

การศึกษาหาความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์โดยวิธีความมั่นคงที่สุด
เปรียบเทียบกับผลการทดลอง

ปริญญานิพนธ์

ของ

มนุญ บุญยง

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

ตุลาคม 2552

การศึกษาหาความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์โดยวิธีความมั่นคงที่สุด
เปรียบเทียบกับผลการทดลอง

ปริญญานิพนธ์

ของ

มนุญ บุญยง

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

ตุลาคม 2552

ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

การศึกษาคหาความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์โดยวิธีความมั่นคงที่สุด
เปรียบเทียบกับผลการทดลอง

บทคัดย่อ
ของ
มนูญ บุญยง

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
ตุลาคม 2552

มนูญ บุญยง. (2552). การศึกษาหาความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์โดยวิธีความนํ้าหนวลที่สุด
เปรียบเทียบกับผลการทดลอง. ปรินญานิพนธ์ วศ.ม. (วิศวกรรมเครื่องกล) .กรุงเทพฯ:
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม: ผู้ช่วยศาสตราจารย์
ดร.จุฑารัตน์ ครูเจริญ, พันเอก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทวิวัชร วีระแก้ว.

การจัดทำปรินญานิพนธ์นี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาวิธีวิเคราะห์หาค่าผลลัพธ์ที่ได้จากวิธี
ความนํ้าหนวลที่สุดตลอดเวลาการทำงาน โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือสำหรับทำการ
วิเคราะห์หาค่าผลลัพธ์ของค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น จากนั้นนำ
ผลลัพธ์ที่ได้ไปเปรียบเทียบกับผลการทดลอง

การศึกษาใช้หุ่นยนต์ของบริษัท ESHED ROBOTEC รุ่น SCORBOT-ER9 มาเป็นแบบจำลอง
ทางคณิตศาสตร์ โดยจะทำการวิเคราะห์การเคลื่อนที่เพียง 2 แกน ทำให้ได้สมการการเคลื่อนที่ของ
หุ่นยนต์ในรูปแบบกฎข้อที่สองของนิวตันซึ่งเป็นสมการอนุพันธ์อันดับสอง ทำการแก้สมการให้เป็น
สมการอนุพันธ์อันดับสาม กำหนดเงื่อนไขของปัญหาให้มีเวลาและตำแหน่งที่แน่นอน เงื่อนไขเริ่มต้นคือ
เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ของแขนกลจากจุดเริ่มต้นเท่ากับ 1 วินาที เงื่อนไขขอบเขตคือให้แกนที่ 1
เคลื่อนที่ทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม 0.773 เรเดียน แกนที่ 2 เคลื่อนที่ขึ้นเป็นมุม 0.743 เรเดียน และเงื่อนไข
บังคับคือแรงบิดที่ป้อนเข้าไปเพื่อให้แขนกลเคลื่อนที่มีค่าระหว่าง -100 ถึง 100 นิวตันเมตร จากนั้นใช้
โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ชื่อ MATLAB มาเป็นเครื่องมือช่วยวิเคราะห์และแสดงผลในลักษณะของกราฟ
ในหลักการของแคลคูลัสความแปรปรวนตามเงื่อนไขของค่าต่ำสุด ให้เป็นไปตามวัตถุประสงค์การหา
ความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์โดยวิธีความนํ้าหนวลที่สุด

ผลลัพธ์ที่ได้จากการศึกษาและวิจัยตามวัตถุประสงค์ ทำให้ได้ค่าความเหมาะสมสูงสุด คือ
แขนกลจะเคลื่อนที่ได้ด้วยนํ้าหนวล โดยจะเริ่มเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้นอย่างช้าๆ และจะเพิ่มความเร็วขึ้น
ตามลำดับ พอใกล้ถึงจุดหมายปลายทางแขนกลจะค่อยๆ ลดความเร็วลงและหยุดนิ่งเมื่อถึงปลายทาง
การเคลื่อนที่ ซึ่งแตกต่างจากผลการทดลองที่แขนกลเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ จากผลลัพธ์ที่ได้จะ
เป็นแนวทางสำหรับการนำไปประยุกต์ใช้กับโปรแกรมควบคุมหุ่นยนต์ เพื่อควบคุมให้หุ่นยนต์สามารถ
ทำงานที่เกี่ยวข้องกับวัตถุที่เปราะบาง เสียรูปร่างง่าย ออกแรงจับขึ้นงานได้ไม่มากนัก และปัญหาที่มีความ
ใกล้เคียงกันได้ต่อไป

คำสำคัญ : แกน / แขนกล / ความเหมาะสมสูงสุด / ความนํ้าหนวลที่สุด / ระบบพลศาสตร์ /
เวลาและตำแหน่งที่แน่นอน

A STUDY ON DYNAMICS OPTIMIZATION BY MINIMUM JERK TRAJECTORY
COMPARISON WITH THE EXPERIMENT

AN ABSTRACT
BY
MANOON BOONYONG

Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the
Master of Engineering Degree in Mechanical Engineering
at Srinakharinwirot University

October 2009

Manoon Boonyong. (2009). *A Study on Dynamics Optimization by Minimum Jerk Trajectory Comparison with the Experiment*. Master thesis, M.Eng.(Mechanical Engineering). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee: Assist. Prof. Jutarat Kurujareon, Col. Assist. Prof. Dr. Tawiwat Veeraklaew.

This paper is to study the means of result analysis which is received from the minimum jerk trajectory by using the computer program as a tool for the result analysis of dynamics optimization of non-linear systems to compare with the experiment.

A study is also used SCORBOT-ER9 robot of ESHED ROBOTEC Company as the mathematics model to analyze the motion of 2 axes, taken the robot equation of motion in the pattern of Newton Law^{2nd} as differentiated order^{2nd} and corrected the equation into the differentiated order^{3rd}. A study certainly has set conditions of a problem by fixing the end time and the end point, one second that used to move the initial robot arm is the initial condition, the boundary condition is that the axis no. 1 counters clockwise at the angle of 0.773 radians, the axis no. 2 counters clockwise at the angle of 0.743 radians and the constraint that valuably enforces the robot arm to move between -100 to 100 N-m. A part from that point, we used the MATLAB computer program as a helping tool for analyzing and showing in the graphic pattern on the calculus variation principle for minimum condition to objectively suit the dynamics optimization of non-linear systems by minimum jerk trajectory.

This study and research objectively give the result of optimization that is the robot arm will move slowly from the starting point with the minimum jerk trajectory and will respectively enhance the speed, the robot arm will slowly move, decrease speed and stop at the movement destination. The situation is different from the experiment that the robot arm moves with constant velocity. The result of this study will be applied for the robot control program which is controlled the robot to work with thin material that can easily be damaged and created similar problem.

Keywords: Axis / Robot Arm / Optimization / Minimum Jerk / Dynamics Systems / Fixed End Time and End Point.

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์นี้สำเร็จลุล่วงสมบูรณ์ได้ด้วยดีเนื่องจากผู้วิจัยได้รับความกรุณาอย่างยิ่งจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จุฑารัตน์ คุรุเจริญ ประธานกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ พันเอก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทวีวัชร วีระเกล้า อาจารย์ที่ปรึกษาการทำปริญญานิพนธ์ ทั้งสองท่านได้กรุณาใช้เวลาอันมีค่ายิ่ง เพื่อให้คำปรึกษาแนะนำตลอดจนช่วยแก้ไขข้อบกพร่อง เพื่อให้ปริญญานิพนธ์นี้สมบูรณ์ ผู้วิจัยขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณ พันเอก ดร.ธีรนนท์ นันทขว้าง และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พิชัย อัสภูมิมงคล ที่สละเวลามาเป็นกรรมการสอบปริญญานิพนธ์ ตลอดจนคณาจารย์จาก กองวิชาวิศวกรรมเครื่องกล รร. จปร. และคณาจารย์จากภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ที่ให้ความรู้ และคำแนะนำอันเป็นประโยชน์ต่องานวิจัยเป็นอย่างดี

