อิทธิพลของการกระเจิงโดยสารเจือแบบขึ้นกับทิศทางที่มีผลต่ออุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่น ดี

ปริญญานิพนธ์

ของ

รัตนสุดา สุภดนัยสร

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อปีนส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

พฤษภาคม 2551

อิทธิพลของการกระเจิงโดยสารเจือแบบขึ้นกับทิศทางที่มีผลต่ออุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่น ดี

บทคัดย่อ

ของ

รัตนสุดา สุภดนัยสร

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

พฤษภาคม 2551

รัตนสุดา สุภดนัยสร. (2551). *อิทธิพลของการกระเจิงโดยสารเจือแบบขึ้นกับทิศทางที่มีผลต่ออุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่น ดี.* ปริญญานิพนธ์ วท.ม.(ฟิสิกส์). กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม : รองศาสตราจารย์ ดร.พงษ์แก้ว อุดมสมุทรหิรัญ, อ. สมศักดิ์ มณีรัตนะกูล.

งานวิจัยนี้มีจุดประสงค์เพื่อศึกษาอิทธิพลของการกระเจิงโดยสารเจือแบบขึ้นกับทิศทางที่มีผลต่ออุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่น ดี โดยใช้แบบจำลองของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็กแบบสุ่ม และพิจารณาผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็ก (spin exchange interaction) ซึ่งจะทำให้เครื่องหมายขนาดของเทอมการกระเจิงลำดับสองของบอร์น (second-order Born scattering) เปลี่ยนไปหลังจากการพิจารณาผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็ก ซึ่งมีผลต่ออุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ของไอโซโทป ผู้วิจัยได้ศึกษาสัมประสิทธิ์ของไอโซโทปที่มีสารเจือทั้งประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็ก โดยพิจารณาความหนาแน่นสถานะแองเกิลริสอลฝ (angle-resolved) ที่ผิวเฟอร์มี และมีช่องว่างพลังงานแบบขึ้นกับทิศทาง ซึ่งศักย์ของสารเจือเป็นแบบขึ้นกับทิศทาง โดยทั้งหมดมีฟังก์ชันในรูปแบบอาร์โมนิก และสุดท้ายได้ทำการคำนวณเชิงตัวเลขเปรียบเทียบกับผลการทดลองของสัมประสิทธิ์ของไอโซโทปของตัวนำยิ่งยวดแบบคลื่นดี

INFLUENCE OF ANISOTROPIC IMPURITY SCATTERING ON CRITICAL TEMPERTURE AND ISOTOPE COEFFICIENT OF D-WAVE SUPERCONDUCTORS

AN ABSTRACT

BY

RATTANASUDA SUPADANAISON

Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the

Master of Science Degree in Physics

at Srinakharinwirot University

May 2008

Rattanasuda Supadanaison. (2008). *Influence of Anisotropic Impurity Scattering on Critical Temperature and Isotope Coefficient of D-Wave Superconductors.* Master thesis, M.Sc. (Physics). Bangkok : Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor committee : Assoc. Dr. Pongkaew Udomsamuthirun ,Somsak maneerattanakul

The purpose of this research is to study the Influence of anisotropic impurity scattering on critical temperature and isotope coefficient of d-wave superconductors. The model of random nonmagnetic and magnetic impurity are revised to cover the effect of spin exchange interaction. The sign of the magnitude of the second–order Born scattering has been changed after consideration of the spin exchange interaction effect to critical temperature and isotope coefficient. The isotope coefficient of nonmagnetic and magnetic impurity superconductors including an angle-resolved Fermi surface density of state, anisotropy order parameter and impure potential are investigated that all of anisotropy functions are in the harmonic form. Finally we also compare our numerical calculation of isotope coefficient with the experimental data of d-wave superconductors.

อิทธิพลของการกระเจิงโดยสารเจือแบบขึ้นกับทิศทางที่มีผลต่ออุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่น ดี

ปริญญานิพนธ์

ของ

รัตนสุดา สุภดนัยสร

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

พฤษภาคม 2551

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ปริญญานิพนธ์
เรื่อง
อิทธิพลของการกระเจิงโดยสารเจือแบบขึ้นกับทิศทางที่มีผลต่ออุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดี
ของ
รัตนสุดา สุภดนัยสร

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เพ็ญสิริ จีระเดชากุล)
วันที่ .... เดือน .... พ.ศ. 2551

คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์	คณะกรรมการสอบปากเปล่า
.... ประธาน	.... ประธาน
(รองศาสตราจารย์ ดร.พงษ์แก้ว อุดมสมุทรหิรัญ)	(อาจารย์ ดร.สุพจน์ มุศิริ)
.... กรรมการ	....กรรมการ
(อาจารย์สมศักดิ์ มณีรัตนะกูล)	(รองศาสตราจารย์ ดร.พงษ์แก้ว อุดมสมุทรหิรัญ)
	....กรรมการ
	(อาจารย์สมศักดิ์ มณีรัตนะกูล)
	.... กรรมการ
	(รองศาสตราจารย์ ดร.อุดมศิลป์ ปิ่นสุข)

ประกาศคุณูปการ

เนื่องด้วยปริญญานิพนธ์ฉบับนี้เป็นงานวิจัยฟิสิกส์ทฤษฎี ซึ่งสำเร็จลงได้ด้วยการชี้แนะ และชี้นำการทำงานจาก รองศาสตราจารย์ ดร. พงษ์แก้ว อุดมสมุทรหิรัญ จนทำให้งานลุล่วงได้ด้วยดี รวมทั้งความเมตตาและน้ำใจของท่านที่มีต่อผู้วิจัยตลอดระยะเวลาของการทำวิจัยที่ผ่านมา ผู้วิจัยจึงขอกราบขอบพระคุณท่านเป็นอย่างสูง

ขอกราบขอบพระคุณ อาจารย์สมศักดิ์ มณีรัตนะกูล อาจารย์ ดร. สุพจน์ มุศิริ และรองศาสตราจารย์ ดร. อุดมศิลป์ ปิ่นสุข ที่ให้ความอนุเคราะห์เป็นคณะกรรมการในการสอบปากเปล่า รวมทั้งคำแนะนำเพื่อแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ เพิ่มเติมเกี่ยวกับปริญญานิพนธ์ฉบับนี้

ขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ตลอดระยะเวลาการศึกษา จนผู้วิจัยสามารถนำความรู้มาใช้ในการทำปริญญานิพนธ์จนสำเร็จ

ขอขอบคุณนิสิตปริญญาโท สาขาวิชาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒทุกท่านที่คอยช่วยเหลือและเป็นกำลังใจในการทำงานวิจัยตลอดมา

ท้ายที่สุดนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ บิดา-มารดา และญาติๆ ทุกคน ที่ให้กำลังใจ และสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยตลอดมา

รัตนสุดา สุภดนัยสร

สารบัญ

บทที่ **หน้า**

1 บทนำ.....1
ภูมิหลัง.....1
การค้นพบตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง.....3
ทฤษฏีของตัวนำไฟฟ้ายิ่งยวด.....5
สมบัติของตัวนำไฟฟ้ายวดยิ่ง.....7
ประเภทของตัวนำยวดยิ่ง.....14
ตัวนำยวดยิ่งที่มีสารเจือ.....19
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....22
ทฤษฏีบีซีเอส.....22
ผลของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กที่มีต่อตัวนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง.....28
ผลของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็กที่มีต่อตัวนำยิ่งยวด อุณหภูมิสูง.....33
ปรากฏการณ์ไอโซโทป.....39
3 วิธีดำเนินงานวิจัย.....46
การคำนวณหาสมการอุณหภูมิวิกฤติของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็น แม่เหล็กและประเภทแม่เหล็ก.....46
การคำนวณหาสมการอุณหภูมิวิกฤติของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือประเภท ไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็ก เมื่อพิจารณาผลของอันตรกิริยา แลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็ก.....58
คำนวณหาสัมประสิทธิ์ไอโซโทป.....62
การคำนวณฟังก์ชันการกระเจิงรูปแบบต่างๆ.....66
4 ผลการคำนวณและการวิเคราะห์.....72
5 สรุป อภิปรายและข้อเสนอแนะ.....82
สรุปผลการวิจัย.....82
อภิปรายผล.....82
ข้อเสนอแนะ.....84
บรรณานุกรม.....85
ภาคผนวก.....87
ประวัติย่อของผู้วิจัย.....116

บัญชีตาราง

ตาราง **หน้า**

1 แสดงเปรียบเทียบสมบัติตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำและตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง…..........4
2 แสดงสัมประสิทธิ์ไอโซโทปในสารตัวนำยิ่งยวด……………………………….........14
3 แสดงความยาวอาพันธ์และระยะทะลวงลึกที่ศูนย์องศาสัมบูรณ์ในหน่วย 10^{-6} cm……16
4 แสดงค่าฟังก์ชันการกระเจิงสำหรับช่องว่างพลังงานแบบคลื่นเอส.............................67
5 แสดงค่าฟังก์ชันการกระเจิงสำหรับช่องว่างพลังงานแบบคลื่นดี................................70

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ **หน้า**

1 แสดงอุณหภูมิวิกฤตของสภาพนำยิ่งยวดในปรอท..1
2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามแม่เหล็กวิกฤตกับอุณหภูมิ............................2
3 แสดงความสัมพันธ์ของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกับปีการค้นพบ............3
4 แสดงอันตรกิริยาของคู่อิเล็กตรอนที่ทำให้เกิดคู่คูเปอร์ 6
5 แสดงค่าช่องว่างพลังงานในตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นเอส ที่ช่องว่างพลังงาน
ไม่ขึ้นกับทิศทางในปริภูมิจริง (real space) และปริภูมิโมเมนตัม
(momentum) …………………………………………………………8
6 แสดงค่าช่องว่างพลังงานในตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นเอส ที่ช่องว่างพลังงานขึ้นกับ
ทิศทางในปริภูมิจริง และปริภูมิโมเมนตัม 8
7 แสดงค่าช่องว่างพลังงานในตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดี ที่ช่องว่างพลังงาน
ขึ้นกับทิศทางในปริภูมิจริงและปริภูมิโมเมนตัม……..................................9
8 แสดงความร้อนจำเพาะของตัวนำยิ่งยวด (C_S) และโลหะปกติ (C_N.).................10
9 แสดงตัวนำปกติในสนามแม่เหล็ก และแสดงตัวนำยิ่งยวดในสนามแม่เหล็ก……11
10 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับส่วนกลับของรากที่สอง
ของมวลอะตอมของ Hg………………………………………………..12
11 แสดงการเจาะทะลุของสนามแม่เหล็กสู่ชั้นตัวนำยิ่งยวด...............................15
12 แสดงสนามแม่เหล็กวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 1…………………………..16
13 แสดงสภาพความต้านทาน และสนามแม่เหล็กภายในตัวนำยิ่งยวด…………..17
14 แสดงปรากฏการณ์ไมเนอร์ของสารตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 1……………………..17
15 แสดงสนามแม่เหล็กวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 2…………………………..18
16 แสดงปรากฏการณ์ไมเนอร์ที่ไม่สมบูรณ์ของตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 2……………18
17 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มข้นของสารเจือและอุณหภูมิวิกฤตของ
ตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก……………………..…..19
18 แสดงการเปลี่ยนแปลงค่าอุณหภูมิวิกฤตของสารบริสุทธิ์และสารที่ผสม
ด้วยสิ่งเจือปน...20
19 แสดงอันตรกิริยาดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนโดยอาศัยคลื่นแลตทิซที่
เรียกว่า โฟนอน……………………………………………………...22
20 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มข้นของสารเจือและอุณหภูมิวิกฤต
ของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก..........................30

บัญชีภาพประกอบ(ต่อ)

ภาพประกอบ **หน้า**

21 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างมวลไอโซโทปกับอุณหภูมิของ
แมกนีเซียมไดโบไรด์..42
22 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ไอโซโทปกับอุณหภูมิวิกฤต
ของตัวนำยิ่งยวดแบบคลื่นเอส และคลื่นดีเมื่อมีสารเจือประเภท
ไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็ก 43
23 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ไอโซโทปกับอุณหภูมิวิกฤต
ของตัวนำยิ่งยวดเมื่อมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภท
แม่เหล็ก 45
24 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤต (T_c / T_{co}) ของ
ตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดี กับความเข้มข้นของสารเจือใช้พารามิเตอร์
$\omega_D = 500$ กรณีเครื่องหมายศักย์กระเจิงของสารเจือประเภท
แม่เหล็กเป็น “-“ 76
25 แสดงผลของฟังก์ชันการกระเจิงค่าต่างๆ ที่มีผลต่ออุณหภูมิวิกฤต
ของตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดีกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก
โดยใช้พารามิเตอร์ $\omega_D = 500$, $\Gamma_0 = \Gamma_1 = 0.01$ และ $G_0 = G_1 = 0$
กรณีเครื่องหมายศักย์กระเจิง ของสารเจือประเภทแม่เหล็กเป็น “-“.......77
26 แสดงผลของฟังก์ชันการกระเจิงค่าต่างๆ ที่มีผลต่ออุณหภูมิวิกฤต
ของตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดีกรณีมีสารเจือประเภทแม่เหล็ก
โดยใช้พารามิเตอร์ $\omega_D = 500$, $G_0 = G_1 = 0.01$ และ $\Gamma_0 = \Gamma_1 = 0$
กรณีเครื่องหมายศักย์กระเจิง ของสารเจือประเภทแม่เหล็กเป็น “-“........78
27 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤต (T_c / T_{co}) ของตัวนำยิ่งยวด
ชนิดคลื่นดี กับความเข้มข้นของสารเจือใช้พารามิเตอร์ $\omega_D = 500$
กรณีเครื่องหมายศักย์กระเจิงของสารเจือประเภทแม่เหล็ก
เป็น “+“...79
28 แสดงผลของฟังก์ชันการกระเจิงค่าต่างๆ ที่มีผลต่ออุณหภูมิวิกฤต
ของตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดีกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก
โดยใช้พารามิเตอร์ $\omega_D = 500$, $\Gamma_0 = \Gamma_1 = 0.01$ และ $G_0 = G_1 = 0$
กรณีเครื่องหมายศักย์กระเจิง ของสารเจือประเภทแม่เหล็กเป็น “+“........80

บัญชีภาพประกอบ(ต่อ)

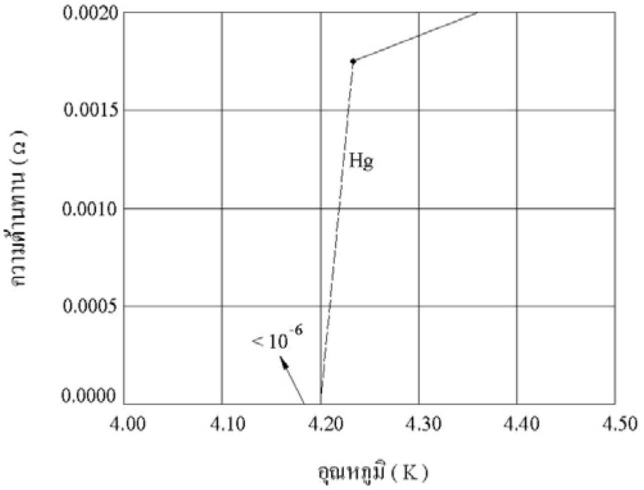
ภาพประกอบ **หน้า**

29 แสดงผลของฟังก์ชันการกระเจิงค่าต่างๆ ที่มีผลต่ออุณหภูมิวิกฤต
ของตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดีกรณีมีสารเจือประเภทแม่เหล็ก
โดยใช้พารามิเตอร์ $\omega_D = 500$, $G_0 = G_1 = 0.01$ และ $\Gamma_0 = \Gamma_1 = 0$
กรณีเครื่องหมายศักย์กระเจิง ของสารเจือประเภทแม่เหล็กเป็น “+“.........81
30 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ไอโซโทป (α / α_0) กับ
อุณหภูมิวิกฤต (T_c / T_{co}) ของตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดี
กรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็ก
เปรียบเทียบกับผลการทดลอง กรณีเครื่องหมายศักย์กระเจิง
ของสารเจือประเภทแม่เหล็กเป็น “-“..82
31 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ไอโซโทป (α / α_0) กับ
อุณหภูมิวิกฤต (T_c / T_{co}) ของตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดีกรณี
มีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็กเปรียบเทียบ
กับผลการทดลองกรณีเครื่องหมายศักย์กระเจิงของสารเจือประเภท
แม่เหล็กเป็น “-“..83

บทที่1
บทนำ

ภูมิหลัง

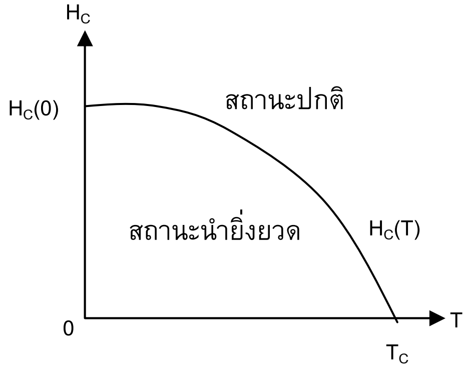
ตัวนำยิ่งยวด คือตัวนำที่ไม่มีความต้านทานอยู่เลย ณ อุณหภูมิหนึ่ง ถูกพบครั้งแรกในปรอท โดย แคเมอร์ลิงน์ ออนเนส ในปี ค.ศ. 1911 (Onnes. 1911:1226) โดยอุณหภูมิจุดเริ่มที่ทำให้ปรอทมีความต้านทานเป็นศูนย์มีค่าประมาณ 4 เคลวิน เรียกอุณหภูมิจุดเริ่มที่ทำให้ตัวนำนั้นมีความต้านทานเป็นศูนย์อย่างทันทีทันใดว่า อุณหภูมิวิกฤต (T_c)



ภาพประกอบ 1 แสดงอุณหภูมิวิกฤติของสภาพนำยวดยิ่งในปรอท

ที่มา: Buckel. (1991).*Superconductivity Fundamental and Applications*. p 3.

หลังจากนั้น ออนเนส พบว่าสนามแม่เหล็กสามารถทำลายสภาพนำยวดยิ่งได้ เมื่อความเข้มสนามแม่เหล็กสูงกว่าค่าวิกฤต ดังภาพประกอบ 2



ภาพประกอบ 2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามแม่เหล็กวิกฤตกับอุณหภูมิ

ที่มา : Kresin ; & Wolf.(1990). *Fundamentals Superconductivity*. p.10.

สมการสนามแม่เหล็กวิกฤต ($H_C(T)$) ที่เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ (T) มีรูปสมการดังนี้

$$H_C(T) = H_C(0)\left[1-\left(\frac{T}{T_C}\right)^2\right] \qquad (1.1)$$

เมื่อ $H_C(0)$ เป็นสนามแม่เหล็กวิกฤตที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์

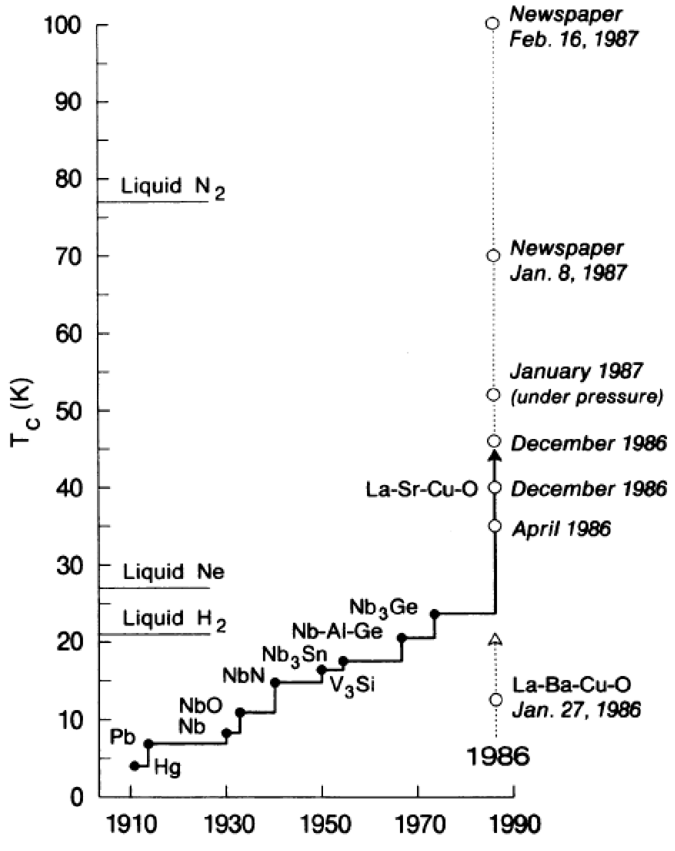
จากสมการที่ 1.1 แสดงว่าที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ สนามแม่เหล็กวิกฤตมีค่ามากที่สุด และที่อุณหภูมิวิกฤตสนามแม่เหล็กวิกฤตมีค่าเป็นศูนย์

จากการค้นพบของออนเนสทำให้นักวิทยาศาสตร์สนใจที่จะหาค่าอุณหภูมิของตัวนำยิ่งยวดให้มีค่าสูงกว่านี้ เพราะค่าอุณหภูมิวิกฤตที่ออนเนสพบนั้น ถ้ามองในด้านเศรษฐกิจแล้วไม่สามารถนำมาใช้ในชีวิตประจำวันได้หรือแม้แต่ในด้านของการทดลองถ้าต้องการที่จะใช้ตัวนำยิ่งยวดก็ต้องมีห้องปฏิบัติการที่ดีมากเพราะในการทำตัวนำยิ่งยวดเราต้องใช้ฮีเลียมเหลวซึ่งมีราคาแพงมากเป็นตัวหล่อเลี้ยง ดังนั้นถ้าห้องปฏิบัติการไม่ดีพอก็จะไม่สามารถกักเก็บฮีเหลียมเหลวไว้ได้

การค้นคว้าวิจัยเกี่ยวกับตัวนำยิ่งยวดได้พัฒนาขึ้นอย่างช้าๆ จนถึงปี ค.ศ. 1973 เทสทาดีและคณะ (Testardi ; et al.1974 : 1) พบว่าสารประกอบไนโอเบียมเยอรมาเนียม (Nb_3Ge) เป็นตัวนำยิ่งยวดที่อุณหภูมิวิกฤต 23 เคลวิน นับเป็นตัวนำยิ่งยวดที่อุณหภูมิสูงที่สุดเท่าที่นักวิทยาศาสตร์ในสมัยนั้นหาได้ ในเวลาต่อมาความพยายามที่จะค้นหาตัวนำยิ่งยวดที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงกว่า 23 เคลวิน ไม่ประสบความสำเร็จ จนทำให้นักวิทยาศาสตร์หลายคนคิดว่าตัวนำยิ่งยวดในธรรมชาติมีอุณหภูมิวิกฤตไม่สูงกว่านี้แล้ว

1. การค้นพบตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง

ในปี ค.ศ. 1986 เบทนอสและมูลเลอร์ (Bednorz ; & Muller 1986: 189) ได้ทำการวิจัย ณ ห้องปฏิบัติการของ IBM ที่เมืองซูริกส์ได้ค้นพบสภาพนำยวดยิ่งของสารกลุ่มใหม่ที่มีองค์ประกอบของคอปเปอร์ออกไซด์ (CuO_2) เป็นองค์ประกอบเรียกว่า คิวเพรท (Cuprate) และเป็นสารตัวแรกที่เป็นสารประกอบ คือ La_2BaCuO_4 ซึ่งเป็นสารประเภทเซรามิกคือ ที่อุณหภูมิห้องสารจะมีสภาพเป็นฉนวนไฟฟ้าแต่ถ้าหากลดอุณหภูมิลงจนต่ำกว่า 30 เคลวิน สารจะเกิดการเปลี่ยนสภาพเป็นตัวนำยิ่งยวดได้ การค้นพบของเบทนอสและมูลเลอร์ทำให้กลุ่มนักฟิสิกส์คาดกันว่าจะต้องค้นพบตัวนำยิ่งยวดที่อุณหภูมิห้องและการค้นพบของเบทนอสและมูลเลอร์ครั้งนี้เองทำให้กลุ่มนักฟิสิกส์มีความเข้าใจในแนวเดียวกันว่าตัวนำยิ่งยวดที่มีอุณหภูมิวิกฤตไม่เกิน 35 เคลวิน เป็นตัวนำยิ่งยวดแบบดั้งเดิม (Conventional Supercocductors) และเรียกตัวนำยิ่งยวดที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงกว่า 35 เคลวิน ว่าเป็นตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง (High Temperature Superconductors) การพัฒนาการวิจัยทำให้การค้นพบตัวนำยิ่งยวดที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงขึ้นไป ดังภาพประกอบ 3



ภาพประกอบ 3 แสดงความสัมพันธ์ของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกับปีการค้นพบ

ที่มา: Bennesman ; & Ketterson. (2002). *Physics of Superconductor.* p.387.

ชู และคณะ (Chu ; Wu; et al. 1987 : 908) ได้พบว่าสารประกอบยิทเทรียม-แบเรียม-คิวเพรท (Y-Ba-Cu-O) มีอุณหภูมิวิกฤตในช่วง 90-100 เคลวิน การค้นพบครั้งนี้แสดงถึงปรากฏการณ์สภาพนำยวดยิ่งอุณหภูมิสูง ซึ่งนับเป็นความก้าวหน้าในการประยุกต์เพราะสภาพนำยวดยิ่งที่เกิดขึ้นในตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำ ต้องประสบปัญหายุ่งยากไม่ว่าจะเป็นเรื่องห้องปฏิบัติการ การใช้ฮีเลียมเหลวเป็นตัวหล่อเลี้ยงซึ่งมีราคาแพงมากและกำลังจะหมดไปจากโลกอีกด้วย ซึ่งตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงนี้ใช้เพียงไนโตรเจนเหลวที่มีจุดเดือด 77 เคลวิน ในการหล่อเลี้ยงและมีราคาเพียง 10% ของราคาฮีเลียมเหลวเท่านั้น และทำให้การประยุกต์ใช้งานในปัจจุบันมีความเป็นไปได้มาก งานประยุกต์สำคัญและกำลังดำเนินการอยู่ก็คือ การทำแม่เหล็กไฟฟ้าที่ให้สนามแม่เหล็กสูงต้องการกระแสไฟฟ้าที่มากถ้าใช้ตัวนำธรรมดาจะเกิดความร้อนสูงมากขดลวดสามารถละลายได้ แต่ถ้าใช้ตัวนำยิ่งยวด สามารถผ่านกระแสเข้าไปได้จำนวนมาก ปัจจุบันตัวนำยิ่งยวดนำไปประยุกต์ใช้ในการถ่ายรูปอวัยวะภายในโดยใช้สนามแม่เหล็กที่เรียกว่าการถ่ายภาพแบบนิวเคลียร์แมกนีติรีโซแนนซ์ (Nuclear Magnetic Resonence ; NMR) หรืองานวิจัยทางฟิสิกส์ เช่น นิวเคลียร์ฟิวชั่น การประยุกต์ใช้ในเทคโนโลยีเครื่องจักรไฟฟ้าขนาดเล็ก และรถไฟฟ้าแม่เหล็กเป็นต้น

การวิจัยสารตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงพบว่ามีสมบัติต่างๆ ที่แตกต่างจากตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำอาจเปรียบเทียบสมบัติของตัวนำยิ่งยวดระหว่างตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำ กับตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงได้ดังตาราง 1

ตาราง 1 เปรียบเทียบสมบัติตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำและตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง

คุณสมบัติ	**ตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำ**	**ตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง**
สภาพต้านทานไฟฟ้า (Subramanyam. And Gopal. 1989 : 3)	$\rho = 0$	$\rho = 0$
ปรากฏการณ์ไมส์เนอร์ (Tanner. 1995 : 215)	เกิด	เกิด
ความยาวอาพันธ์ (coeherent length , ξ)	ที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ $\xi_0 = 1A^\circ$ (Tanner. 1995 : 228)	ที่อุณหภูมิศูนย์องศาสัมบูรณ์ $\xi_0 = 0.01A^\circ$ (Worthington, Gallgher and Dinger. 1987 : 1160)
ช่องว่างพลังงานแยกอิเล็กตรอนในสถานะนำยิ่งยวดให้อยู่ภายใต้ช่องว่างพลังงานและอิเล็กตรอนในสถานะนำปกติให้อยู่เหนือช่องว่างพลังงาน	ที่ศูนย์องศาสัมบูรณ์ $2\Delta(0) = 3.52kT_c$ (Buckel.1991 : 64)	ที่ศูนย์องศาสัมบูรณ์ $2\Delta(0) = 2.4kT_c - 8kT_c$ (Warren. 1987 : 1860)

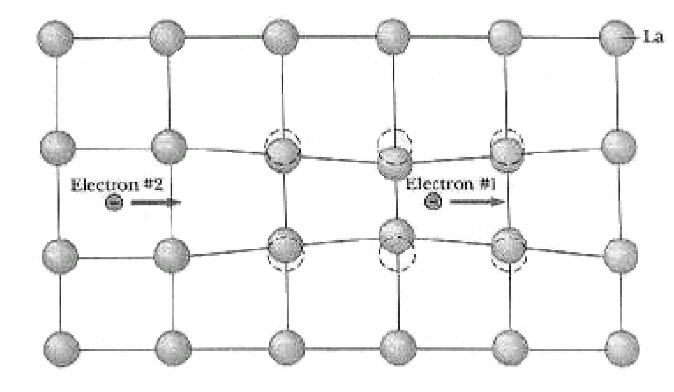
ตาราง 1 เปรียบเทียบสมบัติตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำและตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง (ต่อ)

คุณสมบัติ	ตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำ	ตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง
สมบัติทางความร้อน	ความจุความร้อนจำเพาะของอิเล็กตรอนในสภาพปกติ (C_n) ที่ $T > T_c$ แปรตามอุณหภูมิตามสมการ $C_n \sim T$ และสภาพนำยิ่งยวดความร้อนจำเพาะของอิเล็กตรอนจะเข้าใกล้ศูนย์แบบเอกซ์โปเนนเชียล ($e^{-a/T}$ เมื่อ a เป็นค่าคงที่) และที่อุณหภูมิวิกฤตการเปลี่ยนสภาพความร้อนจำเพาะจะไม่ต่อเนื่อง (Subramanyam. And Gopal. 1989 : 157)	ความจุความร้อนจำเพาะมีค่าขึ้นกับอุณหภูมิแบบ T^n (Harlingen. 1995 : 515)
สัมประสิทธิ์ไอโซโทป	0.5	α มีค่าน้อยกว่า 0.5 ในสารประกอบ $La_{2-x}Ba_xCuO_4 \approx 0.25$ ในสารประกอบ YBaCuO $\approx$ 0.05

ดังนั้นนักวิทยาศาสตร์จึงได้พยายามสร้างทฤษฎีเพื่ออธิบายสมบัติต่าง ๆของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิวิกฤตสูงให้สอดคล้องกับผลการทดลอง บางทฤษฎีก็ใช้ทฤษฎีบีซีเอสเป็นพื้นฐาน แต่มีการเปลี่ยนแปลงในรายละเอียดบางประการ

2. ทฤษฎีของตัวนำไฟฟ้ายิ่งยวด

ทฤษฎีที่นับว่าประสบความสำเร็จในการอธิบายสมบัติทั่วไปของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำ คือทฤษฎีของบาร์ดีน คูเปอร์ และชริฟเฟอร์ (Bardeen; Cooper; & Schrieffer. 1959: 1175) ทฤษฎีนี้เรียกโดยย่อว่า ทฤษฎีบีซีเอส (BCS-theory) ซึ่งวิเคราะห์เหตุผลโดยวิธีคำนวณพบว่า กลไกสำคัญที่ทำให้ตัวนำปกติเป็นตัวนำยิ่งยวดได้คือ เมื่ออิเล็กตรอนเคลื่อนที่เข้าไปในผลึก จะทำอันตรกิริยากับแลตทิซทำให้แลตทิซผลึกเสียรูปทรง



ภาพประกอบ 4 แสดงอันตรกิริยาของคู่อิเล็กตรอนที่ทำให้เกิดคู่คูเปอร์

ที่มา: Tsuei ;& Kirtley. (1996). *Probing High -Temperature Superconductivity*.p.6.

