omega_n^2 + \Delta^2(T))]}$$

$$\frac{a\ (\phi, i\omega_n) - a\ (-\phi, i\omega_n)}{\Omega} = \frac{[2\Delta(T)\sin\phi]}{\left[(1+Z)\left(\omega_n^2 + \frac{\Delta^2(T)}{1+Z}(Z + \cos\phi)\right)\right]}$$

เมื่อ $$\alpha = \frac{Z + \cos\phi}{1+Z} \qquad (2.85)$$

จึงเขียนสูตรสมการกระแสโจเซฟสันเขียนได้ดังนี้

$$I = \frac{2eT\Delta^2(T)\sin\phi}{(1+Z)}\sum_n \frac{1}{\omega_n^2 + \alpha\Delta^2(T)} \qquad (2.86)$$

ถ้าให้ความต้านทานในสถานะปกติของรอยต่อโจเซพสันที่ประกอบด้วยตัวนำยวดยิ่งเป็น

$$R_N = \frac{\pi(1+Z)}{2e^2} \qquad (2.87)$$

จากสมการ (2.86) เราจะได้ กระแสตรง ดังสมการ

$$I = \frac{\pi T \Delta^2(T)\sin\phi}{R_N\ e}\sum_n \frac{1}{\omega_n^2 + \alpha\Delta^2(T)} \qquad (2.88)$$

จากความสัมพันธ์

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 + x^2} = \frac{\pi}{4x}\tanh(\frac{\pi x}{2}) \qquad (2.89)$$

ดังนั้นจากสมการ $\omega_n = (2n+1)\pi T$ เราจะได้

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\pi T \Delta^2(T)\sin\phi}{eR_N}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2\pi^2 T^2 + \alpha\Delta^2(T)} \\
I &= \frac{2\Delta^2(T)\sin\phi}{2\sqrt{\alpha}\Delta(T)eR_n}\tanh\left(\frac{\Delta\sqrt{\alpha}}{2T}\right) \\
I &= \frac{\pi\Delta(T)\sin\phi}{2\sqrt{\alpha}eR_N}\tanh(\frac{\Delta(T)\sqrt{\alpha}}{2T}) \\
I &= I_c \sin\phi
\end{aligned} \qquad (2.90)$$

เมื่อกระแสวิกฤต มีค่า $I_c = \dfrac{\pi\Delta(T)}{2eR_N \cos\phi/2}\tanh(\dfrac{\Delta(T)\cos\phi/2}{2T})$

ในการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างกระแสโจเซพสันและเฟส จากทฤษฎี BCS เมื่ออุณหภูมิ $T << T_c$

$$\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} = 1 - e^{-\Delta(0)/T} \sqrt{\frac{\pi T}{2\Delta(0)}} \tag{2.91}$$

ในที่นี่ $\Delta(0)$ คือ order parameter ที่อุณหภูมิ 0 องศาสัมบูรณ์

$$\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} = 1 - e^{-\frac{\Delta(0)}{T_C}\cdot\frac{T_C}{T}} \sqrt{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{T}{T_C}\cdot\frac{T_C}{\Delta(0)}}$$

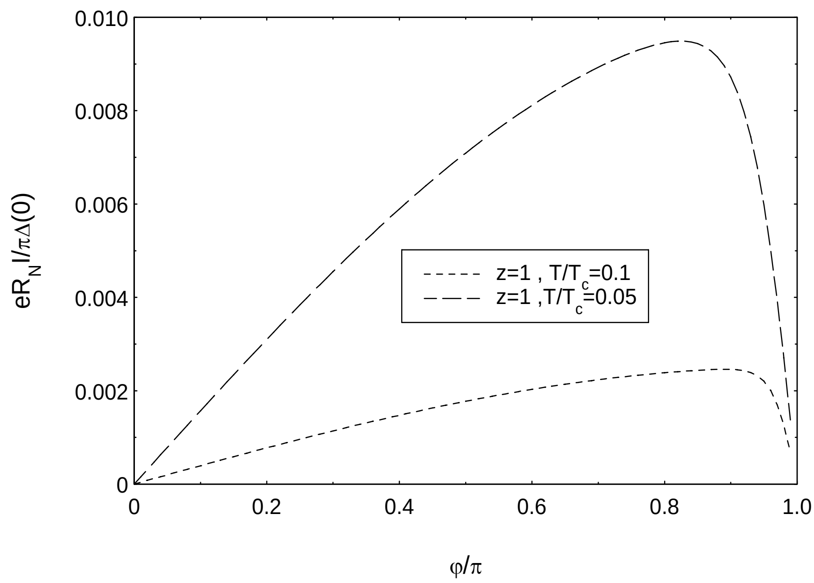
แต่เนื่องจาก ตามทฤษฎี BCS

$$\frac{2\Delta(0)}{T_C} = 3.52 \quad , \quad \frac{\Delta(0)}{T_C} = 1.76 \tag{2.92}$$

ดังนั้นจาก (2.91) จะได้ความสัมพันธ์ว่า

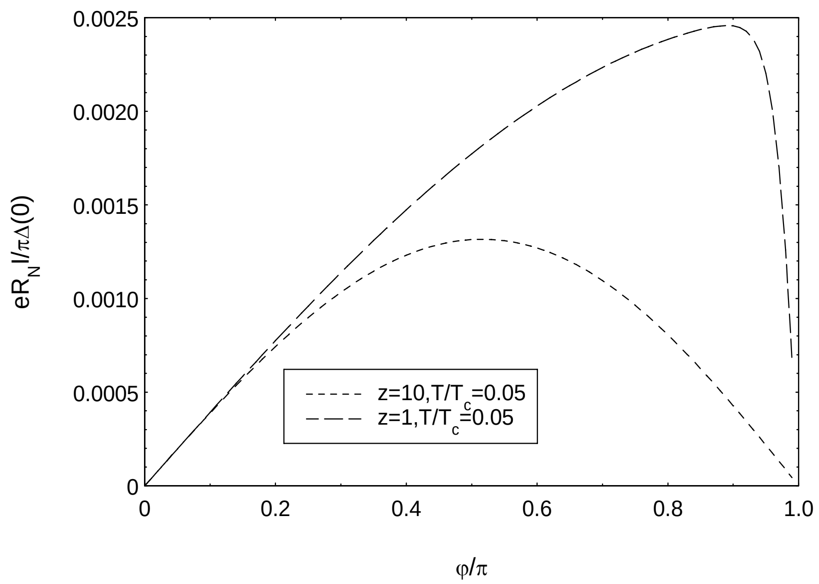
$$\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} = 1 - e^{-1.76\,(T_c/T)} \sqrt{\frac{\pi}{3.52}\left(\frac{T}{T_c}\right)} \tag{2.93}$$

พิจารณาจากกราฟกำหนดให้ $T/T_C = 0.05$ และ $T/T_C = 0.1$ ตามลำดับ และ φ ตั้งแต่ 0 ถึง π



ภาพประกอบ 21 แสดงกราฟระหว่าง $eI_cR_N / \pi\Delta_0$ กับ φ / π ที่ $Z = 1, T/T_c = 0.1$ และ $T/T_c = 0.05$

จากภาพประกอบ 21 เมื่อกำหนดให้ค่าศักย์ฉนวนปกติ (ค่า Z) ในระบบรอยต่อโจเซฟสันเท่ากัน และอัตราส่วน T/T_C ต่างกัน พบว่า กระแสโจเซฟสันชนิดตรงจะไหลผ่านได้มากขึ้น เมื่ออัตราส่วน T/T_C มีค่าน้อยลง ซึ่งก็คือเมื่อ T/T_C ยิ่งเข้าใกล้ 0 หมายถึงอุณหภูมินั้นจะลดต่ำลง กระแสโจเซฟสันชนิดตรงจะสามารถไหลผ่านได้มากยิ่งขึ้น

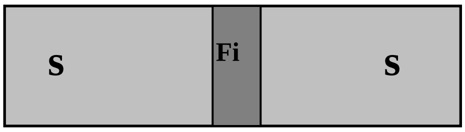


ภาพประกอบ 22 แสดงกราฟระหว่าง $eI_cR_N/\pi\Delta_0$ กับ φ/π ที่ Z ต่างกัน คือ $Z=1$ และ 10 และ $T/T_C=0.05$

จากภาพประกอบที่ 22 เมื่อกำหนดให้ค่าศักย์ฉนวนปกติ (ค่า Z) ต่างกัน และอัตราส่วนอุณหภูมิ T/T_C เท่ากัน พบว่า เมื่อค่าศักย์ฉนวนปกติ Z มีค่าเพิ่มขึ้น กระแสโจเซฟสันชนิดตรงจะไหลผ่านได้ลดลง

กระแสโจเซฟสันชนิดตรงในระบบรอยต่อตัวนำยวดยิ่ง/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร/ตัวนำยวดยิ่ง

นอกจากการคำนวณกระแสโจเซพสันที่ไหลผ่านรอยต่อของฉนวนแบบปกติแล้ว ทานากะ กับ คาชิวายา (Y. Tanaka and S. Kashiwaya .1996: 159) ได้ทำการคำนวณกระแสโจเซพสันที่ไหลผ่านรอยต่อโจเซพสันแบบตัวนำยวดยิ่ง/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร/ตัวนำยวดยิ่ง($S/Fi/S$)



ภาพประกอบ 23 แสดงภาพของรอยต่อโจเซพสันแบบตัวนำยวดยิ่ง/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร/ ตัวนำยวดยิ่ง ($S/Fi/S$) โดยให้ความหนาของฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรบางมาก

เนื่องจากในสารแม่เหล็กเฟอร์โรมีค่าสนามแลกเปลี่ยนที่มีอิเล็กตรอนมีค่าสปินสวนทิศกัน ทานากะ กับ คาชิวายา(Y. Tanaka and S. Kashiwaya .1996: 159) จึงได้กำหนดให้ฟังก์ชันศักย์ของฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร เป็นดังนี้

$$V(x) = \left(H_i - \eta_\sigma H_m\right)\delta(x) \qquad (2.94)$$

เมื่อ H_i เป็นสนามศักย์ปกติของฉนวนปกติ

H_m เป็นสนามศักย์แลกเปลี่ยนของฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร

$\delta(x)$ เป็นฟังก์ชันศักย์แบบเดลต้า เพราะในที่นี้กำหนดให้ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรอยู่ที่ตำแหน่ง $x = 0$

η_σ มีค่าเท่ากับ 1 เมื่อ $\sigma = \uparrow$ และมีค่าเท่ากับ –1เมื่อ $\sigma = \downarrow$

ในการคำนวณ ทานากะ กับ คาชิวายา ได้กำหนดค่าของกำแพงศักย์ของฉนวนปกติ H_i เท่ากับศูนย์

กำหนดฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคควอไซที่ตกกระทบ ที่สะท้อน และส่งผ่าน และเงื่อนไขขอบเขตที่บริเวณรอยต่อทั้งสองเป็นดังนี้

$$\psi_{1\sigma} = e^{ik_1^+ x}\begin{bmatrix} u_{1\sigma}e^{i\phi_1/2} \\ v_{1\sigma}e^{-i\phi_1/2} \end{bmatrix} + a_\sigma e^{ik_1^- x}\begin{bmatrix} v_{1\sigma}e^{i\phi_1/2} \\ u_{1\sigma}e^{-i\phi_1/2} \end{bmatrix} + b_\sigma e^{-ik_1^+ x}\begin{bmatrix} u_{1\sigma}e^{i\phi_1/2} \\ v_{1\sigma}e^{-i\phi_1/2} \end{bmatrix} \quad x < 0 \tag{2.95}$$

$$\psi_{2\sigma} = c_\sigma e^{ik_2^+ x}\begin{bmatrix} u_{2\sigma}e^{i\phi_2/2} \\ v_{2\sigma}e^{-i\phi_2/2} \end{bmatrix} + d_\sigma e^{-ik_2^- x}\begin{bmatrix} v_{2\sigma}e^{i\phi_2/2} \\ u_{2\sigma}e^{-i\phi_2/2} \end{bmatrix} \qquad x > 0 \tag{2.96}$$

เมื่อ a_σ คือ สัมประสิทธิ์การสะท้อนแบบแอนเดรฟของอนุภาคโฮล

b_σ คือ สัมประสิทธิ์การสะท้อนของอนุภาคอิเล็กตรอน

c_σ คือ สัมประสิทธิ์การส่งผ่านของอิเล็กตรอน

d_σ คือ สัมประสิทธิ์การส่งผ่านของโฮล

σ คือ สปินของอนุภาคโฮล

และ

$$u_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\Omega}{E}\right) \quad , \; v_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\Omega}{E}\right)$$

$$k_{1,2}^{\pm} = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\left[E_F \pm \Omega\ \right]^{\frac{1}{2}} COS\theta$$

$$\Omega = \sqrt{E^2 - \Delta^2(T)} \tag{2.97}$$

เมื่อค่า $\Delta(T)$ เป็นช่องว่างพลังงานของตัวนำยวดยิ่ง

E_F เป็นพลังงานเฟร์มีของตัวนำยวดยิ่ง

$E,\ k_{1,2}^{\pm}$ เป็นพลังงานและโมเมนตัมของอนุภาคควอไซอิเล็กตรอนและโฮลในตัวนำยวดยิ่ง

$\phi_{1,2}$ เป็นเฟสของพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบของสภาพนำยวดยิ่งตัวที่ 1 และ2 ตามลำดับ

θ คือ มุมการฉีด(injected angle)ของอนุภาคควอไซที่ระบบรอยต่อโจเซพสัน

ค่าแอมปลิจูดการสะท้อนแบบแอนเดรฟ(Andreev reflection amplitudes) หาได้จากสมการของเงื่อนไขค่าขอบเขต

$$\psi_{2\sigma}\left(x=0^{+}\right)=\psi_{1\sigma}\left(x=0^{-}\right) \tag{2.98}$$

และ

$$\left[\frac{d\psi_{2\sigma}}{dx}\right]_{x=0^{+}}-\left[\frac{d\psi_{1\sigma}}{dx}\right]_{x=0^{-}}=\frac{2m}{\hbar^{2}}\begin{bmatrix}H_i-\eta_\sigma H_m & 0\\ 0 & H_i+\eta_\sigma H_m\end{bmatrix}\psi_{2\sigma} \tag{2.99}$$

จะได้ค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนแบบแอนเดรฟ ดังนี้

$$a_\sigma(\varphi,\theta)=\frac{\Delta(T)\left[-E\sin^{2}\frac{\varphi}{2}+i\Omega\left(\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}+\rho_\sigma Z_{m,\theta}\right)\right]}{E^{2}\left(1-Z_{m,\theta}{}^{2}\right)-\Delta^{2}(T)\left(\cos^{2}\frac{\varphi}{2}-Z_{m,\theta}^{2}\right)-2i\rho_\sigma E\Omega Z_{m,\theta}} \tag{2.100}$$

หากระแสโจเซพสันโดยกำหนดมุมการฉีดเข้า ของอนุภาคควอไซที่รอยต่อโจเซพสัน

$$I(\varphi,\theta)=\frac{e\Delta(T)k_BT}{\hbar}\sum_{\omega_n,\sigma}\frac{a_\sigma(\varphi,\theta)-a_\sigma(\varphi,\theta)}{2\Omega_n} \tag{2.101}$$

เมื่อ $\omega_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) 2\pi T$

เป็น ความถี่มัสซูบาระ เมื่อ n เป็นเลขจำนวนเต็ม

$$a_\sigma(\varphi,\theta) - a_\sigma(\varphi,\theta) = \frac{i\Delta(T) k_B \Omega \sin\varphi}{\left[E^2\left(1 - Z_{m,\theta}^2\right) - \Delta^2(T)\left(\cos^2\frac{\varphi}{2} - Z_{m,\theta}^2\right) - 2i\rho_\sigma \Omega E Z_{m,\theta}\right]}$$

(2.102)

แทนค่าของ E ด้วย $i\omega_n$ และ Ω ด้วย Ω_n

$$a_\sigma(\varphi,\theta) - a_\sigma(\varphi,\theta) = \frac{\Delta(T) k_B \Omega_n \sin\varphi \left\{\omega_n^2\left(1 - Z_{m,\theta}^2\right) + \Delta^2(T)\left[\cos^2\frac{\varphi}{2} - Z_{m,\theta}^2\right] + 2i\rho_\sigma \Omega_n \omega_n Z_{m,\theta}\right\}}{\omega_n^4\left(1 - Z_{m,\theta}^2\right)^2 + \Delta^4(T)\left[\cos^2\frac{\varphi}{2} - Z_{m,\theta}^2\right] + 2\omega_n^2\Delta^2(T)\left[1 - Z_{m,\theta}^2\right] + 4\omega_n^2\left(\omega_n^2 + \Delta^2(T)\right) Z_{m,\theta}^2}$$

$$\sum_{\omega_n} \frac{a_\sigma(\varphi,\theta) - a_\sigma(\varphi,\theta)}{2\Omega_n} = \frac{\Delta(T) k_B \sin\varphi \left\{\omega_n^2\left(1 - Z_{m,\theta}^2\right) + \Delta^2(T)\left[\cos^2\frac{\varphi}{2} - Z_{m,\theta}^2\right]\right\}}{\omega_n^4\left(1 - Z_{m,\theta}^2\right)^2 + \Delta^4(T)\left[\cos^2\frac{\varphi}{2} - Z_{m,\theta}^2\right] + 2\omega_n^2\Delta^2(T)\left[1 - Z_{m,\theta}^2\right] + 4\omega_n^2\left(\omega_n^2 + \Delta^2(T)\right) Z_{m,\theta}^2}$$

ดังนั้น

$$I(\varphi,\theta) = e\Delta^2(T) k_B T \sin\varphi$$

$$\sum_{\omega_n} \frac{\left\{\omega_n^2\left(1 - Z_{m,\theta}^2\right) + \Delta^2(T)\left[\cos^2\frac{\varphi}{2} - Z_{m,\theta}^2\right]\right\}}{\omega_n^4\left[\left(1 - Z_{m,\theta}^2\right)^2 + 4Z_{m,\theta}^2\right] + \Delta^4(T)\left[\cos^2\frac{\varphi}{2} - Z_{m,\theta}^2\right]^2 + 2\omega_n^2\Delta^2(T)\left[1 - Z_{m,\theta}^2\right]\left[\cos^2\frac{\varphi}{2} - Z_{m,\theta}^2\right] + 2Z_{m,\theta}^2}$$

(2.103)

จากสมการ (2.103) กำหนดให้

$$x = \omega_n^2 \quad , \quad \alpha = 1 - Z_m^2 \quad , \quad \beta = \Delta^2(T)\left[\cos^2\frac{\varphi}{2} - Z_{m,\theta}^2\right]$$

$$a = \left[\left(1 - Z_{m,\theta}^2\right)\right]^2 + 4Z_{m,\theta}^2 \quad , \quad b = 2\Delta^2(T)\left[\left(1 - Z_{m,\theta}^2\right)\right]\left[\cos^2\frac{\varphi}{2} - Z_{m,\theta}^2\right] + 2Z_{m,\theta}^2$$

$$c = \Delta^4(T)\left[\cos^2\frac{\varphi}{2} - Z_{m,\theta}^2\right]^2 \tag{2.104}$$

เขียนใหม่ได้ว่า

$$\sum_{\omega_n} \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} = \sum_{\omega_n} \frac{\alpha x + \beta}{(x - x_+)(x - x_-)} \tag{2.105}$$

เมื่อ $x_\pm = -E_\pm^2 = \frac{1}{2a}\left[-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right]$ เป็นระดับพลังงานของสถานะยึดเหนี่ยว (Energy levels of bound state)

ดังนั้น

$$E_\pm^2 = \frac{\Delta^2(T)}{\left(1 - Z_{m,\theta}^2\right) - 4Z_{m,\theta}^2}\left\{\begin{array}{l}\left(1 - Z_{m,\theta}^2\right)\left(\cos^2\frac{\varphi}{2} - Z_{m,\theta}^2\right) + 2Z_{m,\theta}^2 \\ \pm 2Z_{m,\theta}\sqrt{\left(Z_{m,\theta}^2 + \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\cos^2\frac{\varphi}{2}}\end{array}\right\} \tag{2.106}$$