ขอขอบพระคุณ อาจารย์ อุดม ล้อมวงศ์พานิช รองอธิการบดีฝ่ายวิชาการ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ชูชัย ต.ศิริวัฒนา รองอธิการบดีฝ่ายกิจการนักศึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พิพัฒน์ อมตฉายา คณบดีคณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ปรีชา หอยสังข์ หัวหน้าสาขาวิชาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี ที่คอยให้กำลังใจและช่วยเหลือผู้วิจัยทุกๆ ด้านระหว่างศึกษาต่อ ณ มหาวิทยาลัยแห่งนี้

ท้ายสุดผู้วิจัยขอขอบพระคุณ พ่อ แม่ พี่ น้องรวมทั้งครอบครัวผู้วิจัย ที่ให้กำลังใจอย่างดีตลอดระยะเวลาที่ทำการศึกษาและวิจัย และขอขอบคุณ เพื่อนร่วมรุ่น เพื่อนร่วมงาน ที่ให้ความร่วมมือเป็นอย่างดีในการทำวิจัยนี้

มนูญ บุญยง

ปริญญานิพนธ์

เรื่อง

การศึกษาหาความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์โดยวิธีความโน้มถ่วงที่สุด

เปรียบเทียบกับผลการทดลอง

ของ

มนัญญ บุญยง

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวិชาศกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..... คนบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร. สมชาย สันติวัฒนกุล)

วันที่..... เดือน ตุลาคม พ.ศ. 2552

คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์

คณะกรรมการสอบปากเปล่า

..... ประธาน

..... ประธาน

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จุฑารัตน์ คุรุเจริญ)

(พันเอก ดร.ธีรนนท์ นันทขว้าง)

..... กรรมการ

..... กรรมการ

(พันเอก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทวิวัชร วีระแก้วน) (ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จุฑารัตน์ คุรุเจริญ)

..... กรรมการ

(พันเอก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทวิวัชร วีระแก้วน)

..... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พิชัย อัสภูมิมงคล)

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ.....	1
ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย.....	1
ขอบเขตของโครงการวิจัย.....	1
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	2
2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	3
ทฤษฎีของหุ่นยนต์.....	3
หุ่นยนต์ SCORBOT-ER9.....	14
ออปติไมซ์เซชัน.....	33
ไดนามิกออปติไมซ์เซชัน.....	37
การทบทวนเอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	52
3 อุปกรณ์และวิธีการทดลอง.....	55
การกำหนดปัญหา.....	55
เงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหา.....	56
แบบจำลองทางคณิตศาสตร์.....	59
ปัญหาความนิ่มนวลที่สุด.....	62
4 ผลและวิเคราะห์ผลการทดสอบ.....	64
ผลการทดสอบโดยวิธีความนิ่มนวลที่สุด.....	64
ผลลัพธ์ในทางทฤษฎีโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์.....	67
ผลการทดลองโดยโปรแกรมควบคุมหุ่นยนต์.....	71
เปรียบเทียบผลลัพธ์ในทางทฤษฎีกับผลการทดลอง.....	73
วิเคราะห์ผลการทดสอบ.....	77

สารบัญ(ต่อ)

บทที่	หน้า
5 สรุปและข้อเสนอแนะ.....	78
สรุปผลการทดสอบ.....	78
ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต.....	78
บรรณานุกรม.....	79
ภาคผนวก.....	82
อภิธานศัพท์.....	85
ประวัติย่อผู้วิจัย.....	90

บัญชีตาราง

ตาราง	หน้า
1 แสดงพารามิเตอร์แบบ Denavit-Hartenberg ของภาพประกอบ 2.....	9
2 แสดงค่าตัวแปร (Parameter Variable) ต่างๆ ของหุ่นยนต์ PUMA.....	11
1 แสดงรายละเอียดคุณสมบัติของหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9.....	15
4 แสดงจุดต่อต่างๆ และการเคลื่อนไหวของหุ่นยนต์.....	16
5 แสดงคุณสมบัติของมอเตอร์ที่ใช้กับหุ่นยนต์.....	22
6 แสดงอัตราทดเกียร์ของหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9.....	25
7 แสดงค่าตัวแปร (Parameter Variable) ต่างๆ ของหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9.....	61
8 แสดงการกำหนดตัวแปรและหน่วยทางวิทยาศาสตร์.....	64
9 แสดงค่าตัวแปร (Parameter Variable) ต่างๆ ของหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9.....	65
10 แสดงผลลัพธ์การเปลี่ยนแปลงระยะเชิงมุมต่อหน่วยเวลาของแกนที่ 1 จากวิธีความถี่มวลที่สูงสุดเปรียบเทียบกับผลการทดลอง.....	83
11 แสดงผลลัพธ์การเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงมุมต่อหน่วยเวลาของแกนที่ 1 จากวิธีความถี่มวลที่สูงสุดเปรียบเทียบกับผลการทดลอง.....	83
12 แสดงผลลัพธ์การเปลี่ยนแปลงแรงบิดต่อหน่วยเวลาของแกนที่ 1 จากวิธีความถี่มวลที่สูงสุดเปรียบเทียบกับผลการทดลอง.....	83
13 แสดงผลลัพธ์การเปลี่ยนแปลงระยะเชิงมุมต่อหน่วยเวลาของแกนที่ 2 จากวิธีความถี่มวลที่สูงสุดเปรียบเทียบกับผลการทดลอง.....	84
14 แสดงผลลัพธ์การเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงมุมต่อหน่วยเวลาของแกนที่ 2 จากวิธีความถี่มวลที่สูงสุดเปรียบเทียบกับผลการทดลอง.....	84
15 แสดงผลลัพธ์การเปลี่ยนแปลงแรงบิดต่อหน่วยเวลาของแกนที่ 2 จากวิธีความถี่มวลที่สูงสุดเปรียบเทียบกับผลการทดลอง.....	84

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 แสดงการกำหนดพารามิเตอร์ของแขนกลแบบ Denavit-Hartenberg.....	6
2 แสดงแขนกลที่มีสองแขนและสองข้อต่อ.....	7
3 แสดงระบบพิกัดของหุ่นยนต์ 6 องศาความอิสระ.....	10
4 แสดงการกำหนดพิกัดของหุ่นยนต์ 6 องศาความอิสระ.....	11
5 แสดงหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9.....	15
6 แสดงจุดหมุนของหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9.....	17
7 แสดงแขนกลของหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9.....	17
8 แสดงขอบเขตการทำงานมองจากด้านข้างหุ่นยนต์.....	18
9 แสดงขอบเขตการทำงานมองจากด้านบนหุ่นยนต์.....	18
10 แสดงระบบขับเคลื่อนหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9.....	19
11 แสดงจุดที่ติดตั้งมอเตอร์ในหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9.....	20
12 แสดงโครงสร้างพื้นฐานของมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง.....	20
13 แสดงมอเตอร์ในแกนที่ 1, 2 และ 3.....	21
14 แสดงมอเตอร์ในแกนที่ 4 และ 5.....	22
15 แสดงโครงสร้างเกียร์ฮามอนิกส์.....	23
16 แสดงการทำงานของเกียร์ฮามอนิกส์.....	24
17 แสดงการทำงานของเกียร์ฮามอนิกส์.....	24
18 แสดงเอ็นโคดเดอร์หุ่นยนต์ SCORBOT-ER9.....	26
19 แสดงจานดิสก์เอ็นโคดเดอร์หุ่นยนต์ SCORBOT-ER9.....	27
20 แสดงอุปกรณ์ในเอ็นโคดเดอร์.....	27
21 แสดงสัญญาณที่ออกจากจากเอ็นโคดเดอร์.....	28
22 แสดงลิมิตสวิตช์ของหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9.....	29
23 แสดงการติดตั้งลิมิตสวิตช์ของหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9.....	30
24 แสดงวงจรการทำงานของลิมิตสวิตช์ที่ควบคุมแขนกล.....	31
25 แสดงการติดตั้งโฮมสวิตช์.....	32
26 แสดงรูปหุ่นยนต์ของบริษัท ESHED ROBOTEC รุ่น SCORBOT-ER9.....	60