อันตรกิริยาทางไฟฟ้าจะเกิดขึ้นเมื่ออิเล็กตรอนตัวหนึ่งเคลื่อนที่ผ่านเข้าไประหว่างกลุ่มอิออนที่มีประจุบวก ทำให้แลตทิซของโลหะสั่นและเกิดคลื่นแลตทิซ (lattice wave) เรียกสภาวะกระตุ้นของแลตทิซผลึกว่าโฟนอน (phonon) ซึ่งอิออนตัวนี้จะดึงดูดอิออนบวกในบริเวณรอบ ๆให้เคลื่อนที่เข้ามาใกล้ ทำให้บริเวณรอบ ๆ อิเล็กตรอนมีความหนาแน่นของอิออนบวกเพิ่มขึ้น ซึ่งทำให้มีผลกระทบต่ออิเล็กตรอนอีกตัวที่อยู่ใกล้บริเวณนั้น อิเล็กตรอนจะถูกกลุ่มอิออนบวกดึงดูดเข้าไปยังกลุ่มบวก ทำให้ดูเสมือนว่าอิเล็กตรอนตัวแรกดึงดูดอิเล็กตรอนตัวหลัง แต่ทั้งนี้อันตรกิริยาแบบดึงดูดมีค่าสูงกว่าอันตรกิริยาผลักแบบคูลอมบ์ระหว่างอิเล็กตรอน อันตรกิริยาลัพธ์ระหว่างอิเล็กตรอนทั้งสองจึงเป็นแรงดึงดูดอย่างอ่อน (weak attractive interaction) แรงดึงดูดจะมีค่าสูงสุดเมื่ออิเล็กตรอนทั้งสองมีโมเมนตัม ขนาดเท่ากันและมีสปินตรงกันข้าม ฉะนั้นเราจึงมีระบบคู่อิเล็กตรอน และเรียกอิเล็กตรอนที่มาจับคู่กันในบริเวณใกล้ผิวเฟอร์มินี้ว่า คู่คูเปอร์ (Cooper pairs) คู่คูเปอร์นี้ประกอบด้วยคู่อิเล็กตรอนที่มีขนาดโมเมนตัมเท่ากันแต่มีทิศทางตรงกันข้าม $\{k_\uparrow, -k_\downarrow\}$ และระยะห่างระหว่างอิเล็กตรอนคู่หนึ่ง ๆ เรียกว่า ความยาวอาพันธ์ (coherent length , ξ) กล่าวคือ ความยาวที่เป็นปัจจัยสำคัญในการกำหนดสมบัติของตัวนำยิ่งยวด ได้แก่ ความลึกในการทะลุทะลวงของสนาม (field penetration depth , λ) ระยะทางที่สนามแม่เหล็กจะลดลงแบบเอกซ์โปเนนเชียลตามความลึก จะมีค่าหลายร้อยแองสตรอม นั่นหมายความว่าสนามแม่เหล็กจะทะลุผ่านเข้าไปในตัวนำยิ่งยวดได้เป็นระยะทางลึกหลายร้อยอะตอมจากผิว(Umezawa. 1989 : 2849)

นอกจากนี้นักวิทยาศาสตร์พบว่าคู่คูเปอร์ในตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงมีเลขควอนตัมของโมเมนตัมเชิงมุมเป็นสอง (ℓ=2) จึงเรียกตัวนำยิ่งยวดที่มีเลขควอนตัมของโมเมนตัมเชิงมุมเท่ากับสองนี้ว่า ตัวนำยิ่งยวดแบบคลื่น “ดี” (d-wave superconductors) ซึ่งแตกต่างจากทฤษฎีบีซีเอส ที่

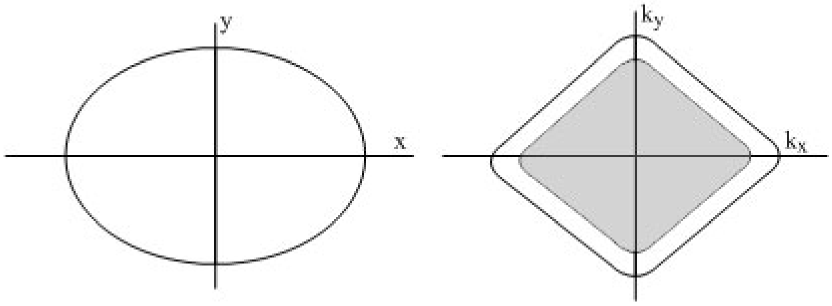
3. สมบัติของตัวนำยิ่งยวด

สมบัติของตัวนำยิ่งยวดประการแรกที่ทราบกันโดยทั่วไปคือ เป็นตัวนำไฟฟ้าที่มีความต้านทานเป็นศูนย์แบบทันทีทันใด และเรียกอุณหภูมิที่ทำให้ตัวนำมีความต้านทานเป็นศูนย์นี้ว่า อุณหภูมิวิกฤต ดังที่ได้กล่าวมาแล้ว ดังนั้นนักฟิสิกส์ทั้งหลายจึงพยามยามค้นหาตัวนำยิ่งยวดที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงๆ เพื่อนำมาประยุกต์ใช้ได้ให้กว้างขวางขึ้น จึงทำให้ต้องศึกษาสมบัติของตัวนำยิ่งยวดข้ออื่นๆ เพื่อนำมาประกอบกับการค้นหาดังกล่าว ซึ่งนอกจากตัวนำยิ่งยวดจะเป็นตัวนำที่มีความต้านทานเป็นศูนย์แล้วยังมีสมบัติอื่นๆ ที่น่าสนใจดังนี้

3.1 ช่องว่างพลังงาน

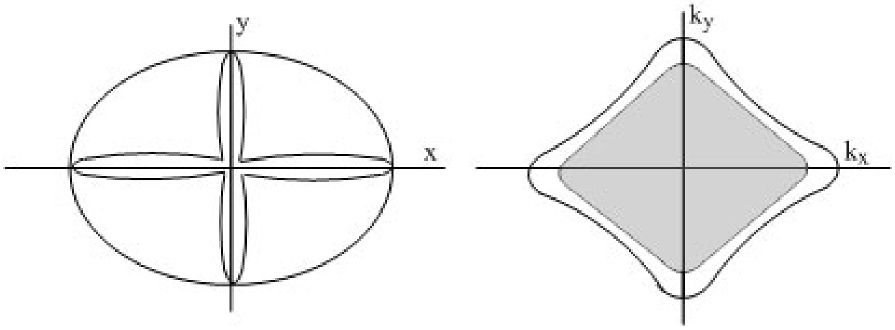
ที่อุณหภูมิสูง ๆ อิออนบวกในแลตทิซผลึกมีการสั่นเนื่องจากอิทธิพลของความร้อนมากทำให้อันตรกิริยาผลักคูลอมบ์มีค่ามากกว่าอันตรกิริยาดูด จึงเป็นผลให้คู่อิเล็กตรอนแตกออกจากกัน

ที่อุณหภูมิต่ำๆ อันตรกิริยาดึงดูดมีค่าสูงกว่าอันตรกิริยาผลักคูลอมบ์ ดังนั้นระบบจึงเป็นคู่อิเล็กตรอน การที่อิเล็กตรอนสองตัวมาจับคู่กันทำให้อิเล็กตรอนต้องสูญเสียพลังงานจึงเป็นผลทำให้เกิดช่องว่างพลังงาน (Energy gap, Δ) ขึ้น ในตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำช่องว่างพลังงานที่เกิดขึ้นมีสองลักษณะคือ ช่องว่างพลังงานที่ไม่ขึ้นกับทิศทาง และช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับทิศทาง ดังภาพประกอบ 5 และภาพประกอบ 6



ภาพประกอบ 5 แสดงค่าช่องว่างพลังงานในตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นเอส ที่ช่องว่างพลังงานไม่ขึ้นกับทิศทางในปริภูมิจริง (real space) และปริภูมิโมเมนตัม (momentum space) ตามลำดับ

ที่มา : Levi.(1996). *Physics Today*.p.19.

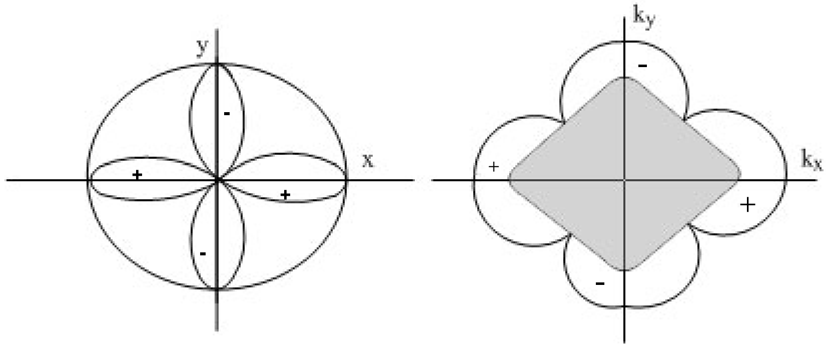


ภาพประกอบ 6 แสดงค่าช่องว่างพลังงานในตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นเอส ที่ช่องว่างพลังงานขึ้นกับทิศทางในปริภูมิจริง และ ปริภูมิโมเมนตัม ตามลำดับ

ที่มา : Levi.(1996). *Physics Today*.p.19.

สำหรับตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงนักวิทยาศาสตร์มีความเห็นตรงกันว่าอิเล็กตรอนสองตัวยังคงจับคู่กันเป็นคู่คูเปอร์ แต่กลไกที่อิเล็กตรอนทั้งสองใช้ในการจับคู่นั้นยังไม่อาจที่จะสรุปได้ชัดเจนว่าเกิดจากสาเหตุใด จากผลการทดลองต่างๆทำให้นักวิทยาศาสตร์ทราบว่า ในตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงอิเล็กตรอนที่เป็นคู่คูเปอร์จะมีโมเมนตัมเชิงมุมลัพธ์เป็นสอง ($\ell = 2$) เรียกตัวนำยิ่งยวดที่มีโมเมนตัมลัพธ์เป็นสองนี้ว่าตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดี การทดลองหนึ่งที่ยืนยันได้ว่าตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงมีโมเมนตัมเชิงมุมลัพธ์เป็น 2 คือการทดลองวัดสัญญา NMR (Nuclear Magnetic Resonance) ของมาร์ทินเดลและคณะ (Martindel; et al. 1993 : 9155)

เชน และคณะ (Shen; et al. 1993 : 1553) ได้วัดช่องว่างพลังงานบนผิวเฟอร์มิของสารตัวนำยิ่งยวดในทิศต่างๆ โดยใช้กระบวนการโฟโตอีมิชชั่น (Photoemission) และได้พบว่าตัวนำ



ภาพประกอบ 7 แสดงค่าช่องว่างพลังงานในตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดี ที่ช่องว่างพลังงานขึ้นกับทิศทางในปริภูมิจริง และปริภูมิโมเมนตัมตามลำดับ

ที่มา : Levi.(1996). *Physics Today*. p.19.

3.2 สมบัติเชิงความร้อน

ในสภาวะนำยิ่งยวดเมื่อทำการทดลองวัดค่าเอนโทรปี (Entropy) พบว่าจะมีค่าลดลงอย่างเห็นได้ชัด การลดลงของเอนโทรปีเมื่อเปรียบเทียบระหว่างสถานะปกติกับสภาวะนำยิ่งยวดทำให้ทราบว่า สภาพนำยวดยิ่งมีความเป็นระเบียบของอิเล็กตรอนมากกว่าในสถานะปกติ ในโลหะทั่วไปความจุ ความร้อน (C_V) มีความสัมพันธ์กับอุณหภูมิตามสมการ

$$C_V = \gamma T + AT^3 \tag{1.2}$$

เมื่อ γT เกิดจากความไม่สมบูรณ์ของผลึก

AT^3 เกิดจากผลึกมีโฟนอน (Phonon) หรือการสั่นของแลตทิซ (Lattice vibration)

C_V เป็นความจุความร้อน

สำหรับกรณีตัวนำยิ่งยวดตามทฤษฎีบีซีเอสมีความจุความร้อนเป็น

$$C_s \ \alpha \ e^{-(\Delta / k_B T)} \tag{1.3}$$

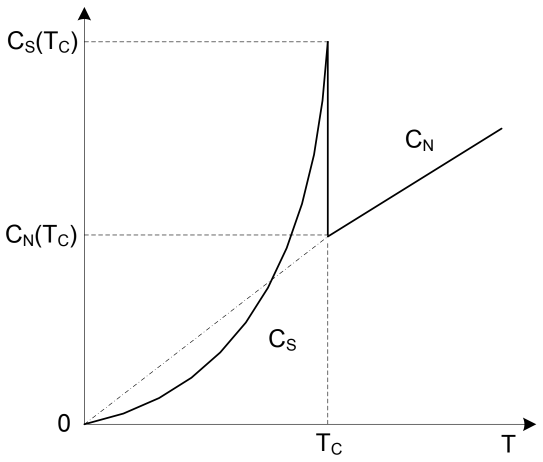
หรือเขียนได้เป็น

$$\frac{C_s}{\alpha T_C} = ae^{-b(T_c/T)} \tag{1.4}$$

เมื่อ a,b,α เป็นค่าคงที่ที่ไม่ขึ้นกับอุณหภูมิ

C_s เป็นความจุความร้อนของอิเล็กตรอนในสภาพนำยิ่งยวด

โดยที่สมการดังกล่าวหมายถึงเมื่ออุณหภูมิในสภาพนำยวดยิ่งลดลง ความจุความร้อนจะเข้าใกล้ศูนย์โดยลดลงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล



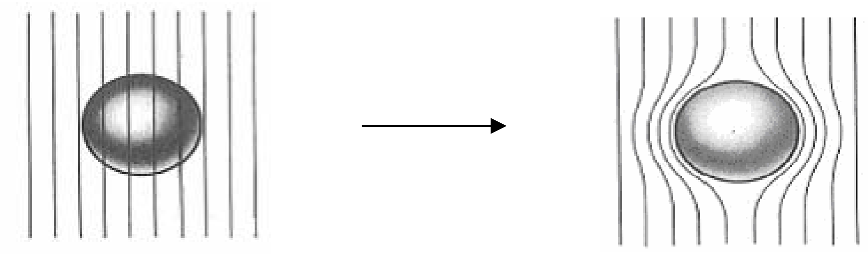
ภาพประกอบ 8 กราฟแสดงความร้อนจำเพาะของตัวนำยิ่งยวด (C_S) และโลหะปกติ (C_N) เป็นฟังก์ชันของอุณหภูมิ

ที่มา : Bardeen; Cooper; & Schrieffer. (2001). *Chapter 10: Superconductivity*. p. 9

จากภาพประกอบ 8 ในสถานะปกติที่อุณหภูมิต่ำ $C_N \ \alpha \ T^3$ และที่อุณหภูมิ $T = T_c$ ความร้อนจำเพาะจะมีความไม่ต่อเนื่อง คือ $C_N(T_c) \neq C_s(T_c)$ และทฤษฎี BCS ได้ทำนายว่า $\left.\frac{C_s - C_N}{C_N}\right|_{T=T_c} = 1.42$ สำหรับตัวนำยิ่งยวดทุกชนิด

3.3 ตัวนำยิ่งยวดในสนามแม่เหล็ก

ในปี ค.ศ. 1933 ไมส์เนอร์และออคเซนเฟลด์ (Meissner ;& Ochsenfeld. 1958: 606) ได้พบสมบัติพื้นฐานที่สำคัญของตัวนำยิ่งยวดอีกประการหนึ่งคือเมื่อตัวนำยิ่งยวดถูกทำให้มีอุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิวิกฤตตัวนำยิ่งยวดจะเกิดสภาพนำยิ่งยวดจากนั้นใส่สนามแม่เหล็กภายนอกเข้าไป สนามแม่เหล็กดังกล่าวจะไม่สามารถพุ่งผ่านเข้าไปในเนื้อของตัวนำยิ่งยวดได้ ในทางกลับกันถ้าตัวนำยิ่งยวดมีอุณหภูมิสูงกว่าอุณหภูมิวิกฤตตัวนำยิ่งยวดนี้จะเปลี่ยนสภาพจากสภาพนำยิ่งยวดเป็นสภาพปกติ สนามแม่เหล็กที่ใส่เข้าไปจึงสามารถทะลุผ่านเข้าไปในเนื้อของตัวนำยิ่งยวดได้ เรียกปรากฏการณ์เช่นนี้ว่า ปรากฏการณ์ไมส์เนอร์ (Meissner effect) ดังภาพประกอบ 9



ภาพประกอบ (ก) T>T_C ภาพประกอบ (ข) T<T_C

ตัวนำสภาพปกติในสนามแม่เหล็ก **ตัวนำสภาพยวดยิ่งในสนามแม่เหล็ก**

ภาพประกอบ 9 (ก) แสดงตัวนำปกติในสนามแม่เหล็ก (ข) แสดงตัวนำยิ่งยวดใน สนามแม่เหล็ก

ที่มา: Kittel. (1997). *Introduction to Solid State Physics*. p.344.

โลหะโดยทั่วไปเมื่อไม่มีสนามแม่เหล็กภายนอก ($\vec{H}$) มารบกวน สนามแม่เหล็กภายในโลหะที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนแต่ละตัวมีทิศทางไม่แน่นอน สนามแม่เหล็กจึงหักล้างกันหมด ทำให้สนามแม่เหล็กลัพธ์เท่ากับศูนย์ แต่เมื่อมีสนามแม่เหล็กภายนอกมารบกวน สนามรบกวนจะทำให้เกิดสนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำดังสมการ

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \qquad (1.5)$$

โดย $\vec{B}$ คือ ความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็ก

$\vec{H}$ คือ ความเข้มสนามแม่เหล็ก

$\vec{M}$ คือ สภาพแม่เหล็ก(magnetization) โดยที่ $\vec{M} = \chi \vec{H}$

χ คือ ค่าอ่อนไหวแม่เหล็ก(magnetic susceptibility)

μ_r คือ ค่าซึมซาบแม่เหล็กสัมพัทธ์ (relative magnetic permeatibillty) เมื่อ $\mu_r = 1 + \chi$

μ_0 คือ ค่าซึมซาบแม่เหล็กสัมบูรณ์ (absolute magnetic permeatibillity)

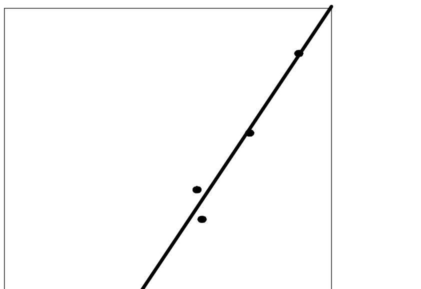
สำหรับกรณีสารพาราแมกเนติก (paramagnetic , μ_r >1) สนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำที่เกิดจะรวมกับสนามแม่เหล็กภายนอก แต่ในสารไดอาแมกเนติก(diamagnetic, μ_r <0) สนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำ จะต้านสนามแม่เหล็กภายนอก การที่ตัวนำยิ่งยวดผลักสนามแม่เหล็กให้เบนออกมาทำให้สนามแม่เหล็กภายในสารตัวนำยิ่งยวดเป็นศูนย์ ($\vec{B} = 0$) นี้เป็นคุณสมบัติของไดอาแมกเนติคแบบสมบูรณ์ (perfect diamagnetic substance) นั่นคือ μ_r =0 และ $\vec{M} = -\vec{H}$ ทำให้ค่าความอ่อนไหว

สภาพไดอาแมกเนติคอุดมคติในตัวนำยิ่งยวดเกิดขึ้นเมื่อตัวนำยิ่งยวดอยู่ในสนามแม่เหล็ก กระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำที่ไหลที่ผิวชั้นนอกตัวนำจะไหลในลักษณะที่ทำให้สนามแม่เหล็กที่เกิดจากการเหนี่ยวนำมีทิศต่อต้านสนามแม่เหล็กภายนอกที่เข้าไปกระทำ ด้วยเหตุนี้สนามแม่เหล็กลัพธ์ภายในตัวนำยิ่งยวดจึงเป็นศูนย์

เป็นที่รู้กันว่าสนามแม่เหล็กที่ทำให้เกิดกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำที่ผิวชั้นนอกไม่มีผลต่ออิเล็กตรอนภายในโลหะ ซึ่งปกติสนามไฟฟ้าเวลาส่งแรงกระทำต่ออิเล็กตรอนทำให้เกิดกระแสไฟฟ้าไหลในตัวนำ แต่ในกรณีของตัวนำยิ่งยวดซึ่งเป็นสารไดอาแมกเนติก จะมีกระแสไฟฟ้าไหลที่ผิวชั้นนอกเท่านั้น ดังนั้นปรากฏการณ์ไมสเนอร์และสภาพนำยวดยิ่งจึงมีความสัมพันธ์กันโดยปรากฏการณ์ทั้งสองมีจุดกำเนิดมาจากสาเหตุเดียวกันและสมบัตินี้ได้กลายเป็นสมบัติพื้นฐานที่สำคัญของสภาพนำยิ่งยวด

3.4 ปรากฏการณ์ไอโซโทป

ในปี ค.ศ. 1950 แมกซ์เวลล์ (Maxwell. 1950: 477) ได้ทดลองวัดมวลไอโซโทปของปรอท (Hg) และอุณหภูมิวิกฤตพบว่ามีปริมาณทั้งสองมีความสัมพันธ์กันดังแสดงดังภาพประกอบ 10



ภาพประกอบ 10 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตกับส่วนกลับของรากที่สองของมวลอะตอมของ Hg

ที่มา : Maxwell. (1950). *Physical Review Letter*. 78. p. 477.

จากภาพประกอบ 10 แสดงให้เห็นว่าอุณหภูมิวิกฤตของธาตุขึ้นกับมวลไอโซโทปของธาตุนั้น ปรากฏการณ์นี้ เรียกว่า ปรากฏการณ์ไอโซโทป เช่นในกรณีของปรอท อุณหภูมิวิกฤตมีการเปลี่ยนจาก 4.185 เคลวิน ไปเป็น 4.146 เคลวิน เมื่อมวลอะตอม (M) ของปรอทเปลี่ยนจาก 199.5 u เป็น 203.4 u ข้อมูลนี้ได้จากการทดลองใช้ธาตุแต่ละอนุกรมของไอโซโทป และจากผลการทดลองจะได้ความสัมพันธ์ดังสมการ

$$T_c \, \alpha \, M^{-\alpha} \tag{1.6}$$

หรือ
$$M^{\alpha} T_c = C \tag{1.7}$$

โดย T_c คือ อุณหภูมิวิกฤติของตัวนำยิ่งยวด
M คือ มวลของไอโซโทป
α คือ สัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทป
และ C คือ ค่าคงตัว

เมื่อจัดรูปสมการแบบลอการิธึมและดิฟเฟอเรนทิเอตทั้งสองข้างของสมการเทียบกับ T_c

$$\alpha \ln M + \ln T_c = \ln C$$

$$\frac{\alpha}{M} \frac{dM}{dT_c} + \frac{1}{T_c} = 0$$

$$\frac{dM}{dT_c} = -\frac{M}{\alpha T_c}$$

จะได้
$$\alpha = -\frac{M}{T_c} \frac{dT_c}{dM} \quad = \quad -\frac{d(\ln T_c)}{d(\ln M)} \tag{1.8}$$

หรือ
$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\omega_D}{T_c} \frac{dT_c}{d\omega_D} \tag{1.9}$$

เมื่อ ω_D เป็นความถี่คัทออฟของเดอบาย จากภาพประกอบ 10 อาจคำนวณหาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปได้ ตัวอย่างเช่นพิจารณาที่ ΔT_c = 4.146 – 4.185 = - 0.039 และ ΔM = 203.4 – 199.5 = 3.9 จะคำนวณหาสัมประสิทธิ์ไอโซโทปได้เป็น $\alpha = \frac{-199.5 \times (-0.039)}{4.185 \times 3.9} \approx 0.5$ ทฤษฎีบีซีเอส ใช้ปรากฏการณ์นี้อธิบายการสั่นของแลตทิซ โดยเริ่ม

$$\omega_D = \sqrt{\frac{k}{M}} \qquad k$$

$$M \qquad \omega_D \,\alpha\, M^{-1/2} \qquad T_c \,\alpha\, \omega_D$$

$$T_c \,\alpha\, \frac{1}{\sqrt{M}} \qquad \alpha = \frac{1}{2}$$

จากปรากฏการณ์ที่กล่าวมา บาร์ดีน คูเปอร์ และชริฟเฟอร์ ได้สร้างทฤษฎีบีซีเอส และพบว่า $T_c \;\alpha\; \omega_D \;\alpha\; M^{-1/2}$ ซึ่งมีค่า $\alpha = \frac{1}{2}$ เป็นจริงสำหรับตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำ แต่สำหรับตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง การทดลองจะไม่ให้ค่า $\alpha = 1/2$ เพราะนอกเหนือจากอันตรกริยาอิเล็กตรอน- โฟนอนแล้วยังมีมีอันตรกิริยาผลักจากแรงคูลอมบ์ระหว่างอิเล็กตรอนกับอิเล็กตรอนเข้ามามีผลต่อสถานะนำยิ่งยวดด้วย

ตาราง 2 สัมประสิทธิ์ไอโซโทปในสารตัวนำยิ่งยวด

ธาตุ	α	ธาตุ	α
Zn	0.45 ± 0.05	Ru	0.00 ± 0.05
Cd	0.32 ± 0.07	Os	0.15 ± 0.05
Sn	0.47 ± 0.02	Mo	0.33
Hg	0.50 ± 0.03	Nb_3Sn	0.08 ± 0.02
Pb	0.49 ± 0.02	Zr	0.00 ± 0.05

ที่มา : C. Kittel. (1996). *Introduction to Solid State Physics*. p. 347

4. ประเภทของตัวนำยิ่งยวด

ตัวนำยิ่งยวดมีทั้งประเภทที่สนามแม่เหล็กวิกฤตมีค่าต่ำซึ่งมักเป็นวัสดุที่แข็งมากและประเภทที่สนามแม่เหล็กวิกฤตมีค่าสูง ซึ่งมักเป็นวัสดุที่แข็งน้อย ดังนั้นถ้ามองด้านความแข็งของวัสดุอาจแบ่งออก เป็นตัวนำยิ่งยวดแบบอ่อนและตัวนำยิ่งยวดแบบแข็ง แต่ในปัจจุบันประเภทของตัวนำยิ่งยวดมักแบ่งตามคุณสมบัติทางแม่เหล็กเป็น 2 ชนิด เรียกว่าตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 1 (Type-I superconductor) และตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 2 (Type-II superconductor) ซึ่งเทียบได้กับประเภทอ่อนและประเภทแข็งตามลำดับ

สิ่งสำคัญที่ทำให้เกิดความแตกต่างของสภาพนำยวดยิ่งสองชนิดนอกจากปัจจัยทางด้านสนามแม่เหล็กแล้ว วิถีอิสระ (Mean free path) ของอิเล็กตรอนตัวนำในสถานะปกติซึ่งเป็นอีกพารามิเตอร์หนึ่งในการกำหนดคุณสมบัติพื้นฐานของตัวนำยิ่งยวด อันได้แก่ ระยะทะลวงลึก

λ ξ λ

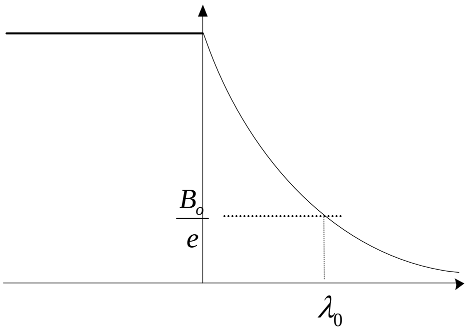
ξ

ξ

ให้ $\vec{B}(x)$ เป็นสนามแม่เหล็กที่เจาะทะลุเข้าสู่ชั้นของตัวนำยิ่งยวด จะได้สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\vec{B}(x)$ กับ ระยะทะลวงลึก (λ) ดังนี้คือ

$$\vec{B}(x) = B_0 e^{-\frac{x}{\lambda}} \tag{1.10}$$

เมื่อ $\vec{B}_0$ คือ สนามแม่เหล็กภายนอก



ภาพประกอบ 11 แสดงการเจาะทะลุของสนามแม่เหล็กสู่ชั้นตัวนำยิ่งยวด

ที่มา : Gupta. (2003). Superconductivity. p. 23-27.

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^4}} \tag{1.11}$$

เมื่อ λ คือระยะทะลวงลึกที่ขึ้นกับอุณหภูมิ

λ_0 คือระยะทะลวงลึกที่อุณหภูมิ 0 K มีค่าประมาณ 30 -130 นาโนเมตร ขึ้นกับชนิดของสารตัวนำยิ่งยวด

B

B_0

สนามแม่เหล็ก

ภายนอก

0

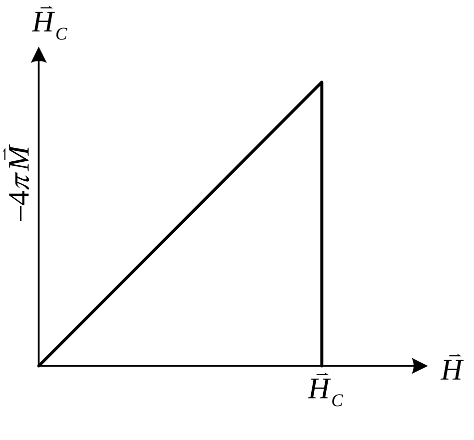
ตาราง 3 แสดงความยาวอาพันธ์ และระยะทะลวงลึกที่ศูนย์องศาสัมบูรณ์ ในหน่วย 10^{-6} cm

ธาตุ	ความยาวอาพันธ์ ξ	ระยะทะลวงลึก λ_L	λ_L / ξ
Sn	23.	3.4	0.16
Al	160.	1.6	0.010
Pb	8.3	3.7	0.45
Cd	76.	11.0	0.14
Nb	3.8	3.9	1.02

ที่มา : Kittel. (1996). *Introduction to Solid State Physics.* p. 353.

4.1 ตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 1

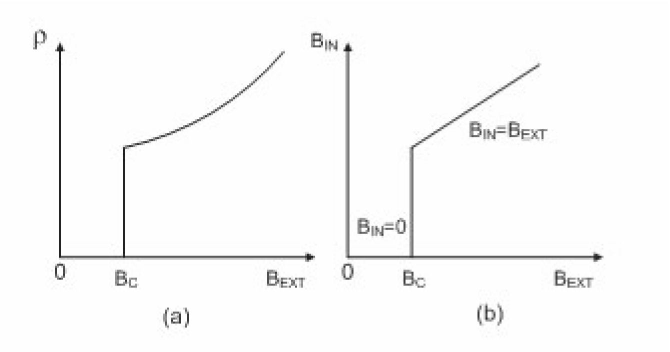
จากการศึกษาพบว่ามีประมาณ 30 ชนิด ในสภาพนำยวดยิ่งมีความยาวอาพันธ์มากกว่าระยะทะลวงลึกตัวนำยิ่งยวดชนิดนี้จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำกับสนามแม่เหล็กภายนอกดังภาพประกอบ 12



ภาพประกอบ 12 แสดงสนามแม่เหล็กวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 1

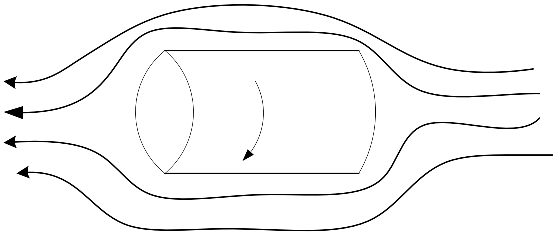
ที่มา : Kittel. (1996). *Introduction to Solid State Physics.* p. 340.

ตัวนำยิ่งยวดชนิดนี้จะแสดงปรากฏการณ์ไมส์เนอร์ที่สมบูรณ์ คือเป็นไดอาแมกเนติกอย่างสมบูรณ์ และโดยทั่วไปค่าสนามแม่เหล็กวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดแบบที่ 1 มีค่าไม่สูงเพียงพอสำหรับการนำไปประยุกต์ใช้งาน



ภาพประกอบ 13 (a) กราฟแสดงสภาพความต้านทาน (b) สนามแม่เหล็กภายในสารตัวนำยิ่งยวด

ที่มา : Michigan State University.(1999).(Online)



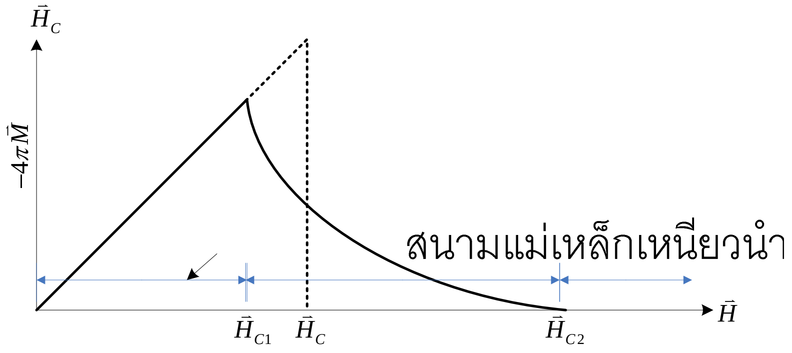
ภาพประกอบ 14 แสดงปรากฏการณ์ไมสเนอร์ของสารตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 1

ที่มา : Michigan State University.(1999).(Online)

4.2 ตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 2

ส่วนใหญ่เป็นโลหะผสมและสารประกอบ ตัวนำยิ่งยวดชนิดนี้มีความยาวอาพันธ์ สั้นกว่าระยะทะลวงลึก และมีอุณหภูมิวิกฤตสนามแม่เหล็กวิกฤต สูงกว่าตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 1 และให้ค่าสนามวิกฤต 2 ค่า ความสัมพันธ์ระหว่างสนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำกับสนามแม่เหล็กภายนอก เป็นดังภาพประกอบ 15

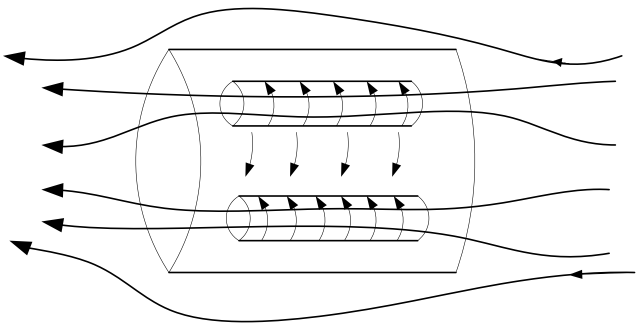
B_{IN}=0



ภาพประกอบ 15 แสดงสนามแม่เหล็กวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 2

ที่มา : Kittel. (1996). *Introduction to Solid State Physics*. p. 340.