หรือ

$$E_\pm = \frac{\Delta(T)}{1 + Z_{m,\theta}^2}\left[\cos\frac{\varphi}{2} \pm Z_{m,\theta}\sqrt{Z_{m,\theta}^2 + \sin^2\frac{\varphi}{2}}\right] \tag{2.107}$$

จากสมการ(2.105) เขียนใหม่ได้ว่า

$$\sum_{\omega_n} \frac{\alpha x-\beta}{ax^2+bx+c}=\sum_{\omega_n}\frac{1}{E_+^2+E_-^2}\left\{\frac{\alpha E_+^2-\beta}{\omega_n^2+E_+^2}-\frac{\alpha E_-^2+\beta}{\omega_n^2+E_-^2}\right\}$$

และ

$$\sum_{\omega_n} \frac{1}{\omega_n^2+E^2}=\frac{1}{2TE}\tanh\left(\frac{E}{2T}\right)$$

ดังนั้น

$$\sum_{\omega_n} \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{2T}\left\{\tanh\left(\frac{E_+}{2T}\right)\frac{1}{E_+}\left(\frac{\alpha E_+^2-\beta}{E_+^2-E_-^2}\right)-\frac{1}{E_-}\left(\frac{\alpha E_-^2-\beta}{E_+^2-E_-^2}\right)\tanh\left(\frac{E_-}{2T}\right)\right\}$$

เมื่อกำหนดให้

$$A_+=\frac{\Delta(T)}{E_+}\frac{\left(\alpha E_+^2-\beta\right)}{\left(E_+^2-E_-^2\right)} \qquad \text{และ} \quad A_-=\frac{\Delta(T)}{E_-}\frac{\left(\alpha E_-^2-\beta\right)}{\left(E_+^2-E_-^2\right)}$$

จะได้

$$I(\varphi,\theta)=\frac{e\Delta(T)k_B\sin\varphi}{2\hbar}\left[A_+\tanh\left(\frac{E_+}{2T}\right)-A_-\tanh\left(\frac{E_-}{2T}\right)\right] \tag{2.108}$$

เมื่อ

$$A_\pm=\frac{\Delta(T)}{E_\pm}\frac{\left[2Z_{m,\theta}^2\sin^2\frac{\varphi}{2}-\left(1-Z_{m,\theta}^2\right)\left[Z_{m,\theta}\mp\sqrt{\left(Z_{m,\theta}^2+\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\cos^2\frac{\varphi}{2}}\right]\right]}{2\sqrt{\left(Z_{m,\theta}^2+\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\cos^2\frac{\varphi}{2}}} \tag{2.109}$$

จากสมการ (2.107) , (2.108) และ (2.109) จะได้กระแสโจเซพสันในรอยต่อโจเซพสันแบบ $S/Fi/S$ คือ

$$I(\varphi,\theta)=\frac{e\Delta(T)\sin(\varphi/2)}{2\hbar\left(1+Z_{m,\theta}^{2}\right)}\times$$

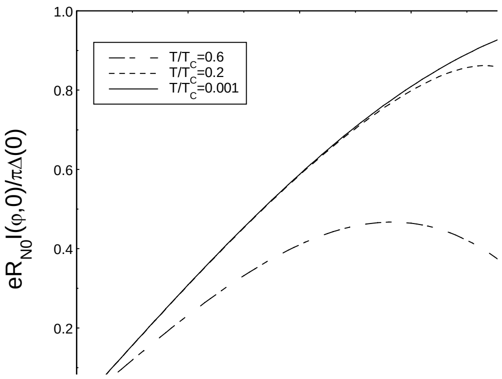
$$\left\{\left[\tanh\left(\frac{E_{+}}{2k_{B}T}\right)+\tanh\left(\frac{E_{-}}{2k_{B}T}\right)\right]-\frac{Z_{m,\theta}\cos(\varphi/2)}{\sqrt{Z_{m,\theta}^{2}+\sin^{2}(\varphi/2)}}\left[\tanh\left(\frac{E_{+}}{2k_{B}T}\right)-\tanh\left(\frac{E_{-}}{2k_{B}T}\right)\right]\right\}$$

(2.110)

เมื่อค่า $E_{\pm}=\Delta(T)\dfrac{\cos(\varphi/2)\pm Z_{m,\theta}\sqrt{Z_{m,\theta}^{2}+\sin^{2}(\varphi/2)}}{1+Z_{m,\theta}^{2}}$ เป็นระดับพลังงานของสถานะยึดเหนี่ยว(Energy levels of bound state) ที่ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรรอยต่อโจเซพสันของอนุภาคควอไซ

และ $$Z_{m,\theta}=\frac{mH_{m}}{\hbar^{2}k_{F}\cos\theta}=\frac{Z_{0}}{\cos\theta}$$

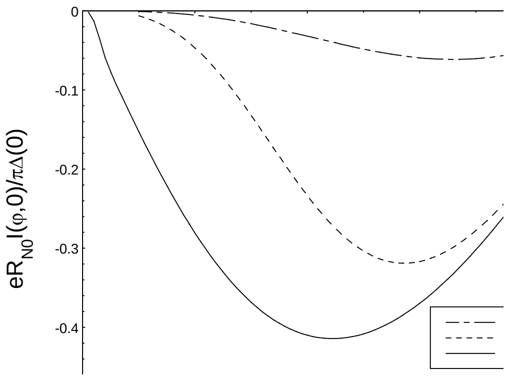
θ คือ มุมการฉีดของอนุภาคควอไซที่ระบบรอยต่อโจเซพสัน



ภาพประกอบ 24 แสดงกราฟระหว่าง $eI(\varphi,0)R_{N0}/\pi\Delta(0)$ กับ φ/π ที่ $Z_0 = 0$

ภาพประกอบ 25 แสดงกราฟระหว่าง $eI(\varphi,0)R_{N0}/\pi\Delta(0)$ กับ φ/π $Z_0 = 0.5$

จากภาพประกอบ 24 และ 25 เป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างกระแสโจเซพสันกับค่ามุม φ ที่ค่าต่างๆ ซึ่งจากภาพประกอบ 24 ยังไม่มีการใส่ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร พบว่ากระแสโจเซพสันชนิดตรงจะไม่มีการไหลกลับทิศ แต่เมื่อใส่ฉนวนแม่เหล็กเฟอรโรเข้าไป ($Z_0 = 0.5$)ดังภาพประกอบ 25 พบว่ากระแสโจเซพสันชนิดตรงจะมีการไหลกลับทิศอย่างเห็นได้ชัด และในขณะที่อุณหภูมิเพิ่มขึ้นส่งผลให้แอมปลิจูดของกระแสโจเซพสันชนิดตรงลดลง

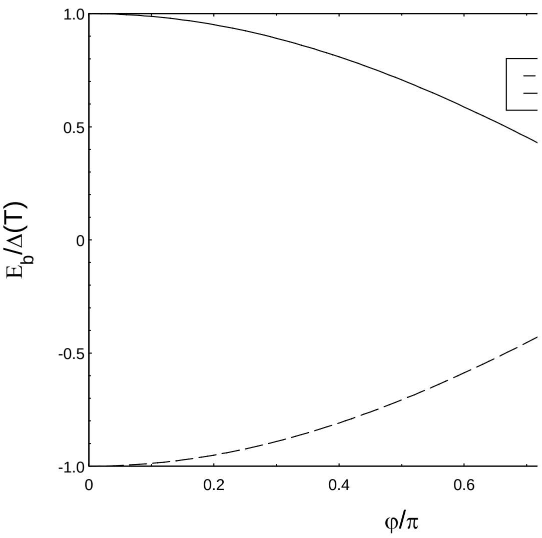


ภาพประกอบ 26 แสดงกราฟระหว่าง $eI(\varphi,0)R_{N0}/\pi\Delta(0)$ กับ φ/π ที่ $Z_0 = 1$

(b)

ภาพประกอบ 27 แสดงกราฟระหว่าง $eI(\varphi,0)R_{N0}/\pi\Delta(0)$ กับ φ/π ที่ $Z_0 = 2$

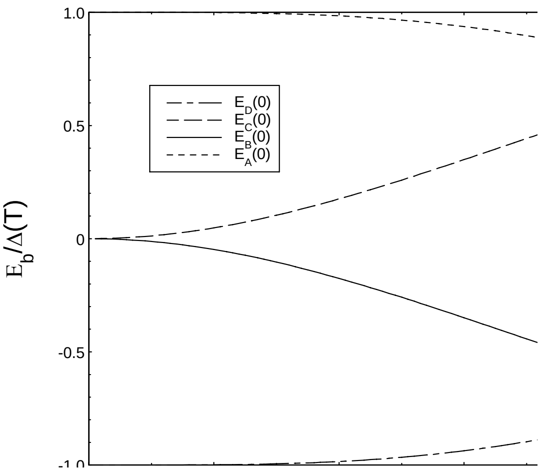
จากภาพประกอบ 26 และ 27 เป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างกระแสโจเซพสันกับค่ามุม φ ที่ค่าต่างๆ เมื่อค่าฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรสูงขึ้น กระแสโจเซพสันชนิดตรงจะกลับทิศการไหลทั้งหมด และในขณะที่อุณหภูมิเพิ่มขึ้นส่งผลให้แอมปลิจูดของกระแสโจเซพสันชนิดตรงลดลง



ภาพประกอบ 28 แสดงกราฟระหว่าง $E_b/\Delta(T)$ กับ φ/π (a) $Z_0 = 0$

ภาพประกอบ 29 แสดงกราฟระหว่าง $E_b/\Delta(T)$ กับ φ/π (a) $Z_0 = 0.5$

จากภาพประกอบ 28 แสดงพลังงานสถานะยึดเหนี่ยวบริเวณรอยต่อโจเซพสันเมื่อศักย์ฉนวนเฟอร์โรมีค่าเป็นศูนย์ ($Z_0 = 0$) พลังงานจะมีอยู่สองค่า เส้นทึบเป็นพลังงานของอนุภาคควอไซอิเล็กตรอน และเส้นประเป็นพลังงานของอนุภาคควอไซโฮลแสดงให้เห็นว่ามีการซ้อนทับของพลังงาน และเมื่อใส่ศักย์ฉนวนเฟอร์โรดังภาพประกอบ 29 , 30 และ31 พบว่าพลังงานสถานะยึดเหนี่ยวบริเวณรอยต่อโจเซพสันมีสี่ค่า ซึ่งแยกระดับพลังงานได้มากขึ้น



ภาพประกอบ 30 แสดงกราฟระหว่าง $E_b / \Delta(T)$ กับ φ/π (a) $Z_0 = 1$

ภาพประกอบ 31 แสดงกราฟระหว่าง $E_b / \Delta(T)$ กับ φ/π (a) $Z_0 = 2$

เพื่อขยายงานวิจัยของ Tanaka and Kashiwaya ผู้วิจัยต้องการศึกษากระแสโจเซฟสันในระบบตัวนำยวดยิ่งชนิดที่1/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร/ตัวนำยวดยิ่งชนิดที่2 $(s_1 / Fi / S_2)$ โดยพิจารณาค่า H_i เป็นกำแพงศักย์ของฉนวนปกติ และ H_m เป็นสนามแลกเปลี่ยนของฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรทั้งสองค่าไม่เป็นศูนย์และตัวนำ ยวดยิ่งทั้งสองชนิดต่างกันสูตรกระแสโจเซฟสันที่ได้จะครอบคลุมสูตรกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในระบบรอยต่อแบบต่าง ๆ

บทที่ 3
กระแสโจเซพสันชนิดตรงในระบบ $S_1/Fi/S_2$

ในการคำนวณกระแสโจเซพสันที่ไหลผ่านรอยต่อตัวนำยวดยิ่งชนิดที่1/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร / ตัวนำยวดยิ่งชนิดที่2 ($S_1/Fi/S_2$) มีขั้นตอนดังนี้

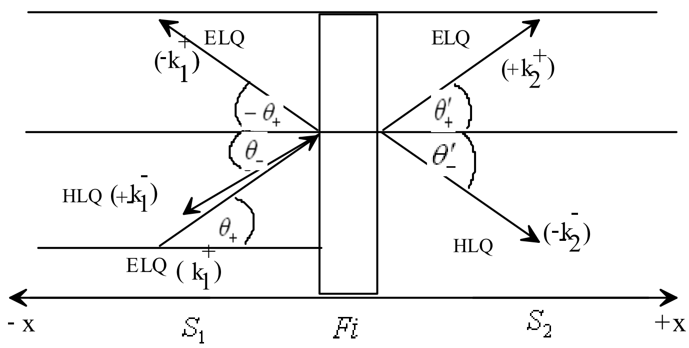
1. กำหนดฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคควอไซที่ตกกระทบ,ที่สะท้อน และส่งผ่าน รวมทั้งเงื่อนไขขอบเขตที่บริเวณรอยต่อระหว่างตัวนำทั้งสอง

2. คำนวณหาสัมประสิทธิ์การสะท้อนแบบแอนเดรฟ(Coefficient of the Andreev reflection) ที่รอยต่อทั้งสอง

3.คำนวณหากระแสโจเซพสันชนิดตรงโดยสูตรของฟูรูซากิกับซูกาดะ(Furusaki and Tsukada 1991:299)

ขั้นตอนที่ 1

ในการกำหนดฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคควอไซในบริเวณทั้งสองและเงื่อนไขขอบเขตที่บริเวณรอยต่อ ดังรูป



ภาพประกอบ 32 แสดงรอยต่อโจเซพสันที่ประกอบด้วย ตัวนำยวดยิ่งชนิดที่1/ ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร / ตัวนำยวดยิ่งชนิดที่ 2 ซึ่งตัวนำยวดยิ่งทั้งสองต่างชนิดกันโดยให้ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรบางมากและแผ่นตัวนำยวดยิ่งหนามาก

จากรูป θ_+ คือ มุมตกกระทบของอิเล็กตรอนที่กระเจิง

θ_- คือ มุมสะท้อนของโฮลที่กระเจิง

$k_1^{\pm}$ คือ เวกเตอร์โมเมนตัมของอนุภาคอิเล็กตรอนในตัวนำยวดยิ่ง

$k_2^{\pm}$ คือ เวกเตอร์โมเมนตัมของอนุภาคโฮลในตัวนำยวดยิ่ง

ELQ คือ electron like quasiparticle

HLQ คือ hole like quasiparticle

ในที่นี้ให้ฟังก์ชันของฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร คือ

$$V(x) = (H_i - \eta_\sigma H_m)\delta(x) \tag{3.1}$$

เมื่อ H_i เป็นสนามศักย์ปกติของฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร

H_m เป็นสนามศักย์แลกเปลี่ยนของฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร

$\delta(x)$ เป็นฟังก์ชันศักย์แบบเดลต้า เพราะในที่นี้กำหนดให้ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรอยู่ที่ตำแหน่ง $x = 0$

η_σ มีค่าเท่ากับ 1 เมื่อ $\sigma = \uparrow$ และมีค่าเท่ากับ –1 เมื่อ $\sigma = \downarrow$

กำหนดฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคควอไซที่ตกกระทบ ที่สะท้อน และส่งผ่าน และเงื่อนไขขอบเขตที่บริเวณรอยต่อทั้งสองเป็น ดังนี้

$$\psi_{1\sigma}(x) = e^{ik_{1\theta}^{+}x}\begin{bmatrix} u_{1\sigma}e^{i\phi_1/2} \\ v_{1\sigma}e^{-i\phi_1/2} \end{bmatrix} + a_\sigma e^{ik_{1\theta}^{-}x}\begin{bmatrix} v_{1\sigma}e^{i\phi_1/2} \\ u_{1\sigma}e^{-i\phi_1/2} \end{bmatrix} + b_\sigma e^{-ik_{1\theta}^{+}x}\begin{bmatrix} u_{1\sigma}e^{i\phi_1/2} \\ v_{1\sigma}e^{-i\phi_1/2} \end{bmatrix} \quad x < 0 \tag{3.2}$$

$$\psi_{2\sigma}(x) = c_\sigma e^{ik_{2\theta}^{+}x}\begin{bmatrix} u_{2\sigma}e^{i\phi_2/2} \\ v_{2\sigma}e^{-i\phi_2/2} \end{bmatrix} + d_\sigma e^{-ik_{2\theta}^{-}x}\begin{bmatrix} v_{2\sigma}e^{i\phi_2/2} \\ u_{2\sigma}e^{-i\phi_2/2} \end{bmatrix} \quad x > 0 \tag{3.3}$$

เมื่อ a_σ คือ สัมประสิทธิ์การสะท้อนแบบแอนเดรฟของโฮล

b_σ คือ สัมประสิทธิ์การสะท้อนของอิเล็กตรอน

c_σ คือ สัมประสิทธิ์การส่งผ่านของอิเล็กตรอน

d_σ คือ สัมประสิทธิ์การส่งผ่านของโฮล

σ คือ สปินของโฮลและอิเล็กตรอน $\uparrow$ และ $\downarrow$

$k_{1,2\theta}$ คือ เวกเตอร์โมเมนตัมของอนุภาคในตัวนำยวดยิ่งตัวที่ 1 และตัวนำยวดยิ่งตัวที่ 2 ตามลำดับ

$k_i^{\substack{e \\ h}} \equiv k_i^{\pm} = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\left[E_{F,i} \pm \Omega_i\right]^{\frac{1}{2}}$; $i = 1,2$ ตามลำดับ

$$u_{i,\sigma}^2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\Omega_i}{E}\right) \quad , \; v_{i,\sigma}^2 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\Omega_i}{E}\right) \quad ; i = 1,2$$

$$\Omega_{\mathrm{i}} = \sqrt{\mathrm{E}^2 - \Delta_{\mathrm{i}}^2} \qquad ; i = 1,2$$

เมื่อค่า Δ_i เป็นช่องว่างพลังงานของตัวนำยวดยิ่งตัวที่ i เมื่อ $i = 1,2$

$E_{F,i}$ เป็นพลังงานเฟร์มีของตัวนำยวดยิ่งตัวที่ i เมื่อ $i = 1,2$

E เป็นพลังงานของอนุภาคควอไซอิเล็กตรอนและโฮลในตัวนำยวดยิ่งตัวที่ i เมื่อ $i = 1,2$

ϕ_i เป็นเฟสของพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบสภาพนำยวดยิ่งของตัวนำยวดยิ่งตัวที่ i เมื่อ $i = 1,2$

จากสมการ (3.2) และ (3.3) กำหนดให้

$$A_1 = u_1 e^{i\phi_1/2} \qquad A_1^* = u_1 e^{-i\phi_1/2}$$

$$A_2 = u_2 e^{i\phi_2/2} \qquad A_2^* = u_2 e^{-i\phi_2/2}$$

$$B_1 = v_1 e^{i\phi_1/2} \qquad B_1^* = v_1 e^{-i\phi_1/2} \tag{3.4}$$

$$B_2 = v_2 e^{i\phi_2/2} \qquad B_2^* = v_2 e^{-i\phi_2/2}$$

เขียนสมการ(3.2) และ (3.3) ได้เป็น

$$\psi_{1\sigma}(x) = e^{ik_{1\theta}^+ x}\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1^* \end{bmatrix} + a_\sigma e^{ik_{1\theta}^- x}\begin{bmatrix} B_1 \\ A_1^* \end{bmatrix} + b_\sigma e^{-ik_{1\theta}^+ x}\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1^* \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

$$\psi_{2\sigma}(x) = c_\sigma e^{ik_{2\theta}^+ x}\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2^* \end{bmatrix} + d_\sigma e^{-ik_{2\theta}^- x}\begin{bmatrix} B_2 \\ A_2^* \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

หากให้เงื่อนไขค่าขอบเขตที่บริเวณรอยต่อเป็น

$$\psi_{2\sigma}\left(x=0^{+}\right)=\psi_{1\sigma}\left(x=0^{-}\right) \tag{3.7}$$