บัญชีภาพประกอบ (ต่อ)

ภาพประกอบ	หน้า
27 แสดงระบบพิกัดของหุ่นยนต์ 5 องศาความอิสระ.....	60
28 แสดงการกำหนดพิกัดของหุ่นยนต์ 5 องศาความอิสระ.....	61
29 แสดงรูปร่างและคุณลักษณะของหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9.....	65
30 กราฟแสดงการขจัดเชิงมุมของแกนที่ 1 ต่อหน่วยเวลา.....	68
31 กราฟแสดงการขจัดเชิงมุมของแกนที่ 2 ต่อหน่วยเวลา.....	68
32 กราฟแสดงความเร็วเชิงมุมของแกนที่ 1 ต่อหน่วยเวลา.....	69
33 กราฟแสดงความเร็วเชิงมุมของแกนที่ 2 ต่อหน่วยเวลา.....	69
34 กราฟแสดงแรงบิดของแกนที่ 1 ต่อหน่วยเวลา.....	70
35 กราฟแสดงแรงบิดของแกนที่ 2 ต่อหน่วยเวลา.....	70
36 กราฟแสดงการขจัดเชิงมุมของแกนที่ 1 ต่อหน่วยเวลา.....	71
37 กราฟแสดงการขจัดเชิงมุมของแกนที่ 2 ต่อหน่วยเวลา.....	72
38 กราฟแสดงความเร็วเชิงมุมของแกนที่ 1 ต่อหน่วยเวลา.....	72
39 กราฟแสดงความเร็วเชิงมุมของแกนที่ 2 ต่อหน่วยเวลา.....	73
40 กราฟแสดงผลการเปลี่ยนแปลงการขจัดเชิงมุมของแกนที่ 1 ต่อหน่วยเวลา จากวิธีความโน้มถ่วงที่สุดเปรียบเทียบกับผลการทดลอง.....	73
41 กราฟแสดงผลการเปลี่ยนแปลงการขจัดเชิงมุมของแกนที่ 2 ต่อหน่วยเวลา จากวิธีความโน้มถ่วงที่สุดเปรียบเทียบกับผลการทดลอง.....	74
42 กราฟแสดงผลการเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงมุมของแกนที่ 1 ต่อหน่วยเวลา จากวิธีความโน้มถ่วงที่สุดเปรียบเทียบกับผลการทดลอง.....	75
43 กราฟแสดงผลการเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงมุมของแกนที่ 2 ต่อหน่วยเวลา จากวิธีความโน้มถ่วงที่สุดเปรียบเทียบกับผลการทดลอง.....	76

บทที่ 1

บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ปัญหาของการหาความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์ (Dynamics Optimization) โดยทั่วไปการกำหนดฟังก์ชันเพื่อหาความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์ นิยมใช้พลังงาน (Energy) เวลา (Time) ความเร็ว (Velocity) ความกระด้าง (Jerk) ระยะขจัด (Displacement) เป็นต้น แต่ในงานวิจัยครั้งนี้ จะเน้นวิธีความนิ่มนวลที่สุด เนื่องจากความนิ่มนวลเป็นสิ่งที่จำเป็นอย่างมากในหลายๆระบบ เช่น ความนิ่มนวลของการเคลื่อนที่ขึ้น-ลงของลิฟต์โดยสารหรือขนส่ง ความนิ่มนวลขณะออกตัว-หยุดขับขี้อยนต์หรือยานพาหนะ ความนิ่มนวลในการทำงานของหุ่นยนต์ที่เกี่ยวข้องกับวัตถุที่เปราะบาง เสียรูปร่างง่าย เมื่อระบบมีความนิ่มนวลก็จะทำให้ชิ้นส่วนที่อยู่ในระบบมีอายุการใช้งานยาวนาน มีความปลอดภัย และมีความคุ้มค่าต่อการลงทุน

จากเหตุผลดังกล่าว ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะศึกษาการหาความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์โดยใช้วิธีความนิ่มนวลที่สุด (Minimum Jerk) โดยยกตัวอย่างสมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์มาเป็นปัญหาในการวิเคราะห์ เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้ในทางทฤษฎีกับผลการทดลองผลการวิจัยสามารถนำไปประยุกต์เป็นแนวทางในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับหุ่นยนต์ และปัญหาที่มีความใกล้เคียงกันได้ต่อไป

วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

1. เพื่อนำเอาเทคนิควิธีแก้ปัญหาคอมพิวเตอร์ที่ได้ผลสูงสุดของระบบพลศาสตร์ มาประยุกต์เป็นแนวทางใช้งานกับหุ่นยนต์
2. เพื่อหาความเหมาะสมสูงสุดโดยวิธีความนิ่มนวลที่สุด มาวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของแขนหุ่นยนต์
3. เพื่อเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้ในทางทฤษฎีกับผลการทดลอง

ขอบเขตของโครงการวิจัย

1. ใช้สมการการเคลื่อนที่ของแขนหุ่นยนต์ในลักษณะของอนุภาค
2. ใช้หุ่นยนต์ 5 แกน ของบริษัท ESHED ROBOTEC รุ่น SCORBOT-ER9 เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยสมมุติว่า ไม่มีแกนที่ 3, 4 และ 5
3. ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ แมทแล็บ ช่วยในการแก้ปัญหา

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้แนวทางไปประยุกต์แก้ปัญหากับหุ่นยนต์ และปัญหาที่มีความใกล้เคียงกันได้
2. ได้ข้อมูลสำหรับการประยุกต์เอาหลักการออปติไมซ์เซชัน ไปใช้งานกับปัญหาด้านพลศาสตร์และเป็นฐานข้อมูลเพื่อเปรียบเทียบกับวิธีการแบบอื่นได้
3. ได้ประโยชน์จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้คำนวณหาคำตอบโดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของปัญหาและยังสามารถนำไปใช้หาคำตอบที่มีลักษณะปัญหาที่ใกล้เคียงกันได้

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องตามหัวข้อต่อไปนี้

1. ทฤษฎีของหุ่นยนต์
2. หุ่นยนต์ SCORBOT-ER9
3. ออปติไมซ์เซชัน
4. ไดนามิกออปติไมซ์เซชัน
5. บทปริทัศน์วรรณกรรม

ทฤษฎีของหุ่นยนต์ (Theory of Robot)

แขนกลเป็นส่วนประกอบที่สำคัญของหุ่นยนต์ซึ่งถูกออกแบบมาให้สามารถเคลื่อนย้ายวัตถุจากตำแหน่งหนึ่งไปยังตำแหน่งที่ต้องการโดยอาศัยโครงสร้างของท่อนแขนประกอบกับข้อต่อต่างๆ ลักษณะโครงสร้างของข้อต่อจะแตกต่างกันไปตามการใช้งาน

หุ่นยนต์ประกอบไปด้วยแขนกลที่ต่อยอดกันเข้าด้วยข้อต่อที่เป็น Open kinematics chain ข้อต่อจะเป็นแบบจุดหมุน (Revolute joint) และข้อต่อเลื่อน (Prismatic) จำนวนข้อต่อมารวมกันเป็นจำนวน องศาความอิสระ (Degree of freedom) ซึ่งจำนวนองศาความอิสระนี้เป็นสิ่งหนึ่งที่ใช้จำแนกชนิดของหุ่นยนต์เช่น หุ่นยนต์แบบ 5 ข้อต่อจะมีจำนวนองศาความอิสระเท่ากับ 5 เป็นต้น นอกจากนี้ยังใช้การจัดลำดับแขนกลเป็นการระบุชนิดของหุ่นยนต์เช่น หุ่นยนต์ RRP (SGARA) มีแขนกลเป็นจุดหมุน, จุดหมุน และข้อต่อเลื่อน (RRP ย่อมาจาก Revolute, Revolute, Prismatic) เป็นต้น บริเวณพื้นที่ที่หุ่นยนต์ทำงานเรียกว่า Workspace ซึ่งเป็นพื้นที่ที่หุ่นยนต์สามารถเข้าถึงได้