เมื่อสนามแม่เหล็กมีค่าน้อยกว่า $\vec{H}_{c1}$ ตัวนำจะมีสภาพเป็นตัวนำยิ่งยวดที่สมบูรณ์ และแสดงปรากฏการณ์ไมสเนอร์อย่างสมบูรณ์ เช่นเดียวกับตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 1 แต่เมื่อสนามแม่เหล็กมีค่ามาก กว่า $\vec{H}_{c1}$ แต่น้อยกว่า $\vec{H}_{c2}$ ตัวนำจะมีสภาพนำยวดยิ่งที่ไม่สมบูรณ์ เนื่องจากเส้นแรงแม่เหล็กส่วนหนึ่ง สามารถทะลุเข้าไปในเนื้อสารตัวนำ ทำให้เกิดปรากฏการณ์ไมสเนอร์ที่ไม่สมบูรณ์ เรียกสถานะนี้ว่า สถานะวอเทค (vortex state) และเมื่อสนามแม่เหล็กมีค่ามากกว่า $\vec{H}_{c2}$ ตัวนำจะกลายสภาพเป็นสถานะปกติ โดยทั่วไป $\vec{H}_{c2}$ จะมีค่ามาก ตัวนำบางชนิดอาจมีค่า $\vec{H}_{c2}$ มากถึง 100 เท่าของค่า $\vec{H}_c$ จึงนิยมใช้ตัวนำยิ่งยวดชนิดนี้ในงานประยุกต์ที่ต้องใช้สนามแม่เหล็ก



ภาพประกอบ 16 แสดงปรากฏการณ์ไมสเนอร์ที่ไม่สมบูรณ์ของสารตัวนำยิ่งยวดชนิดที่ 2

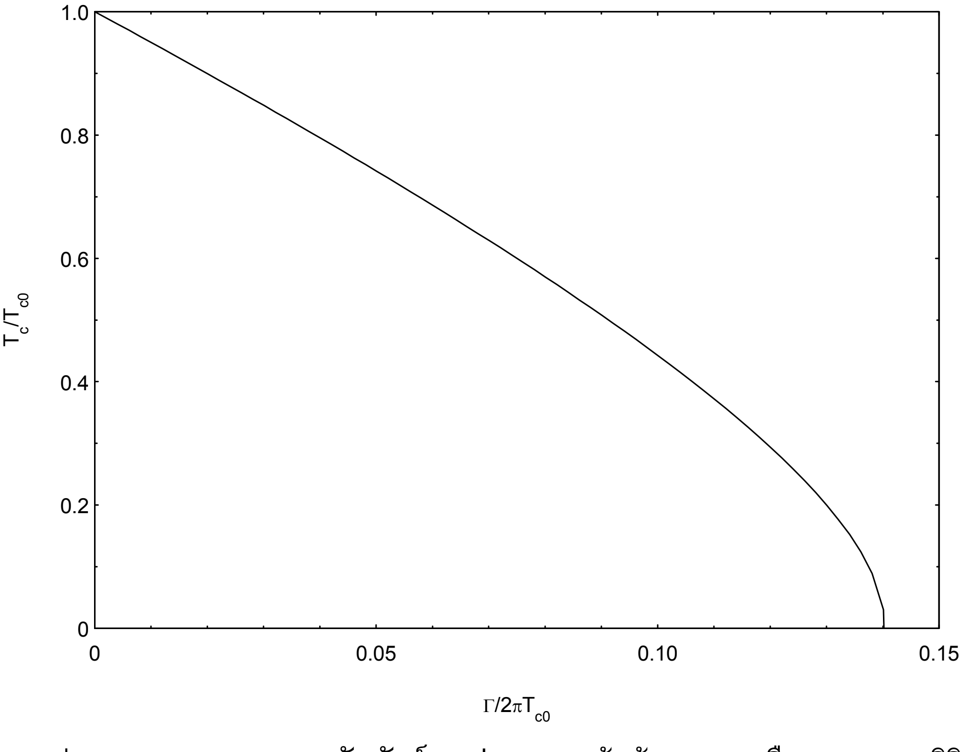
ที่มา : Ketterson ; & Song. (1999). *Superconductivity*.p.67

5. ตัวนำยิ่งยวดที่มีสารเจือ

จากการที่นักวิทยาศาสตร์ได้พยายามสร้างทฤษฎีเพื่ออธิบายสมบัติต่าง ๆของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิวิกฤตสูงให้สอดคล้องกับผลการทดลอง ปรากฏการณ์หนึ่งที่น่าสนใจคือศึกษาสภาพนำยิ่งยวดเมื่อระบบมีสารเจือ (Impurity) ซึ่งได้มีการศึกษาอิทธิพลของสารเจือที่มีต่อสภาพนำยิ่งยวดโดยทั่วไปแล้วอาจแบ่งสารเจือได้เป็น 2 ประเภท คือ

5.1 สารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก (Non – Magnetic Impurities)

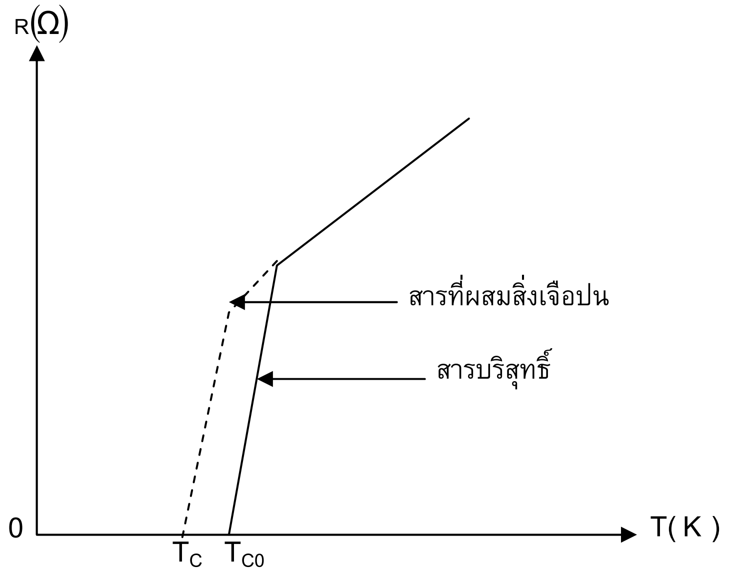
เนื่องจากโมเมนต์แม่เหล็กลัพธ์ของอะตอมหักล้างกันพอดี จะทำให้อะตอมหรืออิออนนั้นไม่เป็นแม่เหล็ก จึงไม่มีผลเนื่องจากสปิน ดังนั้นเมื่อเติมสารเจือประเภทนี้ลงไปในตัวนำยิ่งยวดแบบคลื่นเอสจะไม่มีผลต่ออุณภูมิวิกฤติของตัวนำยิ่งยวดเพียงแต่ทำให้มีช่องว่างพลังงานมากขึ้น ยกเว้นกรณีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กที่มีการจัดเรียงของสารเจือแบบสุ่ม ซึ่งเป็นตัวนำยิ่งยวดแบบคลื่นดี คลื่นเอฟ คลื่นพี สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มข้นของสารเจือและอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กได้ดังภาพประกอบ 17



ภาพประกอบ 17 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มข้นของสารเจือและอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก

5.2 สารเจือประเภทแม่เหล็ก (Magnetic Impurities)

สารเจือประเภทแม่เหล็กเมื่อใส่ลงในตัวนำยิ่งยวด ทำให้ตัวนำยิ่งยวดมีอุณหภูมิวิกฤตลดลง เมื่อความเข้มของสารเจือปนเพิ่มขึ้นและเมื่อความเข้มมากพอจะทำให้ตัวนำยิ่งยวดกลับสภาพเป็นตัวนำปกติได้ เนื่องจากสารเจือประเภทนี้มีโมเมนต์แม่เหล็กซึ่งจะมีอันตรกิริยากับสปินของอิเล็กตรอนในคู่ คูเปอร์ ทำให้อิเล็กตรอนตัวใดตัวหนึ่งในคู่คูเปอร์กลับทิศของสปินส่งผลให้คู่คูเปอร์ถูกทำลาย และเมื่อจำนวนคู่คูเปอร์ลดลง อุณหภูมิวิกฤติและช่องว่างพลังงานจึงลดลงด้วย



ภาพประกอบ 18 แสดงการเปลี่ยนแปลงค่าอุณหภูมิวิกฤตของสารบริสุทธิ์ และสารที่ผสมด้วยสิ่งเจือปน

นักวิทยาศาสตร์ผู้ที่ได้ศึกษาการคำนวณผลของสารเจือปนประเภทแม่เหล็กในสารตัวนำยิ่งยวดเป็นกลุ่มแรกคือ อบริกอซอฟ และกอร์คอฟ (Abrikosov ;& Gor'kov.1961:1243) ในปี ค.ศ. 1961 พบว่าตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำ สารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กไม่มีอิทธิพลต่ออุณหภูมิวิกฤตและช่องว่างพลังงาน ถึงแม้ความเข้มข้นของสารเจือจะเพิ่มแต่ถ้าตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำถูกโดปด้วยสารเจือประเภทเป็นแม่เหล็ก อุณหภูมิวิกฤตและช่องว่างพลังงานจะมีค่าลดลงอย่างรวดเร็ว แม้ว่าความเข้มข้นของสารเจือจะมีค่าเพียงเล็กน้อยก็ตาม และถ้าความเข้มข้นของสารเจือเพิ่มจนถึงค่าหนึ่ง ตัวนำยิ่งยวดก็จะสูญเสียสภาพนำยิ่งยวดไป

ทฤษฎีของอบริกอซอฟและกอร์คอฟนั้น ใช้ศึกษาผลกระทบของสารเจือต่อตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิต่ำซึ่งพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบมีลักษณะไม่ขึ้นกับทิศทาง และเป็นตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นเอสได้ดี แต่ไม่สามารถอธิบายตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง ซึ่งพารามิเตอร์ความเป็นระเบียบมีลักษณะขึ้นกับทิศทางมาก จากการทดลองพบว่าสารเจือแบบไม่เป็นแม่เหล็กและแม่เหล็กต่างมีผลกระทบทำให้อุณหภูมิวิกฤติของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงลดลง (Crisan; et al. 1998 : 699)

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อคำนวณหาสมการอุณหภูมิวิกฤต (T_c) แบบแม่นตรงของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงแถบพลังงานเดี่ยวกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็กโดยคำนึงถึงผลของโมเมนตัมของศักย์กระเจิงและลักษณะของผิวเฟอร์มี ในตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดี
2. พิจารณาแทนค่า ฟังก์ชันของการกระเจิงแบบขึ้นกับทิศทางเนื่องจากสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก$(f(k))$และประเภทแม่เหล็ก $(g(k))$ และ ฟังก์ชันซึ่งเป็นเบสิกฟังก์ชัน (basis function) ที่ขึ้นกับเวกเตอร์คลื่นของช่องว่างพลังงาน ลงในสมการอุณหภูมิวิกฤติในข้อ 1
3. เพื่อคำนวณหาสมการสัมประสิทธิ์ของไอโซโทปแบบแม่นตรงของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็ก
4. นำผลการคำนวณที่ได้เปรียบเทียบกับผลการทดลอง

ความสำคัญของการวิจัย

1. สามารถใช้อธิบายอิทธิพลของสารเจือทั้งประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็กที่มีต่ออุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ไอโซโทปที่มีต่อตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิแบบแถบพลังงานเดี่ยวได้
2. เพิ่มความรู้ความเข้าใจในกลไกการเกิดสภาพนำยวดยิ่งมากขึ้น

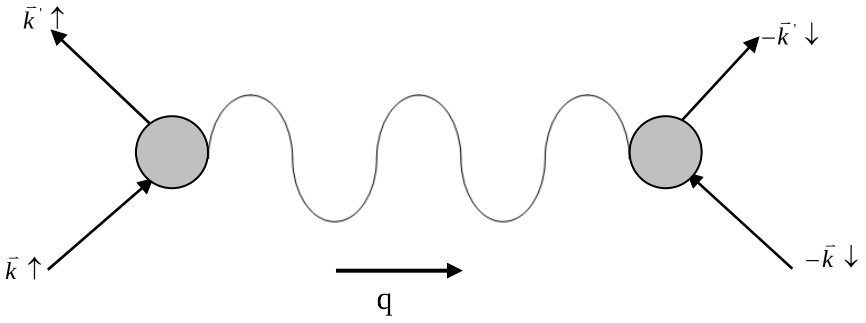
ขอบเขตของงานวิจัย

1. คำนวณหาสมการแบบอุณหภูมิวิกฤติ (T_c) และสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงแถบพลังงานเดี่ยวกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็กโดยกำหนดให้ $f(k) \neq g(k)$
2. คำนวณเชิงตัวเลขโดยใช้โปรแกรมแมธิแมทธิคา (Mathematica) เพื่อเปรียบเทียบกับผลการทดลอง

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1. ทฤษฎีบีซีเอส

ในปี ค.ศ. 1957 บาร์ดีน คูเปอร์ และชริฟเฟอร์ (Bardeen; Cooper; & Schrieffer. 1957 : 1175) ได้พัฒนาทฤษฎีขึ้นมาเพื่ออธิบายสภาพนำยิ่งยวดให้ถูกต้อง โดยใช้วิธีคณิตศาสตร์ซึ่งมีแนวคิดที่สำคัญคือ อันตรกิริยาของอิเล็กตรอนเป็นแรงดึงดูด จึงเป็นสาเหตุให้เกิดการจับคู่ของอิเล็กตรอนที่อยู่ใกล้ๆ ผิวเฟอร์มิ เรียกอิเล็กตรอนที่มาจับคู่กันนี้ว่า คู่คูเปอร์ ซึ่งจะเกิดคู่คูเปอร์ได้ก็ต่อเมื่ออิเล็กตรอนทั้งสองมีโมเมนตัมที่มีขนาดเท่ากัน และมีสปินตรงกันข้ามถ้าแทนอันตรกิริยาระหว่างอิเล็กตรอนกับโฟนอน ดังภาพประกอบ 19



รูปที่ 19 แสดงอันตรกิริยาดึงดูดระหว่างอิเล็กตรอนโดยอาศัยคลื่นแลตทิซที่เรียกว่าโฟนอน

ที่มา : Buckel.(1991).*Superconductivity Fundamentals and Application*. p.35

จากภาพประกอบ 19 สามารถเขียนฮาร์มิลโทเนียนตามแบบสมการบีซีเอส ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_{red} \\ &= \sum_{k\sigma} \varepsilon_k C^+_{k\sigma} C_{k\sigma} + \sum_{kk'} V_{kk'} C^+_{k\uparrow} C^+_{-k\downarrow} C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow} \end{aligned} \qquad (2.1)$$

เมื่อ ε_k คือพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอน

$C^+_{k\sigma}$ คือตัวดำเนินการสร้างสำหรับอิเล็กตรอนในตัวนำยิ่งยวดที่มีโมเมนตัม $(\vec{k})$ และสปิน $(\vec{\sigma})$

$C_{k\sigma}$ คือตัวดำเนินการทำลายสำหรับอิเล็กตรอนในตัวนำยิ่งยวดที่มีโมเมนตัม $(\vec{k})$ และสปิน $(\vec{\sigma})$

และ $V_{kk'}$ คือ พลังงานศักย์ดึงดูดของคู่คูเปอร์

นิยามของช่องว่างพลังงาน (Order parameter, Δ_k) คือ

$$\Delta_k = \sum_k V_k < C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} > \tag{2.2}$$

ดังนั้นจะเขียนฮามิลโทเนียนได้ใหม่เป็น

$$H = \sum_{k\sigma} \varepsilon_k C^+_{k\sigma} C_{k\sigma} + \sum_k \Delta_k \left(C^+_{k\uparrow} C^+_{-k\downarrow} + h.c. \right)$$

โดยที่ h.c. = คอนจูเกตฮามิลโทเนียน (hermitian conjugate)

ดังนั้นจะได้ว่า

$$H = \sum_k \left(\varepsilon_k C^+_{k\uparrow} C_{k\uparrow} + \varepsilon_k C^+_{-k\downarrow} C_{-k\downarrow} \right) + \sum_k \Delta_k \left(C^+_{k\uparrow} C^+_{-k\downarrow} + C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} \right)$$

นิยามของกรีนฟังก์ชัน (Green's function) คือ

$$G_0(k, \omega_n) = < -T_\tau \psi_k(\tau) \psi^+_k(0) > \tag{2.3}$$

เมื่อ $\psi^+_k(0) = \begin{pmatrix} C^+_{k\uparrow} & C_{-k\downarrow} \end{pmatrix}$

และ $\psi_k(\tau) = \begin{pmatrix} C_{k\uparrow} \\ C^+_{-k\downarrow} \end{pmatrix}$

จะได้

$$\begin{aligned} G_0(k, \omega_n) &= < -T_\tau \begin{pmatrix} C_{k\uparrow} \\ C^+_{-k\downarrow} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^+_{k\uparrow} & C_{-k\downarrow} \end{pmatrix} > \\ &= < -T_\tau \begin{pmatrix} C_{k\uparrow} C^+_{k\uparrow} & C_{k\uparrow} C_{-k\downarrow} \\ C^+_{-k\downarrow} C^+_{k\uparrow} & C^+_{-k\downarrow} C_{-k\downarrow} \end{pmatrix} > \\ &= \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ในการหาค่ากรีนฟังก์ชันจากฮาร์มิลโทเนียนสามารถหาได้จากสมการการเคลื่อนที่ของไฮเซนเบอร์ก (Heisenberg' equation of motion) และอาศัยเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$[A,BC]=B[A,C]+[A,B]C$ โดยที่ $\left[C_\alpha,C_\beta^+\right]=1$ ถ้า $\alpha=\beta$

และ $\left[C_\alpha,C_\beta^+\right]=0$ ถ้า $\alpha\neq\beta$

พิจารณา G^{11}

$$i\frac{d}{dt}\left(C_{k\uparrow}\right)=\left[C_{k\uparrow},H\right]$$
$$=\left[C_{k\uparrow},\Sigma\left\{\varepsilon_k\left(C_{k\uparrow}^+C_{k\uparrow}+C_{-k\downarrow}^+C_{-k\downarrow}\right)-\Delta\left(C_{k\uparrow}^+C_{-k\downarrow}^++C_{-k\downarrow}C_{k\uparrow}\right)\right\}\right]$$

$$=\varepsilon_k\left[C_{k\uparrow},C_{k\uparrow}^+C_{k\uparrow}\right]+\varepsilon_k\left[C_{k\uparrow},C_{-k\downarrow}^+C_{-k\downarrow}\right]$$
$$-\Delta_k\left[C_{k\uparrow},C_{k\uparrow}^+C_{-k\downarrow}^+\right]-\Delta_k\left[C_{k\uparrow},C_{-k\downarrow}C_{k\uparrow}\right]$$

จะได้ว่า

$$i\frac{d}{dt}\left(C_{k\uparrow}\right)=\varepsilon_kC_{k\uparrow}-\Delta_kC_{-k\downarrow}^+$$

หรือ $$\left(i\frac{d}{dt}-\varepsilon_k\right)C_{k\uparrow}+\Delta_KC_{-k\downarrow}^+=0$$

(2.4)

ใช้การแปลงฟูเรียร์ (Fourier transform) โดย $i\dfrac{d}{dt}\rightarrow i\omega_n$ และจัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\left(i\omega_n-\varepsilon_k\right)<-T_\tau C_{k\uparrow}C_{k\uparrow}^+>+\Delta_k<-T_\tau C_{-k\downarrow}^+C_{k\uparrow}^+>=\left[C_{k\uparrow},C_{k\uparrow}^+\right]$$

ดังนั้นจะได้

$$\left(i\omega_n-\varepsilon_k\right)G_{11}+\Delta_kG_{21}\quad=\quad1 \tag{2.5}$$

ในทำนองเดียวกันพิจารณา G^{21}

$$i\frac{d}{dt}\left(C_{-k\downarrow}^+\right)=\left[C_{-k\downarrow}^+,H\right]$$
$$=\varepsilon_k\left[C_{-k\downarrow}^+,C_{k\uparrow}^+C_{k\uparrow}\right]+\varepsilon_k\left[C_{-k\downarrow}^+,C_{-k\downarrow}^+C_{-k\downarrow}\right]$$
$$-\Delta_k\left[C_{-k\downarrow}^+,C_{k\uparrow}^+C_{-k\downarrow}^+\right]-\Delta_k\left[C_{-k\downarrow}^+,C_{-k\downarrow}C_{k\uparrow}\right]$$

จะได้ $i\dfrac{d}{dt}\left(C^{+}_{-k\downarrow}\right) = -\varepsilon_k C^{+}_{-k\downarrow} - \Delta_k C_{k\uparrow}$

หรือ $(i\omega_n + \varepsilon_k)C^{+}_{-k\downarrow} + \Delta_k C_{k\uparrow} = 0$

ใช้การแปลงฟูเรียร์และจัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$(i\omega_n + \varepsilon_k) < -T_\tau C^{+}_{-k\downarrow} C^{+}_{k\uparrow} > + \Delta_k < -T_\tau C_{k\uparrow} C^{+}_{k\uparrow} > \;=\; \left[C^{+}_{-k\downarrow} C^{+}_{k\uparrow}\right]$$

จะได้

$$(i\omega_n + \varepsilon_k)G_{21} + \Delta_k G_{11} \;=\; 0 \tag{2.6}$$

เมื่อ ω_n คือ ความถี่มัตซูบาระ โดยที่ $\omega_n = (2n+1)\pi T$ ซึ่ง n คือจำนวนเต็ม $n = 0,1,2,3,\ldots$ และ T คืออุณหภูมิ จัดสมการในรูปเมทริกซ์ ได้เป็น

$$\begin{pmatrix} i\omega_n - \varepsilon_k & \Delta_k \\ \Delta_k & i\omega_n + \varepsilon_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} = 1$$

และสามารถหาอนุภาคเดี่ยว (single particle) และกรีนฟังก์ชันของตัวนำยิ่งยวดเขียนได้เป็นได้เป็น

$$G_0(k,\omega_n) = \left(i\omega_n - \varepsilon_k \tau_3 + \Delta_k \tau_1\right)^{-1} \tag{2.7}$$

โดยที่ τ_1 และ τ_3 คือเมทริกซ์ของเพาลี (Pauli matrices) ซึ่ง $\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ และ $\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

จากนิยามของช่องว่างพลังงาน

$$\Delta_k = \sum_k V_k < C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} >$$

จะได้

$$\Delta_k = \sum_k V_k G_{21}(k,\omega_n) \tag{2.8}$$

หาค่า G_{21} ได้จากกรีนฟังก์ชัน ดังนี้

$$G_0(k,\omega_n) = \left(i\omega_n - \varepsilon_k \tau_3 + \Delta_k \tau_1\right)^{-1}$$

จัดรูปสมการใหม่โดย

$$G_0(k,\omega_n)=\frac{1}{i\omega_n-\varepsilon_k\tau_3+\Delta_k\tau_1}\times\frac{i\omega_n+\varepsilon_k\tau_3-\Delta_k\tau_1}{i\omega_n+\varepsilon_k\tau_3-\Delta_k\tau_1}$$

พิจารณาตัวส่วน

$(i\omega_n-\varepsilon_k\tau_3+\Delta_k\tau_1)\times(i\omega_n+\varepsilon_k\tau_3-\Delta_k\tau_1)$ โดยที่ $\tau^2=1$ และ $\tau_1\tau_2=i\tau_3$, $\tau_3\tau_1=i\tau_2$ จะได้

$$\begin{aligned}(i\omega_n-\varepsilon_k\tau_3+\Delta_k\tau_1)\times(i\omega_n+\varepsilon_k\tau_3-\Delta_k\tau_1)&=-\omega_n^2+i\omega_n\varepsilon_k\tau_3-i\omega_n\Delta_k\tau_1-i\omega_n\varepsilon_k\tau_3-\\&\quad\varepsilon_k^2+i\Delta_k\varepsilon_k\tau_2+i\omega_n\Delta_k\tau_1-\Delta_k\varepsilon_k i\tau_2-\Delta_k^2\\&=-\omega_n^2-\varepsilon_k^2-\Delta_k^2\end{aligned}$$

ดังนั้นจะเขียนกรีนฟังก์ชันได้ใหม่เป็น

$$G_0(k,\omega_n)=\frac{i\omega_n+\varepsilon_k\tau_3-\Delta_k\tau_1}{-\omega_n^2-\varepsilon_k^2-\Delta_k^2}\tag{2.9}$$

และสามารถเขียนกรีนฟังก์ชันในสมการ (2.9) ในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$G_0(k,\omega_n)=\begin{pmatrix}\dfrac{i\omega_n+\varepsilon_k}{-\omega_n^2-\varepsilon_k^2-\Delta_k^2} & \dfrac{\Delta_k}{\omega_n^2+\varepsilon_k^2+\Delta_k^2}\\ \dfrac{\Delta_k}{\omega_n^2+\varepsilon_k^2+\Delta_k^2} & \dfrac{i\omega_n-\varepsilon_k}{\omega_n^2+\varepsilon_k^2+\Delta_k^2}\end{pmatrix}$$

และจะได้

$$G_{21}(k,\omega_n)=\frac{\Delta_k}{\omega_n^2+\varepsilon_k^2+\Delta_k^2}\tag{2.10}$$

จากสมการ (2.10) แทนค่า $G_{21}(k,\omega_n)$ ลงในนิยามของช่องว่างพลังงานจะได้

$$\begin{aligned}\Delta_k&=2T\sum_{k=0}^{\infty}\sum_n V_k\frac{\Delta_k}{\omega_n^2+\varepsilon_k^2+\Delta_k^2}\\&=2N(0)TV_0\int_0^{\omega_D}d\varepsilon\Delta_k\sum_n\frac{1}{\omega_n^2+\varepsilon_k^2+\Delta_k^2}\end{aligned}$$

โดยกำหนดให้ $V_k=V_o$

จาก $\sum_n \frac{T}{\omega_n^2 + E_k^2} = \sum_n \frac{T}{2E_k}\left(\frac{1}{i\omega_n + E_k} - \frac{1}{i\omega_n - E_k}\right)$

โดยที่ $E_k = \sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_k^2}$ คือ พลังงานของคู่คูเปอร์

สามารถคำนวณความถี่ในการรวมได้จาก $\sum_n \frac{1}{i\omega_n + E_k}$ จะได้เป็น

$$T\sum_n f(i\omega_n) = -\oint \frac{dz}{2\pi i} n_F(z) f(z)$$

ซึ่ง $n_F(z) = \frac{1}{e^{z/T} + 1}$ คือการแจกแจงแบบเฟอร์มิ

ทำการอินทิเกรต โดยใช้ทฤษฎีการเรซิดิว (residue) จะได้

$$\sum_n \frac{T}{\omega_n^2 + E_k^2} = \frac{1}{2E_k}\tanh\left(\frac{E_k}{2T}\right)$$

จาก $$\Delta_k = 2N(0)TV_0 \int_0^{\omega_D} d\varepsilon \Delta_k \sum_n \frac{1}{\omega_n^2 + \varepsilon_k^2 + \Delta_k^2}$$

ดังนั้นจะได้

$$\Delta_k = \lambda \int_0^{\omega_D} \Delta_k \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_k^2}}{2T}\right)}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_k^2}} d\varepsilon_k \qquad (2.11)$$

โดยที่ $\lambda = N(0)V_0$ และ $\Delta_k = \Delta_0$

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^{\omega_D} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_k^2}}{2T}\right)}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_k^2}} d\varepsilon_k$$

พิจารณาที่ $T = T_c$ ช่องว่างพลังงานจะเป็น $\Delta_0(T_c) = 0$ จะได้

$$\frac{1}{N(0)V_0} = \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \tanh\left[\frac{\varepsilon}{2T_c}\right]$$

จะได้สมการของอุณหภูมิวิกฤติของตัวนำยิ่งยวดเป็น

$$T_c = 1.13\omega_D \exp\left[-\frac{1}{N(0)V_0}\right] \quad (2.12)$$

พิจารณาที่ T = 0 K ค่า tanh (∞) = 1 จะได้

$$\frac{1}{N(0)V_0} = \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0^2(0)}}$$

$$= \sinh^{-1}\left(\frac{\omega_D}{\Delta_0(0)}\right)$$

ใช้การประมาณ $\sinh^{-1} x \approx \ln(2x)$ โดย x >> 1 และเนื่องจาก $\omega_D >> \Delta(0)$ ดังนั้นจะได้สมการของช่องว่างพลังงานของตัวนำยิ่งยวดตามทฤษฎีบีซีเอสดังนี้

$$\Delta_0(0) = 2\omega_D \exp\left(-\frac{1}{N(0)V_0}\right) \quad (2.13)$$

จากการทดลองพบว่าทฤษฎีบีซีเอส สามารถอธิบายสมบัติต่าง ๆของตัวนำยิ่งยวดที่มีอุณหภูมิวิกฤตต่ำเท่านั้น แต่สำหรับตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงมีสมบัติบางประการที่ไม่สามารถอธิบายได้

2. ผลของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กที่มีต่อตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง

ในปี ค.ศ. 1995 ซันและมากิ (Sun; & Maki. 1995 : 6059) ได้ศึกษาผลของสารเจือในตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดี โดยเริ่มจากสมการของช่องว่างพลังงานดังนี้

$$\Delta_k = -T\sum_n \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}V_{kk'}Tr\left(\tau_1 G\left(k',\omega_n\right)\right) \quad (2.14)$$

เมื่อ Tr คือ ผลรวมของปริมาณในแนวทแยงมุมของเมทริกซ์ $V_{kk'}$ คือ ค่าคงที่ของอันตรกิริยาจากการเข้าคู่ของอิเล็กตรอน ซึ่งในการคำนวณหาค่าอุณหภูมิวิกฤตสามารถหาได้จากสมการไดซัน (Dyson’s equation) ดังนี้

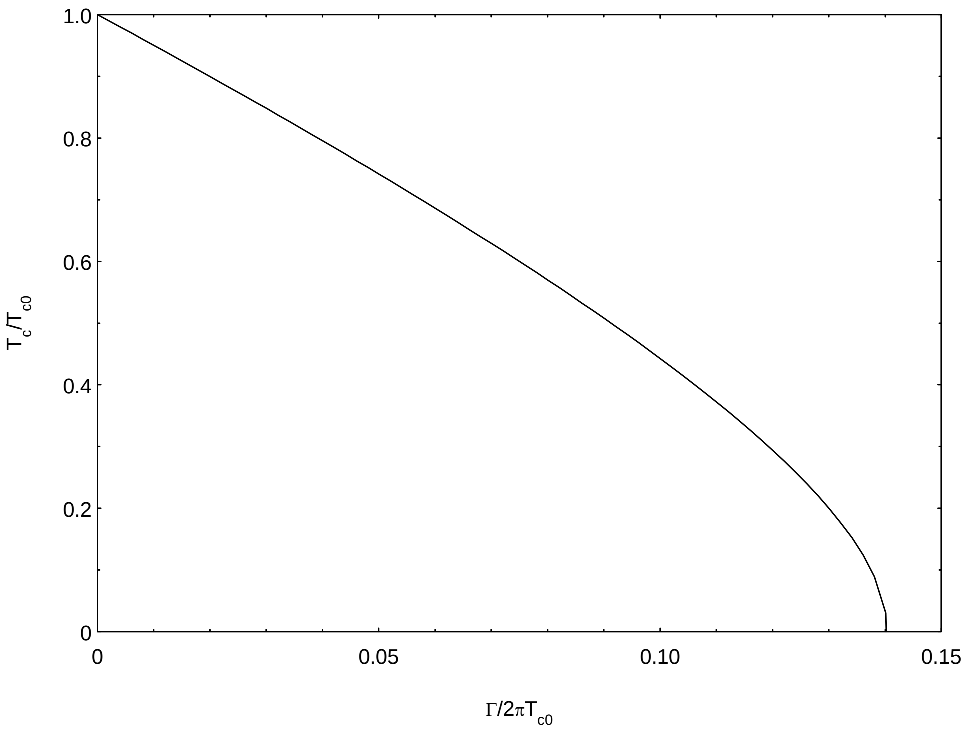
$$G^{-1}(k,\tilde{\omega}_n) = G_0^{-1}\left(k,\tilde{\omega}_n\right) - \Sigma\left(k,\tilde{\omega}_n\right) \tag{2.15}$$

โดย $\Sigma\left(k,\tilde{\omega}_n\right)$ คือ พลังงานในตนเอง (self energy) G_0 คือกรีนฟังก์ชันของตัวนำยิ่งยวดกรณีไม่มีสารเจือ และ G คือกรีนฟังก์ชันของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือ

กรณีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กที่มีการจัดเรียงของสารเจือแบบสุ่ม และตัวนำยิ่งยวดแบบคลื่นดี คลื่นเอฟ คลื่นพี (ยกเว้นคลื่นแบบคลื่นเอส ซึ่งสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กไม่มีผลต่ออุณหภูมิวิกฤตทำให้ได้อุณหภูมิวิกฤตกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กมีค่าเท่ากับอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์ หรือ $T_c = T_{co}$) และในที่นี้สามารถคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตได้เป็น

$$\ln\frac{T_c}{T_{co}} = \Psi\left(\frac{1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\Gamma}{2\pi T_c}\right) \tag{2.16}$$

เมื่อ $\Psi(x)$ คือ ฟังก์ชันไดแกมมา T_c คืออุณหภูมิวิกฤตกรณีตัวนำยิ่งยวดมีสารเจือ T_{co} คืออุณหภูมิวิกฤตกรณีตัวนำยิ่งยวดไม่มีสารเจือ และ Γ คือความเข้มข้นของสารเจือ จากสมการ (2.16) สามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มข้นของสารเจือและอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก จากสมการที่ (2.16) สามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ดังภาพประกอบ 20



ภาพประกอบ 20 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มข้นของสารเจือและอุณหภูมิวิกฤต ของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก

ในปี ค.ศ. 1997 ฮารานและนาจิ (Haran; & Nagi. 1997 : 101) ได้เสนอวิธีการศึกษาผลของศักย์การกระเจิงแบบขึ้นกับทิศทางในสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กที่มีการจัดเรียงตัวของสารเจือแบบสุ่ม ของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง ในขอบเขตการประมาณของบอร์น (Born Approximation) โดยเริ่มจากกรีนฟังก์ชันตามแนวทแยงดังนี้

$$G(\omega,k) = -\frac{i\tilde{\omega}(k)+\varepsilon(k)}{\tilde{\omega}^2(k)+\varepsilon^2(k)+\left|\tilde{\Delta}(k)\right|^2} \tag{2.17}$$

และนอกแนวทแยงเป็น

$$F(\omega,k) = \frac{\tilde{\Delta}(k)}{\tilde{\omega}^2(k)+\varepsilon^2(k)+\left|\tilde{\Delta}(k)\right|^2} \tag{2.18}$$

เมื่อ $\tilde{\omega}(k)$ เป็นรีนอร์มัลไลน์ความถี่มัตซูบาระ (renormalized Matsubara frequency) และ $\tilde{\Delta}(k)$ เป็นรีนอร์มัลไลน์ช่องว่างพลังงาน (renormalized order parameter) ซึ่งเขียนได้ตามสมการ

$$\tilde{\omega}(k)=\omega+in_i\int\left|W(k,k')\right|^2 G(\omega,k')\frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \tag{2.19}$$

$$\tilde{\Delta}(k)=\Delta(k)+n_i\int\left|W(k,k')\right|^2 F(\omega,k')\frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \tag{2.20}$$

โดย $\omega=\pi T(2n+1)$

T เป็นอุณหภูมิ และ n เป็นจำนวนเต็ม

ε_k เป็นพลังงานของกึ่งอนุภาค

n_i เป็นความเข้มข้นของสารเจือ

และ $\left|W(k,k')\right|$ คือ ศักย์ของสารเจือที่ขึ้นกับเวกเตอร์คลื่น ตามสมการ

$$\left|W(k,k')^2\right|=\left|W\right|^2 h(k)h(k') \tag{2.21}$$

ซึ่ง $h(k)=1+g(k)\quad,\ \left|g(k)\right|<<1$

เมื่อ $g(k)$ เป็นฟังก์ชันการกระเจิงของศักย์แบบขึ้นกับทิศทาง และ $\Delta(k)$ เป็นช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับเวกเตอร์โดยกำหนดให้ $\Delta(k)=\Delta e(k)$ เมื่อ $e(k)$ เป็นเบสิกฟังก์ชัน (basis function) ที่ขึ้นกับเวกเตอร์คลื่น โดยที่ Δ เป็นช่องว่างพลังงานที่ไม่ขึ้นกับเวกเตอร์คลื่น และมีเงื่อนไขการ นอร์มัลไลน์ $<e>^2=1$ ในที่นี้กำหนดให้ $<h>=1$ โดยที่ $<g>=0$

สมการอุณหภูมิวิกฤตโดยทั่วไปเขียนได้เป็น

$$\ln\frac{T_c}{T_{co}}=2\pi T_c\sum_{\omega>0}\left[\left(f(\omega)\right)_{\Delta=0}-\frac{1}{\omega}\right] \tag{2.22}$$

ซึ่ง $$\left(f(\omega)\right)_{\Delta=0}=\int_{FS}ds_k n(k)\frac{e(k)}{\tilde{\omega}_0}\left[\frac{\tilde{\Delta}(k)}{\Delta}\right]_{\Delta=0} \tag{2.23}$$

แทนค่าสมการ (2.17) และ (2.21) ลงในสมการ (2.19) โดยพิจารณาที่ $\Delta\to 0$ จะได้

$$\tilde{\omega}_0(k)=\omega+\Gamma\left(1+g(k)\right)sgn(\omega)$$

เมื่อ $\Gamma=\pi N_0 n_i\left|\omega\right|^2$ คือความเข้มข้นของสารเจือและในทำนองเดียวกันแทนค่าสมการ (2.18) และ (2.21) ลงในสมการ (2.20) จะได้

$$\left[\frac{\tilde{\Delta}(k)}{\Delta}\right]_{\Delta=0} = e(k) + \left(< e > + < eg > \left(1 - \frac{\Gamma}{|\omega| + \Gamma}\right)\right)\frac{\Gamma}{|\omega|}\left[1 + g(k)\right] \tag{2.24}$$

นำสมการที่ (2.23) และ (2.24) แทนลงในสมการ (2.22) จะได้สมการอุณหภูมิวิกฤตเขียนได้เป็น

$$\ln\frac{T_c}{T_{co}} = \left(< e >^2 - 1\right)\left(\Psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\Gamma}{2\pi T_c}\right) - \Psi\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \left(2 < e >< eg >\right)\frac{\Gamma}{2\pi T_c}\Psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \frac{\Gamma}{2\pi T_c}\right) \tag{2.25}$$

จากสมการ (2.25) พจน์แรกทางขวามือของสมการ จะแทนผลของศักย์การกระเจิงแบบไม่ขึ้นกับทิศทางในสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและพจน์ที่สองจะแทนผลของศักย์การกระเจิงแบบขึ้นกับทิศทางในสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กที่มีต่ออุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง

จากการคำนวณพบว่าผลของการกระเจิงศักย์ของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กแบบไม่ขึ้นกับทิศทางจะทำให้อุณหภูมิวิกฤตลดลงเพียงเล็กน้อยสำหรับผลของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กแบบขึ้นกับทิศทางจะทำให้อุณหภูมิวิกฤตลดลงเมื่อความเข้มของสารเจือเพิ่มขึ้น

ในปีเดียวกัน ฮารานและนาจิ (Haran; & Nagi. 1996 : 54) ได้ศึกษาบทบาทการกระเจิงของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กแบบไม่ขึ้นกับทิศทางในตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงและแบบขึ้นกับทิศทาง โดยกำหนดศักย์ของสารเจือเป็นดังสมการ

$$|W(k,k')|^2 = |W_0|^2 + |W_1|^2 f(k) f(k') \tag{2.26}$$

เมื่อ $|W_0|$ และ $|W_1|$ คือ แอมปลิจูดของการกระเจิงแบบไม่ขึ้นกับทิศทางและแบบขึ้นกับทิศทางตามลำดับ

$f(k)$ คือฟังก์ชันของการกระเจิงแบบขึ้นกับทิศทาง

กรณีนี้จะได้สมการอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงเขียนได้เป็น

$$\ln\frac{T_c}{T_{co}} = \left(< e >^2 + < ef >^2 - 1\right)\left[\Psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\Gamma_0}{2\pi T_c}\right) - \Psi\left(\frac{1}{2}\right)\right] + < ef >^2\left\{\Psi\left(\frac{1}{2}\right) - \Psi\left[\frac{1}{2} + \frac{\Gamma_0}{2\pi T_c}\left(1 - \frac{\Gamma_1}{\Gamma_0}\right)\right]\right\} \tag{2.27}$$

จากการคำนวณพบว่าสมการ (2.27) สามารถอธิบายตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง ซึ่งสอดคล้องกับผลการทดลองของสารประกอบเป็นอย่างดี

3. ผลของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็กที่มีต่อตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง

ในปี ค.ศ. 1997 โอเพนนอฟ (Openov. 1997 : 66) ได้อธิบายผลของการกระเจิงของสารเจือประเภทแม่เหล็กและประเภทไม่เป็นแม่เหล็กที่มีต่ออุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดซึ่งมีช่องว่างพลังงานแบบไม่ขึ้นกับทิศทางในปริภูมิโมเมนตัม $(\Delta(p))$ โดยพิจารณาการจับคู่อย่างอ่อนในขอบเขตการประมาณแบบ บอร์น ซึ่งในการคำนวณจะเริ่มที่ฮามิลโทเนียนของตัวนำยิ่งยวดเมื่อมีสารเจือประเภทแม่เหล็กและประเภทไม่เป็นแม่เหล็กดังนี้

$$H = \sum_{p,\sigma} \varepsilon(p) a^{+}_{p\sigma} a_{p\sigma} + \sum_{p,p',\sigma,\sigma'} U(p,\sigma\,;p',\sigma') a^{+}_{p\sigma} a_{p\sigma} + \sum_{p,p'} V(p,p') a^{+}_{p\uparrow} a^{+}_{-p\downarrow} a_{-p'\downarrow} a_{p'\uparrow} \tag{2.28}$$

โดยที่ $\xi(p) = \varepsilon(p) - \mu$ คือ พลังงานของกึ่งอนุภาคเทียบกับพลังงานศักย์เคมี (Chemical potential)

$U(p,\sigma;p',\sigma')$ คือ เมทริกซ์ของการกระเจิงของอิเล็กตรอนโดย สารเจือมีการจัดเรียงตัวแบบสุ่ม

และ $V(p,p')$ คือ พลังงานศักย์ดึงดูดของอิเล็กตรอนตามทฤษฏีบีซีเอส

กำหนดให้แอมปลิจูดของการกระเจิงของอิเล็กตรอนที่เกิดจากสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็กเป็น u_n และ u_m ตามลำดับ และให้เวลาผ่อนคลาย (relaxation times) τ_n และ τ_m มีค่าเป็น

$$\frac{1}{\tau_n} = 2\pi C_n |u_n|^2 N(0) \quad \text{และ} \quad \frac{1}{\tau_m} = 2\pi C_m |u_m|^2 N(0) \tag{2.29}$$

เมื่อ C_n และ C_m คือ ความเข้มข้นของการกระเจิง

$N(0)$ คือ ความหนาแน่นสถานะที่ผิวเฟอร์มิ

ในที่นี้กำหนดให้ $|u_m|^2 = J^2 S(S+1)/4$ ซึ่ง J คือพลังงานแลกเปลี่ยนระหว่างอิเล็กตรอนกับสารเจือ และ S คือ สปินของสารเจือประเภทแม่เหล็ก โดยที่ผู้วิจัยได้กำหนดให้ศักย์ดึงดูดของคู่คูเปอร์มีค่าตามสมการ

$$V(p,p') = -V_0 \phi(\hat{p}) \phi(\hat{p}') \tag{2.30}$$

เมื่อ $\hat{p}$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในพิกัดโมเมนตัม เมื่อ ช่องว่างพลังงานในปริภูมิโมเมนตัม ($\Delta(p)$) มีค่าเป็นตามสมการ

$$\Delta(p) = \Delta_0 \phi(\hat{p}) \tag{2.31}$$

โดยที่ Δ_0 คือ ช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิ

$\phi(\hat{p})$ คือ ฟังก์ชันแบบขึ้นกับทิศทางของช่องว่างพลังงานในปริภูมิโมเมนตัมและสำหรับการจับคู่ของฟังก์ชันแบบขึ้นกับทิศทาง (isotropic pairing) จะมีค่า $\phi(\hat{p}) \equiv 1$

และสมการเซลฟ์-คอนซิสเทนท์ (self – consistent) สำหรับช่องว่างพลังงานในปริภูมิโมเมนตัม สามารถเขียนได้เป็น

$$\Delta(p) = -\sum_{p'} V(p,p') < a_{-p'\downarrow} a_{p'\uparrow} >$$

จะได้

$$\Delta(p) = -T\sum_{\omega}\sum_{p'} V(p,p') \frac{\Delta_{\omega}(p')}{\omega^2 + \xi^2(p') + |\Delta_{\omega}(p')|^2} \tag{2.32}$$

เมื่อ $\Delta_{\omega}(p)$ และ ω' มีค่าเป็นไปตามสมการ

$$\Delta_{\omega}(p) = \Delta(p) + \left(C_n|u_n|^2 - C_m|u_m|^2\right)\sum_{p'} \frac{\Delta_{\omega}(p')}{\omega'^2 + \xi^2(p') + |\Delta_{\omega}(p')|^2} \tag{2.33}$$

และ

$$\omega' = \omega - i\left(C_n|u_n|^2 + C_m|u_m|^2\right)\sum_{p'} \frac{i\omega' + \xi(p')}{\omega'^2 + \xi^2(p') + |\Delta_{\omega}(p')|^2} \tag{2.34}$$

พิจารณาที่ $T = T_c$ จะได้ว่า $\Delta(p) = 0$ และถ้าในกรณี $T \to T_c$ จะต้องแทนค่าสมการ (2.29) ลงในสมการ (2.33) และ (2.34) ซึ่งจะได้

$$\Delta_{\omega}(p) = \Delta(p) + \frac{1}{2|\omega'|}\left[\frac{1}{\tau_n} - \frac{1}{\tau_m}\right] < \Delta_{\omega}(p) > \tag{2.35}$$

และ

$$\omega' = \omega + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_m}\right] sgn(\omega) \tag{2.36}$$

แทนค่าสมการ (2.30) , (2.33) และ (2.36) ลงในสมการ (2.32) จะได้

$$\ln\left(\frac{T_{co}}{T_c}\right)=\pi T_c\sum_{\omega}\frac{1}{|\omega|+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau_n}+\frac{1}{\tau_m}\right)}\left[\frac{1}{2|\omega|}\left(\frac{1}{\tau_n}+\frac{1}{\tau_m}\right)-\frac{\langle\phi(n)\rangle^2}{\langle\phi^2(n)\rangle}\cdot\frac{1/\tau_n-1/\tau_m}{2(|\omega|+1/\tau_m)}\right] \tag{2.37}$$

เมื่อ T_{co} คือ อุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือ T_c คือ อุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกรณีไม่มีสารเจือ และเพื่อสะดวกในการคำนวณจะกำหนดให้ สัมประสิทธิ์เชิงตัวเลข (χ_Δ) เป็นดังนี้

$$\chi_\Delta=1-\frac{\langle\phi(n)\rangle^2}{\langle\phi^2(n)\rangle}=1-\frac{\langle\Delta(p)\rangle^2}{\langle\Delta^2(p)\rangle} \tag{2.38}$$

สำหรับตัวนำยิ่งยวดแบบคลื่นเอส จะได้ $\Delta(p)\equiv$ ค่าคงตัวบนผิวเฟอร์มิ โดยกำหนดให้ $\langle\Delta(p)\rangle^2=\langle\Delta^2(p)\rangle$ และ $\chi_\Delta=0$ แต่สำหรับตัวนำยิ่งยวดแบบคลื่นดี จะได้ $\chi_\Delta=1$ โดยกำหนดให้ $\langle\Delta(p)\rangle=0$ และค่า χ_Δ ที่สอดคล้องจะอยู่ในช่วง $0<\chi_\Delta<1$ สำหรับรูปแบบทั่วไปของสมการ (2.38) จะอยู่ในรูปของ

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k+y}\right)=\Psi(y)-\Psi(x)$$

ดังนั้นจะเขียนสมการ (2.37) ซึ่งเป็นสมการหาอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดโดยมีช่องว่างพลังงานแบบไม่ขึ้นกับทิศทาง $(\Delta(p))$ เมื่อมีสารเจือประเภทแม่เหล็กและประเภทไม่เป็นแม่เหล็กได้เป็น

$$\ln\left(\frac{T_{co}}{T_c}\right)=(1-\chi_\Delta)\left[\Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi T_c\tau_m}\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}\right)\right]+\chi_\Delta\left[\Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4\pi T_c}\cdot\left(\frac{1}{\tau_n}+\frac{1}{\tau_m}\right)\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}\right)\right] \tag{2.39}$$

ในปี 1998 โอเพนนอฟ (Openov.1998 : 58) ได้ศึกษาอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดแบบขึ้นกับทิศทาง เมื่อมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็ก โดยใช้สมการของอบริกอซอฟ และกอร์คอฟ ในการหาค่าอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดนี้ ซึ่งค่าที่ได้สอดคล้องกับข้อมูลที่ได้จากการทดลอง โดยพิจารณาการจับคู่อย่างอ่อน โดยทั่วไปตัวนำยิ่งยวดแบบคลื่นเอสจะมีค่า สัมประสิทธิ์เชิงตัวเลข (χ_Δ) = 0 และแบบคลื่นดีจะมีค่า $\chi_\Delta=1$ ซึ่งในที่นี้จะพิจารณาอนุภาคใน 2 กรณีคือ การกระเจิงของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็กในตัวนำ

ในการคำนวณจะใช้ฮามิลโทเนียน ดังสมการที่ (2.28) โดยพิจารณาให้แอมปลิจูดของการกระเจิงของอิเล็กตรอนที่เกิดจากสารเจือประเภทแม่เหล็กมีค่าดังนี้

$$u_m = u_m^{pot} + u_m^{ex} \tag{2.40}$$

โดยที่ u_m^{pot} คือ องค์ประกอบอิสระของศักย์สปิน (spin-independent potential component) และ u_m^{ex} คือ อันตรกิริยาการแลกเปลี่ยนของศักย์กระเจิง (exchange interaction scattering) ของสารเจือประเภทแม่เหล็ก ดังนั้นสมการเวลาผ่อนคลายของอิเล็กตรอนที่เกิดจากสารเจือประเภทแม่เหล็กอาจเขียนได้เป็น

$$\frac{1}{\tau_m} = \frac{1}{\tau_m^{pot}} + \frac{1}{\tau_m^{ex}} \tag{2.41}$$

และอาจเขียนเวลาผ่อนคลายของอิเล็กตรอนที่เกิดจากการกระทำของสารเจือทั้งประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็กได้เป็น

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_m} = \frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_m^{pot}} + \frac{1}{\tau_m^{ex}} \tag{2.42}$$

สำหรับกรณีนี้จะสามารถหาอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดแบบขึ้นกับทิศทางที่เกิดจากสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็กได้จากสมการ

$$\ln\left(\frac{T_{co}}{T_c}\right) = (1-\chi_\Delta)\left[\Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi T_c \tau_m^{ex}}\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}\right)\right]+\chi_\Delta\left[\Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4\pi T_c}\cdot\left(\frac{1}{\tau_n}+\frac{1}{\tau_m^{pot}}+\frac{1}{\tau_m^{ex}}\right)\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}\right)\right] \tag{2.43}$$

ในปีค.ศ. 2000 ฮารานและนาจิ (Haran; & Nagi. 2000 : 63) ได้ศึกษาผลของการกระเจิงของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็กโดยสารเจือในตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงแบบคลื่นดี ซึ่งคำนึงถึงผลของโมเมนตัมของศักย์กระเจิงโดยเริ่มคำนวณจากกรีนฟังก์ชัน ตามแนวทแยง ดังสมการ (2.17) และ (2.18)

โดยที่

$$\tilde{\omega}(k) = \omega + in_i \int |u(k,k')|^2 G(\omega,k') \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \quad (2.44)$$

$$\tilde{\Delta}(k) = \Delta(k) + n_i \int |u(k,k')|^2 F(\omega,k') \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \quad (2.45)$$

เมื่อ $\omega = \pi T(2n+1)$

T เป็นอุณหภูมิ และ n เป็นจำนวนเต็ม

ε_k เป็นพลังงานของกึ่งอนุภาค

n_i เป็นความเข้มข้นของสารเจือ

และ $u(k,k')$ เป็นศักย์ของสารเจือที่ขึ้นกับเวกเตอร์คลื่นตามสมการ

$$u(k,k') = v(k,k') + J(k,k')\vec{S} \cdot \vec{\sigma} \quad (2.46)$$

โดยที่ $\vec{S}$ เป็นสปินของศักย์ของสารเจือ และ $\vec{\sigma}$ เป็น ความหนาแน่นสปิน (spin density) ของอิเล็กตรอน กำหนดให้โอกาสของการกระเจิงเป็น

$$v^2(k,k') = v_o^2 + v_1^2 f(k) f(k') \quad (2.47)$$

$$J^2(k,k') = J_o^2 + J_1^2 g(k) g(k') \quad (2.48)$$

เมื่อ $v_o(v_1), J_o(J_1)$ คือ แอมปลิจูดของการกระเจิงแบบไม่ขึ้นกับทิศทาง(Isotropic) เนื่องจากสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก (ประเภทแม่เหล็ก) และ $f(k), g(k)$ คือฟังก์ชันของการกระเจิงแบบขึ้นกับทิศทาง(anisotropic) เนื่องจากสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและเป็นแม่เหล็กซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขดังนี้

$$\begin{aligned} v_1^2 \le v_o^2, \quad \langle f \rangle = 0, \quad \langle f^2 \rangle = 1 \\ J_1^2 \le J_o^2, \quad \langle g \rangle = 0, \quad \langle g^2 \rangle = 1 \end{aligned} \quad (2.49)$$

แทนค่าสมการ (2.17), (2.46) , (2.47) และ (2.48) ลงในสมการ (2.44)จะได้

$$\tilde{\omega}(k)=\omega+\Gamma_o\int_{FS} dS_{k'}n(k')\left(\frac{\tilde{\omega}}{\sqrt{\tilde{\omega}^2+\tilde{\Delta}_{k'}^2}}\right)+\Gamma_1\int_{FS} dS_{k'}n(k')f(k)f(k')\left(\frac{\tilde{\omega}}{\sqrt{\tilde{\omega}^2+\tilde{\Delta}_{k'}^2}}\right)$$
$$+G_o\int_{FS} dS_{k'}n(k')\left(\frac{\tilde{\omega}}{\sqrt{\tilde{\omega}^2+\tilde{\Delta}_{k'}^2}}\right)+G_1\int_{FS} dS_{k'}n(k')g(k)g(k')\left(\frac{\tilde{\omega}}{\sqrt{\tilde{\omega}^2+\tilde{\Delta}_{k'}^2}}\right) \quad (2.50)$$

ในทำนองเดียวกันแทนค่าสมการ (2.18) , (2.46) , (2.47) และ (2.48) ลงในสมการ (2.45) จะได้

$$\tilde{\Delta}(k)=\Delta+\Gamma_o\int_{FS} dS_{k'}n(k')\left(\frac{\tilde{\Delta}_{k'}}{\sqrt{\tilde{\omega}^2+\tilde{\Delta}_{k'}^2}}\right)+\Gamma_1\int_{FS} dS_{k'}n(k')f(k)f(k')\left(\frac{\tilde{\Delta}_{k'}}{\sqrt{\tilde{\omega}^2+\tilde{\Delta}_{k'}^2}}\right)$$
$$-G_o\int_{FS} dS_{k'}n(k')\left(\frac{\tilde{\Delta}_{k'}}{\sqrt{\tilde{\omega}^2+\tilde{\Delta}_{k'}^2}}\right)-G_1\int_{FS} dS_{k'}n(k')g(k)g(k')\left(\frac{\tilde{\Delta}_{k'}}{\sqrt{\tilde{\omega}^2+\tilde{\Delta}_{k'}^2}}\right) \quad (2.51)$$

โดยกำหนดให้ $\Gamma_o=\pi n_i N_o v_o^2$, $\Gamma_1=\pi n_i N_o v_1^2$, $G_o=\pi n_i N_o J_o^2 S(S+1)$ และ
$G_1=\pi n_i N_o J_1^2 S(S+1)$
จากสมการช่องว่างพลังงานในขอบเขตการคู่ควบอย่างอ่อน

$$\Delta(k)=-T\sum_{\omega}\sum_{k'}V(k,k')\frac{\tilde{\Delta}(k')}{\tilde{\omega}^2+\xi_{k'}^2+\left|\tilde{\Delta}(k')\right|^2} \quad (2.52)$$

เมื่อ $V(k,k')$ เป็นศักย์ของการเกิดคู่คูเปอร์ แบบขึ้นกับทิศทางและมีสมการเป็น

$$V(k,k')=-V_o e(k)e(k') \quad (2.53)$$

เมื่อ $e(k)$ เป็นเบสิกฟังก์ชัน ที่ขึ้นกับเวกเตอร์คลื่น และ $\Delta(k)$ เป็นช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับเวกเตอร์คลื่นโดยที่ $\Delta(k)=\Delta e(k)$ ซึ่ง Δ เป็นช่องว่างพลังงานที่ไม่ขึ้นกับเวกเตอร์คลื่นและมีเงื่อนไขการนอร์มัลไลน์ $\langle e^2\rangle=1$ และสามารถคำนวณหาสมการของอุณหภูมิวิกฤตได้จากสมการ (2.22) คือ

$$\ln\frac{T_c}{T_{co}}=2\pi T_c\sum_{\omega>0}\left[\left(f(\omega)\right)_{\Delta=0}-\frac{1}{\omega}\right]$$

ซึ่ง $$\left(f(\omega)\right)_{\Delta=0}=\int_{FS} ds_k n(k)\frac{e(k)}{\tilde{\omega}_0}\left[\frac{\tilde{\Delta}(k)}{\Delta}\right]_{\Delta=0}$$

พิจารณาที่ $\Delta \to 0$ สมการจะลดรูปเป็น

$$\tilde{\omega}_o(k) = \tilde{\omega}(k)_{\Delta=0}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\tilde{\omega}_o(k)_{\Delta=0} = \omega + \pi n_i N_o\left(v_o^2 + J_o^2 S(S+1)\right)\mathrm{sgn}(\omega) \tag{2.54}$$

แทนค่าสมการ (2.50) – (2.54) ลงในสมการ (2.22) จะได้สมการของอุณหภูมิวิกฤตเป็น

$$\ln\left(\frac{T_c}{T_{co}}\right) = \left(1-\langle e\rangle^2\right)\left[\Psi\left(\frac{1}{2}\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma_o+G_o}{2\pi T_c}\right)\right]+\langle e\rangle^2\left[\Psi\left(\frac{1}{2}\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{2G_o}{2\pi T_c}\right)\right]+S_1+S_2 \tag{2.55}$$

โดยที่

$$S_1 = 2\pi T_c\sum_{\omega>0}\frac{\langle ef\rangle}{(\omega+\Gamma_o+G_o)}\frac{\Gamma_1\langle ef\rangle(\omega+\Gamma_o+G_o+G_1)-\Gamma_1 G_1\langle eg\rangle\langle fg\rangle}{(\omega+\Gamma_o+G_o+G_1)(\omega+\Gamma_o+G_o-\Gamma_1)+G_1\Gamma_1\langle fg\rangle^2}$$

$$S_2 = -2\pi T_c\sum_{\omega>0}\frac{\langle eg\rangle}{(\omega+\Gamma_o+G_o)}\frac{G_1\langle eg\rangle(\omega+\Gamma_o+G_o+\Gamma_1)-\Gamma_1 G_1\langle ef\rangle\langle fg\rangle}{(\omega+\Gamma_o+G_o+G_1)(\omega+\Gamma_o+G_o-\Gamma_1)+G_1\Gamma_1\langle fg\rangle^2}$$

4. ปรากฏการณ์ไอโซโทป

ในปี ค.ศ. 1990 ครอฟอร์ด และคณะ (Crawford; et al. 1990 :282) ทำการทดลองวัดค่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปในตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงในสารประกอบ $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ เมื่อแทน O^{16} ด้วย O^{18} พบว่า เมื่อให้ x น้อยกว่า 0.15 ค่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทป มีค่าอยู่ที่ระหว่าง 0.40 ถึง 0.64 และเมื่อให้ x มีค่ามากกว่า 0.15 ได้สัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปประมาณ 0.10 ในปีเดียวกันซุยและคณะ (Tsuei; et al. 1990 : 2724-2727) ได้ศึกษาตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงที่มีคอปเปอร์ออกไซด์เป็นองค์ประกอบในสารประกอบ Y- Ba – Cu – O และ Bi – Sr – Ca – Cu – O พบว่ามีค่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปเข้าใกล้ศูนย์ และจากรายงานวิจัยของครอฟอร์ดและคณะ (Crawford; et al.1990 : 250) ได้แสดงปรากฏการณ์ไอโซโทปของ $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ ที่ขึ้นอยู่กับความเข้มในระดับการโดปของ (x) โดยใช้การ

$$N(\varepsilon) = N(0)\ln\left|\frac{\varepsilon_F}{\varepsilon - \varepsilon_F}\right| \tag{2.56}$$

โดยมีสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอส คือ

$$\frac{2}{V} = \int_{\varepsilon_F - \omega_D}^{\varepsilon_F + \omega_D} \tanh\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{2T_c}\right) N(\varepsilon)\left(\frac{d\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_F}\right)$$

แทนค่า $N(\varepsilon) = N(0)\ln\left|\frac{\varepsilon_F}{\varepsilon - \varepsilon_F}\right|$ ลงในสมการช่องว่างพลังงานของทฤษฎีบีซีเอสจะได้

$$\frac{2}{N(0)V} = \int_{\varepsilon_F - \omega_D}^{\varepsilon_F + \omega_D} \ln\left|\frac{\varepsilon_F}{\varepsilon - \varepsilon_F}\right| \tanh\left[\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{2T_c}\right] \frac{d\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_F} \tag{2.57}$$

กำหนดให้ $x = \varepsilon - \varepsilon_F$ ดังนั้น $dx = d\varepsilon$ จะได้

$$\frac{2}{N(0)V} = \int_{\varepsilon_F - \omega_D}^{\varepsilon_F + \omega_D} \ln\left|\frac{\varepsilon_F}{x}\right| \tanh\left[\frac{x}{2T_c}\right] \frac{dx}{x}$$

กำหนดให้ $y = \frac{x}{2T_c}$ ดังนั้น $dy = \frac{dx}{2T_c}$ จะได้

$$\frac{2}{N(0)V} = \int_{\varepsilon - \omega_D/2T_c}^{\varepsilon + \omega_D/2T_c} \ln\left(\frac{\varepsilon_F}{2T_c y}\right) \tanh y \frac{dy}{y} \tag{2.58}$$

ใช้การประมาณ เนื่องจาก tanh y = y เมื่อ $y < 1$

และ tanh y = 1 เมื่อ $y > 1$ (2.59)

แทนค่าสมการ (2.59) ลงในสมการ (2.58) จะได้

$$\frac{2}{N(0)V} = 2\int_0^1 \ln\left(\frac{\varepsilon_F}{2T_c y}\right) dy + 2\int_1^{\omega_D/2T_c} \ln\left(\frac{\varepsilon_F}{2T_c y}\right) \frac{dy}{y}$$

$$\frac{2}{N(0)V} = 1 + \left[\ln\left(\frac{e\varepsilon_F}{2T_c}\right)\right]^2 - \left[\ln\left(\frac{\varepsilon_F}{\omega_D}\right)\right]^2$$

เมื่อจัดรูปสมการใหม่จะได้

$$T_c = 1.36\varepsilon_F \exp\left[\frac{2}{N(0)V} + \left[\ln\left(\frac{\varepsilon_F}{\omega_D}\right)\right]^2 - 1\right]^{-1/2} \quad (2.60)$$

และสามารถคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทป ได้จาก

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{\omega_D}{T_c}\frac{dT_c}{d\omega_D}$$

ดังนั้น

$$\alpha \approx \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{T_F}{T_{co}}\right) \Big/ \ln\left(\frac{1.36T_F}{T_c}\right)\right] \quad (2.61)$$

โดยที่ T_F คือ อุณหภูมิที่ระดับเฟอร์มี

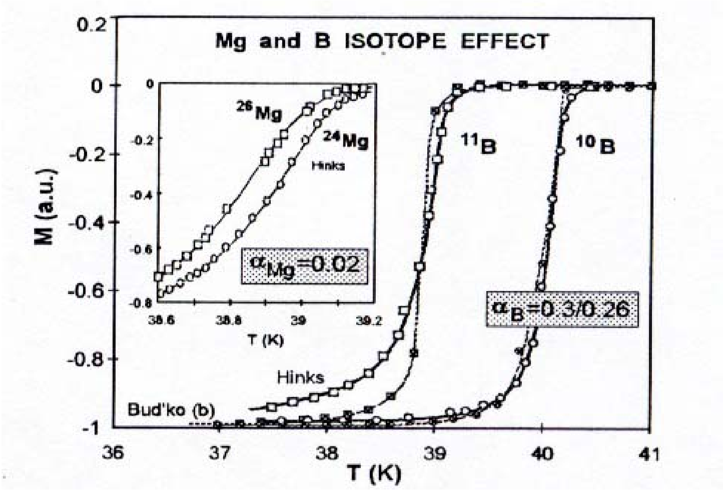
T_{co} คือ อุณหภูมิขีดจำกัดของโฟนอน

T_c คือ อุณหภูมิวิกฤต

ซึ่งเป็นสมการสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปในตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิที่มีความหนาแน่นสถานะแบบแวนโฮป

ในปี ค.ศ. 1997 วลาดิเมียร์ และคณะ (Vladimir; et al. 1997:107) ได้ศึกษาค่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปในสารประกอบ $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$, $Y_{1-x}Pr_xCu_3O_{7-\delta}$, $YBa_2(Cu_{1-x}Zn)_3O_{7-\delta}$ โดยการเปลี่ยนไอโซโทปของออกซิเจน ^{16}O เป็น ^{18}O จะทำให้อุณหภูมิวิกฤตลดลงซึ่งให้ผลสอดคล้องกับตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง

ในปี ค.ศ. 2001 บุดโคและฮิงค์ (Bud’ko; & Hink. 2001 : 1877-1880) แสดงกระบวนการเตรียมและการวิเคราะห์หาค่าสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปของแมกนีเซียมไดโบไรด์พบว่ามีสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปของโบรอนเท่ากับ 0.3 และมีสัมประสิทธิ์ของปรากฏการณ์ไอโซโทปของแมกนีเซียมเท่ากับ 0.02 ดังนั้นจะได้ค่าสัมประสิทธิ์ทั้งหมดมีค่าประมาณ 0.3 ดังภาพประกอบ 2.3 แสดงว่าอันตรกิริยาอิเล็กตรอนโฟนอนเป็นกลไกสำคัญในการเกิดสภาพนำยิ่งยวดของแมกนีเซียมไดโบไรด์ ซึ่งสอดคล้องกับธาตุที่มีโฟนอนเป็นตัวกลางตามทฤษฎีบีซีเอส



ภาพประกอบ 21 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างมวลไอโซโทปกับอุณหภูมิของแมกนีเซียมไดโบไรด์

ที่มา: Buzea; & Yamashita. (2001). *Superconductor Science Technology*.p.129.

ในปีค.ศ. 2001 โอเพนนอฟ และ ซีเมนิฮิน (Openov; & Semenihin . 2001 : 64) ได้อธิบายปรากฏการณ์ไอโซโทปของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก และสารเจือประเภทแม่เหล็กโดยในการอธิบายนี้จะใช้สมการทั่วไปของอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง ซึ่งตัวนำยิ่งยวดเป็นแบบไม่สมมาตร และมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็ก (Openov. 1998 : 9468) ดังนี้

$$\ln\left(\frac{T_{co}}{T_c}\right)=\left(1-\chi_\Delta\right)\left[\Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi T_c\tau_m^{ex}}\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}\right)\right]+\chi_\Delta\left[\Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4\pi T_c\tau}\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}\right)\right] \qquad (2.62)$$

และคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปได้จากสมการ

$$\alpha=\frac{1}{2}\frac{\omega_D}{T_c}\frac{dT_c}{d\omega_D} \qquad (2.63)$$

สำหรับกรณีที่มีสารเจือจะได้สมการของสัมประสิทธิ์ไอโซโทปเป็น

$$\frac{\alpha}{\alpha_o}=\left(\frac{\partial\ln T_c}{\partial\ln M}\right)\Big/\left(\frac{\partial\ln T_{co}}{\partial\ln M}\right) \qquad (2.64)$$

เมื่อ α คือ สัมประสิทธิ์ของไอโซโทปกรณีที่มีสารเจือ

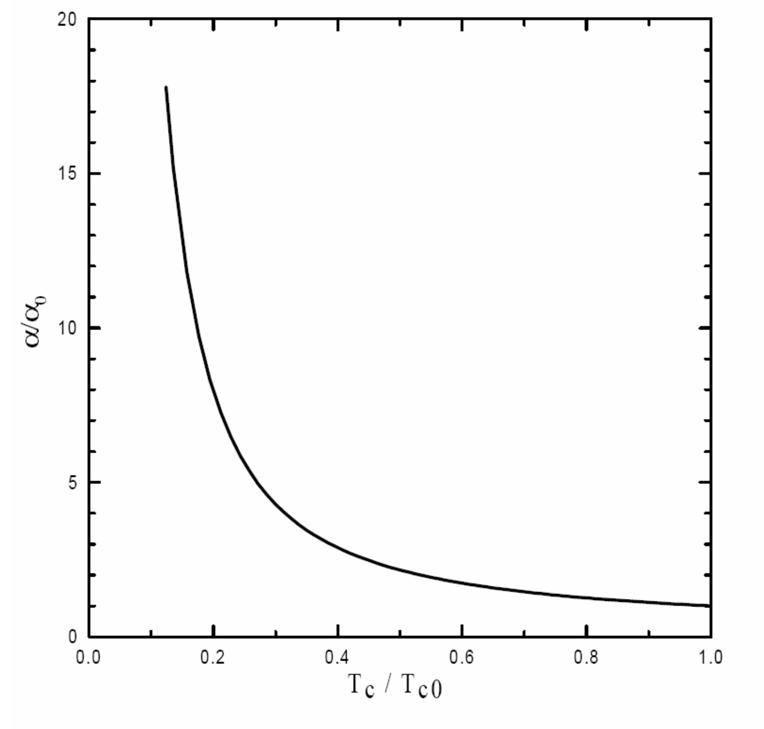
α_o คือ สัมประสิทธิ์ของไอโซโทปกรณีที่ไม่มีสารเจือ

และ M คือ มวลของไอโซโทปและอยู่ภายใต้เงื่อนไขการสั่นแบบฮาร์โมนิก

จากสมการที่ (2.62) จะคำนวณหาสมการของสัมประสิทธิ์ไอโซโทป ซึ่งในที่นี้จะกำหนดให้ $\frac{1}{\tau_m^{ex}} = \gamma \frac{1}{\tau}$ ได้เป็น

$$\frac{\alpha}{\alpha_o} = \left[1-(1-\chi_\Delta)\frac{\gamma}{2\pi T_c\tau}\Psi'\left(\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2\pi T_c\tau}\right)-\chi_\Delta\frac{1}{4\pi T_c\tau}\Psi'\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4\pi T_c\tau}\right)\right]^{-1} \quad (2.65)$$

จากสมการ (2.63) และ สมการ (2.65) ถ้ากำหนดค่าของ χ_Δ และ γ เป็นค่าคงที่ใดๆโดยที่สำหรับกรณีตัวนำยิ่งยวดแบบคลื่นเอสจะมีค่า $\chi_\Delta = 0$ และกรณีตัวนำยิ่งยวดแบบคลื่นดี จะมีค่า $\chi_\Delta = 1$ ดังนั้นสามารถอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของไอโซโทป กับอุณหภูมิวิกฤตกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็กได้ดังภาพประกอบ 2.4



ภาพประกอบ 22 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ไอโซโทปกับอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำ ยิ่งยวดแบบคลื่นเอส และคลื่นดีเมื่อมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็ก

ที่มา: Openov; & Semenihin. (2001). *Physical Review B*. 64.

ในปี ค.ศ. 2006 อุดมสมุทรหิรัญ (Udomsamuthirun. 2006:100) ได้ศึกษาผลของสารเจือที่มีต่อตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงโดยใช้ทฤษฎีของ ฮารานและนาจิ (Haran; & Nagi 2001: 12503) ซึ่งเป็นวิธีการศึกษาผลของสารเจือทั้งแบบไม่เป็นแม่เหล็กและแบบที่เป็นแม่เหล็กที่มีต่อตัวนำตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง แบบขึ้นกับทิศทางในขอบเขตการประมาณแบบ Born โดยคำนึงถึงผลของโมเมนตัมของศักย์กระเจิงและลักษณะของผิวเฟอร์มี และในการคำนวณจะเริ่มจาก กรีนฟังก์ชัน ดังสมการที่ (2.17) และ (2.18) โดยกำหนดให้ศักย์ของสารเจือ ($u(k,k')$) ที่ขึ้นกับเวกเตอร์คลื่นมีค่าตามสมการ (2.46) และโอกาสของการกระเจิงเป็นตามสมการ (2.47) และ (2.48) โดยในที่นี้จะกำหนดให้ $g(k)=\pm f(k)$ ซึ่งจะได้สมการของอุณหภูมิวิกฤตกรณีสารเจือเป็นแบบแม่เหล็กเป็น

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{T_c}{T_{co}}\right) &= \left(1-<e>^2+<ef>^2\right)\left[\Psi\left(\frac{1}{2}\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{\Gamma_0+G_0}{2\pi T_c}\right)\right)\right]\\ &+<e>^2\left[\Psi\left(\frac{1}{2}\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{2G_0}{2\pi T_c}\right)\right]\\ &+<ef>^2\left[\Psi\left(\frac{1}{2}\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{\Gamma_0+G_0-G_1-\Gamma_1}{2\pi T_c}\right)\right)\right]\end{aligned} \tag{2.66}$$

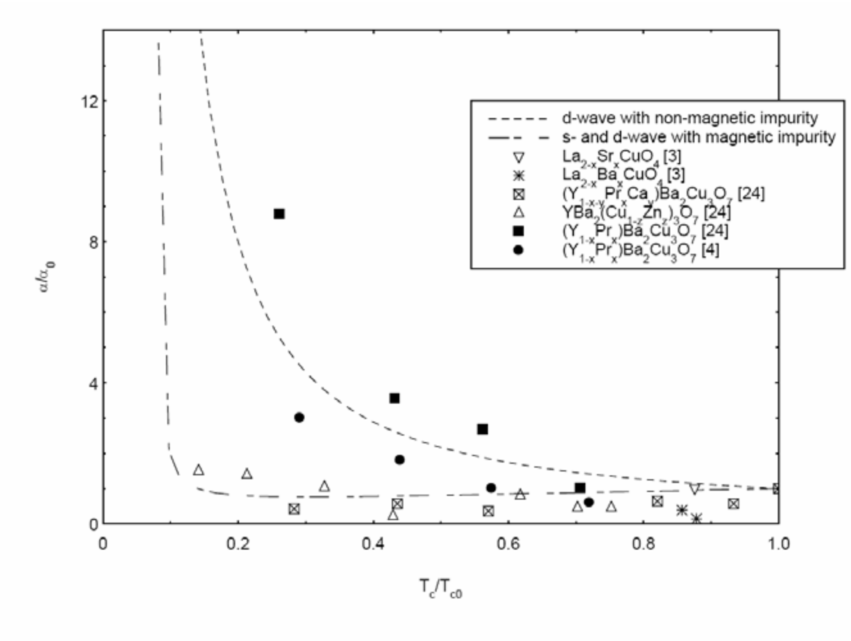
จากสมการที่ (2.66) สามารถลดรูปเป็นสมการของอุณหภูมิกรณีสารเจือเป็นแบบไม่เป็นแม่เหล็กได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{T_c}{T_{co}}\right) &= \left(<e>^2+<ef>^2-1\right)\left[\Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma_0}{2\pi T_c}\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}\right)\right]\\ &+<ef>^2\left\{\Psi\left(\frac{1}{2}\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma_0-\Gamma_1}{2\pi T_c}\right)\right\}\end{aligned} \tag{2.67}$$

ใช้สมการ (2.64) หาสมการของสัมประสิทธิ์ไอโซโทปจากสมการ (2.67) ได้เป็น

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_o}{\alpha} &= 1-\left(1-\langle e\rangle^2-\langle ef\rangle^2\right)\left(\frac{\Gamma_o+G_o}{2\pi T_c}\right)\Psi'\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{\Gamma_o+G_o}{2\pi T_c}\right)\right)-\langle e\rangle^2\left(\frac{2G_o}{2\pi T_c}\right)\Psi'\left(\frac{1}{2}+\frac{2G_o}{2\pi T_c}\right)\\ &-\langle ef\rangle^2\left(\frac{\Gamma_o+G_o+G_1-\Gamma_1}{2\pi T_c}\right)\Psi'\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{\Gamma_o+G_o+G_1-\Gamma_1}{2\pi T_c}\right)\right)\end{aligned} \tag{2.68}$$

จากสมการ (2.67) และ สมการ (2.68) สามารถอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของไอโซโทป กับอุณหภูมิวิกฤตกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็กได้ดังภาพประกอบ 23



ภาพประกอบ 23 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ไอโซโทปกับอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดแบบเมื่อมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็ก

ที่มา : Udomsamuthirun. (2006).*Physica C*. 449.