และ

$$\left[\frac{d\psi_{2\sigma}}{dx}\right]_{x=0^{+}}-\left[\frac{d\psi_{1\sigma}}{dx}\right]_{x=0^{-}}=\frac{2m}{\hbar^{2}}\begin{bmatrix} H_i-\eta_\sigma H_m & 0 \\ 0 & H_i+\eta_\sigma H_m \end{bmatrix}\psi_{2\sigma}\left(x=0^{+}\right) \tag{3.8}$$

สมมติให้

$$\pi_{\pm}=H_i\pm\eta_\sigma H_m \tag{3.9}$$

เมื่อใช้เงื่อนไข (3.7) จะได้

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A}_1 \\ \mathrm{B}_1^* \end{bmatrix}+\mathrm{a}_\sigma\begin{bmatrix} \mathrm{B}_1 \\ \mathrm{A}_1^* \end{bmatrix}+\mathrm{b}_\sigma\begin{bmatrix} \mathrm{A}_1 \\ \mathrm{B}_1^* \end{bmatrix}+\mathrm{c}_\sigma\begin{bmatrix} -\mathrm{A}_2 \\ -\mathrm{B}_2^* \end{bmatrix}+\mathrm{d}_\sigma\begin{bmatrix} -\mathrm{B}_2 \\ -\mathrm{A}_2^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

เมื่อใช้เงื่อนไข (3.8) จะได้สมการอีกชุดหนึ่งคือ

$$ik_{1\theta}^{+}\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1^* \end{bmatrix}+a_\sigma ik_{1\theta}^{-}\begin{bmatrix} B_1 \\ A_1^* \end{bmatrix}+b_\sigma ik_{1\theta}^{+}\begin{bmatrix} -A_1 \\ -B_1^* \end{bmatrix}+c_\sigma\begin{bmatrix} \left(\frac{2m\pi_-}{\hbar^2}-ik_{2\theta}^{+}\right)A_2 \\ \left(\frac{2m\pi_+}{\hbar^2}-ik_{2\theta}^{+}\right)B_2^* \end{bmatrix}+d_\sigma\begin{bmatrix} \left(\frac{2m\pi_-}{\hbar^2}+ik_{2\theta}^{-}\right)B_2 \\ \left(\frac{2m\pi_+}{\hbar^2}+ik_{2\theta}^{-}\right)A_2^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

สมการ(3.10) และ (3.11) สามารถเขียนรวมเป็นสมการเมทริกซ์ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} B_1 & A_1 & -A_2 & -B_2 \\ A_1^* & B_1^* & -B_2^* & -A_2^* \\ ik_{1\theta}^- B_1 & -ik_{1\theta}^+ A_1 & \left\{\frac{2m\pi_-}{\hbar^2} - ik_{2\theta}^+\right\} A_2 & \left\{\frac{2m\pi_-}{\hbar^2} + ik_{2\theta}^-\right\} B_2 \\ ik_{1\theta}^- A_1^* & -ik_{1\theta}^+ B_1^* & \left\{\frac{2m\pi_+}{\hbar^2} - ik_{2\theta}^-\right\} B_2^* & \left\{\frac{2m\pi_+}{\hbar^2} + ik_{2\theta}^-\right\} A_2^* \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} a_\sigma \\ b_\sigma \\ c_\sigma \\ d_\sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1 \\ -B_1^* \\ -ik_{1\theta}^+ A_1 \\ -ik_{1\theta}^+ B_1^* \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

เมื่อกำหนดตัวแปร เนื่องจาก $E_{Fi} >> \Omega_i$ ดังนั้นโดยการประมาณ

$$k_{1,2}^{\pm} \approx k_{F1,2} = \sqrt{\frac{2mE_{F1,2}}{\hbar^2}} \tag{3.13}$$

ทั้งนี้ เพราะ $k_F \approx \frac{\sqrt{2mE_F}}{\hbar}$

และให้

$$R_{\pm} = \frac{1}{ik_{1\theta}}\left\{\frac{2m\pi_{\pm}}{\hbar^2} - ik_{2\theta}\right\} = -i\left(iz_{\theta\pm} + \gamma_\theta\right) \tag{3.14}$$

$$\tilde{R}_{\pm} = \frac{1}{ik_{1\theta}}\left\{\frac{2m\pi_{\pm}}{\hbar^2} + ik_{2\theta}\right\} = \gamma_\theta - iz_{\theta\pm} \tag{3.15}$$

เมื่อ

$$z_{\theta\pm} = \frac{2m\pi_{\pm}}{\hbar^2 k_F \cos\theta_1} \qquad \text{และ} \qquad \gamma_\theta = \frac{k_{F2}\cos\theta_2}{k_F \cos\theta_1} \tag{3.16}$$

$$\gamma_\theta = \gamma\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} \qquad \text{สำหรับ} \qquad \gamma = \frac{k_{F2}}{k_{F1}} \tag{3.17}$$

จากสมการ (3.12) นำตัวแปรต่างๆลงไป แล้วเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} B_1 & A_1 & -A_2 & -B_2 \\ A_1^* & B_1^* & -B_2^* & -A_2^* \\ B_1 & -A_1 & R_-A_2 & \tilde{R}_-B_2 \\ A_1^* & -B_1^* & R_+B_2^* & \tilde{R}_+A_2^* \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_\sigma \\ b_\sigma \\ c_\sigma \\ d_\sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1 \\ -B_1^* \\ -A_1 \\ -B_1^* \end{bmatrix} \qquad (3.18)$$

ขั้นตอนที่ 2

คำนวณหาสัมประสิทธิ์การสะท้อนแบบแอนเดรฟที่รอยต่อ(ค่า $a_\sigma(\phi, E)$) จากสมการเมทริกซ์ (3.18) โดยใช้กฎของคราเมอร์ดังนี้

$$a_\sigma(\phi, E) = \frac{\begin{vmatrix} -A_1 & A_1 & -A_2 & -B_2 \\ -B_1^* & B_1^* & -B_2^* & -A_2^* \\ -A_1 & -A_1 & R_-A_2 & \tilde{R}_-B_2 \\ -B_1^* & -B_1^* & R_+B_2^* & \tilde{R}_+A_2^* \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B_1 & A_1 & -A_2 & -B_2 \\ A_1^* & B_1^* & -B_2^* & -A_2^* \\ B_1 & -A_1 & R_-A_2 & \tilde{R}_-B_2 \\ A_1^* & -B_1^* & R_+B_2^* & \tilde{R}_+A_2^* \end{vmatrix}} \qquad (3.19)$$

เมื่อกำหนดให้เมทริกซ์หลักคือ

$$[M] = \begin{bmatrix} B_1 & A_1 & -A_2 & -B_2 \\ A_1^* & B_1^* & -B_2^* & -A_2^* \\ B_1 & -A_1 & R_-A_2 & \tilde{R}_-B_2 \\ A_1^* & -B_1^* & R_+B_2^* & \tilde{R}_+A_2^* \end{bmatrix} \qquad (3.20)$$

การหาค่า $Det[M]$ ด้วยวิธีง่ายจึงต้องคำนวณเมทริกซ์ $[M]$ เมื่อให้สัญลักษณ์ R_i แทนแถวที่ i ของเมทริกซ์ $[M]$ ดังนี้

$$\begin{array}{r} R_1 - R_3 \sim \\ \mathrm{R}_2 - R_4 \sim \\ A_1^* R_3 - B_1 R_4 \sim \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 2A_1 & -(R_- + 1)A_2 & -(\tilde{R}_- + 1)B_2 \\ 0 & 2B_1^* & -(R_+ + 1)B_2^* & -(\tilde{R}_+ + 1)A_2^* \\ 0 & (B_1B_1^* - A_1A_1^*) & (R_-A_2A_1^* - R_+B_1B_2^*) & (\tilde{R}_-B_2A_1^* - \tilde{R}_+B_1A_2^*) \\ A_1^* & -B_1^* & R_+B_2^* & \tilde{R}_+A_2^* \end{bmatrix}$$

(3.21)

เมทริกซ์ที่ได้จากการคำนวณในสมการ (3.21) เป็นเมทริกซ์คล้ายของ $[M]$ เมื่อใช้สูตรการกระจายโคแฟกเตอร์หาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์คล้ายของ $[M]$ แล้วหารดิเทอร์มิแนนท์ที่ได้ด้วย A_1^* จะได้ค่า $Det[M]$(เนื่องจากในการกระทำแถวที่ 3 ของเมทริกซ์ $[M]$ เมื่อคูณด้วย A_1^*) จะทำให้ได้ $Det[M]$ ดังนี้

$$Det[M] = Det\begin{bmatrix} 2A_1 & -(R_- + 1)A_2 & -(\tilde{R}_- + 1)B_2 \\ -2B_1^* & -(R_+ + 1)B_2^* & -(\tilde{R}_+ + 1)A_2^* \\ (B_1B_1^* - A_1A_1^*) & (R_-A_2A_1^* - R_+B_1B_2^*) & (\tilde{R}_-B_2A_1^* - \tilde{R}_+B_1A_2^*) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \left[2\tilde{\mathrm{R}}_-(\mathrm{R}_+ + 1) - (\mathrm{R}_+ + 1)(\tilde{\mathrm{R}}_- + 1)\right]\mathrm{A}_1\mathrm{A}_1^*\mathrm{B}_2\mathrm{B}_2^* \\ &+ \left[2R_+(\tilde{R}_+ + 1) - 2\tilde{R}_+(R_+ + 1)\right]A_1A_2^*B_1B_2^* \\ &+ \left[2\tilde{\mathrm{R}}_+(\mathrm{R}_- + 1) - (\mathrm{R}_- + 1)(\tilde{\mathrm{R}}_+ + 1)\right]\mathrm{A}_2\mathrm{A}_2^*\mathrm{B}_1\mathrm{B}_1^* \\ &+ \left[(\mathrm{R}_- + 1)(\tilde{\mathrm{R}}_+ + 1) - 2\mathrm{R}_-(\tilde{\mathrm{R}}_+ + 1)\right]\mathrm{A}_1\mathrm{A}_1^*\mathrm{A}_2\mathrm{A}_2^* \\ &+ \left[2R_-(\tilde{R}_- + 1) - 2\tilde{R}_-(R_- + 1)\right]A_1^*A_2B_1^*B_2 \\ &+ \left[(\mathrm{R}_+ + 1)(\tilde{\mathrm{R}}_- + 1) - 2\mathrm{R}_+(\tilde{\mathrm{R}}_- + 1)\right]\mathrm{B}_1\mathrm{B}_1^*\mathrm{B}_2\mathrm{B}_2^* \end{aligned}$$

(3.22)

จากสมการ(3.14) และ (3.15)

$$R_{\pm} = -\left(iz_{\theta\pm} + \gamma_{\theta}\right) \quad = \quad -\left\{\gamma_{\theta} + i\left(z_i \pm \eta_{\sigma} z_m\right)\right\} \tag{3.23}$$

$$\tilde{R}_{\pm} = \gamma_{\theta} - iz_{\theta\pm} \quad = \quad \left\{\gamma_{\theta} - i\left(z_i \pm \eta_{\sigma} z_m\right)\right\} \tag{3.24}$$

เมื่อ

$$z_i = \frac{2mH_i}{\hbar^2 k_{F1} \cos\theta_1} \quad , \quad z_{\theta} = z_i \pm \eta_{\sigma} z_m$$

$$z_m = \frac{2mH_m}{\hbar^2 k_{F2} \cos\theta_1} \tag{3.25}$$

$$\gamma_{\theta} = \left(\frac{k_{F2}}{k_{F1}}\right)\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}$$

หาค่าในวงเล็บต่าง ๆของสมการ(3.22)ได้ดังนี้

$$\left[2\tilde{R}_{-}\left(R_{+}+1\right) - \left(R_{+}+1\right)\left(\tilde{R}_{-}+1\right)\right] = \left\{\left(z_m^2 - z_i^2\right) - \gamma_{\theta}^2 + 2\gamma_{\theta} - 1\right\} + i\left(1-\gamma_{\theta}\right)2\eta_{\sigma} z_m \tag{3.26}$$

$$\left[2R_{+}\left(\tilde{R}_{+}+1\right) - 2\tilde{R}_{+}\left(R_{+}+1\right)\right] \quad = \quad -4\gamma_{\theta} \tag{3.27}$$

$$\left[2\tilde{R}_{+}\left(R_{-}+1\right) - \left(R_{-}+1\right)\left(\tilde{R}_{+}+1\right)\right] = \left\{z_m^2 - z_i^2 - \gamma_{\theta}^2 + 2\gamma_{\theta} - 1\right\} + i\left(1-\gamma_{\theta}\right)2\eta_{\sigma} z_m \tag{3.28}$$

$$\left[\left(R_{-}+1\right)\left(\tilde{R}_{+}+1\right) - 2R_{-}\left(\tilde{R}_{+}+1\right)\right] \quad = \quad \left\{z_i^2 - z_m^2 + \gamma_{\theta}^2 + 2\gamma_{\theta} + 1\right\} - i\left(\gamma_{\theta}+1\right)2\eta_{\sigma} z_m \tag{3.29}$$

$$\left[2R_{-}\left(\tilde{R}_{-}+1\right) - 2\tilde{R}_{-}\left(R_{-}+1\right)\right] \quad = \quad -4\gamma_{\theta} \tag{3.30}$$

$$\left[\left(R_{+}+1\right)\left(\tilde{R}_{-}+1\right) - 2R_{+}\left(\tilde{R}_{-}+1\right)\right] \quad = \quad \left\{z_i^2 - z_m^2 + \gamma_{\theta}^2 + 2\gamma_{\theta} + 1\right\} + i\left(\gamma_{\theta}+1\right)2\eta_{\sigma} z_m \tag{3.31}$$

จากสมการ (3.26) ถึง (3.31) กำหนดให้

$$K_1 = \{z_m^2 - z_i^2\} - \gamma_\theta^2 + 2\gamma_\theta - 1 \tag{3.32}$$

$$K_2 = \{1 - \gamma_\theta\} 2\eta_\sigma z_m \tag{3.33}$$

$$T_1 = \{z_i^2 - z_m^2 + \gamma_\theta^2 + 2\gamma_\theta + 1\} \tag{3.34}$$

$$T_2 = (\gamma_\theta + 1) 2\eta_\sigma z_m \tag{3.35}$$

นำค่าต่าง ๆแทนลงในสมการ(3.22) และเมื่อใช้เครื่องหมาย (∗) แทนสังยุคของปริมาณเชิงซ้อน จะได้

$$\begin{aligned} Det[M] = {} & (K_1 + iK_2) u_1^2 v_2^2 - 4\gamma_\theta u_1 u_2 v_1 v_2 e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \\ & + (K_1 - iK_2) u_2^2 v_1^2 + (T_1 - iT_2) v_1^2 v_2^2 \\ & - 4\gamma_\theta u_1 u_2 v_1 v_2 e^{-i(\phi_1 - \phi_2)} + (T_1 - iT_2) v_1^2 v_2^2 \end{aligned} \tag{3.36}$$

พิจารณาเทอม $u_1^2 v_2^2$

$$u_1^2 v_2^2 = \frac{1}{4}\left[1 + \frac{\Omega_1}{E} - \frac{\Omega_2}{E} - \frac{\Omega_1 \Omega_2}{E^2}\right] \tag{3.37}$$

พิจารณาเทอม $u_1 u_2 v_1 v_2$

$$u_1 u_2 v_1 v_2 = \frac{\Delta_1(T)\Delta_2(T)}{4E^2} \tag{3.38}$$

พิจารณาเทอม $u_1^2 u_2^2$

$$u_1^2 u_2^2 = \frac{1}{4}\left[1+\frac{\Omega_1}{E}+\frac{\Omega_2}{E}+\frac{\Omega_1\Omega_2}{E^2}\right] \tag{3.39}$$

พิจารณาเทอม $\mathrm{v}_1^2\mathrm{v}_2^2$

$$v_1^2 v_2^2 = \frac{1}{4}\left[1-\frac{\Omega_1}{E}-\frac{\Omega_2}{E}+\frac{\Omega_1\Omega_2}{E^2}\right] \tag{3.40}$$

สมการ(3.36) เขียนใหม่ได้ว่า

$$\begin{aligned} Det[M] = {} & \frac{1}{2}\frac{\Omega_1\Omega_2}{E^2}[T_1-K_1] + \frac{i\Omega_1}{2E}[K_2-T_2] \\ & -\frac{i\Omega_2}{2E}[K_2+T_2] - 2\gamma_\theta\frac{\Delta_1(T)\Delta_2(T)}{E^2}\cos\phi + \frac{1}{2}[K_1+T_1] \\ = {} & \frac{1}{E^2}\left\{\begin{matrix} (z_i^2 - z_m^2 + \gamma_\theta^2 + 1)\Omega_1\Omega_2 - 2\gamma_\theta\Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi + 2\gamma_\theta E^2 \\ -\eta_\sigma 2iEz_m\gamma_\theta\Omega_1 - \eta_\sigma 2iEz_m\Omega_2 \end{matrix}\right\} \end{aligned} \tag{3.41}$$

เมื่อได้ค่าของ $Det[M]$ แล้วจากนั้นก็หาค่าของ $Det[a_\sigma]$ โดยที่ $[a_\sigma]$ หาได้จากจากสมการ (3.19) ดังนี้

$$[a_\sigma] = \begin{bmatrix} -A_1 & A_1 & -A_2 & -B_2 \\ -B_1^* & B_1^* & -B_2^* & -A_2^* \\ -A_1 & -A_1 & R_-A_2 & \tilde{R}_-B_2 \\ -B_1^* & -B_1^* & R_+B_2^* & \tilde{R}_+A_2^* \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

ในทำนองเดียวกับเมื่อหา $Det[a]$ จะได้ว่า

$$
\begin{array}{r}
R_1 - R_3 \sim \\
R_2 - R_4 \sim \\
B_1^* R_3 - A_1 R_4 \sim \\
\\
\end{array}
\begin{bmatrix}
0 & 2A_1 & -(R_- + 1)A_2 & -(\tilde{R}_- + 1)B_2 \\
0 & 2B_1^* & -(R_+ + 1)B_2^* & -(\tilde{R}_+ + 1)A_2^* \\
0 & 0 & (R_- A_2 B_1^* - R_+ A_1 B_2^*) & (\tilde{R}_- B_2 B_1^* - \tilde{R}_+ A_1 A_2^*) \\
-B_1^* & -B_1^* & R_+ B_2^* & \tilde{R}_+ A_2^*
\end{bmatrix}
$$

(3.43)

จากสมการ(3.42) และ(3.43)กระจายโคแฟกเตอร์เพื่อหาค่า $Det[a_\sigma]$ ได้โดยวิธีเดียวกันกับเมื่อครั้งหาค่า $Det[M]$ คือ

$$
\begin{aligned}
Det[a] \quad = \quad & \left[2R_+(\tilde{R}_- + 1) - 2\tilde{R}_-(R_+ + 1)\right] A_1 B_2 B_1^* B_2^* \\
+ \quad & \left[2\tilde{R}_+(R_+ + 1) - 2R_+(\tilde{R}_+ + 1)\right] A_1 A_1 A_2^* B_2^* \\
+ \quad & \left[2\tilde{R}_-(R_- + 1) - 2R_-(\tilde{R}_+ + 1)\right] A_2 B_2 B_1^* B_1^* \\
+ \quad & \left[2R_-(\tilde{R}_+ + 1) - 2\tilde{R}_+(\tilde{R}_+ + 1)\right] A_1 A_2 A_2^* B_1^*
\end{aligned}
$$

(3.44)

หาค่าในวงเล็บต่าง ๆของสมการ(3.44)ได้ดังนี้

$$\left[2R_+(\tilde{R}_- + 1) - 2\tilde{R}_-(R_+ + 1)\right] \quad = \quad -4(\gamma_\theta + i\eta_\sigma z_m) \tag{3.45}$$

$$\left[2\tilde{R}_+(R_+ + 1) - 2R_+(\tilde{R}_+ + 1)\right] \quad = \quad 4\gamma_\theta \tag{3.46}$$

$$\left[2\tilde{R}_-(R_- + 1) - 2R_-(\tilde{R}_+ + 1)\right] \quad = \quad 4\gamma_\theta \tag{3.47}$$

$$\left[2R_-(\tilde{R}_+ + 1) - 2\tilde{R}_+(\tilde{R}_+ + 1)\right] \quad = \quad -4(\gamma_\theta - i\eta_\sigma z_m) \tag{3.48}$$