ระบบของข้อต่อจะแบ่งเป็นสี่แบบ คือ ระบบโครงข้อหมุน (Revolute Joint-R) ที่ยอมให้แขนหมุนได้รอบแกนหมุน เช่น ข้อศอก และระบบแกนเลื่อน (Prismatic Joint-P) ที่ยอมให้มีการยืดหรือหดของแขน เช่น เสาร์ับสัญญาณวิทยุ ข้อต่อแบบทรงกระบอก (Cylindrical joints) เป็นข้อต่อที่มีจุดโยงที่ยอมให้แขนกลเคลื่อนที่แบบเลื่อนตำแหน่งขนานกับแกนและการเคลื่อนที่แบบหมุนรอบแกน ข้อต่อแบบสเฟียริคอล (Spherical joints) เป็นข้อต่อที่มีจุดต่อโยงเคลื่อนที่ไปได้ทุกทิศทาง

พลศาสตร์การเคลื่อนที่ของระบบหุ่นยนต์ (Kinematics)

พลศาสตร์การเคลื่อนที่ของระบบหุ่นยนต์ เป็นสิ่งสำคัญเรื่องหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับหุ่นยนต์ เพราะเป็นตัวควบคุมการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ทั้งในส่วนองศาตำแหน่ง ความเร็ว และความเร่ง โดยเรา

จะใช้วิธีการของ Denavit-Hartenberg มาทำการกำหนดระบบพิกัดของแต่ละแขนและข้อต่อแบบฟอร์เวิร์ดคิเนเมติกส์ เราใช้พิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian) ในการระบุตำแหน่งและความเร็วของ End - effectors และใช้สมการออยเลอร์-ลากรางจ์ในการหาสมการการเคลื่อนที่โดยใช้สมการอนุพันธ์อันดับสอง

ฟอร์เวิร์ดคิเนเมติกส์ (Forward kinematics)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงระบบสมการปัญหาของระบบพลศาสตร์สำหรับหุ่นยนต์ที่เรียกว่า ปัญหาฟอร์เวิร์ดคิเนเมติกส์ (Forward Kinematics) ซึ่งหมายถึง การที่เรากำหนดตัวแปรของข้อต่อ (Joint Variables) ต่าง ๆ แล้วทำการคำนวณหาตำแหน่งและการหมุนของ มือจับ(end- effectors) ตัวแปรของข้อต่อนี้หมายถึงมุมระหว่างข้อต่อ(Link) ในกรณีที่เป็นการหมุน(Revolute or Rotation Joint) และเป็นระยะยัดของข้อต่อในกรณีที่เป็นการเลื่อน-เข้าออกของข้อต่อ ปัญหาฟอร์เวิร์ดคิเนเมติกส์นี้จะนำมาเปรียบเทียบกับปัญหาอินเวิร์ดคิเนเมติกส์ (Inverse Kinematics) ซึ่งมีความหมายตรงข้ามกับปัญหา ฟอร์เวิร์ดคิเนเมติกส์ คือ เมื่อเรารู้ตำแหน่งและการหมุนของ end- effectors แล้วทำการหาตำแหน่ง ของข้อต่อแต่ละตัว

สมมติว่าหุ่นยนต์มีจำนวนลิงค์เท่ากับ $n+1$ จึงพิจารณาจาก 0 ถึง n โดยลิงค์แรกเป็น 0 พิจารณาที่ข้อต่อจาก 1 ไปจนถึง n และข้อต่อ i -th เชื่อมกับลิงค์ i และ $i-1$ โดยที่ข้อต่อ i -th เปลี่ยนแปลงตาม q_i ซึ่ง q_i ก็คือ องศาของการหมุนในกรณีของข้อต่อของข้อต่อแบบหมุนหรือข้อต่อเคลื่อนที่แบบเชิงเส้นโดยที่เฟรมพื้นฐานคือ ที่เฟรม 0 ต่อมาเราเลือกเฟรม 1 ที่ผ่านเฟรม n โดยที่เฟรม i อยู่ประจำที่ลิงค์ i ดังนั้นพิกัดของแต่ละจุดบนลิงค์ i คือ ค่าคงที่เมื่อแสดงในพิกัด i -th ของหุ่นยนต์ที่กำลังเคลื่อนที่

ให้ A_i คือโฮโมจีเนียสเมตริกซ์ (Homogenous matrix) ที่เปลี่ยนรูปพิกัดเฟรมจาก i ไปจนถึงเฟรม $i-1$ โดยที่เมตริกซ์ A_i เปลี่ยนแปลงตามการเปลี่ยนแปลงของหุ่นยนต์ และขึ้นกับ q_i ด้วย สามารถเขียนได้ในรูป

$$A_i = A_i(q_i) \quad (2-1)$$

ยิ่งไปกว่านั้นโฮโมจีเนียสเมตริกซ์ที่เปลี่ยนรูปพิกัดจากเฟรม j ไปจนถึงเฟรม i ถูกเรียกว่า ทรานฟอร์มเมชันเมตริกซ์ T_j^i หรือสามารถพิจารณาได้สามแบบคือ

$$T_j^i = A_{i+1}A_{i+2}.....A_{j-1}A_j \quad \text{ถ้า } i < j \quad (2-2)$$

$$T_j^i = I \quad \text{ถ้า } i = j \quad (2-3)$$

$$T_j^i = (T_j^i)^{-1} \quad \text{ถ้า } i > j \quad (2-4)$$

และแต่ละโฮโมจีเนียสทรานฟอร์มเมชันเมตริกซ์ A_i เขียนได้ว่า

$$A_i = \begin{bmatrix} R_{i-1}^i & d_{i-1}^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

ดังนั้น

$$T_i^j = A_{i+1} \dots A_i = \begin{bmatrix} R_{i-1}^i & d_{i-1}^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

และแต่ละโฮโมจีเนียสทรานฟอร์มเมชันเมตริกซ์ A_i เขียนได้ว่า

โดยที่เมตริกซ์ ${}^i_j R$ แสดงการหมุนของเฟรม j ที่สัมพันธ์กับเฟรม i

$$R_i^j = R_i^{i+1} \dots R_{j-1}^i \quad (2-7)$$

และเวกเตอร์ d_i^j ถูกแทนในตำแหน่งของเวกเตอร์ที่มีแหล่งกำเนิดจากเฟรม j ที่เกี่ยวข้องกับเฟรม i

$$d_i^j = d_i^{i-1} \dots R_i^{j-1} d_{j-1}^j \quad (2-8)$$

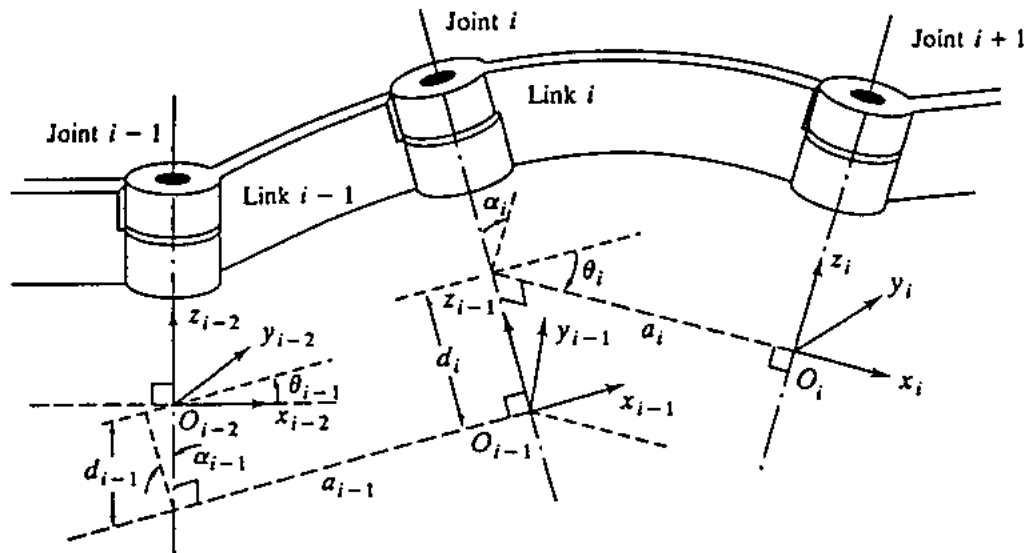
โดยใช้การพิจารณาจาก Denavit Hartenberg parameter หรือ D-H parameter แต่ละทรานฟอร์มเมชันเมตริกซ์ สามารถเขียนได้เป็น

$$A_i = Rot_{z, \theta_i} Trans_{x, d_i} Trans_{x, a_{i-1}} Rot_{x, \alpha_{i-1}}$$

$$A_i = T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 \\ 0 & \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_i = T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\cos(\alpha_{i-1}) & \sin(\theta_i)\sin(\alpha_{i-1}) & a_{i-1}\cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i)\cos(\alpha_{i-1}) & -\cos(\theta_i)\sin(\alpha_{i-1}) & a_{i-1}\sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_{i-1}) & \cos(\alpha_{i-1}) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