บทที่ 3
วิธีดำเนินงานวิจัย

การคำนวณหาสมการอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็ก ในงานวิจัยนี้ได้ใช้แบบจำลองของฮารานและนาจิ และนำสมการอุณหภูมิวิกฤตที่คำนวณได้ในแต่ละกรณีมาคำนวณหาสมการสัมประสิทธิ์ไอโซโทป เพื่อคำนวณหาความสัมพันธ์ของอุณหภูมิวิกฤตกับสัมประสิทธิ์ไอโซโทป โดยแบ่งวิธีการคำนวณดังนี้

1. การคำนวณหาสมการอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็ก

จากการศึกษาพบว่าตัวนำยิ่งยวดมีหลายประเภทแต่ในงานวิจัยนี้จะสนใจเฉพาะตัวนำยิ่งยวดแบบช่องว่างพลังงานเดี่ยว ที่มีช่องว่างพลังงานที่แตกต่างกัน เช่น ตัวนำยิ่งยวดแบบคลื่นเอส (s-wave) คลื่นดี (d-wave) หรือคลื่นพี (p-wave) จากการทดลองพบว่าสถานะนำยิ่งยวดจะได้รับผลกระทบเนื่องจากการโด๊ป (doped) ของสารเจือ ค่อนข้างมาก ถ้าสัดส่วนการโด๊ป ไม่เหมาะสมอาจทำให้เสียสถานะนำยิ่งยวดได้ และการโด๊ป จะมีความสัมพันธ์กับความเข้มข้นของสารเจือ ดังนั้นสามารถกล่าวได้ว่าสารเจือมีผลต่อสถานะนำยิ่งยวดเป็นอย่างมาก

ในการศึกษาผลของสารเจือที่มีต่ออุณหภูมิวิกฤต ในตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง ผู้วิจัยพบว่าทฤษฎีที่เสนอโดย ฮารานและนาจิ (Haran; & Nagi. 2000 : 63) ได้ศึกษาผลของการกระเจิงของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็กโดยสารเจือในตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงแบบคลื่นดี ซึ่งคำนึงถึงผลของโมเมนตัมของศักย์กระเจิง เป็นทฤษฎีที่สามารถใช้อธิบายตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูงกรณีที่มีสารเจือ ได้อย่างดีโดยเริ่มพิจารณาจากกรีนฟังก์ชัน ตามแนวทแยงดังนี้

$$G(\omega,k') = -\frac{i\tilde{\omega}(k') + \varepsilon(k')}{\tilde{\omega}^2(k') + \varepsilon^2(k') + \tilde{\Delta}^2(k')} \tag{3.1}$$

และนอกแนวทแยงเป็น

$$F(\omega,k') = \frac{\tilde{\Delta}(k')}{\tilde{\omega}^2(k') + \varepsilon^2(k') + \tilde{\Delta}^2(k')} \tag{3.2}$$

โดย $\tilde{\omega}(k)$ และ $\tilde{\Delta}(k)$ เขียนได้ตามสมการดังนี้

$$\tilde{\omega}(k) = \omega + in_i \int \left|u(k,k')\right|^2 G(\omega,k') \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \tag{3.3}$$

$$\tilde{\Delta}(k) = \Delta(k) + n_i \int \left|u(k,k')\right|^2 F(\omega,k') \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \tag{3.4}$$

โดยที่ $\omega = \pi T(2n+1)$

T เป็นอุณหภูมิ และ n เป็นจำนวนเต็ม โดย n = 0,1,2,...

n_i เป็นความเข้มข้นของสารเจือ

$\Delta(k)$ เป็น ช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับเวกเตอร์คลื่น ตามสมการ

$$\Delta(k) = \Delta\, e(k) \tag{3.5}$$

เมื่อ $e(k)$ เป็น เบสิกฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวกเตอร์คลื่น และ Δ เป็นช่องว่างพลังงานที่ขึ้นกับอุณหภูมิแต่ไม่ขึ้นกับเวกเตอร์คลื่น และมีเงื่อนไขการนอร์มัลไลน์ $< e^2 >= 1$ และ $u(k,k')$ เป็นศักย์ของสารเจือที่ขึ้นกับเวกเตอร์คลื่นตามสมการ

$$u(k,k') = v(k,k') + J(k,k')\,\vec{S}\cdot\vec{\sigma} \tag{3.6}$$

โดยที่ $\vec{S}$ เป็นสปินของศักย์ของสารเจือ และ $\vec{\sigma}$ เป็นความหนาแน่นสปิน (spin density) ของอิเล็กตรอนและกำหนดให้โอกาสของการกระเจิงเป็น

$$v^2(k,k') = v_o^2 + v_1^2 f(k) f(k') \tag{3.7}$$

$$J^2(k,k') = J_o^2 + J_1^2 g(k) g(k') \tag{3.8}$$

เมื่อ $v_o(v_1), J_o(J_1)$ คือ แอมปลิจูดของการกระเจิงแบบไม่ขึ้นกับทิศทาง (isotropic) เนื่องจากสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก (ประเภทแม่เหล็ก) และ $f(k), g(k)$ คือฟังก์ชันของการกระเจิงแบบขึ้นกับทิศทาง (anisotropic) เนื่องจากสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและเป็นแม่เหล็ก โดยกำหนดให้ $g(k)$ และ $f(k)$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังนี้

$$\begin{aligned} v_1^2 \le v_o^2, \quad \langle f \rangle = 0, \quad \langle f^2 \rangle = 1 \\ J_1^2 \le J_o^2, \quad \langle g \rangle = 0, \quad \langle g^2 \rangle = 1 \end{aligned} \tag{3.9}$$

แทนค่าสมการ (3.5) และ(3.6) ลงในสมการ (3.3) จะได้

$$\tilde{\omega}(k)=\omega+in_i\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\left(v^2(k,k')+J^2(k,k')S(S+1)\right)(-1)\left[\frac{i\tilde{\omega}(k')+\varepsilon(k')}{\tilde{\omega}^2(k')+\varepsilon^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}\right] \quad (3.10)$$

ในทำนองเดียวกันแทนค่าสมการ (3.2) , (3.5) และ(3.6) ลงในสมการ (3.4) จะได้

$$\tilde{\Delta}(k)=\Delta(k)+n_i\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}\left(v^2(k,k')+J^2(k,k')S(S+1)\right)\left[\frac{\tilde{\Delta}(k')}{\tilde{\omega}^2(k')+\varepsilon^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}\right] \quad (3.11)$$

จากนิยามความหนาแน่นสถานะที่บริเวณผิวเฟอร์มีโดยโฟนอนมีการสั่นไหวในช่วงความถี่ ω ถึง $\omega+d\omega$ ในปริภูมิ k เขียนได้เป็น

$$\int_{shell} d^3k=\int dS_\omega dk_\perp$$

โดยที่ dS_ω คือค่าคงตัวของพื้นผิวเฟอร์มี ช่วง ω ถึง $\omega+d\omega$ ในปริภูมิ k และ $dk_\perp$ คือเวกเตอร์ในแนวตั้งฉากในช่วง ω ถึง $\omega+d\omega$ เมื่อ เกรเดียนต์ของ ω ซึ่งเขียนได้เป็น $\nabla_k\omega$ มีค่าเท่ากับ $|\nabla_k\omega|dk_\perp=d\omega$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$dS_\omega dk_\perp=dS_\omega\cdot\frac{d\omega}{|\nabla_k\omega|}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\int d^3k=\int\frac{dS_\omega}{|\nabla_k\omega|}d\omega=N_0\int_{FS}n_k dS_k d\varepsilon_k$$

ดังนั้นจากสมการ (3.11) กำหนดให้การอินทิเกรตของเวกเตอร์คลื่น $\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}$ กระทำที่บริเวณผิวเฟอร์มิ สามารถเขียนแทนได้ด้วย $N_o\int_{FS}dS_k n(k)\int d\varepsilon_k$ โดยมี N_o เป็นความหนาแน่นสถานะที่ผิวเฟอร์มิ และ $n(k)$ เป็นความหนาแน่นสถานะแองเกิลริสอลฝ (Angle-Resolved) ที่ผิวเฟอร์มิ และมีเงื่อนไขการนอร์มัลไลน์เป็น $\int_{FS}dS_k n(k)=1$ และ $<\ldots>=\int_{FS}dS_k n(k)(\ldots)$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\tilde{\omega}(k)=\omega+\pi n_i N_0 \int_{FS} dS_{k'} n(k')\left(v^2(k,k')+J^2(k,k')S(S+1)\right)\left(\frac{\tilde{\omega}(k')}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}}\right) \tag{3.12}$$

$$\tilde{\Delta}(k)=\Delta(k)+\pi n_i N_0 \int_{FS} dS_{k'} n(k')\left(v^2(k,k')-J^2(k,k')S(S+1)\right)\left(\frac{\tilde{\Delta}(k')}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}}\right) \tag{3.13}$$

แทนค่าสมการ (3.7) และ (3.8) ลงในสมการ (3.12) และ (3.13) จะได้

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(k)=\omega&+\pi n_i N_0 v_0^2 \int_{FS} dS_{k'} n(k')\frac{\tilde{\omega}(k')}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}}+\pi n_i N_0 v_1^2 \int_{FS} dS_{k'} n(k') f(k) f(k')\frac{\tilde{\omega}(k')}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}}\\&+\pi n_i N_0 J_0^2 S(S+1)\int_{FS} dS_{k'} n(k')\frac{\tilde{\omega}(k')}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}}\\&+\pi n_i N_0 J_1^2 S(S+1)\int_{FS} dS_{k'} n(k') g(k) g(k')\frac{\tilde{\omega}(k')}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}}\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}(k)=\Delta(k)&+\pi n_i N_0 v_0^2 \int_{FS} dS_{k'} n(k')\frac{\tilde{\Delta}(k')}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}}+\pi n_i N_0 v_1^2 \int_{FS} dS_{k'} n(k') f(k) f(k')\frac{\tilde{\Delta}(k')}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}}\\&-\pi n_i N_0 J_0^2 S(S+1)\int_{FS} dS_{k'} n(k')\frac{\tilde{\Delta}(k')}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}}\\&-\pi n_i N_0 J_1^2 S(S+1)\int_{FS} dS_{k'} n(k') g(k) g(k')\frac{\tilde{\Delta}(k')}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}}\end{aligned} \tag{3.15}$$

กำหนดให้ $\Gamma_0=\pi n_i N_0 v_0^2$, $\Gamma_1=\pi n_i N_0 v_1^2$, $G_0=\pi n_i N_0 J_0^2 S(S+1)$ และ $G_1=\pi n_i N_0 J_1^2 S(S+1)$ จะเขียนสมการที่ (3.14) และ (3.15) ได้ใหม่เป็น

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(k)=\omega&+\Gamma_0 \int_{FS} dS_{k'} n(k')\frac{\tilde{\omega}(k')}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}}+\Gamma_1 \int_{FS} dS_{k'} n(k') f(k) f(k')\frac{\tilde{\omega}(k')}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}}\\&+G_0 \int_{FS} dS_{k'} n(k')\frac{\tilde{\omega}(k')}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}}+G_1 \int_{FS} dS_{k'} n(k') g(k) g(k')\frac{\tilde{\omega}(k')}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}}\end{aligned}$$

$$\tilde{\omega}(k)=\omega\left[\begin{aligned}&1+(\Gamma_0+G_0)\int_{FS} dS_{k'} n(k')\frac{\tilde{\omega}(k')/\omega}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}}+\Gamma_1 \int_{FS} dS_{k'} n(k') f(k) f(k')\frac{\tilde{\omega}(k')/\omega}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}}\\&+G_1 \int_{FS} dS_{k'} n(k') g(k) g(k')\frac{\tilde{\omega}(k')}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}}\end{aligned}\right] \tag{3.16}$$

$$\tilde{\Delta}(k)=\Delta(k)+\Gamma_0\int_{FS} dS_{k'}n(k')\frac{\tilde{\Delta}(k')}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}}+\Gamma_1\int_{FS} dS_{k'}n(k')f(k)f(k')\frac{\tilde{\Delta}(k')}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}}$$
$$-G_0\int_{FS} dS_{k'}n(k')\frac{\tilde{\Delta}(k')}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}}-G_1\int_{FS} dS_{k'}n(k')g(k)g(k')\frac{\tilde{\Delta}(k')}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}}$$

เนื่องจาก $\Delta(k)=\Delta\, e(k)$ จะได้

$$\tilde{\Delta}(k)=\Delta\begin{bmatrix} e(k)+(\Gamma_0-G_0)\int_{FS} dS_{k'}n(k')\frac{\tilde{\Delta}(k')/\Delta}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}}+\Gamma_1\int_{FS} dS_{k'}n(k')f(k)f(k')\frac{\tilde{\Delta}(k')/\Delta}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}} \\ -G_1\int_{FS} dS_{k'}n(k')g(k)g(k')\frac{\tilde{\Delta}(k')/\Delta}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}} \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

กำหนดให้

$$u_s(\omega)=(\Gamma_0+G_0)\int_{FS} dS_{k'}n(k')\frac{\tilde{\omega}(k')/\omega}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}}$$
$$u_a(\omega)=\Gamma_1\int_{FS} dS_{k'}n(k')f(k')\frac{\tilde{\omega}(k')/\omega}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}}$$
$$u_c(\omega)=G_1\int_{FS} dS_{k'}n(k')g(k')\frac{\tilde{\omega}(k')/\omega}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}}$$
$$e_s(\omega)=(\Gamma_0-G_0)\int_{FS} dS_{k'}n(k')\frac{\tilde{\Delta}(k')/\Delta}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}}$$
$$e_a(\omega)=\Gamma_1\int_{FS} dS_{k'}n(k')f(k')\frac{\tilde{\Delta}(k')/\Delta}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}}$$
$$e_c(\omega)=G_1\int_{FS} dS_{k'}n(k')g(k')\frac{\tilde{\Delta}(k')/\Delta}{\sqrt{\tilde{\omega}^2(k')+\tilde{\Delta}^2(k')}}$$

โดยที่ $u(\omega,k)=u_s(\omega)+u_a(\omega)f(k)+u_c(\omega)g(k)$

และ $e(\omega,k)=e_s(\omega)+e_a(\omega)f(k)-e_c(\omega)g(k)$

ดังนั้นสมการที่ (3.16) และ (3.17) เขียนได้เป็น

$$\tilde{\omega}(k)=\omega\left[1+u(\omega,k)\right] \tag{3.18}$$

$$\tilde{\Delta}(k)=\Delta\left[e_k+e(\omega,k)\right] \tag{3.19}$$

จากสมการของช่องว่างพลังงานในขอบเขตการคู่ควบอย่างอ่อน

$$\Delta(k) = -T\sum_{\omega}\sum_{k'} V(k,k')\frac{\tilde{\Delta}(k')}{\tilde{\omega}^2(k') + \varepsilon^2(k') + \left|\tilde{\Delta}(k')\right|^2} \tag{3.20}$$

เมื่อ $V(k,k')$ เป็นศักย์ของการเกิดคู่คูเปอร์ แบบที่ขึ้นกับทิศทางและมีสมการเป็น

$$V(k,k') = -V_0 e(k)e(k') \tag{3.21}$$

คำนวณหาสมการของอุณหภูมิวิกฤตสำหรับกรณีนี้ได้จากสมการ

$$\ln(\frac{T_c}{T_{co}}) = 2\pi T_c \sum_{\omega>0}\{[f(\omega)]_{\Delta=0} - \frac{1}{\omega}\} \tag{3.22}$$

$$[f(\omega)]_{\Delta=0} = \int_{FS} dS_k n(k)\frac{e(k)}{\tilde{\omega}_0(k)}\left[\frac{\tilde{\Delta}(k)}{\Delta}\right]_{\Delta=0} \tag{3.23}$$

ที่ $\Delta \to 0$ จะสามารถเขียนรีนอร์มัลไลน์ความถี่มัตซูบาระได้เป็น $\tilde{\omega}_0(k) = \tilde{\omega}(k)_{\Delta=0}$ และใช้ขอบเขตการประมาณของบอร์น จะได้

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_0(k)\big|_{\Delta=0} &= \omega\left[1 + (\Gamma_0 + G_0)\int_{FS} dS_{k'} n(k')\frac{1+u(\omega,k)}{\tilde{\omega}_0(k')} + \Gamma_1 f(k)\int_{FS} dS_{k'} n(k') f(k')\frac{1+u(\omega,k)}{\tilde{\omega}_0(k')}\right] \\
&\quad + G_1 g(k)\int_{FS} dS_{k'} n(k') g(k')\frac{1+u(\omega,k)}{\tilde{\omega}_0(k')} \\
&= \omega + (\Gamma_0 + G_0)\left\langle\frac{1+u(\omega,k')}{\tilde{\omega}_0(k')/\omega}\right\rangle + \Gamma_1 f(k)\left\langle f(k')\frac{1+u(\omega,k')}{\tilde{\omega}_0(k')/\omega}\right\rangle + G_1 g(k)\left\langle g(k')\frac{1+u(\omega,k')}{\tilde{\omega}_0(k')/\omega}\right\rangle \\
&= \omega + (\Gamma_0 + G_0)\left\langle\left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}_0(k')}\right)(1+u(\omega,k'))\right\rangle + \Gamma_1 f(k)\left\langle f(k')\left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}_0(k')}\right)(1+u(\omega,k'))\right\rangle \\
&\quad + G_1 g(k)\left\langle g(k')\left(\frac{\omega}{\tilde{\omega}_0(k')}\right)(1+u(\omega,k'))\right\rangle
\end{aligned}$$

$$\therefore \tilde{\omega}_0(k)\big|_{\Delta=0} = \omega + \Gamma_0 + G_0 \tag{3.24}$$

ในทำนองเดียวกันพิจารณา $\left[\frac{\tilde{\Delta}(k)}{\Delta}\right]_{\Delta=0}$ และเนื่องจาก $\frac{\tilde{\Delta}(k)}{\Delta}=e(k)+e(\omega,k)$
ดังนั้นจะได้ว่า

$$\frac{\tilde{\Delta}(k)}{\Delta}\Big|_{\Delta=0}=e(k)+(\Gamma_0-G_0)\left\langle\frac{e(k)+e(\omega,k)}{\tilde{\omega}_0(k')}\right\rangle+\Gamma_1 f(k)\left\langle f(k')\left(\frac{e(k)+e(\omega,k)}{\tilde{\omega}_0(k')}\right)\right\rangle$$
$$-G_1 g(k)\left\langle g(k')\left(\frac{e(k)+e(\omega,k)}{\tilde{\omega}_0(k')}\right)\right\rangle$$

$$\frac{\tilde{\Delta}(k)}{\Delta}\Big|_{\Delta=0}=e(k)+\left(\frac{\Gamma_0-G_0}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left[\langle e\rangle+\langle e(\omega,k)\rangle\right]+\left(\frac{\Gamma_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)f(k)\left[\langle ef\rangle+\langle f(k')e(\omega,k')\rangle\right]$$
$$-\left(\frac{G_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)g(k)\left[\langle eg\rangle+\langle g(k')e(\omega,k)\rangle\right]$$

(3.25)

พิจารณา $\left(\frac{\Gamma_0-G_0}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left[\langle e\rangle+\langle e(\omega,k)\rangle\right]$

$$=\left(\frac{\Gamma_0-G_0}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left[\langle e\rangle+\langle e_s(\omega)+e_a(\omega)f(k)-e_c(\omega)g(k)\rangle\right]$$

$$=\left(\frac{\Gamma_0-G_0}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left[\langle e\rangle+e_s(\omega)\right]$$

$$=\left(\frac{\Gamma_0-G_0}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left[\langle e\rangle+\left(\frac{\Gamma_0-G_0}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\langle e(k)+e(\omega,k)\rangle\right]$$

$$=\left(\frac{\Gamma_0-G_0}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left[\langle e\rangle+\left(\frac{\Gamma_0-G_0}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\langle e\rangle+\left(\frac{\Gamma_0-G_0}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)^2\langle e(k)+e(\omega,k)\rangle\right]$$

$$=\left(\frac{\Gamma_0-G_0}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left[\langle e\rangle+\left(\frac{\Gamma_0-G_0}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\langle e\rangle+\left(\frac{\Gamma_0-G_0}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)^2\langle e\rangle+\left(\frac{\Gamma_0-G_0}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)^3\langle e(k)+e(\omega,k)\rangle\right]$$

$$=\left(\frac{\Gamma_0-G_0}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\langle e\rangle\left[1+\left(\frac{\Gamma_0-G_0}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)+\left(\frac{\Gamma_0-G_0}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)^2+\left(\frac{\Gamma_0-G_0}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)^3+....\right]$$

(3.26)

จาก $1+x+x^2+x^3+...=S$

$$1+x\left(1+x+x^2+x^3+...\right)=S$$

$$1+xS \quad =S$$

$$S=\frac{1}{1-x}$$

ดังนั้นจากสมการที่ (3.26) จะได้ว่า

$$1+\left(\frac{\Gamma_0-G_0}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)+\left(\frac{\Gamma_0-G_0}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)^2+\left(\frac{\Gamma_0-G_0}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)^3+...=\frac{1}{1-\left(\frac{\Gamma_0-G_0}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)} \tag{3.27}$$

แทนค่าสมการ (3.26) – (3.27) ลงในสมการ (3.25) จะได้

$$\frac{\tilde{\Delta}(k)}{\Delta}\Big|_{\Delta=0}=e(k)+\left(\frac{\Gamma_0-G_0}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\langle e\rangle\left[\frac{1}{1-\left(\frac{\Gamma_0-G_0}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)}\right]+\left(\frac{\Gamma_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)f(k)[<ef>+<f(k)e(\omega,k)>]$$
$$-\left(\frac{G_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)g(k)[<eg>+<g(k)e(\omega,k)>]$$

$$=e(k)+\langle e\rangle\left(\frac{\Gamma_0-G_0}{\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_0+G_0}\right)+\left(\frac{\Gamma_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)f(k)[<ef>+<f(k)e(\omega,k)]$$
$$-\left(\frac{G_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)g(k)[<eg>+<g(k)e(\omega,k)]$$

$$\therefore\frac{\tilde{\Delta}(k)}{\Delta}\Big|_{\Delta=0}=e(k)+\langle e\rangle\left(\frac{\Gamma_0-G_0}{\omega+2G_0}\right)+\left(\frac{\Gamma_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)f(k)[<ef>+<f(k)e(\omega,k)]$$
$$-\left(\frac{G_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)g(k)[<eg>+<g(k)e(\omega,k)] \tag{3.28}$$

แทนค่าสมการ (3.28) ในสมการ (3.23) จะได้

$$[f(\omega)]_{\Delta=0} = \left\langle \frac{e(k)}{\omega+\Gamma_0+G_0} \begin{pmatrix} e(k)+\langle e\rangle\left(\frac{\Gamma_0-G_0}{\omega+2G_0}\right)+\left(\frac{\Gamma_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)f(k)[<ef>+<f(k)e(\omega,k)] \\ -\left(\frac{G_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)g(k)[<eg>+<g(k)e(\omega,k)] \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\left[f(\omega)\right]_{\Delta=0} = \left(\frac{1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left(\langle e^2\rangle+\langle e\rangle^2\left(\frac{\Gamma_0-G_0}{\omega+2G_0}\right)+x-y\right) \qquad (3.29)$$

โดยที่ $x=\left(\frac{\Gamma_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)<ef>\left[<ef>+<f(k)e(\omega,k)>\right]$

และ $y=\left(\frac{G_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)<eg>\left[<eg>+<g(k)e(\omega,k)>\right]$

แทนค่าสมการ (3.29) ในสมการ (3.22) จะได้สมการอุณหภูมิวิกฤตกรณีมีสารเจือประเภทแม่เหล็กและประเภทไม่เป็นแม่เหล็กเขียนได้เป็น

$$\ln\left(\frac{T_c}{T_{c0}}\right)=2\pi T_c\sum_{\omega>0}\left[\left(\frac{1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left(1+\langle e\rangle^2\left(\frac{\Gamma_0-G_0}{\omega+2G_0}\right)+x-y-\frac{1}{\omega}\right)\right]$$

$$=2\pi T_c\sum_{\omega>0}\left[\frac{1}{\omega+\Gamma_0+G_0}+\langle e\rangle^2\left(\frac{\Gamma_0-G_0}{(\omega+2G_0)(\omega+\Gamma_0+G_0)}\right)+\frac{x}{\omega+\Gamma_0+G_0}-\frac{y}{\omega+\Gamma_0+G_0}-\frac{1}{\omega}\right]$$

พิจารณา $\frac{\Gamma_0-G_0}{(\omega+2G_0)(\omega+\Gamma_0+G_0)}=\frac{1}{(\omega+2G_0)}-\frac{1}{(\omega+\Gamma_0+G_0)}$

ดังนั้น

$$\ln\left(\frac{T_c}{T_{c0}}\right)=2\pi T_c\sum_{\omega>0}\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{\omega+\Gamma_0+G_0}-\frac{1}{\omega}\right)+\langle e\rangle^2\left(\left(\frac{1}{\omega+2G_0}-\frac{1}{\omega}\right)+\left(\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\right) \\ +\frac{x}{\omega+\Gamma_0+G_0}-\frac{y}{\omega+\Gamma_0+G_0}\end{bmatrix}$$

จากสมการไดแกรมมาฟังก์ชัน

$$\Psi\left(\frac{1}{2}\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma}{2\pi T_c}\right)=2\pi T_c\sum_{\omega>0}\left(\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\omega+\Gamma}\right)$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\ln\left(\frac{T_c}{T_{c0}}\right)=\left(1-\langle e\rangle^2\right)\left[\Psi\left(\frac{1}{2}\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma_0+G_0}{2\pi T_c}\right)\right]+\langle e\rangle^2\left[\Psi\left(\frac{1}{2}\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{2G_0}{2\pi T_c}\right)\right]+S_1+S_2 \tag{3.30}$$

เมื่อ $S_1=2\pi T_c\sum_{\omega>0}\left(\frac{x}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)$ และ $S_2=-2\pi T_c\sum_{\omega>0}\left(\frac{y}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)$ (3.31)

พิจารณา x

$$x=\left(\frac{\Gamma_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\langle ef\rangle\left[\langle ef\rangle+\langle f(k)e(\omega,k)\rangle\right] \tag{3.32}$$

$$=\left(\frac{\Gamma_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\langle ef\rangle\left[\langle ef\rangle+\left\langle f(k)\left(e_s(\omega)+e_a(\omega)f(k)-e_c(\omega)g(k)\right)\right\rangle\right]$$

$$=\left[\left(\frac{\Gamma_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\langle ef\rangle\left(\begin{array}{l}\langle ef\rangle+\left(\frac{\Gamma_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\langle ef\rangle+\left(\frac{\Gamma_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\langle f(k)e(\omega,k)\rangle\\ -\left(\frac{G_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\langle fg\rangle\langle eg\rangle-\left(\frac{G_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\langle fg\rangle\langle g(k)e(\omega,k)\rangle\end{array}\right)\right] \tag{3.33}$$

พิจารณา y

$$y=\left(\frac{G_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\langle eg\rangle\left[\langle eg\rangle+\langle g(k)e(\omega,k)\rangle\right]$$

$$=\left(\frac{G_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\langle eg\rangle\left[\langle eg\rangle+\left\langle g(k)\left(e_s(\omega)+e_a(\omega)f(k)-e_c(\omega)g(k)\right)\right\rangle\right]$$

$$=\left(\frac{G_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\langle eg\rangle\left[\begin{array}{l}\langle eg\rangle+\left(\frac{\Gamma_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\langle fg\rangle\langle ef\rangle+\left(\frac{\Gamma_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\langle fg\rangle\langle f(k)e(\omega,k)\rangle\\ -\left(\frac{G_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\langle eg\rangle-\left(\frac{G_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\langle g(k)e(\omega,k)\rangle\end{array}\right] \tag{3.34}$$

จากสมการ (3.32) และ (3.34) จะได้

$$\left\langle f(k)e(\omega,k)\right\rangle=\frac{x}{\left(\frac{\Gamma_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\langle ef\rangle}-\langle ef\rangle \tag{3.35}$$

$$\left\langle g(k)e(\omega,k)\right\rangle=\frac{y}{\left(\frac{G_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\langle eg\rangle}-\langle eg\rangle \tag{3.36}$$

แทนค่าสมการ (3.35) และสมการ (3.36) ลงในสมการ (3.33) จะได้

$$x=\left(\frac{\Gamma_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\langle ef\rangle\begin{bmatrix}\langle ef\rangle+\left(\frac{\Gamma_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\langle ef\rangle+\left(\frac{x}{\langle ef\rangle}\right)-\left(\frac{\Gamma_1\langle ef\rangle}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\\ -\left(\frac{G_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\langle fg\rangle\langle eg\rangle-\left(\frac{\langle fg\rangle y}{\langle eg\rangle}\right)+\left(\frac{\langle fg\rangle\langle eg\rangle G_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\end{bmatrix}$$

$$=\langle ef\rangle\left(\frac{1}{1-\frac{\Gamma_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}}\right)\left(\frac{\Gamma_1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left[\langle ef\rangle-\frac{\langle fg\rangle y}{\langle eg\rangle}\right]$$

$$\therefore\ x=\langle ef\rangle\left(\frac{\Gamma_1}{\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1}\right)\left(\langle ef\rangle-\frac{\langle fg\rangle y}{\langle eg\rangle}\right) \tag{3.37}$$

ในทำนองเดียวกันแทนค่าสมการ (3.35) และสมการ (3.36) ลงในสมการ (3.34) จะได้

$$y=\langle eg\rangle\left(\frac{G_1}{\omega+\Gamma_0+G_0+G_1}\right)\left(\langle eg\rangle+\frac{\langle fg\rangle x}{\langle ef\rangle}\right) \tag{3.38}$$

แทนค่าสมการ (3.38) ลงในสมการ (3.37) จะได้

$$x=\langle ef\rangle\left(\frac{\Gamma_1}{\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1}\right)\left(\langle ef\rangle-\frac{\langle fg\rangle}{\langle eg\rangle}\left(\langle eg\rangle\left(\frac{G_1}{\omega+\Gamma_0+G_0+G_1}\right)\left(\langle eg\rangle+\frac{\langle fg\rangle x}{\langle ef\rangle}\right)\right)\right)$$

$$=\langle ef\rangle\left(\frac{\Gamma_1}{\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1}\right)\left(\langle ef\rangle-\langle fg\rangle\langle eg\rangle\left(\frac{G_1}{\omega+\Gamma_0+G_0+G_1}\right)-\langle fg\rangle^2\frac{x}{\langle ef\rangle}\left(\frac{G_1}{\omega+\Gamma_0+G_0+G_1}\right)\right)$$

$$\therefore\ x=\langle ef\rangle\left(\frac{\Gamma_1\langle ef\rangle(\omega+\Gamma_0+G_0+G_1)-\langle fg\rangle\langle eg\rangle G_1\Gamma_1}{(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)(\omega+\Gamma_0+G_0+G_1)+\langle fg\rangle^2\Gamma_1 G_1}\right) \tag{3.39}$$

ในทำนองเดียวกันแทนค่า (3.37) ลงในสมการ (3.38) จะได้

$$y=\langle eg\rangle\left(\frac{G_1\langle eg\rangle(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)+\langle fg\rangle\langle ef\rangle G_1\Gamma_1}{(\omega+\Gamma_0+G_0+G_1)(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)+\langle fg\rangle^2 G_1\Gamma 1}\right) \quad (3.40)$$

ดังนั้นจะได้สมการอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกรณีที่มีสารเจือประเภทแม่เหล็กและไม่เป็นแม่เหล็ก เขียนได้เป็น

$$\ln\left(\frac{T_c}{T_{c0}}\right)=\left(1-\langle e\rangle^2\right)\left[\Psi\left(\frac{1}{2}\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma_0+G_0}{2\pi T_c}\right)\right]+\langle e\rangle^2\left[\Psi\left(\frac{1}{2}\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{2G_0}{2\pi T_c}\right)\right]+S_1+S_2$$

(3.41)

โดยที่ $S_1=2\pi T_c\sum_{\omega>0}\frac{\langle ef\rangle}{\omega+\Gamma_0+G_0}\frac{\Gamma_1\langle ef\rangle(\omega+\Gamma_0+G_0+G_1)-\langle fg\rangle\langle eg\rangle G_1\Gamma_1}{(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)(\omega+\Gamma_0+G_0+G_1)+\langle fg\rangle^2\Gamma_1 G_1}$

และ $S_2=-2\pi T_c\sum_{\omega>0}\frac{\langle eg\rangle}{\omega+\Gamma_0+G_0}\frac{G_1\langle eg\rangle(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)+\langle fg\rangle\langle ef\rangle G_1\Gamma_1}{(\omega+\Gamma_0+G_0+G_1)(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)+\langle fg\rangle^2 G_1\Gamma_1}$

(3.42)

กรณีที่กำหนดให้ $g(k)=\pm f(k)$ จะได้สมการของอุณหภูมิวิกฤตกรณีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็กเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{T_c}{T_{co}}\right)&=\left(1-<e>^2-<ef>^2\right)\left[\Psi\left(\frac{1}{2}\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{\Gamma_0+G_0}{2\pi T_c}\right)\right)\right]\\&+<e>^2\left[\Psi\left(\frac{1}{2}\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{2G_0}{2\pi T_c}\right)\right]\\&+<ef>^2\left[\Psi\left(\frac{1}{2}\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{\Gamma_0+G_0-G_1-\Gamma_1}{2\pi T_c}\right)\right)\right]\end{aligned} \quad (3.43)$$

ซึ่งสมการ (3.43) และ (3.45) ให้ผลการคำนวณตรงกับผลการคำนวณของ ฮารานและนาจิ แต่ฮารานและนาจิไม่ได้พิจารณาผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปิน (spin exchange interaction) ของสารเจือประเภทแม่เหล็ก

2. การคำนวณหาสมการอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็ก โดยพิจารณาผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปิน ที่เกิดจากสารเจือประเภทแม่เหล็ก

พิจารณาสมการ (3.13) ซึ่งเป็นสมการของรีนอร์มัลไลน์ช่องว่างพลังงาน ที่คำนึงถึงผลของโมเมนตัม ของศักย์กระเจิงของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็ก แบบไม่ขึ้นกับทิศทางและแบบขึ้นกับทิศทาง ซึ่งเป็นแบบจำลองของฮารานและนาจิ แต่ฮารานและนาจิไม่ได้คำนึงถึงผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปิน สำหรับการกระเจิงลำดับสองของบอร์น (second-order Born scattering) ที่เกิดจากสารเจือประเภทแม่เหล็ก โดยผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็ก มีบทบาทสำคัญต่อสมการอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือประเภทแม่เหล็ก กล่าวคือ ผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็ก ทำให้เครื่องหมายในเทอมของศักย์กระเจิงของสารเจือประเภทแม่เหล็กเปลี่ยนแปลงโดยจะเริ่มพิจารณาจากฮามิลโทเนียนของตัวนำยิ่งยวดเมื่อมีสารเจือประเภทแม่เหล็กและประเภทไม่เป็นแม่เหล็กดังนี้คือ

$$H = \sum_{k,\sigma} \varepsilon_k C^{+}_{k\sigma} C_{k\sigma} + \sum_{k,k',\sigma,\sigma'} u\left(k,\sigma\,;k',\sigma'\right) C^{+}_{k\sigma} C_{k\sigma} + \sum_{k,k'} V\left(k,k'\right) C^{+}_{k\uparrow} C^{+}_{-k\downarrow} C_{-k'\downarrow} C_{k'\uparrow} \qquad (3.44)$$