พิจารณาเทอม $A_1B_2B_1^*B_2^*$

$$A_1B_2B_1^*B_2^* = u_1v_1v_2v_2 = \frac{\Delta_1(T)}{4E^2}(E-\Omega_2) \tag{3.49}$$

พิจารณาเทอม $A_1A_1A_2^*B_2^*$

$$A_1A_1A_2^*B_2^* = u_1^2u_2v_2e^{i(\phi_1-\phi_2)} = \frac{\Delta_2(T)}{4E^2}(E+\Omega_1)e^{i\phi} \quad \text{เมื่อ} \quad \phi = \phi_1 - \phi_2 \tag{3.50}$$

พิจารณาเทอม $A_2B_2B_1^*B_1^*$

$$A_2B_2B_1^*B_1^* = u_2v_2v_1^2e^{-i\phi} = \frac{\Delta_2(T)}{4E^2}(E-\Omega_2)e^{-i\phi} \tag{3.51}$$

พิจารณาเทอม $A_1A_2A_2^*B_1^*$

$$A_1A_2A_2^*B_1^* = u_1v_1u_2^2 = \frac{\Delta_1(T)}{4E^2}(E+\Omega_2) \tag{3.52}$$

ดังนั้น $Det[a]$ เขียนใหม่ได้คือ

$$Det[a] = \frac{1}{E^2}\{\Delta_1(T)[-2\gamma_\theta E + i2\eta_\sigma\Omega_2 z_m] + \Delta_2(T)[2\gamma_\theta E\cos\phi + i2\gamma_\theta\Omega_1\sin\phi]\} \tag{3.53}$$

จากสมการ(3.19) จะได้ค่าของ $a_\sigma(\phi,E)$ คือ

$$a_\sigma(\phi,E) = \frac{Det[a_\sigma]}{Det[M]} \tag{3.54}$$

เมื่อนำสมการ(3.41)และ(3.53) แทนในสมการ(3.54) ในที่สุดจะได้

$$a_\sigma(\phi,E)=\frac{\{\Delta_1(T)[i\eta_\sigma 2\Omega_2 z_m-2\gamma_\theta E]+\Delta_2(T)[2\gamma_\theta E\cos\phi+i2\gamma_\theta\Omega_1\sin\phi]\}}{\left\{\begin{array}{l}(z_i^2-z_m^2+\gamma_\theta^2+1)\Omega_1\Omega_2-2\gamma_\theta\Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi+2\gamma_\theta E^2\\-\eta_\sigma i2Ez_m\gamma_\theta\Omega_1-\eta_\sigma i2Ez_m\Omega_2\end{array}\right\}}$$

(3.55)

ขั้นตอนที่ 3

ในการคำนวณหากระแสโจเซพสันที่ไหลผ่านรอยต่อ ตัวนำยวดยิ่งชนิดที่1/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร/ตัวนำยวดยิ่งชนิดที่ 2 ใช้สูตร ของ Furuzaki and Tsukada 1991:299

$$I_{S_1/Fi/S_2}=\frac{e\Delta_1(T)k_BT}{2\hbar}\sum_{\omega_n,\sigma}\frac{1}{2\Omega_{n1}}\left(k_{n1}^{+}+k_{n1}^{-}\right)\left[\frac{a_\sigma(\phi,i\omega_n)-a_\sigma(-\phi,i\omega_n)}{k_{n1}^{+}}\right]$$

(3.56)

เมื่อ

$$\Omega_{n1}=\sqrt{\omega_n^2+\Delta_1^2(T)}$$

$\omega_n=\pi k_BT(2n+1)$ เป็นความถี่มัสซูบาระ เมื่อ n เป็นเลขจำนวนเต็ม

$$k_{n1}^{\pm}=\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\left[E_{F1}\pm i\Omega_{n1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

(3.57)

และ $a_\sigma(\phi,i\omega_n)$ คือปริมาณที่ได้จากการ แทนค่า E ด้วย $i\omega_n$ และเนื่องจากอนุภาคควอไซต่างก็มีพลังงานใกล้เคียงพลังงานเฟร์มี ส่งผลให้

$$k_{n1}^{\pm}\cong k_{F1}\qquad(3.58)$$

ดังนั้น จากสมการ (3.55) เขียนใหม่ได้ว่า

$$a_\sigma(\phi, i\omega_n) = \frac{\left\{ \Delta_1(T)\left[i\eta_\sigma 2i\Omega_2 z_m - 2\gamma_\theta i\omega_n\right] + \Delta_2(T)\left[2\gamma_\theta i\omega_n \cos\phi + i2\gamma_\theta i\Omega_1 \sin\phi\right] \right\}}{\left\{\begin{array}{l} \left(z_i^2 - z_m^2 + \gamma_\theta^2 + 1\right) i\Omega_{n1} i\Omega_{n2} - 2\gamma_\theta \Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi + 2\gamma_\theta (i\omega_n)^2 \\ - \eta_\sigma i2(i\omega_n) z_m \gamma_\theta i\Omega_{n1} - \eta_\sigma i2(i\omega_n) z_m i\Omega_{n2} \end{array}\right\}}$$

$$= \frac{\left\{ \Delta_1(T)\left[-\eta_\sigma 2\Omega_2 z_m - i2\gamma_\theta \omega_n\right] + \Delta_2(T)\left[i2\gamma_\theta \omega_n \cos\phi - 2\gamma_\theta \Omega_1 \sin\phi\right] \right\}}{\left\{\begin{array}{l} -\left(z_i^2 - z_m^2 + \gamma_\theta^2 + 1\right) \Omega_{n1} \Omega_{n2} - 2\gamma_\theta \Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi - 2\gamma_\theta \omega_n^{\;2} \\ + i\eta_\sigma 2\omega_n z_m \gamma_\theta \Omega_{n1} + i\eta_\sigma 2\omega_n z_m \Omega_{n2} \end{array}\right\}} \tag{3.59}$$

และ

$$a_\sigma(-\phi, i\omega_n) = \frac{\left\{ \Delta_1(T)\left[-\eta_\sigma 2\Omega_2 z_m - i2\gamma_\theta \omega_n\right] + \Delta_2(T)\left[i2\gamma_\theta \omega_n \cos\phi + 2\gamma_\theta \Omega_1 \sin\phi\right] \right\}}{\left\{\begin{array}{l} -\left(z_i^2 - z_m^2 + \gamma_\theta^2 + 1\right) \Omega_{n1} \Omega_{n2} - 2\gamma_\theta \Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi - 2\gamma_\theta \omega_n^{\;2} \\ + i\eta_\sigma 2\omega_n z_m \gamma_\theta \Omega_{n1} + i\eta_\sigma 2\omega_n z_m \Omega_{n2} \end{array}\right\}}$$

ดังนั้น

$$a_\sigma(\phi, i\omega_n) - a_\sigma(-\phi, i\omega_n) = \frac{\left\{ \Delta_2(T)\left[i2\gamma_\theta \omega_n \cos\phi - 2\gamma_\theta \Omega_{n1} \sin\phi\right] - \Delta_2(T)\left[i2\gamma_\theta \omega_n \cos\phi + 2\gamma_\theta \Omega_{n1} \sin\phi\right] \right.}{\left\{\begin{array}{l} -\left(z_i^2 - z_m^2 + \gamma_\theta^2 + 1\right) \Omega_{n1} \Omega_{n2} - 2\gamma_\theta \Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi - 2\gamma_\theta \omega_n^{\;2} \\ + i\eta_\sigma 2\omega_n z_m \gamma_\theta \Omega_{n1} + i\eta_\sigma 2\omega_n z_m \Omega_{n2} \end{array}\right\}}$$

$$a_\sigma(\phi, i\omega_n) - a_\sigma(-\phi, i\omega_n) = \frac{\Delta_2(T) 4\gamma_\theta \Omega_{n1} \sin\phi}{\left\{\begin{array}{l} -\left(z_i^2 - z_m^2 + \gamma_\theta^2 + 1\right) \Omega_{n1} \Omega_{n2} - 2\gamma_\theta \Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi - 2\gamma_\theta \omega_n^{\;2} \\ + i\eta_\sigma 2\omega_n z_m \gamma_\theta \Omega_{n1} + i\eta_\sigma 2\omega_n z_m \Omega_{n2} \end{array}\right\}}$$

$$\frac{a_\sigma(\phi, i\omega_n) - a_\sigma(-\phi, i\omega_n)}{\Omega_{n1}} = \frac{-\Delta_2(T) 4\gamma_\theta \sin\phi}{\left\{\begin{array}{l} -\left(z_i^2 - z_m^2 + \gamma_\theta^2 + 1\right) \Omega_{n1} \Omega_{n2} - 2\gamma_\theta \Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi - 2\gamma_\theta \omega_n^{\;2} \\ + i\eta_\sigma 2\omega_n z_m \gamma_\theta \Omega_{n1} + i\eta_\sigma 2\omega_n z_m \Omega_{n2} \end{array}\right\}}$$

จากสมการ (3.57)กำหนดให้ $k_{n1}^{\pm} \cong k_F$ ดังนั้นจึงเขียนสมการใหม่ได้ว่า

$$I_{S_1/Fi/S_2} = \frac{e\Delta_1 k_B T}{\hbar} \sum_{\omega_n,\sigma} \frac{1}{2\Omega_{n1}} \left[a_\sigma(\phi, i\omega_n) - a_\sigma(-\phi, i\omega_n) \right]$$

$$\frac{\left[a_\sigma(\phi, i\omega_n) - a_\sigma(-\phi, i\omega_n) \right]}{\Omega_{n1}} = \frac{\Delta_2(T) 4\gamma_\theta \sin\phi}{\begin{bmatrix} 2\gamma_\theta\left(\omega_n^2 + \Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi\right) + \left(z_i^2 - z_m^2 + \gamma_\theta^2 + 1\right)\Omega_{n1}\Omega_{n2} \\ -\eta_\sigma i\left[2\omega_n z_m \gamma_\theta \Omega_{n1} + 2\omega_n z_m \Omega_{n2}\right] \end{bmatrix}}$$

(3.60)

สมมติให้

$$A_1 = \Delta_2(T) 4\gamma_\theta \sin\phi$$

$$A_2 = 2\gamma_\theta\left(\omega_n^2 + \Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi\right) + \left(z_i^2 - z_m^2 + \gamma_\theta^2 + 1\right)\Omega_{n1}\Omega_{n2}$$

$$A_3 = 2\omega_n z_m \gamma_\theta \Omega_{n1} + 2\omega_n z_m \Omega_{n2}$$

(3.61)

ดังนั้น จะได้กระแสโจเซพสันชนิดตรง คือ

$$I_{S_1/Fi/S_2} = \frac{e\Delta_1 k_B T}{2\hbar} \sum_{\omega_n,\sigma} \left[\frac{A_1}{A_2 - \eta_\sigma i A_3} \right]$$

$$= \frac{e\Delta_1 k_B T}{2\hbar} \sum_{\omega_n,\sigma} \left[\frac{A_1}{A_2 - iA_3} + \frac{A_1}{A_2 + iA_3} \right]$$

(3.62)

$$I_{S_1/Fi/S_2} = \frac{e\Delta_1 k_B T}{\hbar} \sum_{\omega_n} \left[\frac{A_1 A_2}{A_2^2 + A_3^2} \right]$$

แทนค่าจากสมการ (3.61) ลงไปในสมการ (3.62) จะได้

$$I_{S_1/Fi/S_2} = \frac{e\Delta_1(T)\Delta_2(T)k_B T}{\hbar}\sum_{\omega_n} 4\gamma_\theta \sin\phi$$

$$\times \frac{\left[2\gamma_\theta\left(\omega_n^2 + \Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi\right) + \left(z_i^2 - z_m^2 + \gamma_\theta^2 + 1\right)\Omega_{n1}\Omega_{n2}\right]}{\left\{\begin{array}{l}\left[2\gamma_\theta\left(\omega_n^2 + \Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi\right) + \left(z_i^2 - z_m^2 + \gamma_\theta^2 + 1\right)\Omega_{n1}\Omega_{n2}\right]^2 \\ + \left[2\omega_n z_m \gamma_\theta \Omega_{n1} + 2\omega_n z_m \Omega_{n2}\right]^2\end{array}\right\}}$$

(3.63)

ถ้าให้ความต้านทานในสภาวะปกติของระบบรอยต่อโจเซฟสัน R_N (normal resistance) เป็น R_N งานวิจัยของ Z.madovic , S.lazarides and S. Flytzanis (Phys.Rev B 68,014501(2003)) คือ

$$R_N = \frac{\pi\hbar}{e^2}\frac{\left[\left(1+\gamma_\theta^2\right) + z_i^2 + z_m^2\right]^2 - 4z_i^2 z_m^2}{4\gamma_\theta\left[\left(1+\gamma_\theta\right)^2 + z_i^2 + z_m^2\right]} \qquad (3.64)$$

ดังนั้นเมื่อใช้สมการ (3.64) จะได้สูตรกระแสโจเซพสันในระบบรอยต่อตัวนำยวดยิ่งชนิดที่1/ ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร / ตัวนำยวดยิ่งชนิดที่2 ($S_1/Fi/S_2$) ใหม่ดังนี้

$$I_{S_1/Fi/S_2} R_N = \frac{e\Delta_1(T)\Delta_2(T)k_B T}{\hbar}\frac{\pi\hbar}{e^2}\frac{\left[\left(1+\gamma_\theta^2\right) + z_i^2 + z_m^2\right]^2 - 4z_i^2 z_m^2}{4\gamma_\theta[(1+\gamma_\theta)^2 + z_i^2 + z_m^2]}\sum_{\omega_n} 4\gamma_\theta \sin\phi$$

$$\times \frac{\left[2\gamma_\theta\left(\omega_n^2 + \Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi\right) + \left(z_i^2 - z_m^2 + \gamma_\theta^2 + 1\right)\Omega_{n1}\Omega_{n2}\right]}{\left\{\begin{array}{l}\left[2\gamma_\theta\left(\omega_n^2 + \Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi\right) + \left(z_i^2 - z_m^2 + \gamma_\theta^2 + 1\right)\Omega_{n1}\Omega_{n2}\right]^2 \\ + \left[2\omega_n z_m \gamma_\theta \Omega_{n1} + 2\omega_n z_m \Omega_{n2}\right]^2\end{array}\right\}}$$

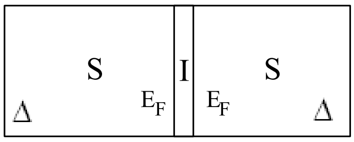
$$\therefore I_{S_1/Fi/S_2} R_N = \frac{\pi\Delta_1(T)\Delta_2(T)k_B T}{e}\frac{\left[\left(1+\gamma_\theta^2\right) + z_i^2 + z_m^2\right]^2 - 4z_i^2 z_m^2}{4\gamma_\theta[(1+\gamma_\theta)^2 + z_i^2 + z_m^2]}\sum_{\omega_n} 4\gamma_\theta \sin\phi$$

$$\times \frac{\left[2\gamma_\theta\left(\omega_n^2 + \Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi\right) + \left(z_i^2 - z_m^2 + \gamma_\theta^2 + 1\right)\Omega_{n1}\Omega_{n2}\right]}{\left\{\begin{array}{l}\left[2\gamma_\theta\left(\omega_n^2 + \Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi\right) + \left(z_i^2 - z_m^2 + \gamma_\theta^2 + 1\right)\Omega_{n1}\Omega_{n2}\right]^2 \\ + \left[2\omega_n z_m \gamma_\theta \Omega_{n1} + 2\omega_n z_m \Omega_{n2}\right]^2\end{array}\right\}}$$

(3.65)

สมการกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในระบบรอยต่อ $S_1 / Fi / S_2$ ดังสมการ (3.65) เป็นสมการกระแสที่ครอบคลุมกระแสโจเซฟสันชนิดตรงในรอยต่อโจเซฟสันรูปแบบต่าง ๆดังต่อไปนี้

1.กรณีรอยต่อแบบ $S / I / S$ เป็นกรณีที่ตัวนำยวดยิ่งทั้งสองเป็นชนิดเดียวกัน ที่มีฉนวนปกติคั่นรอยต่อเงื่อนไขของระบบรอยต่อแบบ $S / I / S$ คือ



ภาพประกอบ 33 แสดงระบบรอยต่อโจเซฟสันแบบตัวนำยวดยิ่ง/ฉนวน/ตัวนำยวดยิ่ง

(1.1) $\Delta_1(T) = \Delta_2(T) = \Delta(T)$

(1.2) $k_{F1} = k_{F2} = k_F$

(1.3) $\gamma_\theta = \dfrac{k_{F2}}{k_{F1}} \dfrac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}$ ในเงื่อนไขที่กำหนดให้ $k_{F1} = k_{F2} = k_F$ และ

$\theta_1 = \theta_2 = \theta$ จะได้ว่า $\gamma_\theta = 1$

(1.4) $\theta_1 = \theta_2 = \theta$

(1.5) $z_m = 0$ เนื่องจากระบบประกอบด้วยฉนวนปกติที่ไม่มีค่าความเป็นแม่เหล็ก

(1.6) $z_i = 2 z_{i\theta} = \dfrac{2m}{\hbar^2 k_F \cos\theta}$

(1.7) $\Omega_{n1} = \Omega_{n2} = \Omega_n = \left[\omega_n^2 + \Delta^2(T)\right]^{1/2}$

จากสมการ (3.63) เมื่อใช้เงื่อนไขดังกล่าวสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$I_{S/I/S} = \frac{e\Delta^2(T) k_B T}{\hbar} \sum_{\omega_n} 4\sin\phi \quad \times \frac{\left[2\left(\omega_n^2 + \Delta^2(T)\cos\phi\right) + \left(z_i^2 + 2\right)\Omega_n^2\right]}{\left\{\left[2\left(\omega_n^2 + \Delta^2(T)\cos\phi\right) + \left(z_i^2 + 2\right)\Omega_n^2\right]^2\right\}}$$

$$\times \frac{1}{\left\{\left[2\left(\omega_n^2 + \Delta^2(T)\left[2\cos^2\frac{\phi}{2} - 1\right]\right) + \left(z_i^2 + 2\right)\left(\omega_n^2 + \Delta^2(T)\right)\right]\right\}}$$

$$I_{S/I/S} = \frac{e\Delta^2(T) k_B T}{\hbar} \sum_{\omega_n} 4\sin\phi \quad \times \frac{1}{\left[4\left\{\omega_n^2\left(1 + z_i^2\right) + \Delta^2(T)\left(\cos^2\frac{\phi}{2} + z_i^2\right)\right\}\right]}$$

ดังนั้นจะได้สมการ

$$I_{S/I/S} = \frac{e\Delta^2(T)k_B T\sin\phi}{\hbar}\sum_{\omega_n} \times \frac{1}{\left[\left\{\omega_n^2\left(1+z_i^2\right)+\Delta^2(T)(\cos^2\frac{\phi}{2}+z_i^2)\right\}\right]}$$

$$I_{S/I/S} = \frac{e\Delta^2(T)k_B T\sin\phi}{\hbar(1+z_i^2)}\sum_{\omega_n}\frac{1}{\omega_n^2+(\frac{\cos^2\frac{\phi}{2}+z_i^2}{(1+z_i^2)})\Delta^2(T)} \tag{3.66}$$

จากความสัมพันธ์

$$\sum_{\omega_n}\frac{1}{\omega_n^2+E^2} = \frac{1}{2k_BT}\tanh\frac{E}{2k_BT} \tag{3.67}$$

ในที่นี้ถ้า

$$E_i = \Delta(T)\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\phi}{2}+z_i^2}{1+z_i^2}} \tag{3.68}$$