การกำหนดพารามิเตอร์ของแขนกลแบบ Denavit-Hartenberg (D-H parameters) สมมติว่าแขนกลแต่ละท่อนต่อกันผ่านข้อต่อในรูปแบบใดๆ ดังภาพประกอบ 1 เราจะใช้วิธีการของ Denavit-Hartenberg มาทำการกำหนดระบบพิกัดของแต่ละแขนและข้อต่อดังขั้นตอนต่อไปนี้



ภาพประกอบ 1 แสดงการกำหนดพารามิเตอร์ของแขนกลแบบ Denavit-Hartenberg

ขั้นตอนการหาความสัมพันธ์ D-H parameter

1. กำหนดแกนหมุนของข้อต่อทั้งหมดให้เป็นแกน z โดยเริ่มจาก z_0ไปจนถึง z_{n-1}
2. ตั้งเฟรมเริ่มต้น โดยกำหนดให้เป็นเฟรมแรก ณ ตำแหน่งใดๆบนแกน z_0 ส่วนแกนที่เหลือคือ x_0, y_0 นั้นให้ปฏิบัติตามกฎของมือขวา กำหนดให้ $i = 1, \dots, n-1$ สำหรับขั้นตอนที่ 3 ถึง 5
3. กำหนดจุด o_i เป็นจุดเริ่มต้น เส้นที่เป็นเส้นลากผ่านจุดตัดที่ตั้งฉากระหว่าง o_i และ z_{i-1} โดยที่ o_i จะเป็นจุดที่อยู่บริเวณจุดตัด ถ้า z_i และ z_{i-1} ขนานกัน จุด o_i จะอยู่ที่จุดหมุน i ถ้าเส้นแกน z_i และ z_{i-1} ตัดกับจุด o_i จะอยู่ตงบริเวณที่จุดตัดนั้น
4. ตั้งแกน x_i ขึ้นมาให้มีทิศทางตามเส้นแนวแกนที่เป็นจุดตัด z_i และ z_{i-1} ในหัวข้อที่ 3. ที่จุด o_i หรือมีทิศทางที่ตั้งฉากกับระนาบ $z_i - z_{i-1}$ ถ้า z_i และ z_{i-1} เป็นเส้นตัดกัน
5. แกน y_i นั้นให้ปฏิบัติตามกฎมือขวาของเฟรม
6. ตั้งเฟรมของ end - effector เป็นพิกัด o_n, x_n, y_n, z_n โดยสมมติว่า จุดต่อหมายเลข n -th เป็นจุดต่อหมุน กำหนด $kn = a$ มีทิศทางตามแนวแกน z_{i-1} ตั้งจุดเริ่มต้น o_n บริเวณใดก็ได้ตามแกน z_n โดยที่ควรจะกำหนดที่จุดกึ่งกลางของมือจับ (Gripper or Tip tools) จากนั้นตั้งแกน $j_n = s$ ในทิศทางตามแนวของมือจับ และ $i_n = n$ ให้เป็นไปตามกฎของมือขวา ($s \times n$)

7. กำหนดตัวแปรที่จุดต่อต่าง ๆ (Joint Variable : $\alpha_i, a_i, d_i, \theta_i$) ดังนี้

a_{i-1} = ระยะตามแนวแกน x_i จากจุด O_i ถึงจุดตัด ของเส้นแกน x_i และ z_{i-1}

d_i = ระยะตามแนวแกน a_{i-1} จากจุด O_{i-1} ถึงจุดตัด ของเส้นแกน x_i และ z_{i-1}

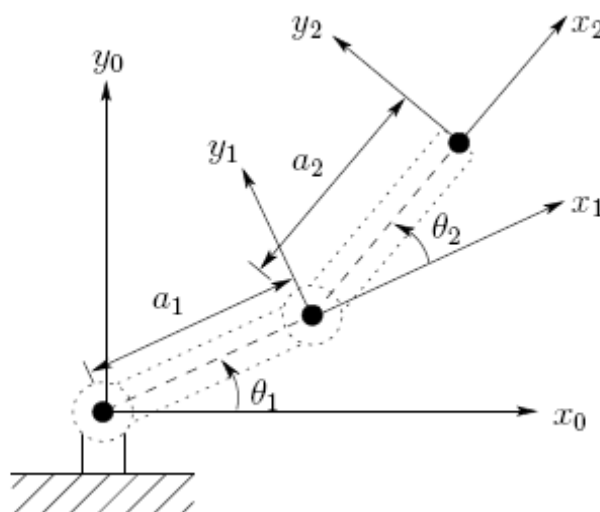
α_{i-1} = มุมระหว่าง z_{i-1} และ z_i ที่มองจากหัวลูกศร x_i เข้าไป

θ_i = มุมระหว่าง x_{i-1} และ x_i ที่มองจากหัวลูกศร z_i เข้าไป

8. ใช้ข้อมูลจาก ข้อ 1-7 ในการสร้าง Homogeneous transformation matrices A_i

9. เขียนรูปแบบของทรานส์ฟอร์มเมชันเมตริกซ์

$$T_n^0 = A_1 \dots A_n$$



ภาพประกอบ 2 แสดงแขนกลที่มีสองแขนและสองข้อต่อ

แขนกลที่มีสองแขนและสองข้อต่อ หากเรามีเตอร์แบบ Denavit-Hartenberg เราจะทำการกำหนดให้ระบบพิกัด 0 เป็นระบบพิกัดที่ติดกับส่วนฐานที่ยึดติดกับพื้น และ ให้ระบบพิกัด {1} เป็นระบบพิกัดของข้อต่อแรก ที่ยึดระหว่างฐานกับแขนท่อนแรกที่ยาว a_1 และให้ระบบพิกัด {2} เป็นระบบพิกัดของข้อต่อที่สอง ที่ยึดระหว่างแขนท่อนแรกกับท่อนที่สองที่ยาว a_2

จากภาพ เราจะเห็นว่าแกนของข้อต่อทุกข้อจะมีแนวพุ่งออกหรือพุ่งเข้าจากกระดาด ดังนั้น เราจะกำหนดแกน z ให้มีทิศพุ่งเข้าหรือออกจากกระดาดก็ได้ ในที่นี้เราจะให้ทิศของแกน z_0, z_1, z_2 มีทิศทางพุ่งออกมาจากกระดาด

จากนั้นพิจารณาตัวแปรที่เป็นความสัมพันธ์ระหว่างข้อต่อก่อน ซึ่งได้แก่ a_i, α_i โดยเริ่มจาก a_0 เป็นระยะห่างระหว่างแกนของข้อต่อที่ 0 กับแกนของข้อต่อที่ 1 แต่เนื่องจากว่าที่ระบบ พิกัดที่ $\{0\}$ ยึดติดกับพื้นจึงไม่มีข้อต่อ ดังนั้นทำให้เราสามารถกำหนดตำแหน่งของแกนของ ข้อต่อที่ 0 ที่ตำแหน่งไหนก็ได้ และเพื่อความสะดวกเราจะให้แกนของข้อต่อที่ 0 (ซึ่งจริงๆแล้วไม่มี) อยู่ที่ตำแหน่งเดียวกับแกนของข้อต่อที่ 1 ดังนั้นระยะห่างระหว่างแกนทั้งสองจึงเป็น 0 ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$a_0 = 0$$