เมื่อ $\varepsilon(k) = \xi(k) - \mu$ คือ พลังงานของกึ่งอนุภาคเทียบกับพลังงานศักย์เคมี (Chemical potential)

$u(k,\sigma;k'\sigma')$ คือ เมทริกซ์ของการกระเจิงของอิเล็กตรอนโดย สารเจือมีการจัดเรียงตัว

แบบสุ่ม

และ $V\left(k,k'\right)$ คือ พลังงานศักย์ดึงดูดของอิเล็กตรอนตามทฤษฏีบีซีเอส

ซึ่งเมทริกซ์ของการกระเจิงของอิเล็กตรอนโดยสารเจือมีการจัดเรียงตัวแบบสุ่มมีนิยามดังสมการ

$$u(k,\sigma;k'\sigma') = u_1(k,k',\sigma)\delta_{\sigma,\sigma'} + u_2(k,k',\sigma)\delta_{\sigma,-\sigma} \qquad (3.45)$$

เมื่อ $u_1(k,k',\sigma)\delta_{\sigma,\sigma'}$ คือ ศักย์กระเจิงของสารเจือที่เกิดจากการอนุรักษ์สปิน (spin-conserving)

$u_2(k,k',\sigma)\delta_{\sigma,-\sigma}$ คือ ศักย์กระเจิงของสารเจือที่เกิดจากสปินฟลิฟ (spin-flip)

โดยผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็กจะพิจารณาจากเมทริกซ์ของการกระเจิงของอิเล็กตรอนโดยสารเจือที่มีการจัดเรียงตัวแบบสุ่มจะพิจารณาได้ 2 กรณี คือ

$$u_1(k,k',\sigma)\delta_{\sigma,\sigma'} = \upsilon(k,k')\sum_{\alpha} e^{-i(k-k')R_\alpha} + J(k,k')\sum_{\beta} e^{-i(k-k')R_\beta} + \frac{1}{2}J(k,k')\gamma_\sigma \sum_{\beta} e^{-i(k-k')R_\beta} S_\beta^z$$

$$u_2(k,k',\sigma)\delta_{\sigma,-\sigma} = \frac{1}{2}J(k,k')\sum_{\beta} e^{-i(k,k')R_\beta}(S_\beta^x - i\gamma_\sigma S_\beta^y)$$

ในการคำนวณหาสมการอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือได้จากสมการไดซัน (Dyson's equation) ดังนี้

$$G^{-1}(k,\tilde{\omega}) = G_0^{-1}\left(k,\tilde{\omega}\right) - \Sigma(k,\tilde{\omega}) \qquad (3.46)$$

เมื่อ $\Sigma(k,\tilde{\omega}) = \langle u(k,k')G(k,\omega)u(k,k')\rangle$ ซึ่ง $u(k,k') \equiv u(k,\sigma;k'\sigma')$ (3.47)

โดยที่ $G(k,\omega) = \begin{pmatrix} G(k,\omega) & -\tilde{F}(k,\omega) \\ -F(k,\omega) & \tilde{G}(k,\omega) \end{pmatrix}$ (3.48)

จากสมการ (3.46-3.48) จะได้สมการรีนอร์มัลไลน์ความถี่มัตซูบาระและสมการรีนอร์มัลไลน์ช่องว่างพลังงานเขียนได้เป็น

$$\tilde{\omega}(k) = \omega + in_i\int v^2(k,k') + J^2(k,k')\, S(S+1)G(\omega,k')\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}$$

$$\tilde{\Delta}(k) = \Delta(k) + n_i\int v^2(k,k') - J^2(k,k')\, S(S+1)F(\omega,k')\frac{d^3k'}{(2\pi)^3}$$

เมื่อ $v^2(k,k') = \upsilon(k,k') + J(k,k')$

จากสมการรีนอร์มัลไลน์ความถี่มัตซูบาระและสมการรีนอร์มัลไลน์ช่องว่างพลังงานสามารถคำนวณหาสมการอุณหภูมิวิกฤตได้ดังสมการ (3.41) ซึ่งตรงกับผลการคำนวณของฮารานและนาจิในทำนองเดียวกันสำหรับกรณีที่ 2 จะพิจารณาศักย์กระเจิงของสารเจือที่เกิดจากการอนุรักษ์สปินและศักย์กระเจิงของสารเจือที่เกิดจากสปินฟลิพมีค่าเขียนได้ดังนี้

$$u_1(k,k',\sigma)\delta_{\sigma,\sigma'} = v(k,k')\sum_{\alpha} e^{-i(k-k')R_\alpha} + J(k,k')\sum_{\beta} e^{-i(k-k')R_\beta} + \frac{1}{2}J(k,k')\sum_{\beta} e^{-i(k-k')R_\beta} S_\beta^z$$

$$u_2(k,k',\sigma)\delta_{\sigma,-\sigma} = \frac{1}{2}J(k,k')\sum_{\beta} e^{-i(k,k')R_\beta}(S_\beta^x - i\gamma_\sigma S_\beta^y)$$

และจากสมการ (3.46-3.48) จะได้สมการรีนอร์มัลไลน์ความถี่มัตซูบาระและสมการรีนอร์มัลไลน์ช่องว่างพลังงานเขียนได้เป็น

$$\tilde{\omega}(k) = \omega + in_i \int v^2(k,k') + J^2(k,k')\, S(S+1) G(\omega,k') \frac{d^3k'}{(2\pi)^3}$$

$$\tilde{\Delta}(k) = \Delta(k) + n_i \int v^2(k,k') + J^2(k,k')\, S(S+1) F(\omega,k') \frac{d^3k'}{(2\pi)^3}$$

สำหรับการคำนวณหาสมการอุณหภูมิวิกฤตในกรณีนี้จะสามารถคำนวณได้เช่นเดียวกับกรณีที่ใช้แบบจำลองของฮารานและนาจิ ซึ่งจะต้องคำนวณใหม่ตั้งแต่สมการที่ (3.13) ถึงสมการ (3.43) โดยจะสามารถคำนวณหาสมการอุณหภูมิวิกฤตเขียนได้เป็น

$$\ln\left(\frac{T_c}{T_{c0}}\right) = \left(1 - \langle e\rangle^2\right)\left[\Psi\left(\frac{1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\Gamma_0 + G_0}{2\pi T_c}\right)\right] + S_1 + S_2 \tag{3.49}$$

โดยที่ $S_1 = 2\pi T_c \sum_{\omega>0} \frac{\langle ef\rangle}{\omega+\Gamma_0+G_0} \frac{\Gamma_1\langle ef\rangle(\omega+\Gamma_0+G_0-G_1)+\langle fg\rangle\langle eg\rangle G_1\Gamma_1}{(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)(\omega+\Gamma_0+G_0-G_1)-\langle fg\rangle^2\Gamma_1 G_1}$

และ $S_2 = 2\pi T_c \sum_{\omega>0} \frac{\langle eg\rangle}{\omega+\Gamma_0+G_0} \frac{G_1\langle eg\rangle(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)+\langle fg\rangle\langle ef\rangle G_1\Gamma_1}{(\omega+\Gamma_0+G_0-G_1)(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)-\langle fg\rangle^2 G_1\Gamma_1}$

(3.50)

จากสมการ อุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็ก ที่ได้ในสมการ (3.41) และ (3.42) เปรียบเทียบกับสมการ (3.49)และ (3.50) จะพบว่าสมการอุณหภูมิวิกฤตที่ได้มีบางเทอมที่หายไปและบางเทอมเปลี่ยนเครื่องหมายซึ่งก็คือเทอมที่เป็นผลเนื่องจากอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็กในสารเจือประเภทแม่เหล็ก ดังนั้นอาจเขียนสมการอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็กที่คำนึงถึงผลของโมเมนตัม ของศักย์กระเจิงของสารเจือแบบไม่ขึ้นกับทิศทางและแบบขึ้นกับทิศทาง โดยพิจารณาอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็กของสารเจือประเภทแม่เหล็กซึ่งเขียนได้เป็น

$$\ln\left(\frac{T_c}{T_{c0}}\right) = \left(1 - \langle e\rangle^2\right)\left[\Psi\left(\frac{1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\Gamma_0 + G_0}{2\pi T_c}\right)\right] + S_1 + S_2 + S_3 \tag{3.51}$$

โดยที่ $$S_1 = 2\pi T_c \sum_{\omega>0} \frac{\langle ef \rangle}{\omega+\Gamma_0+G_0} \frac{\Gamma_1 \langle ef \rangle (\omega+\Gamma_0+G_0 \pm G_1) \pm \langle fg \rangle \langle eg \rangle G_1 \Gamma_1}{(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)(\omega+\Gamma_0+G_0 \pm G_1) \pm \langle fg \rangle^2 \Gamma_1 G_1}$$

$$S_2 = \pm 2\pi T_c \sum_{\omega>0} \frac{\langle eg \rangle}{\omega+\Gamma_0+G_0} \frac{G_1 \langle eg \rangle (\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1) + \langle fg \rangle \langle ef \rangle G_1 \Gamma_1}{(\omega+\Gamma_0+G_0 \pm G_1)(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1) \pm \langle fg \rangle^2 G_1 \Gamma_1}$$

$$S_3 = < e >^2 \left[\Psi\left(\frac{1}{2}\right) - \Psi\left(\frac{1}{2} + \frac{G_0 \pm G_0}{2\pi T_c}\right) \right] \qquad (3.52)$$

กล่าวโดยสรุปคือผลอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็กมีผลต่อเครื่องหมายในเทอมของศักย์กระเจิงของสารเจือประเภทแม่เหล็กเปลี่ยนแปลงนั่นคือเทอมของ $J(k,k')\vec{S}\cdot\vec{\sigma}$ ดังนี้ กรณีที่มีเครื่องหมาย “+” สามารถนิยามศักย์กระเจิงของสารเจือได้เป็น $J(k,k')\vec{S}\cdot\vec{\sigma} \equiv J(k,k')S^z$ สำหรับการอนุรักษ์สปิน และสปินฟลิฟ เขียนได้เป็น $J(k,k')(-i\gamma_\sigma)S^x$ หรือ $J(k,k')S^y$ ในทำนองเดียวกันกรณีที่เครื่องหมายเป็น “-“ อาจนิยามศักย์กระเจิงของสารเจือประเภทแม่เหล็กได้เป็น $J(k,k')\vec{S}\cdot\vec{\sigma} \equiv J(k,k')\gamma_\sigma S^z$ สำหรับการอนุรักษ์สปินและสปินฟลิฟเขียนได้เป็น $J(k,k')S^x$ หรือ $J(k,k')i\gamma_\sigma S^y$ โดยที่ $\gamma_\sigma = +1$ เมื่อสปินขึ้น ($\sigma\uparrow$) และ $\gamma_\sigma = -1$ เมื่อสปินลง ($\sigma\downarrow$) ซึ่งจากการคำนวณหาสมการอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็ก โดยคำนึงถึงผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็กของสารเจือประเภทแม่เหล็กพบว่าถ้าใช้แบบจำลองของฮารานและนาจิซึ่ง คำนึงถึงผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็กกรณีเป็น “-“ จะทำให้เทอม S_3 ในสมการที่(3.52) ยังคงมีอยู่ แต่ถ้าพิจารณาผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็กกรณีเป็น “+” พบว่าเทอม S_3 จะหายไปดังนั้นเครื่องหมาย $\pm$ ในสมการ (3.52) เป็นเครื่องหมายที่แสดงผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็ก สำหรับการกระเจิงลำดับสองของบอร์น ในสารเจือประเภทแม่เหล็ก ซึ่งสมการ (3.49) – (3.52) ยังไม่ได้มีการนำเสนอมาก่อน

3. คำนวณหาสัมประสิทธิ์ไอโซโทป

โดยใช้สมการ

$$\frac{\alpha}{\alpha_o} = \left(\frac{\partial \ln T_c}{\partial \ln M}\right) \bigg/ \left(\frac{\partial \ln T_{co}}{\partial \ln M}\right)$$

$$= \frac{T_{co}}{T_c}\left(\frac{\dfrac{\partial T_c}{\partial \omega_D}}{\dfrac{\partial T_{co}}{\partial T_c}\cdot\dfrac{\partial T_c}{\partial \omega_D}}\right)$$

$$= \frac{T_{co}}{T_c}\cdot\frac{1}{\dfrac{\partial T_{co}}{\partial T_c}}$$

หรือ

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{T_{co}}{T_c}\cdot\frac{\partial T_c}{\partial T_{co}} \tag{3.53}$$

เมื่อ α คือ สัมประสิทธิ์ของไอโซโทปกรณีที่มีสารเจือ

α_o คือ สัมประสิทธิ์ของไอโซโทปกรณีไม่มีสารเจือ

M คือ มวลของไอโซโทปและอยู่ภายใต้เงื่อนไขการสั่นแบบฮาร์โมนิก

T_c คือ อุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือ

T_{co} คือ อุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกรณีไม่มีสารเจือ

สำหรับการคำนวณหาสมการสัมประสิทธิ์ไอโซโทป ในกรณีพิจารณาผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็ก กรณีเครื่องหมายในเทอมของศักย์กระเจิงของสารเจือประเภทแม่เหล็กเป็น “-” ในสมการ (3.41) และ (3.42) สามารถหาสมการสัมประสิทธิ์ไอโซโทปได้ดังนี้

$$\ln\left(\frac{T_c}{T_{co}}\right) = (1-<e>^2)\left[\Psi\left(\frac{1}{2}\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma_0+G_0}{2\pi T_c}\right)\right]+<e>^2\left[\Psi\left(\frac{1}{2}\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{2G_0}{2\pi T_c}\right)\right]+S_1+S_2$$

$$\ln\left(T_c\right) = (1-<e>^2)\left[\Psi\left(\frac{1}{2}\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma_0+G_0}{2\pi T_c}\right)\right]+<e>^2\left[\Psi\left(\frac{1}{2}\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{2G_0}{2\pi T_c}\right)\right]+\ln\left(T_{co}\right)+S_1+S_2$$

$$\frac{\partial}{\partial T_{co}}\ln\left(T_c\right)=(1-<e>^2)\frac{\partial}{\partial T_{co}}\left[\Psi\left(\frac{1}{2}\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma_0+G_0}{2\pi T_c}\right)\right]+<e>^2\frac{\partial}{\partial T_{co}}\left[\Psi\left(\frac{1}{2}\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{2G_0}{2\pi T_c}\right)\right]$$
$$+\frac{\partial}{\partial T_{co}}\ln\left(T_{co}\right)+\frac{\partial}{\partial T_{co}}\left(S_1\right)+\frac{\partial}{\partial T_{co}}\left(S_2\right)$$

$$\frac{1}{T_{co}}=\left\{-\left(1-<e>^2\right)\left[\Psi'\left(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma_0+G_0}{2\pi T_c}\right)\left(\frac{\Gamma_0+G_0}{2\pi T_c^{\,2}}\right)\right]-<e>^2\left[\Psi'\left(\frac{1}{2}+\frac{2G_0}{2\pi T_c}\right)\left(\frac{2G_0}{2\pi T_c^{\,2}}\right)\right]+\frac{1}{T_c}\right\}\frac{\partial T_c}{\partial T_{co}}$$
$$-\frac{\partial}{\partial T_{co}}\left(S_1\right)-\frac{\partial}{\partial T_{co}}\left(S_2\right)$$

(3.54)

พิจารณา

$$S_1=2\pi T_c\sum_{\omega>0}\left(\frac{<ef>}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left(\frac{\Gamma_1<ef>\left(\omega+\Gamma_0+G_0+G_1\right)-\Gamma_1G_1<eg><fg>}{\left(\omega+\Gamma_0+G_0+G_1\right)\left(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1\right)+\Gamma_1G_1<eg><fg>^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial T_{co}}\left(S_1\right)=2\pi T_c\sum_{\omega>0}\left[\pi\left(2n+1\right)\left(\frac{<ef>}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left(\begin{array}{l}\left(\frac{C\Gamma_1<ef>-B\left(\left(\omega+\Gamma_0+G_0+G_1\right)+\left(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1\right)\right)}{C^2}\right)\\-\left(\left(\frac{B}{C}\right)\left(\frac{1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\right)\end{array}\right)\right]\frac{\partial T_c}{\partial T_{co}}$$
$$+2\pi\sum_{\omega>0}\left[\left(\frac{<ef>}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left(\frac{\Gamma_1<ef>\left(\omega+\Gamma_0+G_0+G_1\right)-\Gamma_1G_1<eg><fg>}{\left(\omega+\Gamma_0+G_0+G_1\right)\left(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1\right)+G_1\Gamma_1<fg>^2}\right)\right]\frac{\partial T_c}{\partial T_{co}}$$

(3.55)

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{\partial}{\partial T_{co}}\left(S_2\right)=-2\pi T_c\sum_{\omega>0}\left[\pi\left(2n+1\right)\left(\frac{<eg>}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left(\begin{array}{l}\left(\frac{CG_1<eg>-A\left(\left(\omega+\Gamma_0+G_0+G_1\right)+\left(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1\right)\right)}{C^2}\right)\\-\left(\left(\frac{A}{C}\right)\left(\frac{1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\right)\end{array}\right)\right]\frac{\partial T_c}{\partial T_{co}}$$
$$-2\pi\sum_{\omega>0}\left[\left(\frac{<eg>}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left(\frac{G_1<eg>\left(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1\right)+\Gamma_1G_1<ef><fg>}{\left(\omega+\Gamma_0+G_0+G_1\right)\left(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1\right)+G_1\Gamma_1<fg>^2}\right)\right]\frac{\partial T_c}{\partial T_{co}}$$

(3.56)

โดยที่ $A=G_1<eg>\left(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1\right)+\Gamma_1G_1<ef><fg>$

$B=\Gamma_1<ef>\left(\omega+\Gamma_0+G_0+G_1\right)-\Gamma_1G_1<eg><fg>$

$C=\left(\omega+\Gamma_0+G_0+G_1\right)\left(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1\right)+G_1\Gamma_1<fg>^2$

แทนค่าสมการ (3.55) และ (3.56) ลงในสมการ (3.54) จะได้สมการสัมประสิทธิ์ไอโซโทป กรณีเครื่องหมายในเทอมของศักย์กระเจิงของสารเจือประเภทแม่เหล็กเป็น “-” เขียนได้เป็น

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha_0}{\alpha} &= 1-(1-<e>^2)\left(\Psi'\left(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma_0+G_0}{2\pi T_c}\right)\left(\frac{\Gamma_0+G_0}{2\pi T_c}\right)-<e>^2\Psi'\left(\frac{1}{2}+\frac{2G_0}{2\pi T_c}\right)\left(\frac{2G_0}{2\pi T_c}\right)\right)\\
&-2\pi T_c^{\,2}\sum_{\omega>0}\left[\pi(2n+1)\left(\frac{<ef>}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left(\begin{array}{l}\left(\dfrac{C\Gamma_1<ef>-B\left((\omega+\Gamma_0+G_0+G_1)+(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)\right)}{C^2}\right)\\ -\left(\left(\dfrac{B}{C}\right)\left(\dfrac{1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\right)\end{array}\right)\right]\\
&-2\pi T_c\sum_{\omega>0}\left[\left(\frac{<ef>}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left(\frac{\Gamma_1<ef>(\omega+\Gamma_0+G_0+G_1)-\Gamma_1G_1<eg><fg>}{(\omega+\Gamma_0+G_0+G_1)(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)+G_1\Gamma_1<fg>^2}\right)\right]\\
&+2\pi T_c^{\,2}\sum_{\omega>0}\left[\pi(2n+1)\left(\frac{<eg>}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left(\begin{array}{l}\left(\dfrac{CG_1<eg>-A\left((\omega+\Gamma_0+G_0+G_1)+(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)\right)}{C^2}\right)\\ -\left(\left(\dfrac{A}{C}\right)\left(\dfrac{1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\right)\end{array}\right)\right]\\
&+2\pi T_c\sum_{\omega>0}\left[\left(\frac{<eg>}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left(\frac{G_1<eg>(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)+\Gamma_1G_1<ef><fg>}{(\omega+\Gamma_0+G_0+G_1)(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)+G_1\Gamma_1<fg>^2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

(3.57)

ในทำนองเดียวกัน การคำนวณหาสมการสัมประสิทธิ์ไอโซโทป กรณีเครื่องหมายในเทอมของศักย์กระเจิงของสารเจือประเภทแม่เหล็กเป็น “+” จากสมการ (3.49) และ (3.50) จะได้สัมประสิทธิ์ไอโซโทปเขียนได้เป็น

$$\frac{\alpha_0}{\alpha} = 1-(1-<e>^2)\left(\Psi'\left(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma_0+G_0}{2\pi T_c}\right)\left(\frac{\Gamma_0+G_0}{2\pi T_c}\right)\right)$$
$$-2\pi T_c^{\,2}\sum_{\omega>0}\left[\pi(2n+1)\left(\frac{<ef>}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left(\begin{array}{l}\left(\dfrac{C\Gamma_1<ef>-B\left((\omega+\Gamma_0+G_0-G_1)+(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)\right)}{C^2}\right)\\ -\left(\left(\dfrac{B}{C}\right)\left(\dfrac{1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\right)\end{array}\right)\right]$$
$$-2\pi T_c\sum_{\omega>0}\left[\left(\frac{<ef>}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left(\frac{\Gamma_1<ef>(\omega+\Gamma_0+G_0-G_1)+\Gamma_1G_1<eg><fg>}{(\omega+\Gamma_0+G_0-G_1)(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)-G_1\Gamma_1<fg>^2}\right)\right]$$
$$-2\pi T_c^{\,2}\sum_{\omega>0}\left[\pi(2n+1)\left(\frac{<eg>}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left(\begin{array}{l}\left(\dfrac{CG_1<eg>-A\left((\omega+\Gamma_0+G_0-G_1)+(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)\right)}{C^2}\right)\\ -\left(\left(\dfrac{A}{C}\right)\left(\dfrac{1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\right)\end{array}\right)\right]$$
$$-2\pi T_c\sum_{\omega>0}\left[\left(\frac{<eg>}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left(\frac{G_1<eg>(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)+\Gamma_1G_1<ef><fg>}{(\omega+\Gamma_0+G_0-G_1)(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)-G_1\Gamma_1<fg>^2}\right)\right] \quad (3.58)$$

โดยที่
$$A = G_1<eg>(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)+\Gamma_1G_1<ef><fg>$$
$$B = \Gamma_1<ef>(\omega+\Gamma_0+G_0-G_1)+\Gamma_1G_1<eg><fg>$$
$$C = (\omega+\Gamma_0+G_0-G_1)(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)-G_1\Gamma_1<fg>^2 \quad (3.59)$$

ดังนั้นอาจกล่าวได้ว่า กรณีพิจารณาผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็กสามารถคำนวณหาสมการสัมประสิทธิ์ไอโซโทปเขียนได้เป็น

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha_0}{\alpha} = {} & 1-(1-\langle e\rangle^2)\left(\Psi'\left(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma_0+G_0}{2\pi T_c}\right)\left(\frac{\Gamma_0+G_0}{2\pi T_c}\right)-\langle e\rangle^2\,\Psi'\left(\frac{1}{2}+\frac{G_0\pm G_0}{2\pi T_c}\right)\left(\frac{G_0\pm G_0}{2\pi T_c}\right)\right) \\
& -2\pi T_c^{\,2}\sum_{\omega>0}\left[\pi\left(2n+1\right)\left(\frac{\langle ef\rangle}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left(\left(\frac{C\Gamma_1\langle ef\rangle-B\left(\left(\omega+\Gamma_0+G_0\pm G_1\right)+\left(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1\right)\right)}{C^2}\right)-\left(\left(\frac{B}{C}\right)\left(\frac{1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\right)\right)\right] \\
& -2\pi T_c\sum_{\omega>0}\left[\left(\frac{\langle ef\rangle}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left(\frac{\Gamma_1\langle ef\rangle\left(\omega+\Gamma_0+G_0\pm G_1\right)\pm\Gamma_1G_1\langle eg\rangle\langle fg\rangle}{\left(\omega+\Gamma_0+G_0\pm G_1\right)\left(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1\right)\pm G_1\Gamma_1\langle fg\rangle^2}\right)\right] \\
& \pm 2\pi T_c^{\,2}\sum_{\omega>0}\left[\pi\left(2n+1\right)\left(\frac{\langle eg\rangle}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left(\left(\frac{CG_1\langle eg\rangle-A\left(\left(\omega+\Gamma_0+G_0\pm G_1\right)+\left(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1\right)\right)}{C^2}\right)-\left(\left(\frac{A}{C}\right)\left(\frac{1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\right)\right)\right] \\
& \pm 2\pi T_c\sum_{\omega>0}\left[\left(\frac{\langle eg\rangle}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left(\frac{G_1\langle eg\rangle\left(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1\right)+\Gamma_1G_1\langle ef\rangle\langle fg\rangle}{\left(\omega+\Gamma_0+G_0\pm G_1\right)\left(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1\right)\pm G_1\Gamma_1\langle fg\rangle^2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

(3.60)

จากสมการ (3.60) พบว่าสมการสัมประสิทธิ์ไอโซโทปจะขึ้นกับฟังก์ชัน 4 ฟังก์ชันคือ $n(k)$, $f(k)$, $g(k)$ และ $e(k)$ ซึ่งค่าฟังก์ชันต่างๆ จะแสดงในลำดับต่อไปโดยที่สมการ (3.60) เป็นสมการของสัมประสิทธิ์ไอโซโทปของตัวนำยิ่งยวดที่มีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็ก ซึ่งยังไม่ได้มีการนำเสนอมาก่อน

4. การคำนวณฟังก์ชันการกระเจิงรูปแบบต่าง ๆ

จากการคำนวณหาสมการอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ของไอโซโทปของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็ก พบว่าอุณหภูมิวิกฤตและสัมประสิทธิ์ของไอโซโทปของตัวนำยิ่งยวดขึ้นกับฟังก์ชัน 4 ฟังก์ชันที่ยังไม่ระบุคือ

1. ฟังก์ชันความหนาแน่นสถานะ $n(k)$ ที่เป็นความหนาแน่นสถานะแองเกิลริสอลฝที่ผิวเฟอร์มี

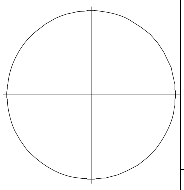
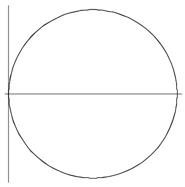
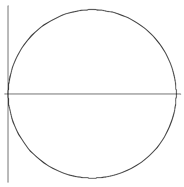
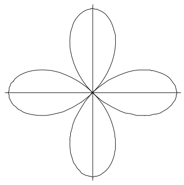
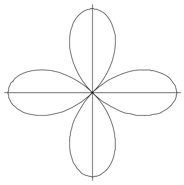
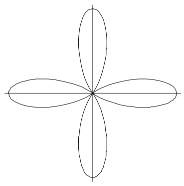
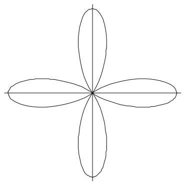
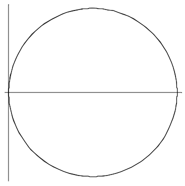
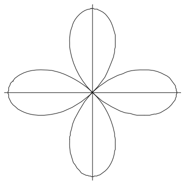
2. ฟังก์ชัน $f(k)$ ที่เป็นฟังก์ชันของการกระเจิงแบบขึ้นกับทิศทาง (anisotropic) เนื่องจากสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก

3. ฟังก์ชัน $g(k)$ ที่เป็นฟังก์ชันของการกระเจิงแบบขึ้นกับทิศทาง (anisotropic) เนื่องจากสารเจือประเภทแม่เหล็ก

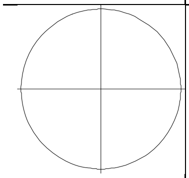
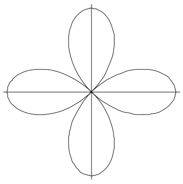
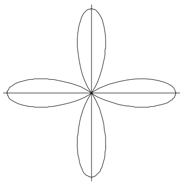
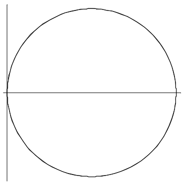
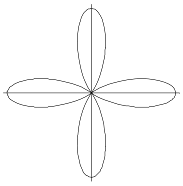
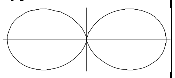
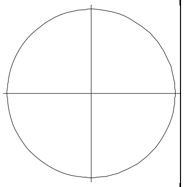
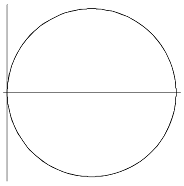
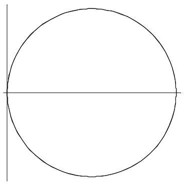
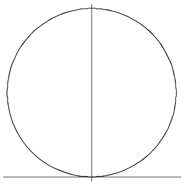
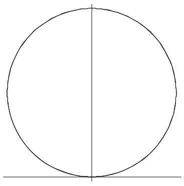
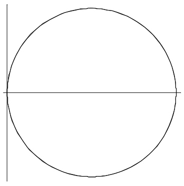
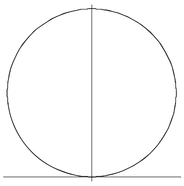
4. ฟังก์ชัน $e(k)$ ซึ่งเป็น เบสิกฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวกเตอร์คลื่นของช่องว่างพลังงาน

ผู้วิจัยได้ทดลองกำหนดฟังก์ชันทั้งสามตามรูปแบบต่างๆ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขตามสมการ (3.9) และสามารถคำนวณค่า $< e >, < ef >, < eg >$ และ $< fg >$ ได้ดังต่อไปนี้

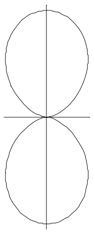
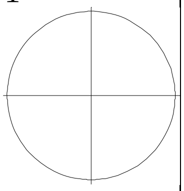
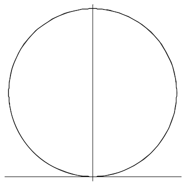
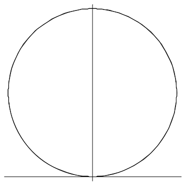
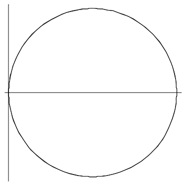
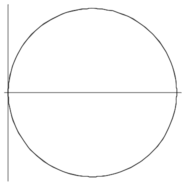
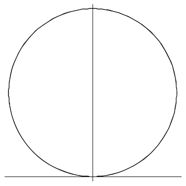
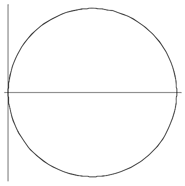
ตาราง 4 แสดงค่าฟังก์ชันการกระเจิงสำหรับช่องว่างพลังงานของตัวนำยิ่งยวดแบบคลื่นเอส

n(ϕ)	e(ϕ)	f(ϕ)	g(ϕ)	<e>	<ef>	<eg>	<fg>
$\frac{1}{2\pi}$	1 	$\sqrt{2}\cos\phi$ 	$\sqrt{2}\cos\phi$ 	1	0	0	1
		$\sqrt{2}\cos 2\phi$ 	$\sqrt{2}\cos 2\phi$ 	1	0	0	1
		$\frac{4}{\sqrt{5}}\cos^3 2\phi$ 	$\frac{4}{\sqrt{5}}\cos^3 2\phi$ 	1	0	0	1
		$\sqrt{2}\cos\phi$ 	$\sqrt{2}\cos 2\phi$ 	1	0	0	0

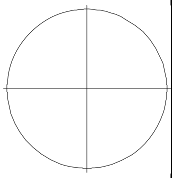
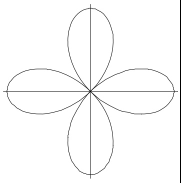
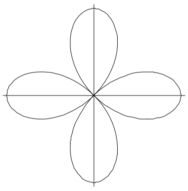
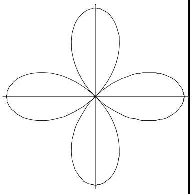
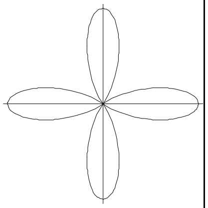
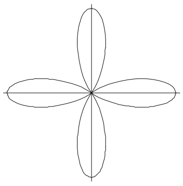
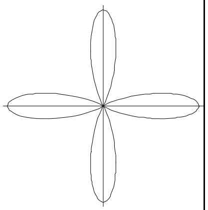
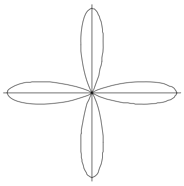
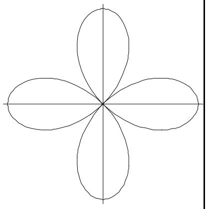
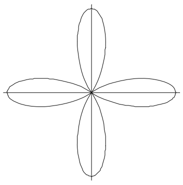
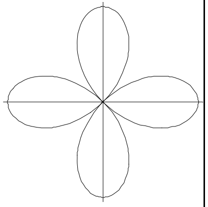
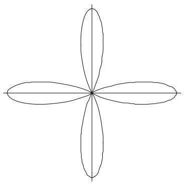
ตาราง 4 แสดงค่าฟังก์ชันการกระเจิงสำหรับช่องว่างพลังงานของตัวนำยิ่งยวดแบบคลื่นเอส (ต่อ)

n(ϕ)	e(ϕ)	f(ϕ)	g(ϕ)	<e>	<ef>	<eg>	<fg>
		$\sqrt{2}\cos 2\phi$ 	$\frac{4}{\sqrt{5}}\cos^3 2\phi$ 	1	0	0	$\frac{3}{\sqrt{10}}$
		$\sqrt{2}\cos\phi$ 	$\frac{4}{\sqrt{5}}\cos^3 2\phi$ 	1	0	0	0
$\frac{1}{\pi}\cos^2\phi$ 	1 	$\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\phi$ 	$\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\phi$ 	1	0	0	1
		$2\sin\phi$ 	$2\sin\phi$ 	1	0	0	1
		$\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\phi$ 	$2\sin\phi$ 	1	0	0	0

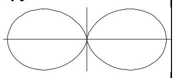
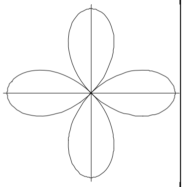
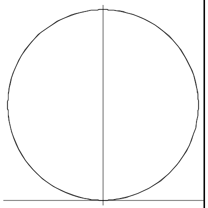
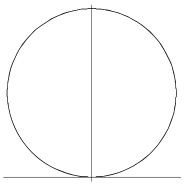
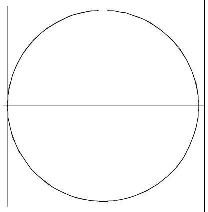
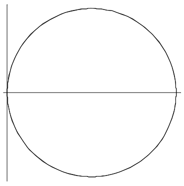
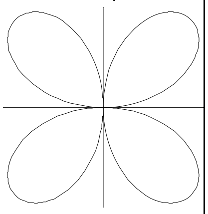
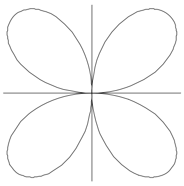
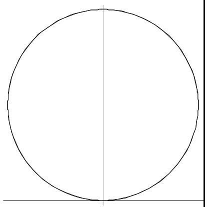
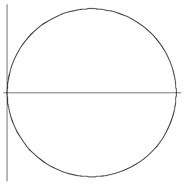
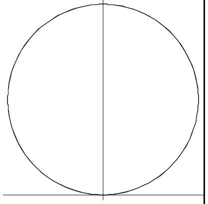
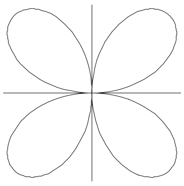
ตาราง 4 แสดงค่าฟังก์ชันการกระเจิงสำหรับช่องว่างพลังงานของตัวนำยิ่งยวดแบบคลื่นเอส (ต่อ)

n(ϕ)	e(ϕ)	f(ϕ)	g(ϕ)	<e>	<ef>	<eg>	<fg>
$\frac{1}{\pi}\sin^2\phi$ 	1 	$\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\phi$ 	$\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\phi$ 	1	0	0	1
		$2\cos\phi$ 	$2\cos\phi$ 	1	0	0	1
		$\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\phi$ 	$2\cos\phi$ 	1	0	0	0