จะได้เป็น

$$I(\phi,\theta) = \frac{e\Delta(T)\sin\phi}{2\hbar\sqrt{\left(1+z_i^2\right)\left(\cos^2\frac{\phi}{2}+z_i^2\right)}}\tanh\left(\frac{\Delta(T)}{2k_BT}\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\phi}{2}+z_i^2}{1+z_i^2}}\right) \tag{3.69}$$

จากสมการ (3.64) ความต้านทานในสภาวะปกติของระบบรอยต่อโจเซฟสัน R_N (The normal resistance) ลดรูปได้เป็น

$$R_N = \frac{\pi\hbar}{e^2}\frac{\left[\left(1+\gamma_\theta^2\right)+z_i^2\right]^2}{4\gamma_\theta\left[\left(1+\gamma_\theta\right)^2+z_i^2\right]}$$

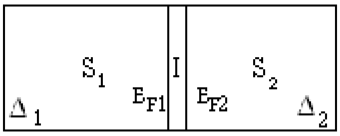
ดังนั้นสามารถเขียนสมการได้เป็น

$$I(\phi,\theta)R_N = \frac{\pi\hbar[(1+\gamma_\theta^2)+z_i^2]^2}{4\gamma_\theta e^2[(1+\gamma_\theta^2)+z_i^2}\frac{e\Delta(T)\sin\phi}{2\hbar\sqrt{\left(1+z_i^2\right)\left(\cos^2\frac{\phi}{2}+z_i^2\right)}}\tanh\left(\frac{\Delta(T)}{2k_BT}\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\phi}{2}+z_i^2}{1+z_i^2}}\right)$$

$$I(\phi,\theta)R_N = \frac{\pi[(1+\gamma_\theta^2)+z_i^2]^2}{8\gamma_\theta e[(1+\gamma_\theta^2)+z_i^2}\frac{\Delta(T)\sin\phi}{\sqrt{\left(1+z_i^2\right)\left(\cos^2\frac{\phi}{2}+z_i^2\right)}}\tanh\left(\frac{\Delta(T)}{2k_BT}\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\phi}{2}+z_i^2}{1+z_i^2}}\right) \tag{3.70}$$

นี่คือสมการที่ได้เหมือนกับสมการที่ได้ในงานวิจัยของฟูรูซากิกับซูกาดะ(Furusaki and Tsukada) โดยที่ $\Delta(T)\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\phi}{2}+z_i^2}{1+z_i^2}}$ ในสมการ (3.68) คือ พลังงานของสถานะที่ถูกยึดเหนี่ยว(energy of bound state) ในระบบรอยต่อโจเซพสัน

2.กรณีรอยต่อแบบ $S_1 / I / S_2$ เป็นกรณีที่ตัวนำยวดยิ่งทั้งสองต่างชนิดกัน มีฉนวนปกติคั่นรอยต่อ เงื่อนไขของระบบรอยต่อแบบ $S_1 / I / S_2$ คือ



ภาพประกอบ 34 แสดงระบบรอยต่อโจเซพสันแบบตัวนำยวดยิ่ง$_1$/ฉนวน/ตัวนำยวดยิ่ง$_2$

(1.1) $\Delta_1(T) \neq \Delta_2(T)$

(1.2) $k_{F1} \neq k_{F2}$

(1.3) $\gamma_\theta = \dfrac{k_{F2}}{k_{F1}}$ ในเงื่อนไขที่กำหนดให้ $\gamma_\theta = \dfrac{k_{F2}\cos\theta_2}{k_{F1}\cos\theta_1}$ และ $\theta_1 = \theta_2 = \theta$

จะได้ว่า $\gamma_\theta = \dfrac{k_{F2}}{k_{F1}}$

(1.4) $\theta_1 = \theta_2 = \theta$

(1.5) $z_m = 0$

(1.6) $z_i = 2z_{i\theta} = \dfrac{2m}{\hbar^2 k_F \cos\theta}$

(1.7) $\Omega_{n1} = \left[\omega_n^2 + \Delta^2{}_1(T)\right]^{1/2}$

(1.8) $\Omega_{n2} = \left[\omega_n^2 + \Delta^2{}_2(T)\right]^{1/2}$

จากสมการ (3.63) เมื่อใช้เงื่อนไขดังกล่าวสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$I_{S_1/I/S_2} = \frac{e\Delta_1(T)\Delta_2(T)k_B T}{\hbar}\sum_{\omega_n} 4\gamma_\theta \sin\phi$$

$$\times \frac{\left[2\gamma_\theta\left(\omega_n^2 + \Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi\right) + \left(z_i^2 + \gamma_\theta^2 + 1\right)\Omega_{n1}\Omega_{n2}\right]}{\left\{\left[2\gamma_\theta\left(\omega_n^2 + \Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi\right) + \left(z_i^2 + \gamma_\theta^2 + 1\right)\Omega_{n1}\Omega_{n2}\right]^2\right\}}$$

$$I_{S_1/I/S_2} = \frac{e\Delta_1(T)\Delta_2(T)k_B T}{\hbar}\sum_{\omega_n} 4\gamma_\theta \sin\phi$$

$$\times \left\{\frac{1}{\left[2\gamma_\theta\left(\omega_n^2 + \Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi\right) + \left(z_i^2 + \gamma_\theta^2 + 1\right)\Omega_{n1}\Omega_{n2}\right]^2}\right\}$$

จากสมการ (3.64) ความต้านทานในสภาวะปกติของระบบรอยต่อโจเซฟสัน R_N (normal resistance) ลดรูปได้เป็น

$$R_N = \frac{\pi\hbar}{e^2}\frac{\left[\left(1+\gamma_\theta^2\right)+z_i^2\right]^2}{4\gamma_\theta\left[\left(1+\gamma_\theta\right)^2 + z_i^2\right]}$$

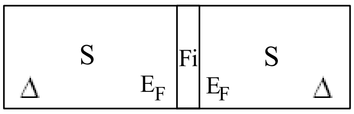
ดังนั้นสามารถเขียนสมการได้เป็น

$$I_{S_1/I/S_2} R_N = \frac{\pi\Delta_1(T)\Delta_2(T)k_B T\sin\phi}{e}\sum_{\omega_n}$$

$$\times \left\{\frac{(1+\gamma_\theta^2)+z_i^2}{\left[2\gamma_\theta\left(\omega_n^2 + \Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi\right) + \left(z_i^2 + \gamma_\theta^2 + 1\right)\Omega_{n1}\Omega_{n2}\right]^2}\right\} \tag{3.71}$$

สมการที่(3.71)ที่ได้นี้เหมือนกับสมการที่ได้ในงานวิจัยของฟูรูซากิกับซูกาดะ (Furusaki and Tsukada)

3. กรณีรอยต่อแบบ $S/Fi/S$ เป็นกรณีที่ตัวนำยวดยิ่งทั้งสองเป็นชนิดเดียวกัน มีฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรคั่นรอยต่อ เงื่อนไขของระบบรอยต่อแบบ $S/Fi/S$ คือ



ภาพประกอบ 35 แสดงระบบรอยต่อโจเซพสันแบบตัวนำยวดยิ่ง$_1$/ฉนวนเฟอร์โร/ตัวนำยวดยิ่ง$_2$

(1.1) $\Delta_1(T) = \Delta_2(T) = \Delta(T)$

(1.2) $k_{F1} = k_{F2} = k_F$

(1.3) $\gamma_\theta = 1$

(1.4) $\theta_1 = \theta_2 = \theta$

(1.5) $z_i = 0$

(1.6) $z_m = 2z_{m\theta} = \dfrac{2m}{\hbar^2 k_F \cos\theta}$

(1.7) $\Omega_{n1} = \Omega_{n2} = \Omega_n = \left[\omega_n^2 + \Delta^2(T)\right]^{1/2}$

จากสมการ (3.63) เมื่อใช้เงื่อนไขดังกล่าวสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$I_{S/Fi/S} = \frac{e\Delta^2(T)k_BT}{\hbar}\sum_{\omega_n} 4\sin\phi \quad \times \frac{\left[2\left(\omega_n^2+\Delta^2(T)\cos\phi\right)+\left(-z_m^2+2\right)\left(\omega_n^2+\Delta^2(T)\right)\right]}{\left\{\begin{array}{l}\left[2\left(\omega_n^2+\Delta^2(T)\cos\phi\right)+\left(z_i^2+2\right)\left(\omega_n^2+\Delta^2(T)\right]^2\right. \\ +2\omega_n z_m\Omega_n+2\omega_n z_m\Omega_n\end{array}\right\}}$$

พิจารณาเทอม $2\left(\omega_n^2+\Delta^2(T)\cos\phi\right)+(-z_m^2+2)(\omega_n^2+\Delta^2(T))$

$$= 2\left(\omega_n^2+\Delta^2(T)(2\cos^2\frac{\phi}{2}-1\right)+(-z_m^2\omega_n^2+2\Delta^2(T)+2\omega_n^2-z_m^2\Delta^2(T)$$

$$= 2\omega_n^2+4\Delta^2(T)\cos^2\tfrac{\phi}{2}-2\Delta^2(T)-z_m^2\omega_n^2+2\Delta^2(T)+2\omega_n^2-z_m^2\Delta^2(T)$$

$$= 4\left\{\omega_n^2(1-z_m^2)+4\Delta^2(T)\left[\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2\right]\right\} \qquad (3.72)$$

พิจารณาเทอม

$$[2\left(\omega_n^2 + \Delta^2(T)\cos\phi\right) + (-z_m^2 + 2)(\omega_n^2 + \Delta^2(T))]^2 + (2\omega_n z_m \Omega_n + 2\omega_n z_m \Omega_n)$$

$$= 4\left\{\omega_n^2(1 - z_m^2) + 4\Delta^2(T)\left[\cos^2\frac{\phi}{2} - z_m^2\right]\right\}^2 + \left\{4\Delta^2(T)z_m^2\omega_n^2 + (1 + z_m^2)^2\omega_n^4\right\}$$

$$= 16\left\{\omega_n^4(1 - z_m^2 + 2\Delta^2(T)(1 - z_m^2)\omega_n^2[\cos^2\frac{\phi}{2} - z_m^2]\right\} + \left\{4\Delta^2(T)z_m^2\omega_n^2 + (1 + z_m^2)^2\omega_n^4\right\}$$

(3.73)

ดังนั้นสมการจะเขียนใหม่ได้เป็น

$$I_{S/Fi/S} = \frac{e\Delta^2(T)k_B T \sin\phi}{\hbar}\sum_{\omega_n}$$

$$\times \frac{\left(1 - z_m^2\right)\omega_n^2 + \left(\cos^2\frac{\phi}{2} - z_m^2\right)\Delta^2(T)}{\left(\cos^2\frac{\phi}{2} - z_m^2\right)^2\Delta^4(T) + \left\{2\Delta^2(T)(1 - z_m^2)\omega_n^2\right\}\left[\cos^2\frac{\phi}{2} - z_m^2\right] + \left\{4\Delta^2(T)z_m^2\omega_n^2 + \left(1 + z_m^2\right)^2\omega_n^4\right\}}$$

(3.74)

จากงานวิจัยของ ทานากะ กับ คาชิวายา(Y. Tanaka and S. Kashiwaya) กำหนดให้

$$f(\phi,\theta) = \frac{\hbar}{2e}\int d\phi I(\phi,\theta) \qquad (3.75)$$

$$f(\phi,\theta) = \frac{k_B T}{2}\sum_{\omega_n} \times \int \frac{\Delta^2(T)d\phi\sin\phi\left\{\Delta^2(T)\left(\cos^2\frac{\phi}{2} - z_m^2\right) + \left(1 - z_m^2\right)\omega_n^2\right\}}{\left[\begin{array}{l}\Delta^4(T)(\cos^2\frac{\phi}{2} - z_m^2) + \left\{2\Delta^2(T)(1 - z_m^2)\omega_n^2\right\}(\cos^2\frac{\phi}{2} - z_m^2 \\ + \left\{4\Delta^2(T)z_m^2\omega_n^2 + (1 + z_m^2)^2\omega_n^4\right\}\end{array}\right]}$$

พิจารณาเทอม
$$\sum_{\omega_n}\int\frac{\Delta^2(T)d\phi\sin\phi\left\{\Delta^2(T)\left(\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2\right)+\left(1-z_m^2\right)\omega_n^2\right\}}{\left[\begin{array}{l}\Delta^4(T)(\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2)+\left\{2\Delta^2(T)(1-z_m^2)\omega_n^2\right\}(\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2\\+\left\{4\Delta^2(T)z_m^2\omega_n^2+(1+z_m^2)^2\omega_n^4\right\}\end{array}\right]}$$

หาอนุพันธุ์อันดับหนึ่งเทียบกับ ϕ เทอม

$$\Delta^4(T)[\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2]^2+[2\Delta^2(T)(1-z_m^2)\omega_n^2](\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2)+[4\Delta^2(T)z_m^2\omega_n^2+(1+z_m^2)^2\omega_n^4]$$

$$=d\left[\Delta^4(T)[\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2]^2+[2\Delta^2(T)(1-z_m^2)\omega_n^2](\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2)+[4\Delta^2(T)z_m^2\omega_n^2+(1+z_m^2)^2\omega_n^4]\right]$$

$$=2\Delta^4(T)[\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2]+[2\Delta^2(T)(1-z_m^2)\omega_n^2]d(\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2)$$
$$=-2\Delta^2(T)\left[\Delta^2\left(T\right)(\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2)+(1-z_m^2)\omega_n^2\right]2\cos\frac{\phi}{2}\sin\frac{\phi}{2}\frac{d\phi}{2}$$
$$=-2\Delta^2(T)\sin\phi d\phi\left[\Delta^2\left(T\right)(\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2)+(1-z_m^2)\omega_n^2\right] \tag{3.76}$$

ดังนั้นจาก $\int\frac{1}{u}du=\ln u+c$ จะได้เป็น

$$f\left(\phi,\theta\right) = -\frac{k_BT}{2}\sum_{\omega_n}\ln\left\{\begin{array}{l}(1+z_m^2)^2\omega_n^4+2\Delta^2(T)[(1-z_m^2)(\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2)\omega_n^2\\+[4\Delta^2(T)z_m^2\omega_n^2+(1+z_m^2)^2\omega_n^4]\end{array}\right\}$$

$$=-\frac{k_BT}{2}\sum_{\omega_n}\ln\left\{(1+z_m^2)^2\right\}\omega_n^4+2\Delta^2(T)\left\{(1-z_m^2)(\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2)+2z_m^2\right\}\omega_n^2$$
$$+\left\{\left(\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2\right)^2\Delta^4(T)\right\}$$

พิจารณาเทอม

$$(1+z_m^2)\omega_n^4+2\Delta^2(T)\left[(1-z_m^2)(\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2)+2z_m^2\right]\omega_n^2+(\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2)^2\Delta^4(T)$$

กำหนดให้

$$\begin{aligned}E_{\pm}^2 &= -x_{\pm}\\ &= -\left[\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\\ E_{\pm}^2 &= \frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\end{aligned}$$

(3.77)

$$\begin{aligned}\therefore f(\phi,\theta) &= -\frac{k_BT}{2}\left[\sum_{\omega_n}\ln(\omega_n^2-x_+)\ln(\omega_n^2-x_-)+\ln C\right]\\ &= -\frac{k_BT}{2}\left[\sum_{\omega_n}\ln(\omega_n^2+E_+^2)+\sum_{\omega_n}\ln(\omega_n^2+E_-^2)+\ln C\right]\\ &= -\frac{k_BT}{2}\left[\ln\left(\cosh\frac{E_+}{2k_BT}\right)+\ln\left(\cosh\frac{E_-}{2k_BT}\right)+\ln C\right]\end{aligned}$$

จากงานวิจัยของ ทานากะ กับ คาชิวายา(Y. Tanaka and S. Kashiwaya) กำหนดให้

$$I(\phi,\theta)=\frac{2e}{\hbar}\frac{\partial f(\phi,\theta)}{\partial\phi}$$

$$\begin{aligned}I(\phi,\theta) &= \frac{2e}{\hbar}\frac{\partial f(\phi,\theta)}{\partial\phi}\\ &= -\frac{2e}{\hbar}k_BT\left\{\frac{\partial}{\partial\phi}\ln\left[\cosh\frac{E_+}{2k_BT}\right]+\frac{\partial}{\partial\phi}\ln\left[\cosh\frac{E_-}{2k_BT}\right]\right\}\\ &= -\frac{e}{\hbar}\left\{\tanh(\frac{E_+}{2k_BT})\frac{\partial E_+}{\partial\phi}+\tanh(\frac{E_-}{2k_BT})\frac{\partial E_-}{\partial\phi}\right\}\\ &= -\frac{e}{\hbar}\left\{\frac{\partial E_+}{\partial\phi}\tanh(\frac{E_+}{2k_BT})+\frac{\partial E_-}{\partial\phi}\tanh(\frac{E_-}{2k_BT})\right\}\end{aligned}$$

(3.78)

พิจารณาเทอม

$$(1+z_m^2)\omega_n^4 + 2\Delta^2(T)\left[(1-z_m^2)(\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2)+2z_m^2\right]\omega_n^2 + (\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2)^2\Delta^4(T)$$

จะได้

$$x_\pm = \frac{-2\Delta^2(T)\left\{(1-z_m^2)(\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2)+2z_m^2\right\} \pm \begin{Bmatrix} 4\Delta^2(T)[(1-z_m^2)(\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2)+2z_m^2 \\ -4(1+z_m^2)^2[(\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2)^2\Delta^4(T) \end{Bmatrix}^{1/2}}{2(1+z_m^2)^2}$$

ในที่นี้กำหนดให้

$$a = (1+z_m^2)^2$$

$$b = 2\Delta^2(T)[(1-z_m^2)(\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2)+2z_2^m]$$

และ $$c = (\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2)^2\Delta^4(T)$$

พิจารณาเทอม

$$4\Delta^4(T)[(1-z_m^2)(\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2)+2z_m^2]^2 - 4(1+z_m^2)^2[(\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2)^2\Delta^4(T)$$

$$= 4\Delta^4(T)\begin{Bmatrix} (1-z_m^2)^2(\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2)^2 + 4z_m^4 + 4z_m^2(1-z_m^2)^2(\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2)^2 \\ -(1+z_m^2)^2(\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2)^2 \end{Bmatrix}$$

$$= 4^2\Delta^4(T)z_m^2\left\{z_m^2 + (1-z_m^2)(\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2) - (\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2)^2\right\}$$

$$= \left(4\Delta^2(T)z_m\right)^2\left\{\cos^2\frac{\phi}{2} - z_m^2\cos^2\frac{\phi}{2} - \cos^4\frac{\phi}{2} + 2z_m^2\cos^2\frac{\phi}{2}\right\}$$

$$= \left(4\Delta^2(T)z_m\cos\frac{\phi}{2}\right)^2\left\{1 - z_m^2 - \cos^2\frac{\phi}{2} + 2z_m^2\right\}$$

$$= \left(4\Delta^2(T)z_m\cos\frac{\phi}{2}\right)^2\left\{\sin^2\frac{\phi}{2} + z_m^2\right\}$$

ดังนั้น

$$x_{\pm} = \frac{-2\Delta^2(T)\left\{(1-z_m^2)(\cos^2\frac{\phi}{2}-z_m^2)+2z_m^2\right\} \pm 4z_m\Delta^2(T)\cos\frac{\phi}{2}\sqrt{\sin^2\frac{\phi}{2}+z_m^2}}{2(1+z_m^2)^2}$$

$$= -\frac{\Delta^2(T)}{(1+z_m^2)^2}\left\{\cos^2\frac{\phi}{2}+z_m^2-z_m^2\cos^2\frac{\phi}{2}+z_m^4 \pm 2z_m\cos\frac{\phi}{2}\sqrt{\sin^2\frac{\phi}{2}+z_m^2}\right\}$$

$$= -\frac{\Delta^2(T)}{(1+z_m^2)^2}\left\{\cos^2\frac{\phi}{2}+z_m^2(\sin^2\frac{\phi}{2}+z_m^2) \pm 2\cos\frac{\phi}{2}[z_m\sqrt{\sin^2\frac{\phi}{2}+z_m^2}]\right\}$$

$$= -\frac{\Delta^2(T)}{(1+z_m^2)^2}\left\{\cos\frac{\phi}{2} \pm z_m\sqrt{\sin^2\frac{\phi}{2}+z_m^2}\right\}^2$$