และเช่นเดียวกัน เนื่องจากว่าเราให้แกนของข้อต่อที่ 0 และ 1 เป็นแกนเดียวกันแล้ว ทำให้ มุมระหว่างแกนทั้งสองเป็น 0 เช่นกัน นั่นคือ

$$\alpha_0 = 0$$

ทีนี้เรามาพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างข้อต่อที่ 1 กับ 2 เนื่องจากแกนของข้อต่อที่ 1 และ 2 ขนานกัน ไป คือ อยู่ในแนวที่พุ่งเข้าหรือออกจากกระดาดเหมือนกัน ดังนั้นระยะห่าง ระหว่างแกนทั้งสองจึงหาได้โดยตรง คือ L_1 ดังนั้น

$$a_1 = a_1$$

และเนื่องจากแกนทั้งสองขนานกัน ดังนั้นมุมระหว่างแกนทั้งสองนี้ก็เป็น 0 เช่นกัน ดังนั้น

$$\alpha_1 = 0$$

และเช่นเดียวกัน เพื่อพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างแกน ที่ 2 และ 3 เราก็จะได้

$$a_2 = a_2$$

ต่อไปเรหาค่าของ α_2 ตามนิยามจริงแล้ว ค่านี้ต้องเป็นความสัมพันธ์ระหว่าง ข้อต่อ ข้อที่ 2 กับข้อที่ 3 แต่เนื่องจากว่าเราไม่มีข้อต่อข้อที่ 3 อีกแล้ว แต่เราจะสมมติให้จุดที่ปลาย แขนเป็นข้อต่อข้อที่ 3 แทน และเราก็สามารถกำหนดให้แกนของข้อต่อข้อที่ 3 (ซึ่งจริงๆแล้วไม่มี) ให้มีทิศทางเดียวกับข้ออื่นๆ ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$\alpha_2 = 0$$

ต่อไปเราจะหาพารามิเตอร์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแขนแต่ละท่อน นั่นคือ d_i, θ_i จากนิยามตัวแปรทั้งสองนี้จะเป็นความสัมพันธ์ระหว่างท่อนแขนที่ $i-1$ กับ i ดังนั้นเรา จะเริ่มที่ d_1 ซึ่งเป็นระยะห่างระหว่าง ท่อนแขนที่ 0 กับท่อนที่ 1 (เราไม่สามารถหา d_0 ได้เพราะเป็นระยะห่างระหว่างท่อนแขนที่ 1 กับ 0) และจากรูปเราจะเห็นว่าระยะห่างระหว่างท่อนแขนที่ 0 ซึ่งเป็นฐานที่ติดกับพื้น กับท่อนแขนที่ 1 ที่ยาว a_1 ติดกันโดยไม่มีระยะห่างเลย ดังนั้น

$$d_1 = 0$$

เนื่องจาก $a_0 = 0$ ทำให้เราไม่สามารถหาทิศทางของเส้นตรง a_0 นี้ได้ แต่ในทางกลับกันก็ เป็นข้อดีที่เราสามารถจะกำหนดทิศทางเองได้โดยไม่มีผลกระทบกับส่วนอื่นๆ ดังนั้น ถ้าเรา กำหนดให้ เส้นตรง

a_0 นี้ชี้ไปทางแนวนอนซึ่งจะทำให้แขนท่อนแรกทำมุมกับเส้นนี้เป็นมุม θ_1 ดังนั้น มุมระหว่างแขนสองท่อนก็คือ

$$\theta_1 = \theta_1$$

และเช่นเดียวกัน ระยะห่างระหว่าง แขนท่อนที่ 1 กับ แขนท่อนที่ 2 ก็เป็น 0 เช่นกัน และ มุมระหว่างแขนท่อนที่ 1 กับ แขนท่อนที่ 2 ก็มีค่าเป็น θ_2 ดังนั้น

$$d_2 = 0$$

$$\theta_2 = \theta_2$$

ตาราง 1 แสดงพารามิเตอร์แบบ Denavit-Hartenberg ของภาพประกอบ 2

ข้อต่อ	a_i (มม.)	α_i (องศา)	d_i (มม.)	θ_i (องศา)
1	a_1	0	0	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2

เมื่อ θ_i คือ Joint Variables (actual arm posture)

α, a_i, d_i คือ ค่าคงที่ D-H Parameter

A_i คือ Homogeneous Transformation matrix ของแต่ละแขนกล

T_0^2 คือ ผลรวม Homogeneous Transformation matrix ของแขนกลทั้งหมด

ดังนั้น ผลรวมของ Transformation Matrix ทั้งหมดคือ

$$T_0^2 = A_1 \dots A_2$$

โฮโมจีเนียสทรานส์ฟอร์มเมชันเมตริกซ์ (Homogeneous Transformations Matrix)

กำหนดให้

$$A_1 = T_0^1$$

$$A_2 = T_1^2$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^2 = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

กำหนดสัญลักษณ์เป็น

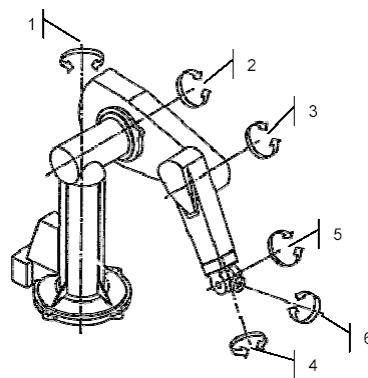
$$s_i = \sin \theta_i \quad c_i = \cos \theta_i \quad s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j) \quad \text{และ} \quad c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$$

ดังนั้นเราจะได้ตำแหน่งของ End-effectors เทียบกับเฟรม O

$$x = a_1 c_1 + a_2 c_{12}$$

$$y = a_1 s_1 + a_2 s_{12}$$

การหาไฮโมจีเนียสทรานส์ฟอร์มเมชันเมตริกซ์ของแขนกล PUMA560 แบบ 6 องศาความอิสระ ซึ่งมีโครงสร้างของแขนกลนี้ จะมีแกนเคลื่อนที่ที่เป็นอิสระต่อกัน 6 แกน (6 DOF) โดยทุกแกนจะเป็นการเคลื่อนที่แบบหมุน (6 Revolute joint) 4 แขนกล (4 Links) ดังนั้น มุมระหว่างแกน หรือ α_i และ ระยะระหว่างแกน หรือ a_i รวมถึง ระยะห่างระหว่างท่อนแขน หรือ d_i จะเป็นค่าคงที่ที่มีแต่ก็เพียงมุมระหว่างท่อนแขน หรือ θ_i ที่เป็นตัวแปรที่เปลี่ยนไปตามการเคลื่อนที่ของแขนกล ดังนั้นจากรูปเราจะกำหนดให้ แกนที่ i จะหมุนรอบแกน z_i เป็นมุม θ_i เมื่อเทียบกับแกน ที่อยู่ติดกันก่อนหน้า หรือ แกนที่ $i-1$



ภาพประกอบ 3 แสดงระบบพิกัดของหุ่นยนต์ 6 องศาความอิสระ

เมื่อ θ_i คือ Joint Variables (actual arm posture)

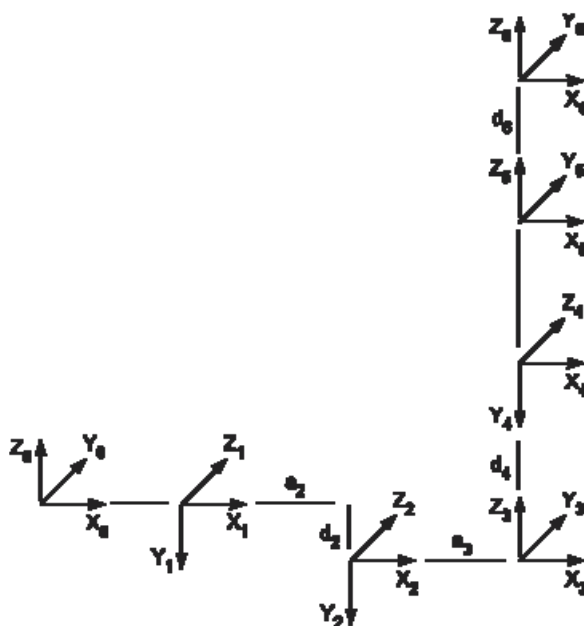
α_i, a_i, d_i คือ ค่าคงที่ D-H Parameter