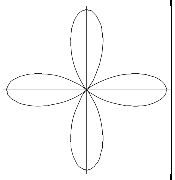
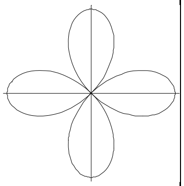
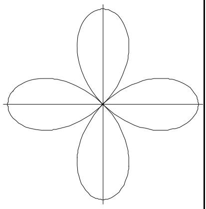
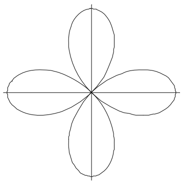
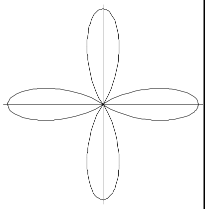
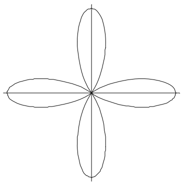
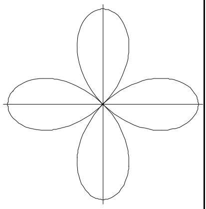
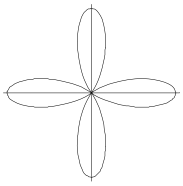
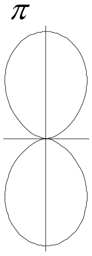
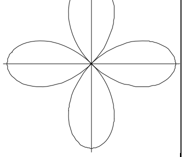
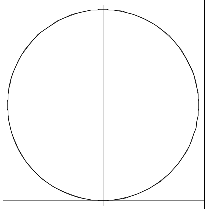
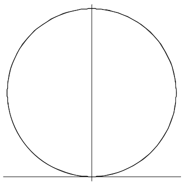
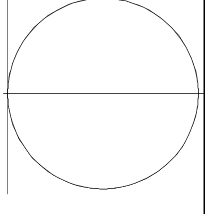
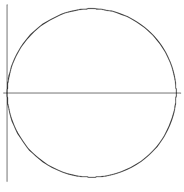
ตาราง 5 แสดงค่าฟังก์ชันการกระเจิงสำหรับช่องว่างพลังงานแบบคลื่น $d_{x^2-y^2}$

n(ϕ)	e(ϕ)	f(ϕ)	g(ϕ)	<e>	<ef>	<eg>	<fg>
$\frac{1}{2\pi}$ 	$\sqrt{2}\cos 2\phi$ 	$\sqrt{2}\cos 2\phi$ 	$\sqrt{2}\cos 2\phi$ 	0	1	1	1
		$\frac{4}{\sqrt{5}}\cos^3 2\phi$ 	$\frac{4}{\sqrt{5}}\cos^3 2\phi$ 	0	$\frac{3}{\sqrt{10}}$	$\frac{3}{\sqrt{10}}$	1
		$\frac{16}{\sqrt{63}}\cos^5 2\phi$ 	$\frac{16}{\sqrt{63}}\cos^5 2\phi$ 	0	$\frac{5}{3}\sqrt{\frac{2}{7}}$	$\frac{5}{3}\sqrt{\frac{2}{7}}$	1
		$\sqrt{2}\cos 2\phi$ 	$\frac{4}{\sqrt{5}}\cos^3 2\phi$ 	0	1	$\frac{3}{\sqrt{10}}$	$\frac{3}{\sqrt{10}}$
		$\sqrt{2}\cos 2\phi$ 	$\frac{16}{\sqrt{63}}\cos^5 2\phi$ 	0	1	$\frac{5}{3}\sqrt{\frac{2}{7}}$	$\frac{5}{3}\sqrt{\frac{2}{7}}$

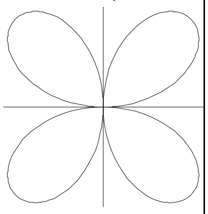
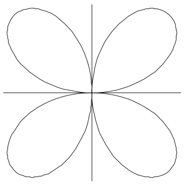
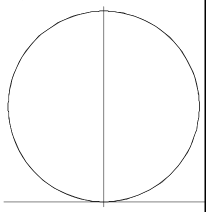
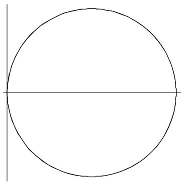
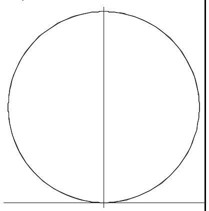
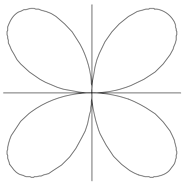
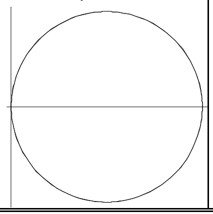
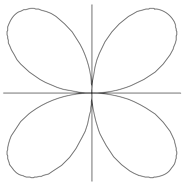
ตาราง 5 แสดงค่าฟังก์ชันการกระเจิงสำหรับช่องว่างพลังงานแบบคลื่น $d_{x^2-y^2}$ (ต่อ)

n(ϕ)	e(ϕ)	f(ϕ)	g(ϕ)	<e>	<ef>	<eg>	<fg>
$\frac{1}{\pi}\cos^2\phi$ 	$\sqrt{2}\cos 2\phi$ 	$2\sin\phi$ 	$2\sin\phi$ 	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	1
		$\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\phi$ 	$\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\phi$ 	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	1
		$\sqrt{2}\sin 2\phi$ 	$\sqrt{2}\sin 2\phi$ 	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	1
		$2\sin\phi$ 	$\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\phi$ 	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0
		$2\sin\phi$ 	$\sqrt{2}\sin 2\phi$ 	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0

ตาราง 5 แสดงค่าฟังก์ชันการกระเจิงสำหรับช่องว่างพลังงานแบบคลื่น $d_{x^2-y^2}$ (ต่อ)

n(ϕ)	e(ϕ)	f(ϕ)	g(ϕ)	<e>	<ef>	<eg>	<fg>
$\frac{1}{\pi}\cos^2 2\phi$ 	$\frac{2}{\sqrt{3}}\cos 2\phi$ 	$\frac{2}{\sqrt{3}}\cos 2\phi$ 	$\frac{2}{\sqrt{3}}\cos 2\phi$ 	0	1	1	1
		$\frac{8}{\sqrt{35}}\cos^3 2\phi$ 	$\frac{8}{\sqrt{35}}\cos^3 2\phi$ 	0	$2\sqrt{\frac{5}{21}}$	$2\sqrt{\frac{5}{21}}$	1
		$\frac{2}{\sqrt{3}}\cos 2\phi$ 	$\frac{8}{\sqrt{35}}\cos^3 2\phi$ 	0	1	$2\sqrt{\frac{5}{21}}$	$2\sqrt{\frac{5}{21}}$
$\frac{1}{\pi}\sin^2 \phi$ 	$\sqrt{2}\cos 2\phi$ 	$\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\phi$ 	$\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\phi$ 	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	1
		$2\cos\phi$ 	$2\cos\phi$ 	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	1

ตาราง 5 แสดงค่าฟังก์ชันการกระเจิงสำหรับช่องว่างพลังงานแบบคลื่น $d_{x^2-y^2}$ (ต่อ)

n(ϕ)	e(ϕ)	f(ϕ)	g(ϕ)	<e>	<ef>	<eg>	<fg>
		$\sqrt{2}\sin 2\phi$ 	$\sqrt{2}\sin 2\phi$ 	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	1
		$\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\phi$ 	$2\cos\phi$ 	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0
		$\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\phi$ 	$\sqrt{2}\sin 2\phi$ 	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0
		$2\cos\phi$ 	$\sqrt{2}\sin 2\phi$ 	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0

บทที่ 4
ผลการคำนวณและการวิเคราะห์

จากการวิจัยเพื่อหาอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดี กรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็ก โดยคำนึงถึงอิทธิพลการกระเจิงของศักย์ของสารเจือที่ขึ้นกับเวกเตอร์คลื่นและพิจารณาผลของผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็ก ดังในบทที่ 3 จะได้สมการที่ใช้คำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตคือ

$$\ln\left(\frac{T_c}{T_{c0}}\right)=\left(1-\langle e\rangle^2\right)\left[\Psi\left(\frac{1}{2}\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma_0+G_0}{2\pi T_c}\right)\right]+S_1+S_2+S_3 \qquad (4.1)$$

โดยที่

$$S_1=2\pi T_c\sum_{\omega>0}\frac{\langle ef\rangle}{\omega+\Gamma_0+G_0}\frac{\Gamma_1\langle ef\rangle(\omega+\Gamma_0+G_0\pm G_1)\pm\langle fg\rangle\langle eg\rangle G_1\Gamma_1}{(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)(\omega+\Gamma_0+G_0\pm G_1)\pm\langle fg\rangle^2\Gamma_1G_1}$$

$$S_2=\pm 2\pi T_c\sum_{\omega>0}\frac{\langle eg\rangle}{\omega+\Gamma_0+G_0}\frac{G_1\langle eg\rangle(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)+\langle fg\rangle\langle ef\rangle G_1\Gamma_1}{(\omega+\Gamma_0+G_0\pm G_1)(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)\pm\langle fg\rangle^2G_1\Gamma_1}$$

$$S_3=<e>^2\left[\Psi\left(\frac{1}{2}\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{G_0\pm G_0}{2\pi T_c}\right)\right]$$

(4.2)

เมื่อ T_c คืออุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดี กรณีมีสารเจือ

T_{co} คืออุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดี กรณีไม่มีสารเจือ

Γ_0 คือความเข้มข้นของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กแบบไม่ขึ้นกับทิศทาง

G_0 คือความเข้มข้นของสารเจือประเภทแม่เหล็กแบบไม่ขึ้นกับทิศทาง

Γ_1 คือความเข้มข้นของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กแบบขึ้นกับทิศทาง

G_1 คือความเข้มข้นของสารเจือประเภทแม่เหล็กแบบขึ้นกับทิศทาง

ω คือ renormalized Matsubara frequency

$e(k)$ คือ Basis fuction ที่ขึ้นกับเวกเตอร์คลื่น

$f(k)$ คือ ฟังก์ชันของการกระเจิงแบบขึ้นกับทิศทาง(anisotropic) เนื่องจากสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก

$g(k)$ คือฟังก์ชันของการกระเจิงแบบขึ้นกับทิศทาง(anisotropic) เนื่องจากสารเจือประเภทแม่เหล็ก

$\Psi(x)$ คือสมการไดแกมมาฟังก์ชัน

และจากสมการอุณหภูมิวิกฤตสามารถคำนวณหาสมการสัมประสิทธิ์ไอโซโทปได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\frac{\alpha_0}{\alpha} &= 1-(1-<e>^2)\left(\Psi'\left(\frac{1}{2}+\frac{\Gamma_0+G_0}{2\pi T_c}\right)\left(\frac{\Gamma_0+G_0}{2\pi T_c}\right)-<e>^2\,\Psi'\left(\frac{1}{2}+\frac{G_0\pm G_0}{2\pi T_c}\right)\left(\frac{G_0\pm G_0}{2\pi T_c}\right)\right)\\
&-2\pi T_c^{\,2}\sum_{\omega>0}\left[\pi(2n+1)\left(\frac{<ef>}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left(\begin{array}{l}\left(\dfrac{C\Gamma_1<ef>-B\big((\omega+\Gamma_0+G_0\pm G_1)+(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)\big)}{C^2}\right)\\ -\left(\left(\dfrac{B}{C}\right)\left(\dfrac{1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\right)\end{array}\right)\right]\\
&-2\pi T_c\sum_{\omega>0}\left[\left(\frac{<ef>}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left(\frac{\Gamma_1<ef>(\omega+\Gamma_0+G_0\pm G_1)\pm\Gamma_1 G_1<eg><fg>}{(\omega+\Gamma_0+G_0\pm G_1)(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)\pm G_1\Gamma_1<fg>^2}\right)\right]\\
&\pm 2\pi T_c^{\,2}\sum_{\omega>0}\left[\pi(2n+1)\left(\frac{<eg>}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left(\begin{array}{l}\left(\dfrac{CG_1<eg>-A\big((\omega+\Gamma_0+G_0\pm G_1)+(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)\big)}{C^2}\right)\\ -\left(\left(\dfrac{A}{C}\right)\left(\dfrac{1}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\right)\end{array}\right)\right]\\
&\pm 2\pi T_c\sum_{\omega>0}\left[\left(\frac{<eg>}{\omega+\Gamma_0+G_0}\right)\left(\frac{G_1<eg>(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)+\Gamma_1 G_1<ef><fg>}{(\omega+\Gamma_0+G_0\pm G_1)(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)\pm G_1\Gamma_1<fg>^2}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

เมื่อ

$$
\begin{aligned}
A &= G_1<eg>(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)+\Gamma_1 G_1<ef><fg>\\
B &= \Gamma_1<ef>(\omega+\Gamma_0+G_0\pm G_1)\pm\Gamma_1 G_1<eg><fg>\\
C &= (\omega+\Gamma_0+G_0\pm G_1)(\omega+\Gamma_0+G_0-\Gamma_1)\pm G_1\Gamma_1<fg>^2
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

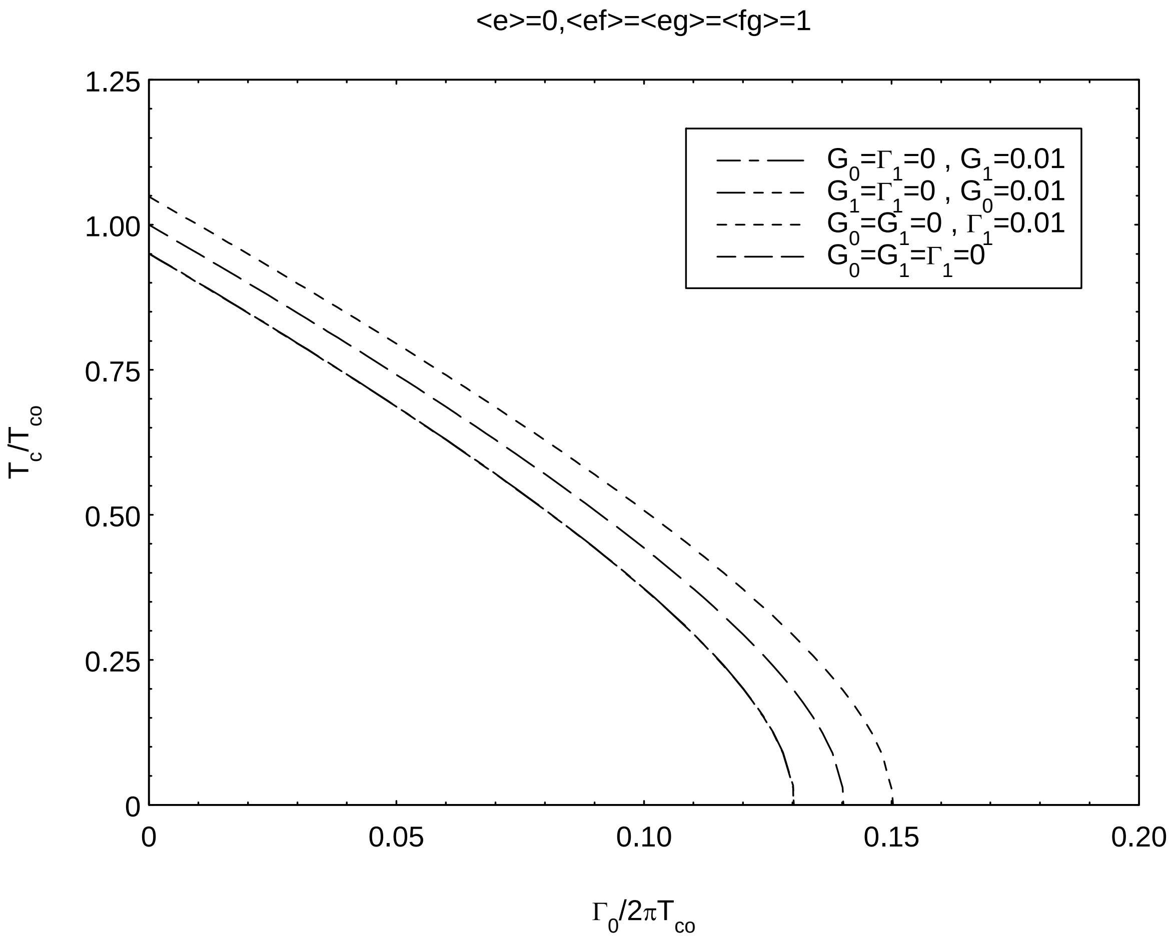
โดยที่ α คือสัมประสิทธิ์ของไอโซโทปกรณีที่มีสารเจือ

α_0 คือสัมประสิทธิ์ของไอโซโทปกรณีไม่มีสารเจือ

โดยที่เครื่องหมาย $\pm$ ที่ปรากฏในสมการ (4.1) - (4.4) เป็นผลเนื่องจากการพิจารณาการเปลี่ยนเครื่องหมายในเทอมศักย์กระเจิงของสารเจือประเภทแม่เหล็กเนื่องจากผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็ก

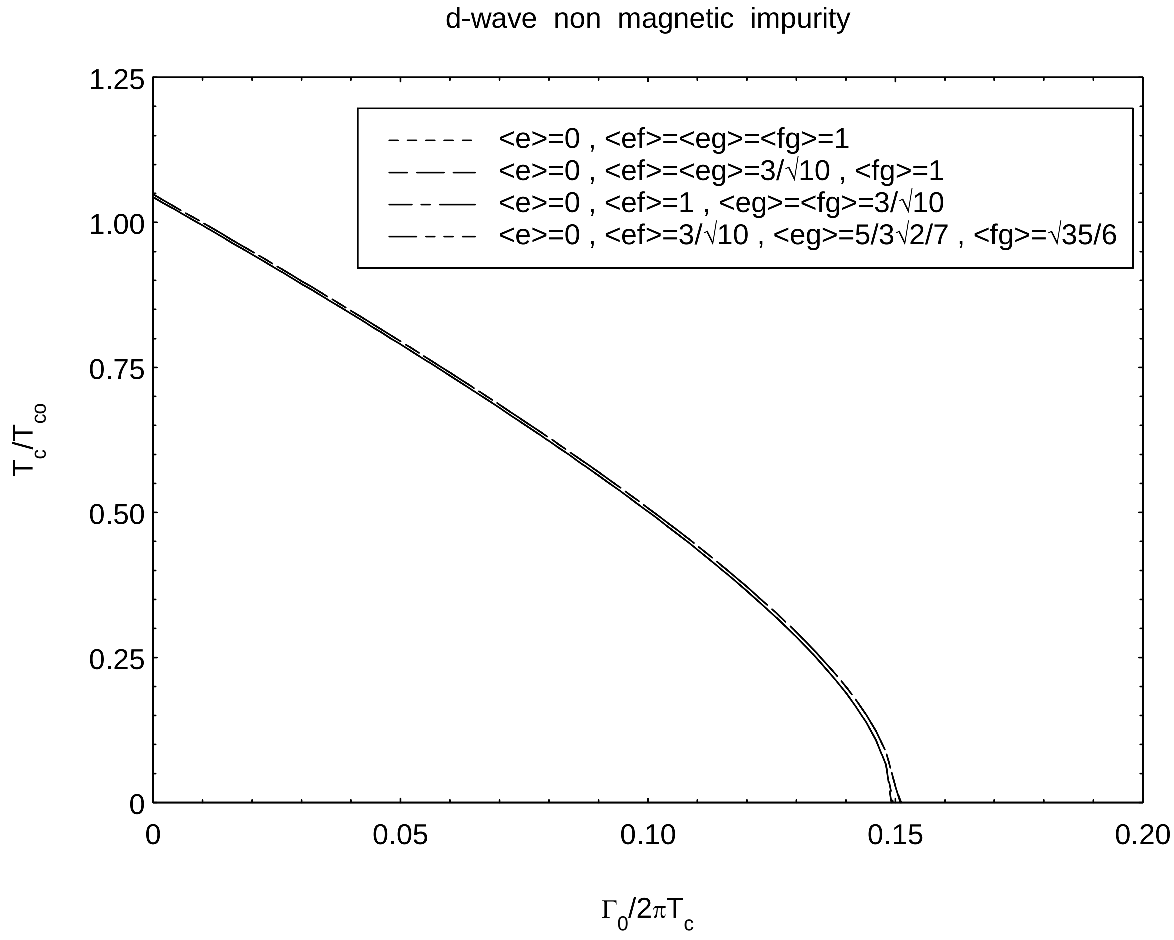
ผลการวิเคราะห์

ในการวิจัยในบทนี้ได้พัฒนาโปรแกรมการคำนวณโดยใช้โปรแกรมแมธิแมทธิคา (Mathematica) เพื่อคำนวณหาความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มข้นของสารเจือกับอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็ก ดังสมการที่ (4.1) – (4.2) และความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือกับสัมประสิทธิ์ไอโซโทปดังสมการ ที่ (4.3) – (4.4) ซึ่งสามารถเขียนความสัมพันธ์ของค่าต่างๆ ได้ดังภาพประกอบต่อไปนี้



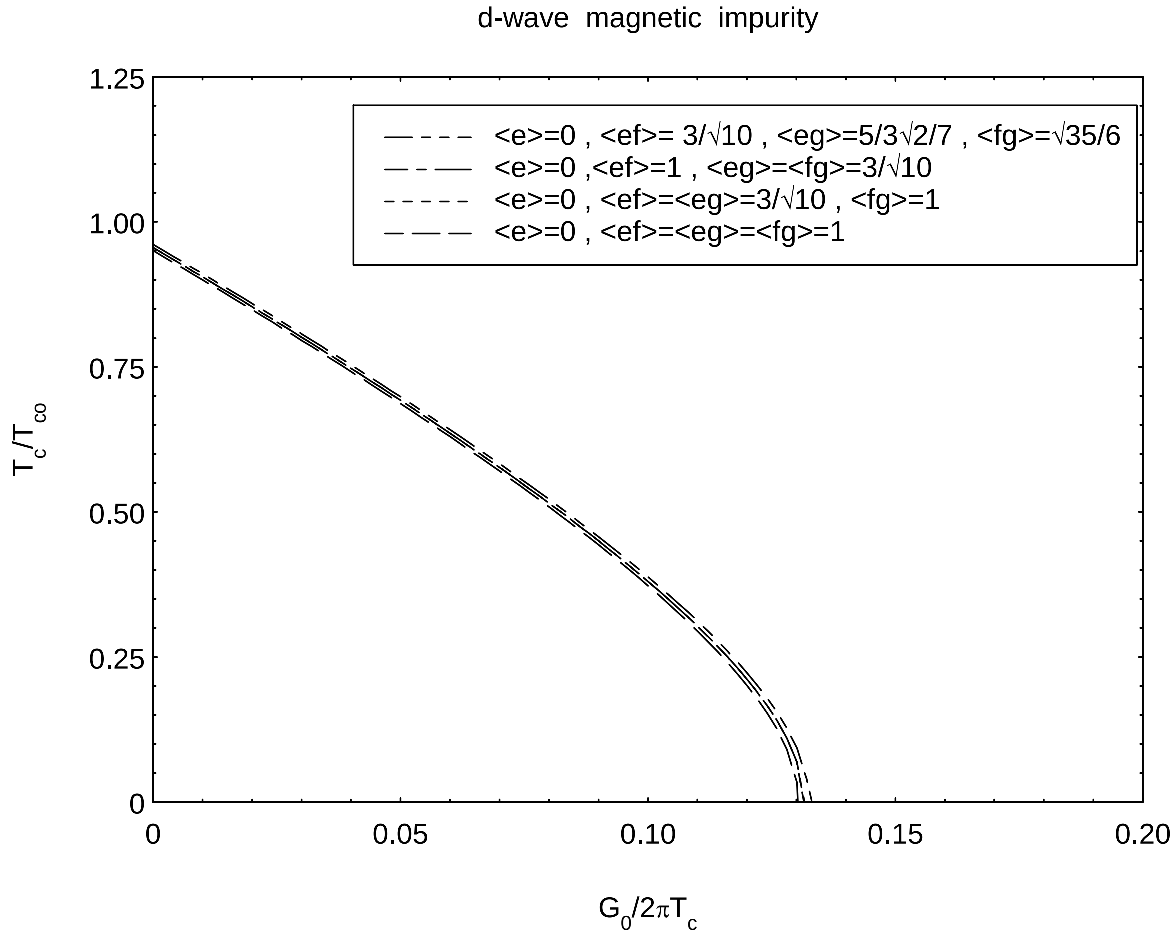
ภาพประกอบ 24 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤต (T_c / T_{co}) ของตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดีกับความเข้มข้นของสารเจือ ใช้พารามิเตอร์ $\omega_D = 500$ กรณีเครื่องหมายศักย์กระเจิงของสารเจือประเภทแม่เหล็กเป็น “-“

จากภาพประกอบ 24 อุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือทั้งประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็กมีค่าขึ้นอยู่กับปริมาณและชนิดของสารเจือซึ่งเป็นแบบจำลองของฮารานและนาจิ เมื่อพิจารณาผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็ก



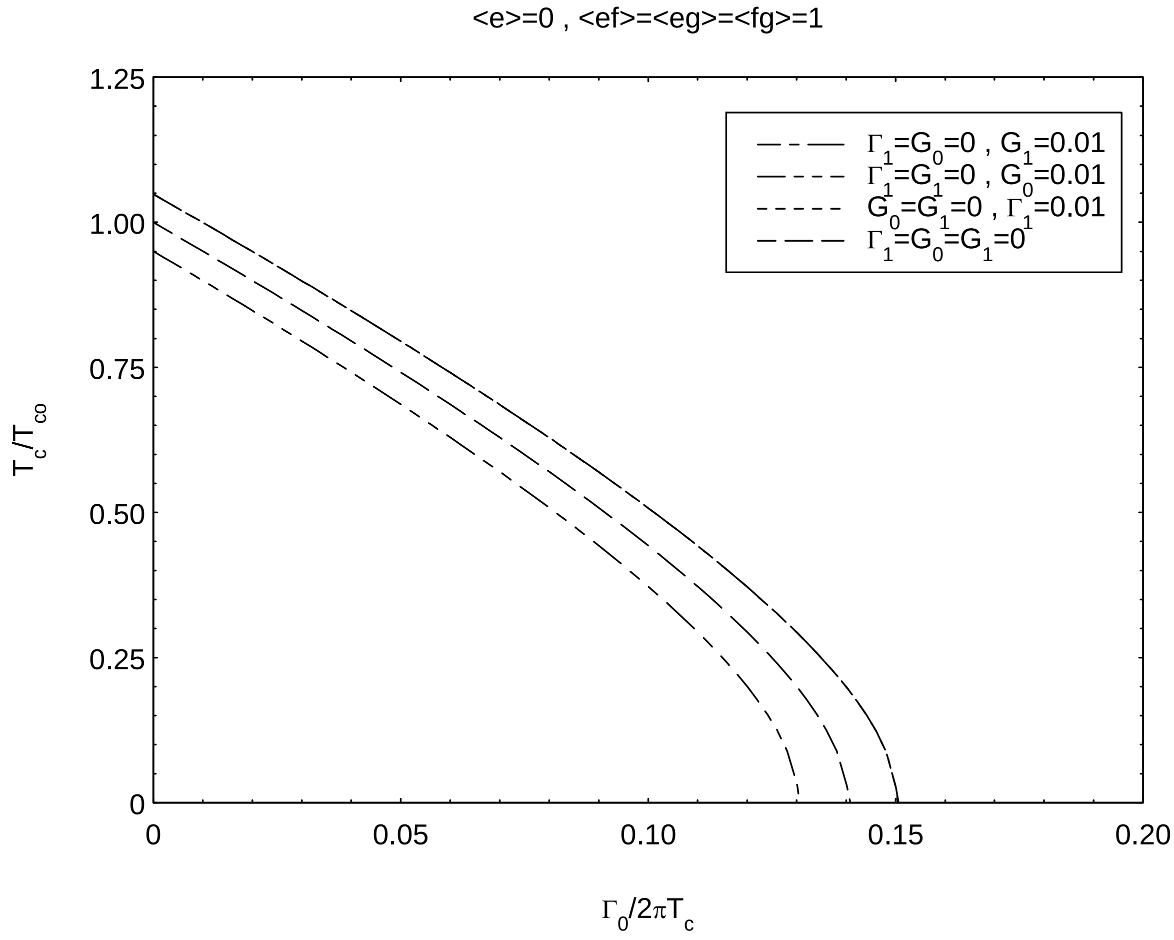
ภาพประกอบ 25 แสดงผลของฟังก์ชันการกระเจิงค่าต่างๆ ที่มีผลต่ออุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดีกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กใช้พารามิเตอร์ $\omega_D = 500$, $\Gamma_0 = \Gamma_1 = 0.01$ และ $G_0 = G_1 = 0$ กรณีเครื่องหมายศักย์กระเจิงของสารเจือประเภทแม่เหล็กเป็น “-“

จากภาพประกอบ 25 ฟังก์ชันของการกระเจิง คือ <e> , <ef> , <eg> , <fg> มีผลต่ออุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กเหมือนกัน ซึ่งเป็นแบบจำลองของฮารานและนาจิ เมื่อพิจารณาผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็ก



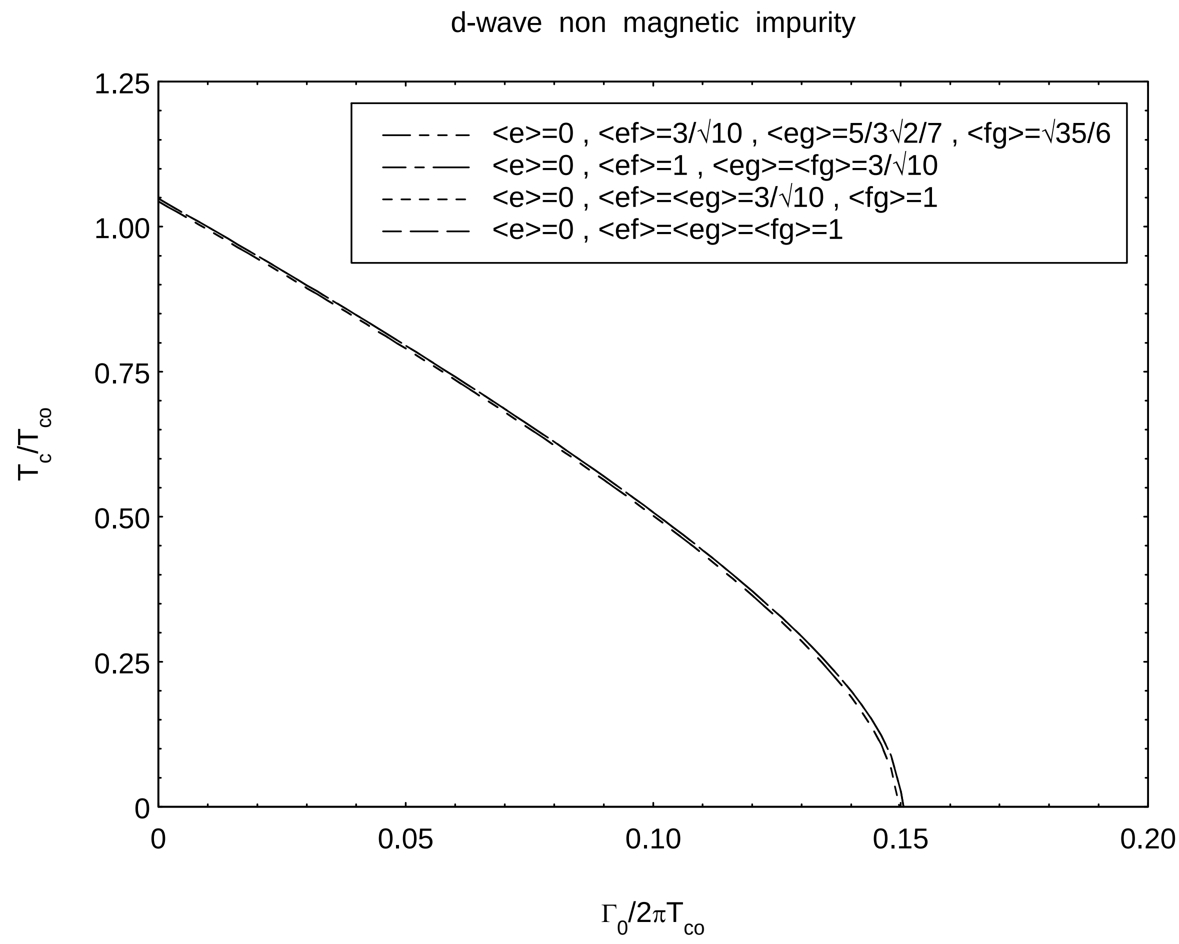
ภาพประกอบ 26 แสดงผลของฟังก์ชันการกระเจิงค่าต่างๆ ที่มีผลต่ออุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดีกรณีมีสารเจือประเภทแม่เหล็ก ใช้พารามิเตอร์ $\omega_D = 500$, $G_0 = G_1 = 0.01$ และ $\Gamma_0 = \Gamma_1 = 0$ กรณีเครื่องหมายศักย์กระเจิงของสารเจือประเภทแม่เหล็กเป็น “-“

จากภาพประกอบ 26 ฟังก์ชันของการกระเจิง คือ <e> , <ef> , <eg> , <fg> มีผลต่ออุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือประเภทแม่เหล็กเหมือนกัน ซึ่งเป็นแบบจำลองของฮารานและนาจิ เมื่อพิจารณาผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็ก



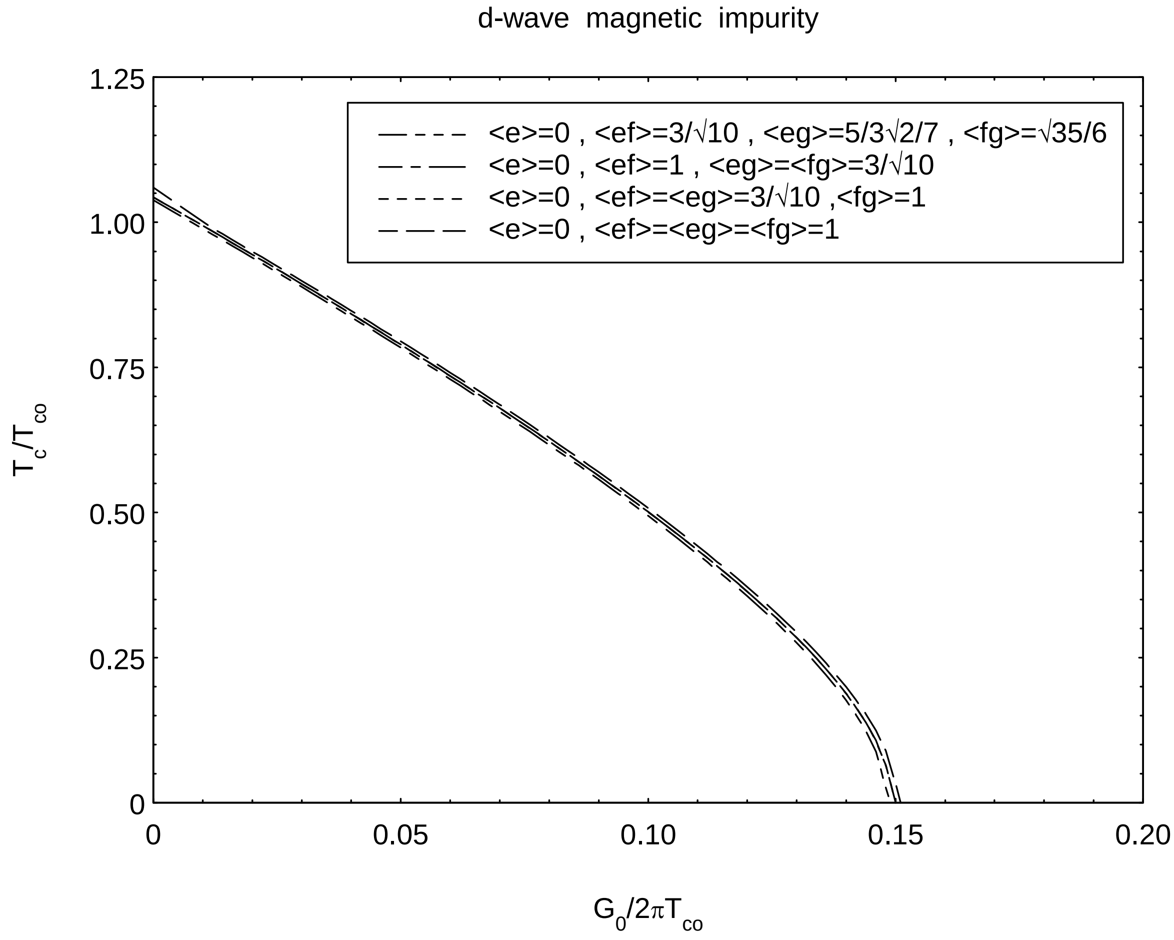
ภาพประกอบ 27 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤต (T_c/T_{co}) ของตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดี กับความเข้มข้นของสารเจือ ใช้พารามิเตอร์ $\omega_D = 500$ กรณีเครื่องหมายศักย์กระเจิงของสารเจือประเภทแม่เหล็กเป็น "+"