และเนื่องจากกำหนดให้

$$E_{\pm}^2 = -x_{\pm}$$

$$E_{\pm} = \frac{\Delta(T)}{(1+z_m^2)}\left\{\cos\frac{\phi}{2} \pm z_m\sqrt{\sin^2\frac{\phi}{2}+z_m^2}\right\}$$

พิจารณาเทอม $\frac{\partial E_{\pm}}{\partial \phi}$

$$\frac{\partial E_{\pm}}{\partial \phi} = \frac{\Delta(T)}{(1+z_m^2)}\left\{-\frac{1}{2}\sin\frac{\phi}{2} \pm \frac{z_m(2\sin\phi/2\cos\phi/2)^{1/2}}{\sqrt{\sin^2\phi/2+z_m^2}}\right\}$$

$$= \frac{\Delta(T)\sin\phi/2}{2(1+z_m^2)}\left\{-1 \pm \frac{z_m\cos\phi/2}{\sqrt{\sin^2\phi/2+z_m^2}}\right\} \tag{3.79}$$

ดังนั้นเมื่อแทนค่า $\frac{\partial E_{\pm}}{\partial \phi}$ ลงในสมการ(3.78)จะได้กระแสโจเซพสันในระบบรอยต่อ $S / Fi / S$ คือ

$$I(\phi,\theta) = -\frac{e}{2\hbar}\left(\frac{\Delta(T)\sin\frac{\phi}{2}}{1+z_m^2}\right)\left[\begin{array}{l} -1+\dfrac{z_m\cos\frac{\phi}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\phi}{2}+z_m^2}}\tanh(\dfrac{E_+}{2k_BT}) \\ +\left(-1-\dfrac{z_m\cos\frac{\phi}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\phi}{2}+z_m^2}}\tanh(\dfrac{E_-}{2k_BT})\right)\end{array}\right]$$

$$I(\phi,\theta) = \frac{e}{2\hbar}\left(\frac{\Delta(T)\sin\frac{\phi}{2}}{1+z_m^2}\right)\left[\tanh(\frac{E_+}{2k_BT})+\tanh(\frac{E_-}{2k_BT})\right]$$
$$-\frac{z_m\cos\frac{\phi}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\phi}{2}+z_m^2}}\left[\tanh(\frac{E_+}{2k_BT})-\tanh(\frac{E_-}{2k_BT})\right]$$

(3.80)

เมื่อ $E_{\pm} = \frac{\Delta(T)}{(1+z_m^2)}\left\{\cos\frac{\phi}{2} \pm z_m\sqrt{\sin^2\frac{\phi}{2}+z_m^2}\right\}$ (3.81)

ความต้านทานในสภาวะปกติของระบบรอยต่อโจเซฟสัน R_N (The normal resistance) เป็น

$$R_N = \frac{\pi\hbar[(1+\gamma_\theta^2)+z_m^2]}{4\gamma_\theta e^2}$$

ดังนั้น ถ้าใช้ค่า R_N จะได้สูตรกระแสโจเซฟสันในระบบ $S/Fi/S$ ใหม่ได้ว่า

$$IR_N = \frac{\pi[(1+\gamma_\theta^2)+z_m^2]}{4\gamma_\theta e}\left(\frac{\Delta(T)\sin\frac{\phi}{2}}{1+z_m^2}\right)\left[\tanh(\frac{E_+}{2k_BT})+\tanh(\frac{E_-}{2k_BT})\right]$$

$$-\frac{z_m\cos\frac{\phi}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\phi}{2}+z_m^2}}\left[\tanh(\frac{E_+}{2k_BT})-\tanh(\frac{E_-}{2k_BT})\right]$$

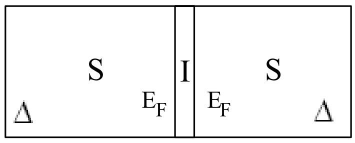
(3.82)

นี่คือสมการที่ได้เหมือนกับสมการที่ได้ในงานวิจัยของทานากะ กับ คาชิวายา (Y. Tanaka and S. Kashiwaya) และ $\frac{\Delta(T)}{(1+z_m^2)}\left\{\cos\frac{\phi}{2}\pm z_m\sqrt{\sin^2\frac{\phi}{2}+z_m^2}\right\}$ ในสมการ (3.81) คือ พลังงานของสถานะที่ถูกยึดเหนี่ยว(energy of bound state) ในระบบรอยต่อโจเซฟสัน

บทที่ 4
ผลการวิจัย

ในการวิจัยเพื่อหากระแสโจเซพสันชนิดตรงในระบบรอยต่อโจเซพสันที่ประกอบด้วยตัวนำยวดยิ่งชนิดที่1/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร/ตัวนำยวดยิ่งชนิดที่ 2 ในบทที่ 3 สูตรกระแสโจเซพสันชนิดตรงที่ได้เมื่อปรับตัวแปรให้มีค่าเหมาะสมกับรอยต่อโจเซพสันในกรณีต่างเหล่านี้ทุกสูตรครอบคลุมสูตรกระแสโจเซพสันชนิดตรงที่ได้มีการวิจัยมาแล้ว และสำหรับในบทที่ 4 นี้จะนำสูตรกระแสโจเซพสันชนิดตรงในแต่ละระบบมาแสดงให้เห็นในรูปของกราฟความสัมพันธ์ระหว่างกระแสโจเซพสันที่ได้กับค่าตัวแปรต่าง ๆโดยในที่นี้จะกำหนดให้ I เป็นกระแสโจเซพสันชนิดตรงในรอยต่อโจเซพสัน R_N เป็นความต้านทานของรอยต่อโจเซพสันในสถานะปกติ ϕ เป็นความต่างเฟสของค่าพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบระหว่างสองตัวนำยวดยิ่งในรอยต่อโจเซพสัน

1.กรณีระบบรอยต่อ $S/I/S$ เป็นกรณีที่ตัวนำยวดยิ่งทั้งสองเป็นชนิดเดียวกัน ที่มีฉนวนปกติคั่นระหว่างรอยต่อ



ภาพประกอบ 36 แสดงระบบรอยต่อโจเซพสันแบบตัวนำยวดยิ่ง/ฉนวน/ตัวนำยวดยิ่ง

จากสมการ(3.70)

$$IR_N = \frac{\pi[(1+\gamma_\theta^2)+z_i^2]^2}{8\gamma_\theta e[(1+\gamma_\theta^2)+z_i^2]}\frac{\Delta(T)\sin\phi}{\sqrt{(1+z_i^2)\left(\cos^2\frac{\phi}{2}+z_i^2\right)}}\tanh\left(\frac{\Delta(T)}{2k_BT}\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\phi}{2}+z_i^2}{1+z_i^2}}\right) \tag{4.1}$$

ในการแสดงเป็นกราฟได้มีการกำหนดให้ตัวแปรต่าง ๆมีค่าดังนี้

1. $k_B \equiv 1$
2. $\hbar \equiv 1$
3. $\gamma_\theta = \dfrac{k_{F2}}{k_{F1}}\dfrac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}$ ในเงื่อนไขที่กำหนดให้ $k_{F1} = k_{F2} = k_F$ และ $\theta_1 = \theta_2 = \theta$

   จะได้ว่า $\gamma_\theta = 1$ เนื่องจากเป็นตัวนำชนิดเดียวกัน

จากสมการ (4.1) จัดรูปใหม่ และ $\Delta(0)$ คือ order parameter ที่อุณหภูมิ 0 องศาสัมบูรณ์

$$\frac{eIR_N}{\pi\Delta(0)} = \frac{\Delta(T)[(1+\gamma_\theta^2)+z_i^2]}{8\gamma_\theta\Delta(0)}\frac{\sin\phi}{\sqrt{(1+z_i^2)\left(\cos^2\frac{\phi}{2}+z_i^2\right)}}\tanh\left(\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)}\cdot\frac{\Delta(0)}{2T}\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\phi}{2}+z_i^2}{1+z_i^2}}\right)$$

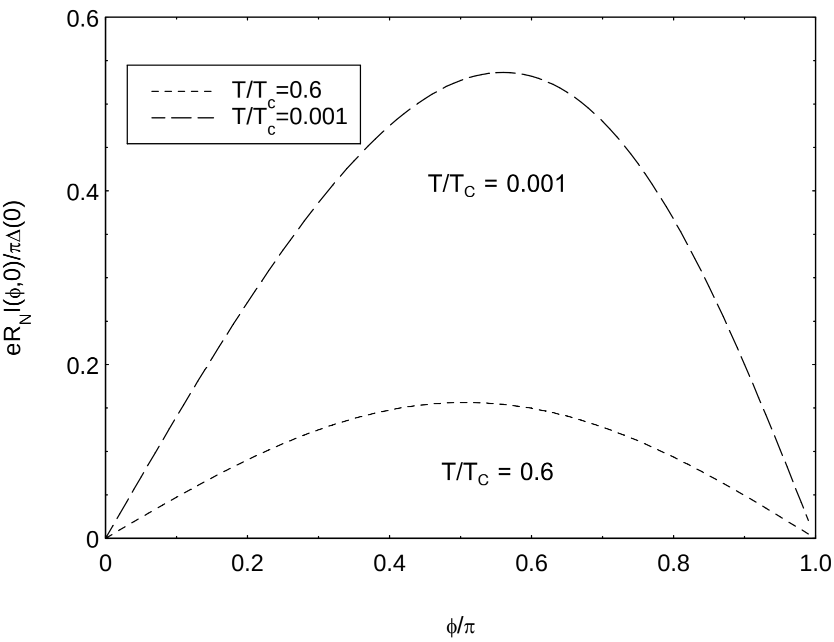
$$= \frac{\Delta(T)[(1+\gamma_\theta^2)+z_i^2]^2}{8\gamma_\theta\Delta(0)}\frac{\sin\phi}{\sqrt{(1+z_i^2)\left(\cos^2\frac{\phi}{2}+z_i^2\right)}}\tanh\left(\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)}\cdot\frac{\Delta(0)}{T_C}\cdot\frac{T_C}{2T}\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\phi}{2}+z_i^2}{1+z_i^2}}\right)$$

กำหนดให้

$$\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} = \tanh\left(1.74\sqrt{\frac{1}{T/T_C}-1}\right) \tag{4.2}$$

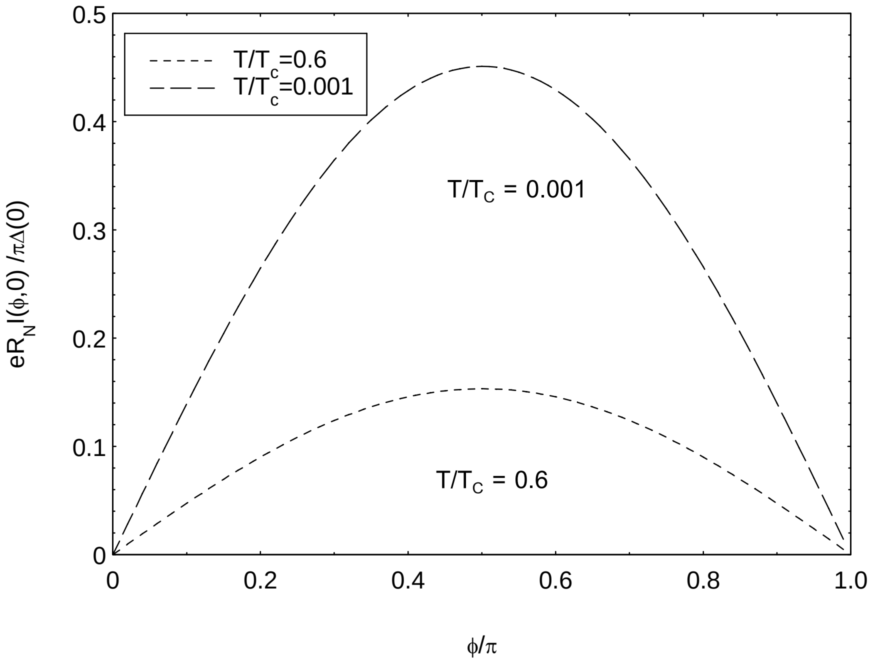
และ

$$\frac{2\Delta(0)}{T_C} = 3.52 \quad , \quad \frac{\Delta(0)}{T_C} = 1.76 \tag{4.3}$$



ภาพประกอบ 37 แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N / \pi\Delta(0)$ กับ ϕ / π ที่ $z_i = 1$ $\gamma_\theta = 1$, $T / T_C = 0.001$ และ $T / T_C = 0.6$

จากภาพประกอบ 37 เป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างกระแสโจเซพสัน กับมุม ϕ ที่ค่าต่างๆ พบว่า เมื่ออัตราส่วนของ T / T_C เพิ่มขึ้น แอมปลิจูดของกระแสโจเซพสันชนิดตรงจะลดลง



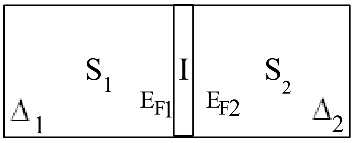
ภาพประกอบ 38 แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N / \pi\Delta(0)$ กับ ϕ / π ที่ $z_i = 10$ $\gamma_\theta = 1$, $T / T_C = 0.001$ และ $T / T_C = 0.6$

เมื่อเปรียบเทียบภาพประกอบ 37 กับภาพประกอบ 38 โดยใช้อัตราส่วนของ T / T_C มีค่า 0.001 กระแสโจเซพสันชนิดตรงที่ไหลผ่าน เมื่อศักย์ของฉนวนปกติ z_i มีค่าเท่ากับ 1 (ดังภาพประกอบ 37) และกระแสโจเซพสันชนิดตรงที่ไหลผ่าน เมื่อศักย์ของฉนวนปกติ z_i มีค่าเท่ากับ 10 (ดังภาพประกอบ 38) พบว่ากระแสโจเซพสันชนิดตรงจะลดลงเมื่อค่าศักย์ฉนวนปกติมีค่าเพิ่มมากขึ้น

2.กรณีระบบรอยต่อตัวนำยวดยิ่ง$_1$/ฉนวนปกติ/ตัวนำยวดยิ่ง$_2$($S_1/I/S_2$) ในการแสดงเป็นกราฟได้มีการกำหนดให้ตัวแปรต่าง ๆมีค่าดังนี้

1. $k_B \equiv 1$
2. $\hbar \equiv 1$
3. $\gamma_\theta = \dfrac{k_{F2}}{k_{F1}}\dfrac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}$ ในเงื่อนไขที่กำหนดให้ $\theta_1 = \theta_2 = \theta$

จะได้ว่า $\gamma_\theta = \dfrac{k_{F2}}{k_{F1}}$



ภาพประกอบ 39 แสดงระบบรอยต่อโจเซพสันแบบตัวนำยวดยิ่ง$_1$/ฉนวน/ตัวนำยวดยิ่ง$_2$

จากสมการ (3.71)

$$IR_N = \frac{\pi\Delta_1(T)\Delta_2(T)k_B T\sin\phi}{e}\sum_{\omega_n}$$

$$\times\frac{(1+\gamma_\theta^2)+z_i^2}{\left\{\left[2\gamma_\theta\left(\omega_n^2+\Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi\right)+\left(z_i^2+\gamma_\theta^2+1\right)\Omega_{n1}\Omega_{n2}\right]^2\right\}} \tag{4.4}$$

กำหนดให้ $\Delta_{01} = \Delta_1(0)$ และ $\Delta_{02} = \Delta_2(0)$ เป็นค่าช่องว่างของพลังงานตัวนำยวดยิ่งที่หนึ่งและสองตามลำดับที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์

นำเงื่อนไขต่าง ๆมาจัดรูปสมการ(4.4) ใหม่ได้เป็น

$$\frac{eIR_N}{\pi\Delta_{01}} = \frac{\Delta_1(T)\Delta_2(T)T\sin\phi}{\Delta_{01}}\sum_{\omega_n}$$

$$\times \frac{(1+\gamma_\theta^2)+z_i^2}{\left\{\left[2\gamma_\theta\left(\omega_n^2+\Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi\right)+\left(z_i^2+\gamma_\theta^2+1\right)\Omega_{n1}\Omega_{n2}\right]^2\right\}}$$

$$= \frac{\Delta_1(T)\Delta_2(T)T\sin\phi}{\Delta_{01}}\sum_{\omega_n}$$

$$\times \frac{(1+\gamma_\theta^2)+z_i^2}{\left\{\left[2\gamma_\theta\left(\omega_n^2+\Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi\right)+\left(z_i^2+\gamma_\theta^2+1\right)\Omega_{n1}\Omega_{n2}\right]^2\right\}}$$

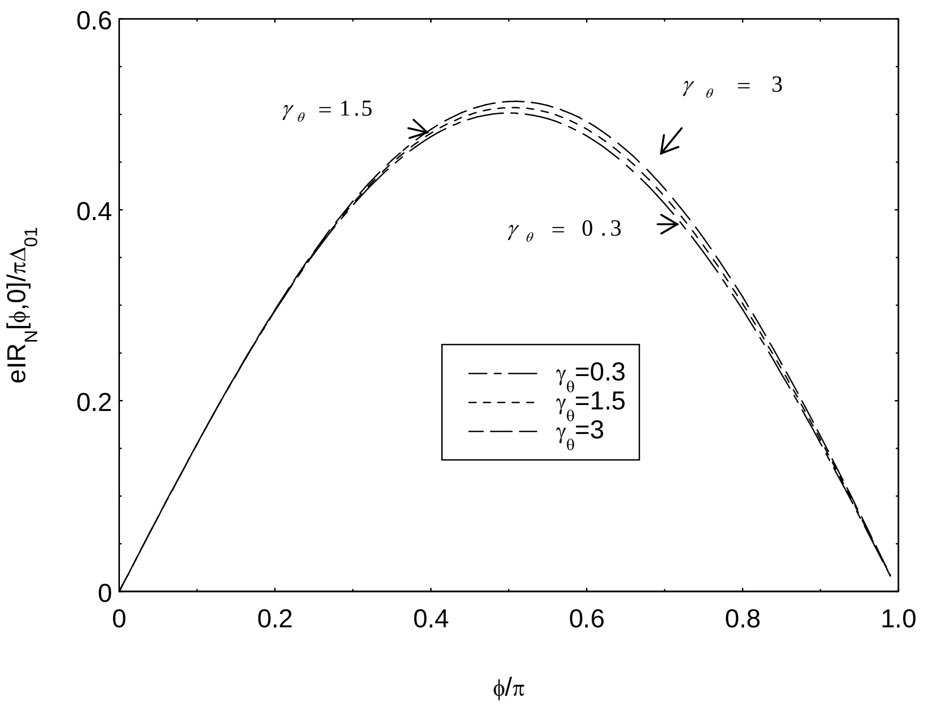
ในที่นี้ กำหนดให้

$$\Delta_{1,2}(T) = \Delta_{01,2}\tanh\left(1.74\sqrt{\frac{T_{C1,2}}{T}-1}\right) \tag{4.5}$$

$$\frac{T}{\Delta_{01}} = 0.568\frac{T}{T_{C1}} \tag{4.6}$$

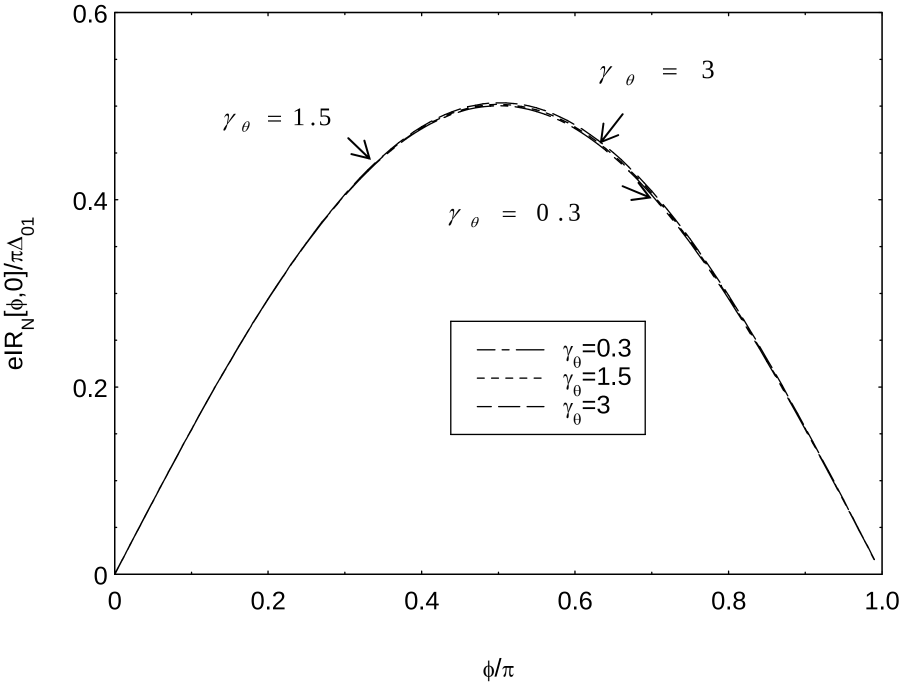
และ

$$\Omega_{n1,2} = [\omega_n^2+\Delta_{1,2}^2]^{1/2} \tag{4.7}$$



ภาพประกอบ 40 แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N / \pi\Delta_{01}$ กับ ϕ / π เมื่อ γ_θ เท่ากับ 3 , 1.5 และ 0.3 ตามลำดับ และ $z_i = 5$ เมื่อ $T / T_{C1} = 0.001$