A_i คือ โฮโมจีเนียสทรานส์ฟอร์มเมชันเมตริกซ์ (Homogeneous Transformation matrix) ของแต่ละแขนกล

T_0^6 คือ ผลรวมของโฮโมจีเนียสทรานส์ฟอร์มเมชันเมตริกซ์ (Homogeneous Transformation matrix) ของแขนกลทั้งหมด

หุ่นยนต์ชนิดนี้ถ้าพิจารณาให้ดีจะพบว่ามีลักษณะการทำงานที่คล้ายช่วงแขนของมนุษย์ ดังนั้นผลรวมของโฮโมจีเนียสทรานส์ฟอร์มเมชันเมตริกซ์ทั้งหมดคือ

$$T_0^6 = A_1 \dots A_6$$



ภาพประกอบ 4 แสดงการกำหนดพิกัดของหุ่นยนต์ 6 องศาอิสระ

จากข้อมูลเหล่านี้นำมาจัดให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์ D-H Parameter ได้ดังนี้

ตาราง 2 แสดงค่าตัวแปร (Parameter Variable) ต่างๆ ของหุ่นยนต์ PUMA

ข้อต่อ	a_i (มม.)	α_i (องศา)	d_i (มม.)	θ_i (องศา)
1	0	$\pi/2$	0	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2
3	a_3	$\pi/2$	d_3	θ_3

โฮโมจีเนียสทรานส์ฟอร์มเมชันเมตริกซ์ (Homogeneous Transformations Matrix)

กำหนดให้

$$A_1 = T_0^1$$

$$A_2 = T_1^2$$

$$A_3 = T_2^3$$

$$A_4 = T_3^4$$

$$A_5 = T_4^5$$

$$A_6 = T_5^6$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_2 & 0 & a_2 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_2 & 0 & a_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & 0 & \sin \theta_3 & a_3 \cos \theta_3 \\ \sin \theta_2 & 0 & -\cos \theta_3 & a_3 \sin \theta_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & 0 & -\sin \theta_4 & 0 \\ \sin \theta_4 & 0 & \cos \theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & 0 & \sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_5 & 0 & -\cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_6 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จะได้ Forward Kinematics ของหุ่นยนต์เป็น

$$T_0^6 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} n_x &= c_1 (c_{23}(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_{23} s_5 s_6) - s_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ n_y &= s_1 (c_{23}(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_{23} s_5 s_6) + c_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ n_z &= -s_{23}(c_4 c_5 c_6 + s_4 s_6) - c_{23} s_5 s_6 \\ s_x &= c_1 (-c_{23}(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_{23} s_5 s_6) - s_1 (s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) \\ s_y &= s_1 (-c_{23}(c_4 c_5 s_6 + s_4 s_6) + s_{23} s_5 s_6) + c_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 s_6) \\ s_z &= s_{23}(c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) - c_{23} s_5 s_6 \\ a_x &= c_1 (c_{23} c_4 s_5 + s_{23} c_5) - s_1 s_4 s_5 \\ a_y &= s_1 (c_{23} c_4 s_5 + s_{23} c_5) - c_1 s_4 s_5 \\ a_z &= -s_{23} c_4 s_5 + c_{23} c_5 \\ p_x &= c_1 (d_6 (c_{23} c_4 s_5 + s_{23} c_5) + s_{23} d_4 + a_3 c_{23} + a_2 c_2) - s_1 (d_6 s_4 s_5 + d_2) \\ p_y &= s_1 (d_6 (c_{23} c_4 s_5 + s_{23} c_5) + s_{23} d_4 + a_3 c_{23} + a_2 c_2) + c_1 (d_6 s_4 s_5 + d_2) \\ p_z &= d_6 (c_{23} c_5 - s_{23} c_4 s_5) + c_{23} d_4 - a_3 s_{23} - a_2 s_2 \end{aligned}$$

กำหนดสัญลักษณ์เป็น

$$s_i = \sin \theta_i \quad c_i = \cos \theta_i \quad s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j) \quad \text{และ} \quad c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$$

อินเวอร์สคิเนเมติกส์ (Inverse kinematics)

อินเวอร์สคิเนเมติกส์เป็นวิธีการหาค่า มุม และ ระยะห่างของท่อนแขน แต่ละท่อน ที่แขนกล จะต้องเคลื่อนที่ไป เพื่อไปยังตำแหน่งที่ต้องการ (Inverse kinematics) นั่นคือว่า ถ้ากำหนดตำแหน่ง และทิศทางของปลายสุดของแขนกล เราจะต้องหา ว่า ค่าของมุมของข้อต่อแต่ละข้อ (สำหรับข้อต่อแบบหมุน) และหรือ ค่าของระยะห่างระหว่างท่อนแขน (ถ้าเป็นข้อต่อที่เคลื่อนที่ในแนวระนาบ) จะต้องเป็นเท่าไรถึงจะทำให้ปลายสุดของ แขนเคลื่อนที่ไปยังตำแหน่งและทิศทางที่ต้องการ

ในการหาคำตอบของอินเวอร์สคิเนเมติกส์มีประเด็นอยู่สองประเด็นที่สำคัญคือ บางกรณีอาจไม่มีคำตอบเลย และ บางกรณีอาจมีหลายคำตอบ หรือนั่นคือ การเคลื่อนที่ของ แขนกลอาจเป็นไปได้หลายรูปแบบที่ได้ผลลัพธ์เหมือนกัน ในกรณีที่ไม่มีคำตอบเลยนั้นหมายความว่า ตำแหน่งที่เราต้องการจะให้แขนกลเอื้อมไป นั้นไม่อาจจะเป็นไปได้ เนื่องจากว่า ตำแหน่งนั้นไม่ได้อยู่ในบริเวณพื้นที่ทำงานของแขนกล (Working area) เช่นตำแหน่งนั้นอาจจะไกลเกินไป หรือ เนื่องจากแขนกลแต่ละแบบจะมีพื้นที่ทำงานไม่เหมือนกันการเข้าถึงตำแหน่งต่างๆจึงไม่เท่ากัน เช่น แขนกลแบบทรงกระบอก (Cylindrical) จะไม่สามารถเอื้อมแขนไปยังด้านบน ยิ่งไปกว่านั้นปัญหาในกรณีนี้ สามารถแก้ได้โดยการเปลี่ยนตำแหน่งที่ต้องการจะให้แขนกลทำงาน ให้อยู่ในพื้นที่การทำงานของแขนกล