จากภาพประกอบ 27 อุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือทั้งประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็กมีค่าขึ้นอยู่กับปริมาณและชนิดของสารเจือ เมื่อพิจารณาผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็ก



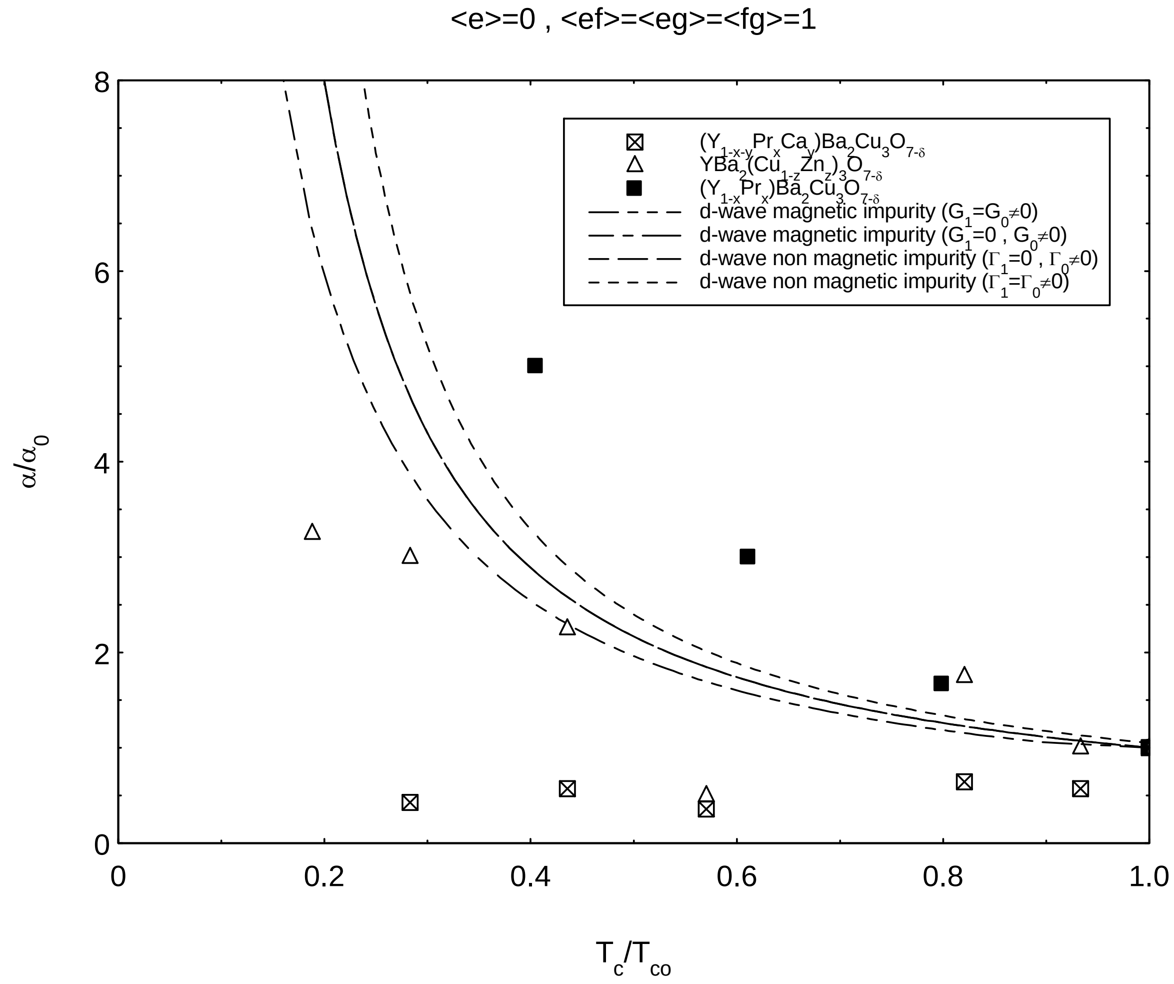
ภาพประกอบ 28 แสดงผลของฟังก์ชันการกระเจิงค่าต่างๆ ที่มีผลต่ออุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดีกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กใช้พารามิเตอร์ $\omega_D = 500$, $\Gamma_0 = \Gamma_1 = 0.01$ และ $G_0 = G_1 = 0$ กรณีเครื่องหมายศักย์กระเจิงของสารเจือประเภทแม่เหล็กเป็น "+"

จากภาพประกอบ 28 ฟังก์ชันของการกระเจิง คือ <e> , <ef> , <eg> , <fg> มีผลต่ออุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กเหมือนกัน เมื่อพิจารณาผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็ก



ภาพประกอบ 29 แสดงผลของฟังก์ชันการกระเจิงค่าต่าง ๆ ที่มีผลต่ออุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดีกรณีมีสารเจือประเภทแม่เหล็ก ใช้พารามิเตอร์ $\omega_D = 500$, $G_0 = G_1 = 0.01$ และ $\Gamma_0 = \Gamma_1 = 0$ กรณีเครื่องหมายศักย์กระเจิงของสารเจือประเภทแม่เหล็กเป็น “+”

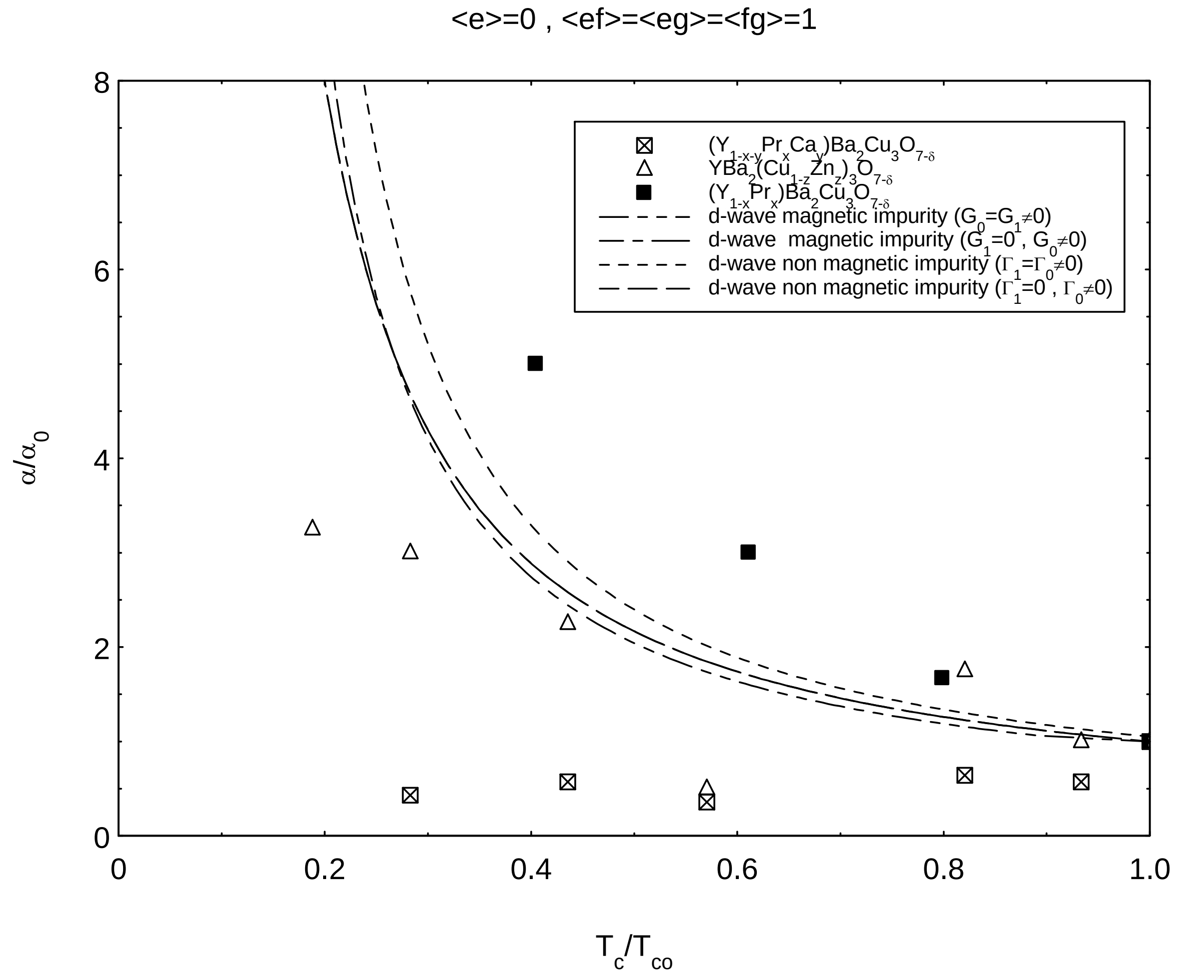
จากภาพประกอบ 29 ฟังก์ชันของการกระเจิง คือ <e> , <ef> , <eg> , <fg> มีผลต่ออุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือประเภทแม่เหล็กเหมือนกัน เมื่อพิจารณาผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็ก



ภาพประกอบ 30 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ไอโซโทป(α/α_0) กับอุณหภูมิวิกฤต (T_c/T_{co}) ของตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดี กรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็ก เปรียบเทียบกับผลการทดลองกรณีเครื่องหมายศักย์กระเจิงของสารเจือประเภทแม่เหล็กเป็น “-”

จากภาพประกอบ 30 สัมประสิทธิ์ไอโซโทปมีค่าแปรผกผันกับอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือทั้งประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็กโดยมีค่าขึ้นอยู่กับชนิดของสารเจือซึ่งเป็นแบบจำลองของฮารานและนาจิ เมื่อพิจารณาผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็ก กรณีเครื่องหมายศักย์กระเจิงของสารเจือประเภทแม่เหล็กเป็น “-” และใช้พารามิเตอร์สำหรับตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดีดังนี้คือ

- กรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก $\Gamma_0 = \Gamma_1 = 0.01,\ G_0 = G_1 = 0$
- กรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กแบบไม่ขึ้นกับทิศทาง $\Gamma_0 = 0.01,$ $\Gamma_1 = G_0 = G_1 = 0$
- กรณีมีสารเจือประเภทแม่เหล็ก $G_0 = G_1 = 0.01,\ \Gamma_0 = \Gamma_1 = 0$
- กรณีมีสารเจือประเภทแม่เหล็กแบบไม่ขึ้นกับทิศทาง $G_0 = 0.01,\ G_1 = \Gamma_0 = \Gamma_1 = 0$



ภาพประกอบ 31 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ไอโซโทป(α/α_0) กับอุณหภูมิวิกฤต (T_c/T_{co}) ของตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดี กรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็กเปรียบเทียบกับผลการทดลอง กรณีเครื่องหมายศักย์กระเจิงของสารเจือประเภทแม่เหล็กเป็น “+”

จากภาพประกอบ 31 สัมประสิทธิ์ไอโซโทปมีค่าแปรผกผันกับอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือทั้งประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็กโดยมีค่าขึ้นอยู่กับชนิดของสารเจือซึ่งเป็นแบบจำลองของฮารานและนาจิ เมื่อพิจารณาผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็ก กรณีเครื่องหมายศักย์กระเจิงของสารเจือประเภทแม่เหล็กเป็น “-” และใช้พารามิเตอร์สำหรับตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นดีดังนี้คือ

- กรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก $\Gamma_0 = \Gamma_1 = 0.01,\ G_0 = G_1 = 0$
- กรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กแบบไม่ขึ้นกับทิศทาง $\Gamma_0 = 0.01,$ $\Gamma_1 = G_0 = G_1 = 0$
- กรณีมีสารเจือประเภทแม่เหล็ก $G_0 = G_1 = 0.01,\ \Gamma_0 = \Gamma_1 = 0$
- กรณีมีสารเจือประเภทแม่เหล็กแบบไม่ขึ้นกับทิศทาง $G_0 = 0.01,\ G_1 = \Gamma_0 = \Gamma_1 = 0$

บทที่ 5
สรุป อภิปรายผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ

สรุปผลการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้คำนวณหาสมการอุณหภูมิวิกฤตและสมการสัมประสิทธิ์ของไอโซโทป โดยศึกษากรณีตัวนำยิ่งยวด มีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็กซึ่งสารเจือเป็นแบบไม่ขึ้นกับทิศทางและขึ้นกับทิศทาง โดยคำนึงถึงผลของโมเมนตัมของศักย์กระเจิงของสารเจือ ที่พิจารณาผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็ก โดยมีขั้นตอนการคำนวณดังนี้

1. ใช้กรีนส์ฟังก์ชันคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดที่มีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็ก
2. นำสมการอุณหภูมิวิกฤตที่ได้คำนวณหาสมการสัมประสิทธิ์ของไอโซโทปจากการหาอนุพันธ์
3. คำนวณฟังก์ชันการกระเจิงในรูปแบบต่างๆ
4. ใช้โปรแกรมแมธิแมทิคา เพื่อคำนวณหาความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มข้นของสารเจือกับอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดและความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกับสัมประสิทธิ์ของไอโซโทป กรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็ก

อภิปรายผลการวิจัย

จากการคำนวณหาสมการอุณหภูมิวิกฤตและสมการสัมประสิทธิ์ของไอโซโทปกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็กซึ่งสารเจือเป็นแบบขึ้นกับทิศทางและไม่ขึ้นกับทิศทาง โดยคำนึงถึงผลของโมเมนตัมของศักย์กระเจิงของสารเจือ ที่พิจารณาผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็ก และใช้โปรแกรมแมธิแมทิคา คำนวณหาความสัมพันธ์ระหว่างความเข้มข้นของสารเจือกับอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดและความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดกับสัมประสิทธิ์ไอโซโทปกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็ก พบว่า

1. สารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็กซึ่งสารเจือเป็นแบบไม่ขึ้นกับทิศทาง เมื่อพิจารณาผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็ก กรณีเครื่องหมายศักย์กระเจิงของสารเจือประเภทแม่เหล็กเป็น "-" ซึ่งเป็นแบบจำลองของฮารานและนาจิ มีผลทำให้อุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวด มีค่าลดลงขึ้นอยู่กับปริมาณของสารเจือเช่นเดียวกันทั้งสารเจือประเภทแม่เหล็กและไม่เป็นแม่เหล็ก สำหรับสารเจือประเภทแม่เหล็กทั้งแบบขึ้นกับทิศทางและไม่

บริสุทธิ์ได้ ($T_c > T_{co}$) ดังภาพประกอบ 24 สำหรับค่าต่าง ๆ ของฟังก์ชันการกระเจิงกรณีสารเจือประเภทแม่เหล็กและประเภทไม่เป็นแม่เหล็กคือ <ef> , <eg> และ <fg> มีผลต่ออุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดเช่นเดียวกัน ดังภาพประกอบ 25 - 26

2. สารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็กซึ่งสารเจือเป็นแบบไม่ขึ้นกับทิศทาง เมื่อพิจารณาผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็ก กรณีเครื่องหมายศักย์กระเจิงของสารเจือประเภทแม่เหล็กเป็น “+” มีผลทำให้อุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวด มีค่าลดลงขึ้นอยู่กับปริมาณของสารเจือเช่นเดียวกันทั้งสารเจือประเภทแม่เหล็กและไม่เป็นแม่เหล็กสำหรับสารเจือประเภทแม่เหล็กแบบไม่ขึ้นกับทิศทางทำให้อุณหภูมิวิกฤตลดลงมาก และสารเจือประเภทแม่เหล็กและไม่เป็นแม่เหล็กแบบขึ้นกับทิศทางให้ผลเช่นเดียวกันคือ ทำให้อุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดมีค่ามากกว่าตัวนำยิ่งยวดบริสุทธิ์ได้ ($T_c > T_{co}$) ดังภาพประกอบ 27 สำหรับค่าต่าง ๆ ของฟังก์ชันการกระเจิงกรณีสารเจือประเภทแม่เหล็กและประเภทไม่เป็นแม่เหล็กคือ <ef> , <eg> และ <fg> มีผลต่ออุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดเช่นเดียวกัน ดังภาพประกอบ 28 - 29

3. สัมประสิทธิ์ของไอโซโทปมีค่าขึ้นอยู่กับอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวด คือ ค่าอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดมีค่ามากค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปจะมีค่าลดลง โดยจะมีค่าลดลงแตกต่างกันเมื่อตัวนำยิ่งยวดมีสารเจือประเภทต่าง ๆ เมื่อพิจารณาผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็ก กรณีเครื่องหมายศักย์กระเจิงของสารเจือประเภทแม่เหล็กเป็น “-” ดังนี้ กรณีตัวนำยิ่งยวดมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กแบบไม่ขึ้นกับทิศทาง มีผลเช่นเดียวกับสารเจือประเภทแม่เหล็กแบบไม่ขึ้นกับทิศทาง สำหรับตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือประเภทแม่เหล็กแบบขึ้นกับทิศทางทำให้ค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปลดลงมากกว่าตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กแบบขึ้นกับทิศทาง ดังภาพประกอบ 30 โดยเปรียบเทียบกับผลการทดลอง ซึ่งค่าต่าง ๆ ของฟังก์ชันการกระเจิงกรณีสารเจือประเภทแม่เหล็กและประเภทไม่เป็นแม่เหล็กคือ <ef> , <eg> และ <fg> มีผลต่อค่าสัมประสิทธิ์ของไอโซโทปเช่นเดียวกัน

4. สัมประสิทธิ์ของไอโซโทปมีค่าขึ้นอยู่กับอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวด คือ ค่าอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดมีค่ามากค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปจะมีค่าลดลง โดยจะมีค่าลดลงแตกต่างกันเมื่อตัวนำยิ่งยวดมีสารเจือประเภทต่าง ๆ เมื่อพิจารณาผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็ก กรณีเครื่องหมายศักย์กระเจิงของสารเจือประเภทแม่เหล็กเป็น “+” ดังนี้ กรณีตัวนำยิ่งยวดมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กแบบไม่ขึ้นกับทิศทาง มีผลเช่นเดียวกับสารเจือประเภทแม่เหล็กแบบไม่ขึ้นกับทิศทางและแบบขึ้นกับทิศทาง สำหรับตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กทำให้ค่าสัมประสิทธิ์ไอโซโทปลดลงน้อยกว่ากรณีอื่นที่กล่าวมาแล้วข้างต้น ดังภาพประกอบ 31 โดยเปรียบเทียบกับผลการทดลอง ซึ่งค่าต่าง ๆ ของฟังก์ชันการกระเจิงกรณีสารเจือประเภทแม่เหล็กและประเภทไม่เป็นแม่เหล็กคือ <ef> , <eg> และ <fg> มีผลต่อค่าสัมประสิทธิ์ของไอโซโทปเช่นเดียวกัน

ข้อเสนอแนะ

งานวิจัยนี้ได้คำนวณหาสมการอุณหภูมิวิกฤตและสมการสัมประสิทธิ์ของไอโซโทปของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็ก โดยคำนึงถึงคำนึงถึงผลของโมเมนตัมของศักย์กระเจิงของสารเจือ เมื่อพิจารณาผลของอันตรกิริยาแลกเปลี่ยนสปินของสารเจือประเภทแม่เหล็ก ซึ่งสอดคล้องกับผลการทดลองตัวนำยิ่งยวดที่มีอุณหภูมิวิกฤตสูงกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็กและผลการคำนวณเป็นไปตามทฤษฎีของฮารานและนาจิที่อธิบายเกี่ยวกับอุณหภูมิวิกฤตของตัวนำยิ่งยวดอุณหภูมิสูง นอกจากนี้ยังมีกรณีอื่นๆที่น่าสนใจ คือ ตัวนำยิ่งยวดชนิดคลื่นพี ตัวนำยวดยิ่งที่มีสองแถบพลังงาน เมื่อมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็ก และยังมีคุณสมบัติอื่นๆ ที่ยังไม่ได้ศึกษา เช่น ค่าความจุความร้อน เป็นต้น

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

Abrikosov,A.A.;& Gor'kov,L.P.(1961). Knight Shift in Superconductor: *Soviet Physics-JETP*. 12:1243

Bardeen, J.; Cooper,N.; & Schrieffer, J.R. (1959). Theory of Superconductivity. *Physical Review* , 108 (5) : p : 1175 – 1204 .

Bednorz, J.G.; & Muller,K.A. (1986,April). Possible High T_c Superconductivity in the Ba-La-Cu-O System. Z*. Physical Review B. 64*. p : 189 –193.

Bennemann, K.H. ; Ketterson, J.B. (2002). The Physics of Superconductor. *New York : Springer.*

Buckel,W. (1991). Superconductivity : Fundamental and Applications*. New York : VCH Publiiher Inc.*

Bud'ko, S.L.;et al. (2001). Boron Isotope Effect in Superconducting MgB_2. *Physical Review Letters. 86(9)* : p : 1877.

Buzea, C.; & Yamashilta, T. (2001). Review of the Superconducting Properties of MgB_2. *Superconductor Science Technology. 14* : p : 115 -146 .

Chu, C.W.; et al. (1987, January). Evidence for Superconductivity Above 40K in the La-Ba-Cu-O Compound System. *New York 58(4).* p : 405 – 410.

Crawford, M.K.; et al.(1990). Oxygen Isotope Effect and Structural Phase Transitions in La_2CuO_4-Based Superconductors. *Science 250* : p : 1390.

Haran, G.; & Nagi, A.D.S. (2000). Combined Potential and Spin Impurity Scattering in Cuprates. *Physical Review B*. 63:012503.

Haran, G.; & Nagi, A.D.S. (1996).Role of Anisotropic Impurity Scattering in Anisotropic Superconductors . *Physical Review B. 54*:p : 15463 – 15467.

Haran, G.; & Nagi, A.D.S. (1997).Weak Anisotropic Impurity Scattering in Unconventional Superconductors .*Solid State Communications*. 101: p : 71-75(5)

Harlingen ,D. J.(1995). Phase-sensitive tests of the symmetry of the pairing state in the high-temperature superconductors—Evidence for $d_{x^2-y^2}$ symmetry. *Rev. Mod. Phys. 67*:p.515 – 535.

Ketterson ; & Song.(1999).Superconductivity.*Cambridge:University Press*.

Kittel,C.(1996).Introduction to solid state physics. *John Wiley & Sons New York*.

Kresin, H. & Wolf,V.Z.(1990). Fundamentals of Superconductor.*New York:Plenum*.

Martindel,J.A.; et al.(1993). Magnetic-field dependence of planar copper and oxygen spin-lattice relaxation rates in the superconducting state of $YBa_2Cu_3O_7$. *Physical Review B.* 47:9155.

Maxwell, E. (1950). Isotope Effect in the Superconductivity of Mercury. *Physical Review Letters.78*: p. 477.

Michigan State University.(1999).*Retrieved October 12,1999,from*

Onnes, K.H. (1911). Communication – Laboratory of Leiden. *London.Publishing Corporation.* 119:1226.

Openov,L.A.(1997).Combined Effect of Nonmagnetic and Magnetic Scatterers on the Critical Temperatures of Superconductors with Different Anisotropies of the Gap. *JETP Letters. 66*: p : 661-667.

Openov,L.A. (1998). Critical Temperature of an Anisotropic Superconductor Containing Both Nonmagnetic and Magnetic Impurities. *Physical Review B. 58* : 9468 – 9478.

Openov,L.A.; & Semenihin,I.A.(2001). Isotope Effect in the Presence of Magnetic and Nonmagnetic Impurities. *Phys. Rev. B 64* : 012513.

Subramanyam,S.V.;& Gopal, E.S.R.(1989). High Temperature Superconductors.*Wiley Eastern Limited,.*

Sun,Y.;& Maki,K.(1995). Impurity Effects in D-wave Superconductors. *Physical Review B.* 51:6059

Tsuei,C.C.; & Kirtley,J.R. (1996). Probing High -Temperature Superconductivity. *Scientific American* . 50 : 6.

Tsuei,C.C.;Newns,D.M.;Chi,C.C.;& Pattnaik,P.C.(1990). Anomalous Isotope Effect and Van Hove Singularity in Superconducting Cu Oxides. *Physical Review Letters*.65:2724.

Udomsamuthirun, P. (2006).Influence of Impurity on Isotope Coefficient of Superconductors.*Physica C*. 449:100.

Umezawa, A.;et al.Superconductivity. *Physical Review B. 38* : 2849; 1989

Vladimir Z.Kresin et al.(1997). Unconventional Isotope Effects in Superconductors. *Physical Review B.56*:p : 107-110.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
ผลการทดลองแสดงค่าอุณหภูมิวิกฤตและค่าสัมประสิทธิ์ของไอโซโทปในตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือประเภทต่าง ๆ

ผลการทดลองแสดงค่าอุณหภูมิวิกฤตและค่าสัมประสิทธิ์ของไอโซโทปของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือประเภทต่าง ๆ แสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 1 อุณหภูมิวิกฤตและค่าสัมประสิทธิ์ของไอโซโทปของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือในสารประกอบ $(Y_{1-x}Pr_x)Ba_2Cu_3O_{7-\delta}$

X(%)	T_c	α
20	74.9	0.09
30	59.6	0.24
40	45.8	0.32
50	27.7	0.79

ที่มา : Franck J.P.,Jung J.,Mohamed M.A-K.,Gygax S.,and Sproule G.I.,Phys.Rev.B 44, 5218(1991)

ตารางที่ 2 อุณหภูมิวิกฤตและค่าสัมประสิทธิ์ของไอโซโทปของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือในสารประกอบ $YBa_2(Cu_{1-z}Zn_z)_3O_{7-\delta}$

z(%)	T_c	α
20	67.5	0.04
25	63.0	0.04
40	55.4	0.07
50	38.5	0.02
60	29.4	0.09
70	19.1	0.12
75	12.7	0.13

ที่มา : Soerensen G., and Gygax S.,Phys.Rev.B 51, 11848(1995)

ตารางที่ 3 อุณหภูมิวิกฤตและค่าสัมประสิทธิ์ของไอโซโทปของตัวนำยิ่งยวดกรณีมีสารเจือในสารประกอบ $(Y_{1-x-y}Pr_xCa_y)Ba_2Cu_3O_{7-\delta}$

y(%)	T_c	α
0	67.5	0.14
5	63.0	0.08
10	55.4	0.09
15	38.5	0.05
20	29.4	0.08
25	19.1	0.06

ที่มา : Soerensen G., and Gygax S.,Phys.Rev.B 51, 11848(1995)

ภาคผนวก ข

โปรแกรม Mathematica

ตัวอย่างโปรแกรมการคำนวณหาอุณหภูมิวิกฤตกรณีมีสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็กและประเภทแม่เหล็ก

```
ClearAll[b, ff11];
e = 0;
ef = 1;
eg = 1;
fg = 1;
G0 = 0;
G1 = 0;
Γ1 = 0.01;
ω = 20;
```

$$
\begin{aligned}
\text{ff11}[x_, y_] := & -\text{Log}[y] + (1 - e^2)\left(\text{PolyGamma}\left[\frac{1}{2}\right] - \text{PolyGamma}\left[\frac{1}{2} + \frac{x}{y} + \frac{G_0}{y}\right]\right) + \\
& e^2\left(\text{PolyGamma}\left[\frac{1}{2}\right] - \text{PolyGamma}\left[\frac{1}{2} + \frac{2G_0}{y}\right]\right) + \\
& \sum_{n=0}^{\text{Round}\left[\frac{\omega}{y} - \frac{1}{2}\right]} \frac{ef}{\left(n + \frac{1}{2} + \left(\frac{x+G_0}{y}\right)\right)} * \frac{\frac{\Gamma_1}{y} * ef * \left(n + \frac{1}{2} + \frac{x+G_0+G_1}{y}\right) - \frac{\Gamma_1}{y} * \frac{G_1}{y} * eg * fg}{\left(n + \frac{1}{2} + \left(\frac{x+G_0+G_1}{y}\right)\right) * \left(n + \frac{1}{2} + \left(\frac{x+G_0-\Gamma_1}{y}\right)\right) + \frac{G_1}{y} * \frac{\Gamma_1}{y} * fg^2} - \\
& \sum_{n=0}^{\text{Round}\left[\frac{\omega}{y} - \frac{1}{2}\right]} \frac{eg}{\left(n + \frac{1}{2} + \left(\frac{x+G_0}{y}\right)\right)} * \frac{\frac{G_1}{y} * eg * \left(n + \frac{1}{2} + \frac{x+G_0-\Gamma_1}{y}\right) + \frac{\Gamma_1}{y} * \frac{G_1}{y} * ef * fg}{\left(n + \frac{1}{2} + \left(\frac{x+G_0+G_1}{y}\right)\right) * \left(n + \frac{1}{2} + \left(\frac{x+G_0-\Gamma_1}{y}\right)\right) + \frac{G_1}{y} * \frac{\Gamma_1}{y} * fg^2};
\end{aligned}
$$

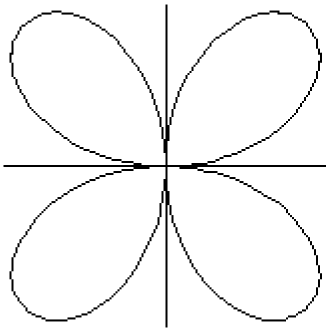
```
h = 0.000001; y = .40; x = 0.0001;
While[x < 1,
 b = 3;
     While[b > 0.000000001,
             p1 = y;
             sff = ff11[x, y];
             ssf1 = ff11[x, y + h];
             y = y - (sff * h)/(ssf1 - sff);
             b = Abs[y - p1];


 ];
 Print[x, "   ", Re[y]];
 x = x + .002;]
```

ตัวอย่างโปรแกรมการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ของไอโซโทป

```
ClearAll[a, c, b, ffll, aao, ef];
e = 0;
ef = 1;
eg = 1;
fg = 1;
G1 = 0.01;
Γ1 = 0;

tco = 90;
aa[x_, y_, g_, n_] = G1*4*π^2*y*tco^2*eg*((n + 1/2 + (x + g - Γ1)/y) + G1/y*ef*fg);
bb[x_, y_, g_, n_] = Γ1*4*π^2*y*tco^2*ef*((n + 1/2 + (x + g + G1)/y) - G1/y*eg*fg);
cc[x_, y_, g_, n_] = 4*π^2*tco^2*y^2 ((n + 1/2 + ((x + g + G1)/y))*(n + 1/2 + ((x + g - Γ1)/y)) + G1/y*Γ1/y*fg^2);

ffll[x_, y_, g_] := -Log[y] + (1 - e^2) * (PolyGamma[1/2] - PolyGamma[1/2 + x/y + g/y]) +
  e^2 * (PolyGamma[1/2] - PolyGamma[1/2 + (2 g)/y]) + NSum[ef/(n + 1/2 + ((x+g)/y)) * bb[x, y, g, n]/cc[x, y, g, n], {n, 0, ∞}, Method -> Fit] -
  NSum[eg/(n + 1/2 + ((x+g)/y)) * aa[x, y, g, n]/cc[x, y, g, n], {n, 0, ∞}, Method -> Fit];


aao[x_, y_, g_] := 1 - (1 - e^2)*(x/y + g/y)*PolyGamma[1, 1/2 + x/y + g/y] - e^2*((2 g)/y)*PolyGamma[1, 1/2 + (2 g)/y] -
  NSum[
   ef/(n + 1/2 + ((x+g)/y)) * (n + 1/2)*tco^2*4*π^2*y^2*
    (((cc[x, y, g, n]*Γ1*ef)/y - bb[x, y, g, n]*((n + 1/2 + ((x + g - Γ1)/y)) + (n + 1/2 + ((x + g + G1)/y))))/cc[x, y, g, n]^2) -
   (1/(2*π*tco*y*(n + 1/2 + ((x+g)/y)))) * bb[x, y, g, n]/cc[x, y, g, n], {n, 0, ∞}] - NSum[ef/(n + 1/2 + ((x+g)/y)) * bb[x, y, g, n]/cc[x, y, g, n], {n, 0, ∞}] +
  NSum[
   eg/(n + 1/2 + ((x+g)/y)) * (n + 1/2)*tco^2*4*π^2*y^2*
    (((cc[x, y, g, n]*G1*eg)/y - aa[x, y, g, n]*((n + 1/2 + ((x + g - Γ1)/y)) + (n + 1/2 + ((x + g + G1)/y))))/cc[x, y, g, n]^2) -
   (1/(2*π*tco*y*(n + 1/2 + ((x+g)/y)))) * aa[x, y, g, n]/cc[x, y, g, n], {n, 0, ∞}] + NSum[eg/(n + 1/2 + ((x+g)/y)) * aa[x, y, g, n]/cc[x, y, g, n], {n, 0, ∞}];


h = 0.000001;

y = .40;
x = 0;
g = 0.01;

While[g < 1.2,
 b = 3;
    While[b > 0.000000001,
          p1 = y;
          sff = ffll[x, y, g];
          ssf1 = ffll[x, y + h, g];
          y = y - (sff*h)/(ssf1 - sff);
          b = Abs[y - p1];

 ];
 Print[y, "      ", 1/Re[aao[x, y, g]]];
 g = g + .001;]
```

ตัวอย่างโปรแกรมการคำนวณหาค่าฟังก์ชันศักย์กระเจิงของสารเจือประเภทไม่เป็นแม่เหล็ก และประเภทแม่เหล็ก

```
r[ϕ_] := Sin[2ϕ];
ParametricPlot[{r[g]*Cos[g], r[g]*Sin[g]},
 {g, 0, 2*Pi}, Axes→True, Ticks→False,
 AspectRatio→Automatic]
```



ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อของผู้วิจัย

ชื่อ - ชื่อสกุล	น.ส. รัตนสุดา สุภดนัยสร
วัน เดือน ปีเกิด	2 เมษายน 2522
สถานที่เกิด	กรุงเทพฯ
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	45/1802 หมู่บ้านพงษ์ศิริชัย 4 ซ.เพชรเกษม 81 ถนนเพชรเกษม แขวงหนองค้างพลู เขตหนองแขม ก.ท.ม. 10160
ตำแหน่งที่ทำงาน	อาจารย์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา 1061 ซ.อิสรภาพ 15 แขวงหิรัญรูจี เขตธนบุรี กรุงเทพฯ 10600

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2542	มัธยมศึกษาตอนปลาย จากโรงเรียนวัดประดู่ในทรงธรรม
พ.ศ. 2546	คบ. (สาขาวิชาฟิสิกส์) จากสถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา
พ.ศ. 2551	วท.ม. (สาขาวิชาฟิสิกส์) จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