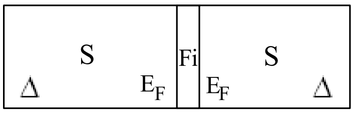
จากภาพประกอบ 40 เมื่อ อัตราส่วนโมเมนตัมของเฟร์มี(γ_θ)เพิ่มขึ้น พบว่า กระแสโจเซพสันชนิดตรงจะไหลผ่านกำแพงศักย์ได้มากขึ้น



ภาพประกอบ 41 แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N / \pi\Delta_{01}$ กับ ϕ / π เมื่อ γ_θ เท่ากับ 3 , 1.5 และ 0.3 ตามลำดับ และ $z_i = 5$ เมื่อ $T / T_{C1} = 0.5$

จากภาพประกอบ 41 เมื่อ อัตราส่วนโมเมนตัมของเฟร์มี(γ_θ)เพิ่มขึ้น พบว่า กระแสโจเซพสันชนิดตรงจะไหลผ่านกำแพงศักย์ได้มากขึ้น และอัตราส่วน T / T_{C1} เพิ่มขึ้นแอมปลิจูดของกระแสโจเซพสันจะลดลง

3. กรณีระบบรอยต่อ $S/Fi/S$ เป็นกรณีที่ตัวนำยวดยิ่งทั้งสองเป็นชนิดเดียวกัน ที่มีฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรคั่นระหว่างรอยต่อ



ภาพประกอบ 42 แสดงระบบรอยต่อโจเซฟสันแบบตัวนำยวดยิ่ง/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร/ตัวนำยวดยิ่ง

ซึ่ง เขียนได้ดังสมการ(3.82)

$$IR_N = \frac{\pi[(1+\gamma_\theta^2)+z_m^2]}{4\gamma_\theta e}\left(\frac{\Delta(T)\sin\frac{\phi}{2}}{1+z_m^2}\right)\left[\tanh\left(\frac{E_+}{2k_BT}\right)+\tanh\left(\frac{E_-}{2k_BT}\right)\right]$$
$$-\frac{z_m\cos\frac{\phi}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\phi}{2}+z_m^2}}\left[\tanh\left(\frac{E_+}{2k_BT}\right)-\tanh\left(\frac{E_-}{2k_BT}\right)\right] \tag{4.8}$$

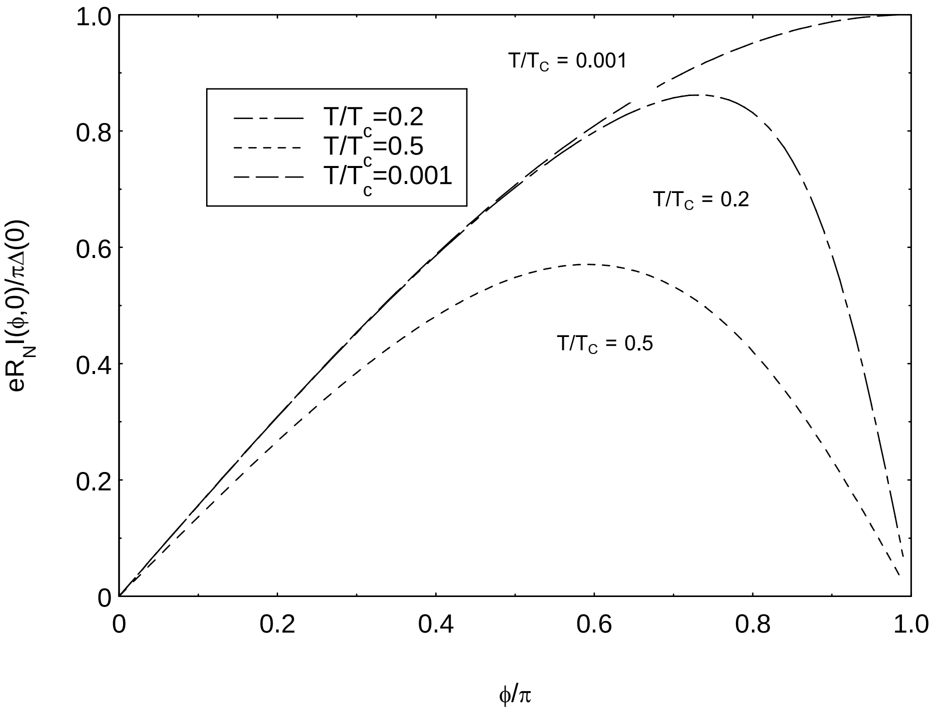
เมื่อ $E_\pm = \frac{\Delta(T)}{(1+z_m^2)}\left\{\cos\frac{\phi}{2}\pm z_m\sqrt{\sin^2\frac{\phi}{2}+z_m^2}\right\}$

ในการแสดงเป็นกราฟได้มีการกำหนดให้ $k_B \equiv 1$, $\hbar \equiv 1$ และ $\Delta(0)$ คือ พารามิเตอร์ความเป็นระเบียบที่อุณหภูมิ 0 องศาสัมบูรณ์

$$\frac{eIR_N}{\pi\Delta(0)} = \frac{[(1+\gamma_\theta^2)+z_m^2]}{4\gamma_\theta}\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)}\frac{\sin\frac{\phi}{2}}{1+z_m^2}\left[\tanh(\frac{E_+}{2T})+\tanh(\frac{E_-}{2T})\right]$$
$$-\frac{z_m\cos\frac{\phi}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\phi}{2}+z_m^2}}\left[\tanh(\frac{E_+}{2T})-\tanh(\frac{E_-}{2T})\right] \tag{4.9}$$

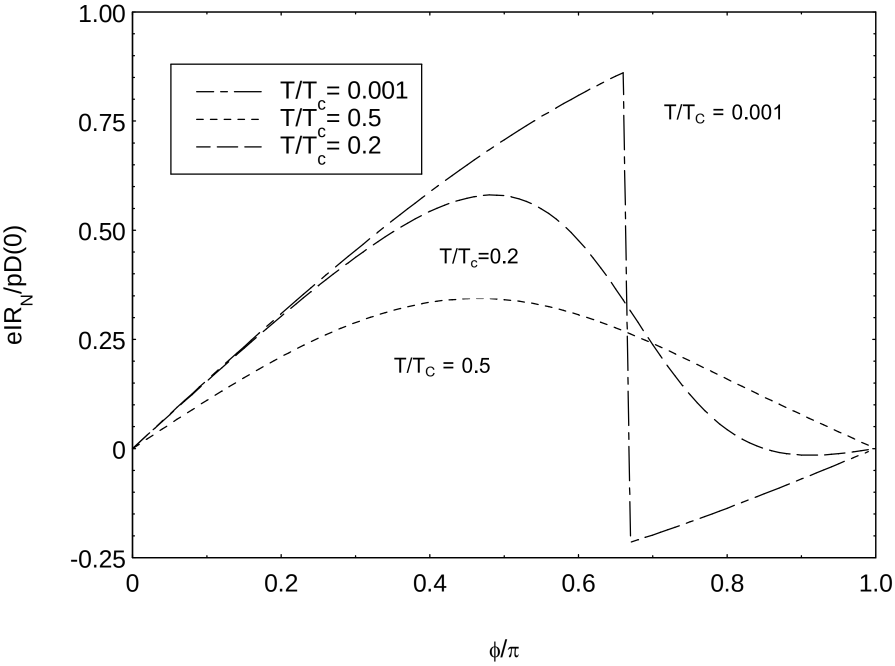
โดยกำหนดให้

$$\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} = \tanh\left(1.74\sqrt{\frac{1}{T/T_C}-1}\right)$$



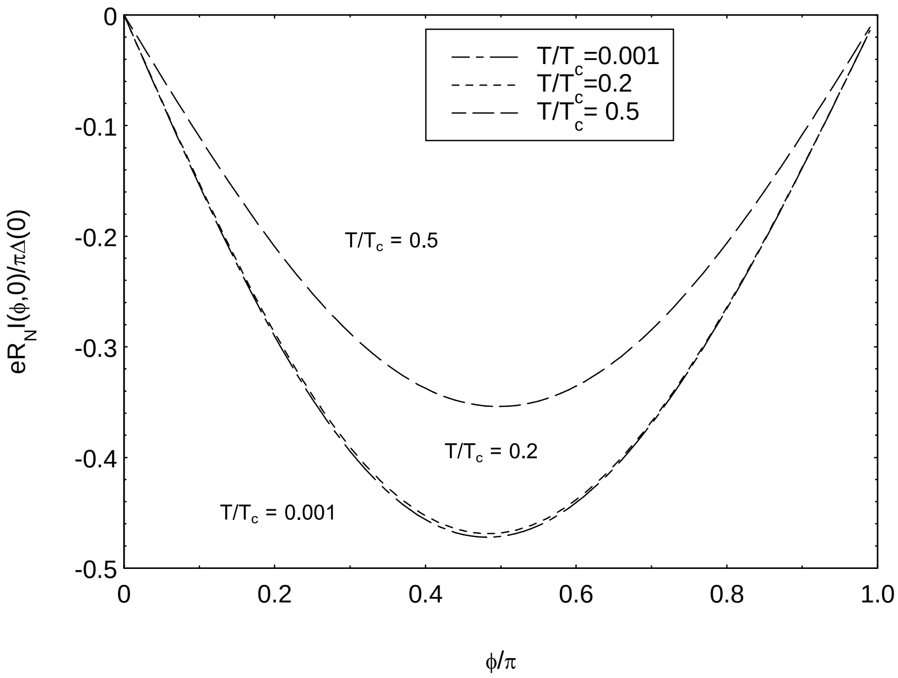
ภาพประกอบ 43 แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N / \pi\Delta(0)$ กับ ϕ / π เมื่อ $T / T_C = 0.2, 0.5$ และ 0.001 ตามลำดับ ที่ $z_m = 0$

จากภาพประกอบ 43 เป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างกระแสโจเซพสัน กับมุม ϕ ที่ค่าต่างๆ ซึ่งจากกราฟ เป็นกรณีที่ยังไม่มีการใส่ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรเข้าไป ($z_m = 0$) พบว่ากระแสโจเซพสันชนิดตรงไม่มีการไหลกลับทิศ และเมื่อ อุณหภูมิเพิ่มขึ้น ส่งผลให้แอมปลิจูดของกระแสโจเซพสันชนิดตรงลดลง



ภาพประกอบ 44 แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N/\pi\Delta(0)$ กับ ϕ/π เมื่อ $T/T_C = 0.2, 0.5$ และ 0.001 ตามลำดับ ที่ $z_m = 0.5$

จากภาพประกอบ 44 เป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างกระแสโจเซฟสัน กับมุม ϕ ที่ค่าต่างๆ เมื่อเริ่มใส่ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรเข้าไป คือ $z_m = 0.5$ พบว่ากระแสโจเซฟสันชนิดตรงจะไหลกลับทิศ และเมื่อ อุณหภูมิเพิ่มขึ้น ส่งผลให้แอมปลิจูดของกระแสโจเซฟสันชนิดตรงลดลง



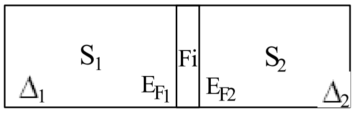
ภาพประกอบ 45 แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N / \pi\Delta(0)$ กับ ϕ / π เมื่อ $T / T_C = 0.2, 0.5$ และ 0.001 ตามลำดับ และ ค่า $z_m = 2$

จากภาพประกอบ 45 เป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างกระแสโจเซพสัน กับมุม ϕ ที่ค่าต่างๆ เมื่อใส่ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรเข้าไปให้สูงขึ้น คือ $z_m = 2$ พบว่ากระแสโจเซพสันชนิดตรงจะไหลกลับทิศเช่นกัน และ อุณหภูมิเพิ่มขึ้น ส่งผลให้แอมปลิจูดของกระแสโจเซพสันชนิดตรงลดลง

4. กรณีระบบรอยต่อตัวนำยวดยิ่ง$_1$/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร/ตัวนำยวดยิ่ง$_2$ ($S_1/Fi/S_2$)ในการแสดงเป็นกราฟได้มีการกำหนดให้ตัวแปรต่าง ๆมีค่าดังนี้

1. $k_B \equiv 1$
2. $\hbar \equiv 1$
3. $\gamma_\theta = \dfrac{k_{F2}}{k_{F1}}\dfrac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}$ ในเงื่อนไขที่กำหนดให้ $\theta_1 = \theta_2 = \theta$

จะได้ว่า $\gamma_\theta = \dfrac{k_{F2}}{k_{F1}}$



ภาพประกอบ 46 แสดงระบบรอยต่อโจเซพสันแบบตัวนำยวดยิ่ง $_1$ /ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร/ตัวนำยวดยิ่ง $_2$

จากสมการ(3.65)

$$I\,R_N = \frac{e\Delta_1(T)\Delta_2(T)k_BT}{\hbar}\frac{\pi\hbar}{e^2}\frac{\left[\left(1+\gamma_\theta^2\right)+z_i^2+z_m^2\right]^2-4z_i^2z_m^2}{4\gamma_\theta[(1+\gamma_\theta)^2+z_i^2+z_m^2]}\sum_{\omega_n}4\gamma_\theta\sin\phi$$

$$\times\frac{\left[2\gamma_\theta\left(\omega_n^2+\Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi\right)+\left(z_i^2-z_m^2+\gamma_\theta^2+1\right)\Omega_{n1}\Omega_{n2}\right]}{\left\{\begin{array}{l}\left[2\gamma_\theta\left(\omega_n^2+\Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi\right)+\left(z_i^2-z_m^2+\gamma_\theta^2+1\right)\Omega_{n1}\Omega_{n2}\right]^2\\+\left[2\omega_n z_m\gamma_\theta\Omega_{n1}+2\omega_n z_m\Omega_{n2}\right]^2\end{array}\right\}}$$

(4.10)

นำเงื่อนไขต่าง ๆมาจัดรูปสมการ(4.10) ใหม่ได้เป็น

$$\frac{eIR_N}{\pi\Delta_{01}} = \frac{\Delta_1(T)\Delta_2(T)}{\Delta_{01}}\frac{\left[\left(1+\gamma_\theta^2\right)+z_i^2+z_m^2\right]^2-4z_i^2z_m^2}{4\gamma_\theta[(1+\gamma_\theta)^2+z_i^2+z_m^2]}\sum_{\omega_n}4\gamma_\theta\sin\phi$$

$$\times\frac{\left[2\gamma_\theta\left(\omega_n^2+\Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi\right)+\left(z_i^2-z_m^2+\gamma_\theta^2+1\right)\Omega_{n1}\Omega_{n2}\right]}{\left\{\begin{array}{l}\left[2\gamma_\theta\left(\omega_n^2+\Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi\right)+\left(z_i^2-z_m^2+\gamma_\theta^2+1\right)\Omega_{n1}\Omega_{n2}\right]^2\\+\left[2\omega_n z_m\gamma_\theta\Omega_{n1}+2\omega_n z_m\Omega_{n2}\right]^2\end{array}\right\}}$$

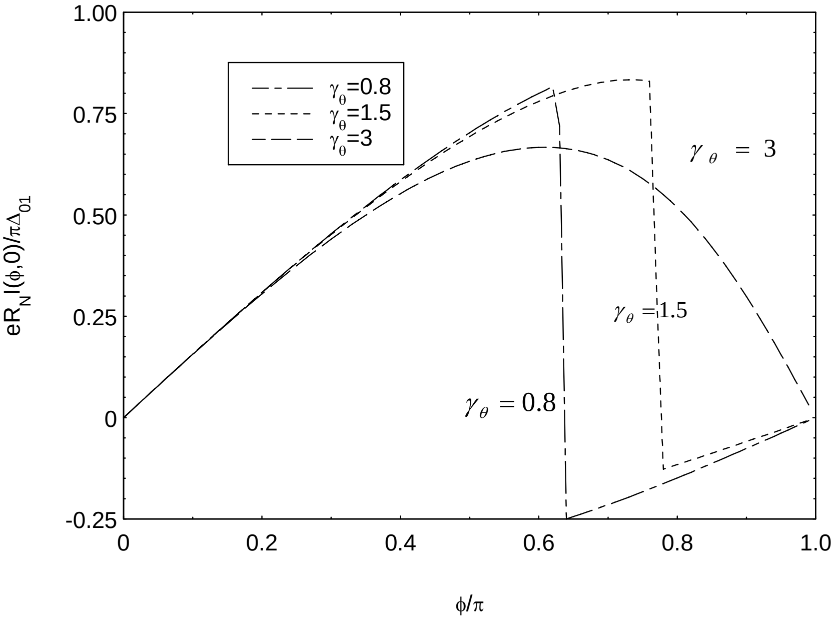
ในที่นี่ กำหนดให้

$$\Delta_{1,2}(T) = \Delta_{01,2}\tanh\left(1.74\sqrt{\frac{T_{C1,2}}{T}-1}\right) \tag{4.11}$$

$$\frac{T}{\Delta_{01}} = 0.568\frac{T}{T_{C1}} \tag{4.12}$$

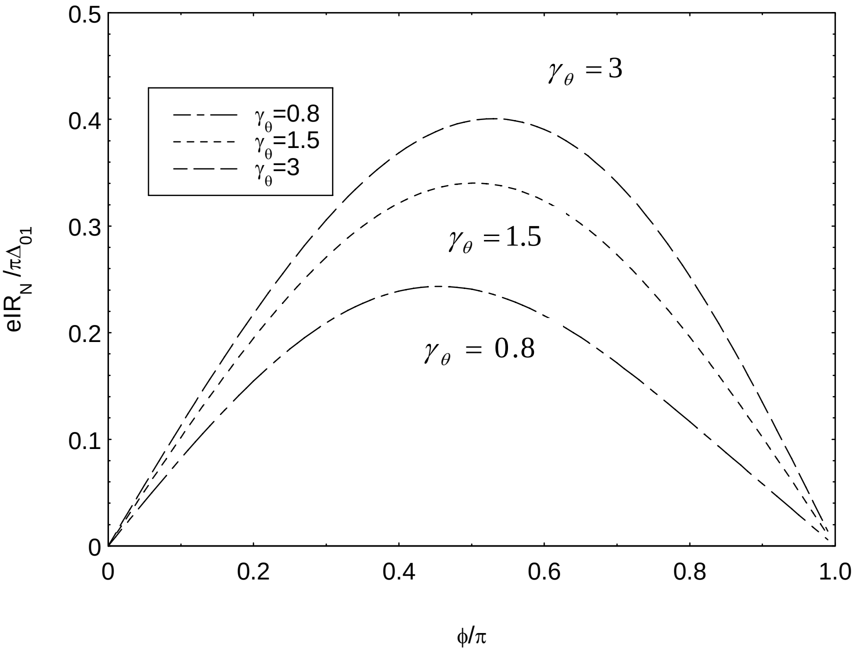
และ

$$\Omega_{n1,2} = [\omega_n^2+\Delta_{1,2}^2]^{1/2} \tag{4.13}$$



ภาพประกอบ 47 แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N/\pi\Delta_{01}$ กับ ϕ/π เมื่อ γ_θ เท่ากับ 3 , 1.5 และ 0.8 ตามลำดับ และ $z_m = 0.5$ เมื่อ $T/T_C = 0.001$

จากภาพประกอบ 47 เป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างกระแสโจเซฟสัน กับมุม ϕ ที่ค่าต่างๆ พบว่ากระแสโจเซฟสันจะไหลกลับทิศลดลง เมื่ออัตราส่วนโมเมนตัมของเฟร์มี(γ_θ) มีค่าเพิ่มมากขึ้น



ภาพประกอบ 48 แสดงกราฟความสัมพันธ์ระหว่าง $eIR_N/\pi\Delta_{01}$ กับ ϕ/π เมื่อ γ เท่ากับ 3 , 1.5 และ 0.8 และ $z_m = 0.5$ เมื่อ $T/T_C = 0.6$

จากภาพประกอบ 48 เป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างกระแสโจเซพสัน กับมุม ϕ ที่ค่าต่างๆ พบว่าเมื่ออัตราส่วนโมเมนตัมของเฟร์มี(γ_θ)มีค่าเพิ่มมากขึ้น แอมปลิจูดของกระแสโจเซพสันจะมีค่าเพิ่มขึ้น และเมื่ออัตราส่วนของ T/T_C เพิ่มขึ้น กระแสจะไม่กลับทิศการไหล

บทที่ 5
สรุป อภิปรายผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ

ในการคำนวณกระแสโจเซพสันในระบบรอยต่อตัวนำยวดยิ่งชนิดที่1/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร/ตัวนำยวดยิ่งชนิดที่2 ผลของการคำนวณได้สมการกระแสโจเซพสันชนิดตรงดังสมการ (3.65) ซึ่งเป็นสมการที่ครอบคลุมสูตรกระแสโจเซพสันชนิดตรงในระบบรอยต่อต่างๆ ดังที่แสดงไว้ในบทที่3 สมการแสดงให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างกระแสโจเซพสันชนิดตรงกับพารามิเตอร์ต่างๆ เช่น อุณหภูมิ ความต่างเฟสของพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบของสภาพนำยวดยิ่ง ช่องว่างพลังงาน ค่าความรุนแรงของศักย์ฉนวน ที่เป็นคุณสมบัติเฉพาะตัวของรอยต่อโจเซพสันในแต่ละระบบโดยการนำเสนอกราฟความสัมพันธ์ดังแสดงในบทที่ 4

สรุปผลการวิจัย

1. กรณีรอยต่อแบบตัวนำยวดยิ่ง/ฉนวน/ตัวนำยวดยิ่ง($S/I/S$) เป็นกรณีที่ตัวนำยวดยิ่งทั้งสองเป็นชนิดเดียวกัน ที่มีฉนวนปกติคั่นระหว่างตัวนำยวดยิ่งทั้งสอง ได้สมการกระแสโจเซพสันดังสมการ (3.70)

$$I(\phi,\theta)R_N = \frac{\pi[(1+\gamma_\theta^2)+z_i^2]^2}{8\gamma_\theta e[(1+\gamma_\theta^2)+z_i^2}\frac{\Delta(T)\sin\phi}{\sqrt{(1+z_i^2)\left(\cos^2\frac{\phi}{2}+z_i^2\right)}}\tanh\left(\frac{\Delta(T)}{2k_BT}\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\phi}{2}+z_i^2}{1+z_i^2}}\right) \tag{3.70}$$

ซึ่งเป็นสมการที่ได้เช่นเดียวกันกับสมการที่ได้ในงานวิจัยของฟูรูซากิกับซูกาดะ(Furusaki and Tsukada) โดยที่ $\Delta(T)\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\phi}{2}+z_i^2}{1+z_i^2}}$ คือ พลังงานของสถานะที่ถูกยึดเหนี่ยว(energy of bound state) ในระบบรอยต่อโจเซพสัน สมการนี้ยังแสดงว่ากระแสโจเซพสันชนิดตรงจะลดลงเมื่ออุณหภูมิและค่าศักย์ฉนวนปกติของระบบรอยต่อเพิ่มขึ้นและจะเป็นศูนย์ในที่สุดเมื่ออุณหภูมิเข้าใกล้อุณหภูมิวิกฤต โดยกระแสโจเซพสันจะมีค่ามากที่สุดที่อุณหภูมิที่ 0 องศาสัมบูรณ์

2.กรณีรอยต่อแบบตัวนำยวดยิ่ง$_1$/ฉนวน/ตัวนำยวดยิ่ง$_2$($S_1/I/S_2$) เป็นกรณีที่ ตัวนำยวดยิ่งทั้งสองต่างชนิดกัน ที่มีฉนวนปกติคั่นระหว่างตัวนำยวดยิ่งทั้งสอง ซึ่งได้สมการกระแสโจเซพสันดังสมการ (3.71) ดังนี้

$$I_{S_1/I/S_2}R_N = \frac{\pi\Delta_1(T)\Delta_2(T)k_B T\sin\phi}{e}\sum_{\omega_n}$$

$$\times\left\{\frac{(1+\gamma_\theta^2)+z_i^2}{\left[2\gamma_\theta\left(\omega_n^2+\Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi\right)+\left(z_i^2+\gamma_\theta^2+1\right)\Omega_{n1}\Omega_{n2}\right]^2}\right\}$$

(3.71)

สมการที่(3.71)ที่ได้เป็นสมการเดียวกันกับสมการที่ได้ในงานวิจัยของฟูรูซากิกับซูกาดะ (Furusaki and Tsukada) และเมื่ออัตราส่วนโมเมนตัมเฟร์มี เพิ่มกระแสโจเซพสันชนิดตรงจะสามารถไหลผ่านกำแพงศักย์ได้มากยิ่งขึ้น และสมการยังแสดงอีกว่าอัตราส่วนของ T/T_c ก็มีผลต่อการไหลของกระแสโจเซพสันชนิดตรงเช่นกัน โดยกระแสโจเซพสันจะไหลผ่านได้มากที่สุดเมื่อ T/T_c เข้าใกล้ 0 องศาสัมบูรณ์

3.กรณีรอยต่อแบบตัวนำยวดยิ่ง/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร/ตัวนำยวดยิ่ง($S/Fi/S$) เป็นกรณีที่ตัวนำยวดยิ่งทั้งสองเป็นชนิดเดียวกัน และมีฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรคั่นระหว่างตัวนำยวดยิ่งทั้งสอง ซึ่งได้สมการกระแสโจเซพสันดังสมการ (3.82) ดังนี้

$$IR_N = \frac{\pi[(1+\gamma_\theta^2)+z_m^2]}{4\gamma_\theta e}\left(\frac{\Delta(T)\sin\frac{\phi}{2}}{1+z_m^2}\right)\left[\tanh(\frac{E_+}{2k_BT})+\tanh(\frac{E_-}{2k_BT})\right]$$

$$-\frac{z_m\cos\frac{\phi}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\phi}{2}+z_m^2}}\left[\tanh(\frac{E_+}{2k_BT})-\tanh(\frac{E_-}{2k_BT})\right]$$

(3.82)

นี่คือสมการเดียวกันกับสมการที่ได้ในงานวิจัยของทานากะ กับ คาชิวายา (Y. Tanaka and S. Kashiwaya) และ $\frac{\Delta(T)}{(1+z_m^2)}\left\{\cos\frac{\phi}{2}\pm z_m\sqrt{\sin^2\frac{\phi}{2}+z_m^2}\right\}$ สมการ (3.81) คือพลังงานของสถานะที่ถูกยึดเหนี่ยว(energy of bound state) ในระบบรอยต่อโจเซพสันซึ่งเมื่อพิจารณา ภาพประกอบ 43 และภาพประกอบ 44 กรณีที่ยังไม่มีการใส่ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรเข้าไป ($z_m = 0$) พบว่ากระแสโจเซพสันชนิดตรงไม่มีการไหลกลับทิศ และเมื่อเริ่มใส่ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรเข้าไป คือ $z_m = 0.5$ พบว่ากระแสโจเซพสันชนิดตรงจะไหลกลับทิศ และ อุณหภูมิเพิ่มขึ้น ส่งผลให้แอมปลิจูดของกระแสโจเซพสันชนิดตรงลดลง

4.กรณีรอยต่อแบบตัวนำยวดยิ่ง$_1$/ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร/ตัวนำยวดยิ่ง$_2$/($S_1/Fi/S_2$) เป็นกรณีที่ตัวนำยวดยิ่งทั้งสองต่างชนิดกัน และระบบมีฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรคั่นระหว่างตัวนำยวดยิ่งทั้งสอง ซึ่งได้สมการกระแสโจเซพสันดังสมการ(3.65) ดังนี้

$$I_{S_1/Fi/S_2}R_N = \frac{\pi\Delta_1(T)\Delta_2(T)k_BT}{e}\frac{\left[\left(1+\gamma_\theta^2\right)+z_i^2+z_m^2\right]^2-4z_i^2z_m^2}{4\gamma_\theta[(1+\gamma_\theta)^2+z_i^2+z_m^2]}\sum_{\omega_n}4\gamma_\theta\sin\phi$$

$$\times\frac{\left[2\gamma_\theta\left(\omega_n^2+\Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi\right)+\left(z_i^2-z_m^2+\gamma_\theta^2+1\right)\Omega_{n1}\Omega_{n2}\right]}{\left\{\begin{array}{l}\left[2\gamma_\theta\left(\omega_n^2+\Delta_1(T)\Delta_2(T)\cos\phi\right)+\left(z_i^2-z_m^2+\gamma_\theta^2+1\right)\Omega_{n1}\Omega_{n2}\right]^2\\+\left[2\omega_nz_m\gamma_\theta\Omega_{n1}+2\omega_nz_m\Omega_{n2}\right]^2\end{array}\right\}} \quad (3.65)$$

และจากภาพประกอบ 47 และ 48 เมื่ออัตราส่วนของ$T/T_c = 0.001$ และ อัตราส่วนโมเมนตัมของเฟร์มี γ_θ มีค่า 0.8 , 1.5 และ 3 ตามลำดับ พบว่า เมื่ออัตราส่วนของพลังงานเฟร์มีเพิ่มขึ้น กระแสโจเซพสันจะไหลผ่านกำแพงศักย์ได้มากยิ่งขึ้น

อภิปรายผลการวิจัย

จากความสัมพันธ์ที่ได้ กระแสโจเซพสันชนิดตรงในระบบรอยต่อที่มีฉนวนปกติที่มีความบางมากคั่น ไม่พบเหตุการณ์กระแสไหลกลับทิศ แต่เมื่อรอยต่อโจเซพสันเปลี่ยนจากฉนวนปกติไปเป็นฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร พบว่ากระแสโจเซพสันมีการไหลกลับทิศได้ เมื่อค่าศักย์ฉนวนมีค่าๆหนึ่ง นี้นับว่าเป็นคุณสมบัติของฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โรที่ทำให้แตกต่างจากฉนวนปกติ จากสมการกระแสโจเซพสันที่ได้เมื่อนำมาแสดงเป็นกราฟในแต่ละระบบกราฟที่ได้เช่น กราฟในระบบรอยต่อ ตัวนำยวดยิ่ง /ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร / ตัวนำยวดยิ่ง

พบว่าสอดคล้องกับงานวิจัยของทานะกะ (Tanaka) กับ คาชิวายา (Kashiwaya) เป็นอย่างดี จึงแสดงให้เห็นว่าสมการกระแสโจเซพสันของระบบรอยต่อ ตัวนำยวดยิ่ง $_1$ / ฉนวนแม่เหล็กเฟอร์โร / ตัวนำยวดยิ่ง $_2$ ครอบคลุมงานวิจัยกระแสโจเซพสันที่เคยทำมาแล้วได้อย่างถูกต้อง

ข้อเสนอแนะ

งานวิจัยนี้ได้คำนวณกระแสโจเซพสันจากการประมาณฟังก์ชันศักย์ฉนวนด้วยฟังก์ชันดิแรกเดลต้า ทำให้มีขีดจำกัดเมื่อความหนาของฉนวนมีค่ามากขึ้น หรือเมื่อศักย์ของฉนวนมีค่าไม่สูงมากพอ การประมาณแบบดิแรก ก็ไม่เหมาะสม ดังนั้นสมการกระแสโจเซพสันที่คำนวณได้จะสอดคล้องเฉพาะกรณีระบบรอยต่อโจเซพสันที่มีศักย์ฉนวนสูงมาก และความหนาของฉนวนนั้นน้อยมาก แต่อย่างไรก็ดี ถ้าเราต้องการสมการกระแสโจเซพสันที่ฉนวนมีความหนาและมีค่าศักย์จำกัด เราต้องพิจารณาปัญหาการกระเจิงที่เป็นผลมาจากอิเล็กตรอน และโฮลในบริเวณที่เป็นฉนวนด้วย

ข้อจำกัดอีกข้อหนึ่งของสมการกระแสโจเซพสันที่ได้ก็คือ เป็นสมการกระแสโจเซพสันที่ใช้ได้กับตัวนำยวดยิ่งที่มีสมมาตรแบบคลื่นเอส (S-wave) เท่านั้น แต่ในปัจจุบันเราพบว่าสภาพนำยวดยิ่งมีสมมาตรแบบคลื่นดี (D-wave) แบบคลื่นพี (P-wave) ด้วย ดังนั้นงานวิจัยในอนาคตเราควรตามความก้าวหน้าของสภาพนำยวดยิ่งให้ทันโดยขยายงานวิจัยกระแสโจเซพสันเข้าสู่ระบบรอยต่อโจเซพสันที่ประกอบด้วยตัวนำยวดยิ่งแบบใหม่เหล่านี้ด้วย

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

Bergeret, F. S.; Volkov, A. F.; & Efetov, K. B.(2001). Enhancement of the Josephson Current by an Exchange Field in superconductor-Ferromagnet Structures. *Physical Review Letters* B. **62** :11872.

Bardeen, J., Cooper,N.,and Schrieffer, J.R.(1959).”Theory of Superconductivity,” *Physical Review* , **108** (5) : 1175 – 1204 .

Buckel.W. (1991). Superconductivity : *Fundamental and Application*. New York : VCH Publihers Inc.

Feynman,R.P.(1965).*Lectures on Physics Volume 3*. New York : Addison -Wesley

H.Kammerlingh Onnes, Commun. *Physical Review Letters* B. **120** :124C.

Josephson,B.D.(1962). Josepson current in superconductor / insulator / superconductor Junction. *Physical Review Letters* .**76**(8) : 1221.

Kersin,H. & Wolf,V.Z. (1990). *Fundamental* of Superconductor. New York : Plenum Publishing.

Kitel, C. (1997) “ Introduction to solid state Physics” 7 th edition; John Wiley & Sons.

Ketterson, & Buckel. (1999) .:2.; citing Meissner., & Ochsenfeld.(1933)

Ketterson, & Buckel. (1999) .:2.; citing Meissner., & Ochsenfeld.(1933) Naturewissenschaften. Superconductivity. *Physical Review A*. 44(22) : 12565-12566.

Ketterson, J.B. & Song,S.N. (1998). *Superconductivity* : Cambridge

Ketterson, J.B. & Song,S.N. (1999). *Superconductivity*. UK.: Springer

Müller,K.A. (1986) Review of Modern Phyics. *Physical Review B*. (64) : p.189.

P.G.de Gennes, *Superconductivity of metals and Alloys* .New York : Plenum Publishing.

Tanaka, Y.;& Kashiwaya,S.(1996). Tjeory of Josephson effect in superconductor / ferromagnetic insulator / superconductor Junction. *Physical Review B*. :11957.

Tanaka, Y.;& Kashiwaya,S.(1996). Tjeory of Josephson effect in superconductor / insulator / superconductor Junction. *Physical Review C*. :11957.

Tsuei & Kirtley . (1996). *Scientific American* . **50** : 6.

V.Ambergokar and A.Baratoff, *Physical Review B*. **10**,486(1963).

ภาคผนวก

โปรแกรม Mathematica

$$A[T\_,\phi\_,z\_,k\_,\alpha\_]:=\frac{(((1+\gamma)^2+k^2+z^2)}{4*\gamma*((1+\gamma)^2+k^2+z^2}*Tanh[1.74*\sqrt{\frac{1}{T}-1}$$

$$*Tanh[1.74*\sqrt{\frac{\alpha}{T}-1}*0.568*T$$

;

$G_1[T\_,\phi\_,z\_,k\_,\alpha\_,\gamma\_,\alpha\_\_]:=$

$$2*\gamma*(\omega^2+Tanh[1.74*\sqrt{\frac{1}{T}-1}*\alpha*Tanh[1.74*\sqrt{\frac{\alpha}{T}-1}*Cos[\pi*\phi]+(k^2-z^2+\gamma^2+1)$$

$$*\sqrt{\omega^2+Tanh[1.74*\sqrt{\frac{1}{T}-1}]^2}*\sqrt{\omega^2+(\alpha*Tanh[1.74*\sqrt{\frac{\alpha}{T}-1}])^2}$$

;

$G_2[T\_,\phi\_,z\_,k\_,\alpha\_,\gamma\_,\alpha\_\_]:=$

$$2*\gamma*(\omega^2+Tanh[1.74*\sqrt{\frac{1}{T}-1}*\alpha*Tanh[1.74*\sqrt{\frac{\alpha}{T}-1}*Cos[\pi*\phi]+(k^2-z^2+\gamma^2+1)$$

$$*\sqrt{\omega^2+Tanh[1.74*\sqrt{\frac{1}{T}-1}]^2}*\sqrt{\omega^2+(\alpha*Tanh[1.74*\sqrt{\frac{\alpha}{T}-1}])^2}$$

;

$$G_o[T\_,\phi\_,z\_,k\_,\alpha\_,\gamma\_,\alpha\_\_]:=\frac{4*\gamma*Sin[\pi*\phi]*G_1[T,\phi,z,k,\gamma,\alpha,\omega]}{G_2[T,\phi,z,k,\gamma,\alpha,\omega};$$

$$I_0[T\_,\phi\_,z\_,k\_,\gamma\_,\alpha\_]:=\mathrm{Re}[A[T,\phi,2*z,2*k,\gamma,\alpha]*\sum_{n=0}^{\infty}2*G_0[T,\phi,2*z,2*k,\gamma,\alpha,\pi*T*0.568*(2n+1);$$

$$Plot[\{I_O[0.001,\phi,0.5,0,1,1],I_o[0.2,\phi,0.5,0,1,1],I_0[0.6,\phi,0.5,0,1,1]\},\{\phi,0,1\}]$$

$\phi=0;$

$While[\phi\leq 1,$

$\mathrm{Print}[N[\phi],\quad "\quad ",N[I_0[0.001,\phi,0.5,0,0.9,1]];$

$\phi=\phi+0.1;];$

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ นายเกริก	ชื่อสกุล ศักดิ์สุภาพ	
เกิดวันที่ 24	เดือน กุมภาพันธ์	พุทธศักราช 2524
สถานที่เกิด	อำเภอ เมือง	จังหวัด นครปฐม
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	129/16 หมู่ที่ 12 ต.วังน้ำเขียว อ.กำแพงแสน จ.นครปฐม 73140	

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2542 มัธยมศึกษาตอนปลาย จากโรงเรียนพระปฐมวิทยาลัย จังหวัดนครปฐม

พ.ศ. 2546 กศ.บ. วิทยาศาสตร์-ฟิสิกส์ จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

พ.ศ. 2549 กศ.ม. (สาขาวิชาฟิสิกส์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