ในเรื่องของกรณีที่มีคำตอบหลายค่า นั้นเกิดขึ้นบางครั้งก็อาจเป็นข้อดีที่เรามีตัวเลือกมากแต่บางครั้งมันก็จะกลายเป็นปัญหาในการเลือกคำตอบ โดยเฉพาะ ถ้าเราใช้คอมพิวเตอร์ในการควบคุม เมื่อเกิดคำตอบขึ้นหลายคำตอบ อาจสร้างปัญหาให้คอมพิวเตอร์ ในการเลือกในการหาค่าพารามิเตอร์การเคลื่อนที่ของแขนกล เพื่อให้ปลายแขนกลเอื้อมไปยังตำแหน่ง และทิศทางที่ต้องการนี้ สามารถทำได้สองวิธี คือ แบบการแก้สมการโดยตรงแบบ Closed form และอีกวิธีหนึ่งคือแบบตัวเลข (Numerical) ในการหาคำตอบแบบตัวเลขจะเป็นไปในลักษณะของการทดลองไปเรื่อยๆ หมายความว่า ลองให้แขนกลเคลื่อนที่ไปด้วยค่าพารามิเตอร์ (θ_i, d_i) ค่าใดค่าหนึ่ง แล้วดูว่าตำแหน่งกับ ทิศทางถูกต้องหรือไม่ ถ้าไม่ถูกต้องก็ต้องปรับค่าพารามิเตอร์เหล่านั้นไปเรื่อยๆ จนกว่าจะได้ตามต้องการ วิธีการเช่นนี้คล้ายกับการใช้งานจริง โดยเราจะสั่งให้แขนกลเคลื่อนที่ทีละแกนไปจนกว่าจะได้ตำแหน่งและทิศทางของปลายแขนตามต้องการแล้วทำการบันทึกค่าพารามิเตอร์เหล่านั้นไว้แล้วค่อยให้แขนกลเคลื่อนที่ด้วยตัวเองต่อไป เนื่องจากวิธีการแบบตัวเลขนี้ต้องใช้เวลาค่อนข้างมาก ดังนั้นในบางครั้ง วิธีแบบ Closed form จึงเหมาะสมกว่า เพราะจากการคำนวณจะได้ค่าพารามิเตอร์ที่แขนกลต้องเคลื่อนที่ไปนั้นได้ตรงๆ แต่อาจจะยุ่งยากในการแก้สมการบ้าง

หุ่นยนต์ SCORBOT-ER9

หุ่นยนต์ SCORBOT-ER9 เป็นหุ่นยนต์ที่มีความแข็งแรงทนทานและมีประสิทธิภาพการทำงานสูงออกแบบให้มีลักษณะสรีระเหมือนมนุษย์ สามารถยกน้ำหนักได้ 2.2 kg (4.4 lb) โครงสร้างมีทั้งหมด 5 แกน ขับเคลื่อนการทำงานโดยใช้เซอร์โวมอเตอร์กระแสตรง ส่งกำลังผ่านเกียร์ทดรอบแบบฮามอนิกส์และสายพาน กำหนดตำแหน่งและเคลื่อนที่โดยใช้คอนโทรลเลอร์ควบคุมร่วมกับเอ็นโคเดอร์แบบแสง ซึ่งจะทำหน้าที่ป้อนสัญญาณกลับมาตรวจสอบตำแหน่งในลักษณะสัญญาณพัลส์ ความละเอียดในการกำหนดตำแหน่งอยู่ที่ 0.09 mm. (0.004") ความเร็วในการทำงานกำหนดได้ 2 แบบ คือ ระยะทางต่อหน่วยเวลา (mm/sec) และ หน่วยเปอร์เซ็นต์ (%)



ภาพประกอบ 5 แสดงหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9

ตาราง 3 แสดงรายละเอียดคุณสมบัติของหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9

คุณสมบัติของหุ่นยนต์		
โครงสร้างทางกล	เลียนแบบโครงสร้างการทำงานมือของมนุษย์	
จำนวนแกน	5 แกนและมือจับชิ้นงาน	
แกนที่เคลื่อนไหว	ระยะการหมุน (องศา)	ความเร็วการหมุน
แกนหมุนที่1 ฐานหรือเอว	270°	79° /sec 112° /sec
แกนหมุนที่2 ไหล่	145°	68° /sec 99° /sec
แกนหมุนที่3 ข้อศอก	210°	76° sec 112° /sec
แกนหมุนที่4 ข้อมือโยก	196°	87° /sec 113° /sec
แกนหมุนที่5 ข้อมือหมุน	737°	166° /sec
รัศมีการทำงานสูงสุด	691 mm. ไม่รวมมือจับ	
อุปกรณ์เสริมส่วนปลาย	มือจับทำงานด้วยลม	
	มือจับทำงานด้วยมอเตอร์ไฟฟ้า (DC Servo)	
การกำหนดตำแหน่ง	กำหนดตำแหน่งเริ่มต้นคงที่ทุกแกน	
สัญญาณป้อนกลับ	สัญญาณพัลส์ซึ่งตรวจวัดจากลำแสง	
อุปกรณ์ทำงาน	มอเตอร์ไฟฟ้า (DC Servo)	

ตาราง 3 (ต่อ)

คุณสมบัติของหุ่นยนต์	
การส่งกำลัง	ฮามอนิกส์เกียร์และสายพาน
รับน้ำหนักสูงสุด	2 kg (4.4 lb) รวมน้ำหนักของมือจับ
ความละเอียดการกำหนดตำแหน่ง	$\pm 0.09\text{mm. (0.0035")}$
น้ำหนักตัวหุ่นยนต์	38 kg (83lb)
อุณหภูมิทำงาน	$2 - 40^{\circ}\text{C (36 - 104}^{\circ}\text{F)}$

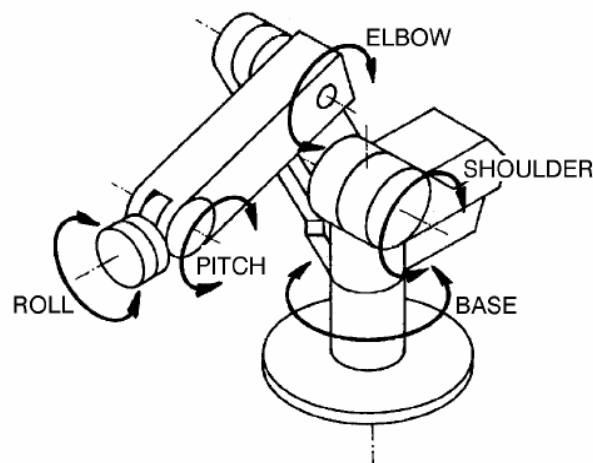
โครงสร้างของหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9

หุ่นยนต์ SCORBOT-ER9 เป็นหุ่นยนต์ที่เลียนแบบโครงสร้างการทำงานมือของมนุษย์ มีการทำงานโดยการเคลื่อนที่ในลักษณะการหมุนทั้ง 5 จุดต่อ และติดตั้งมือจับชิ้นงานที่ส่วนปลาย หุ่นยนต์มีการเคลื่อนที่แบบ 5 องศาอิสระ (5 DOF) ออกแบบโดยให้ส่วนปลายของหุ่นยนต์เป็นส่วนที่ใช้กำหนดตำแหน่งตามที่ต้องการแต่ต้องอยู่ในเขตพื้นที่ทำงาน

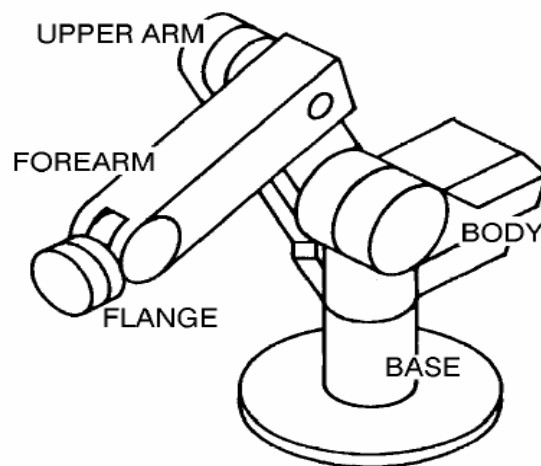
ภาพประกอบ 6 และ 7 แสดงจุดต่อและแขนของหุ่นยนต์ แต่ละจุดต่อจะขับเคลื่อนแขนหุ่นยนต์ด้วยเซอร์โวมอเตอร์กระแสตรง (DC Servo Motor) ส่งกำลังผ่านฮามอนิกส์เกียร์และสายพาน

ตาราง 4 แสดงจุดต่อต่างๆ และการเคลื่อนไหวของหุ่นยนต์

แกนที่	ชื่อจุดต่อ	การเคลื่อนไหว	มอเตอร์ที่
1	เอว	หมุนเอวรอบตัวเอง	1
2	ไหล่	ยกขึ้นและลดแขนลง	2
3	ข้อศอก	ยกขึ้นและลดปลายแขนลง	3
4	ข้อมือโยก	ยกขึ้นและลดส่วนปลาย	4
5	ข้อมือหมุน	หมุนส่วนปลาย	5



ภาพประกอบ 6 แสดงจุดหมุนของหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9

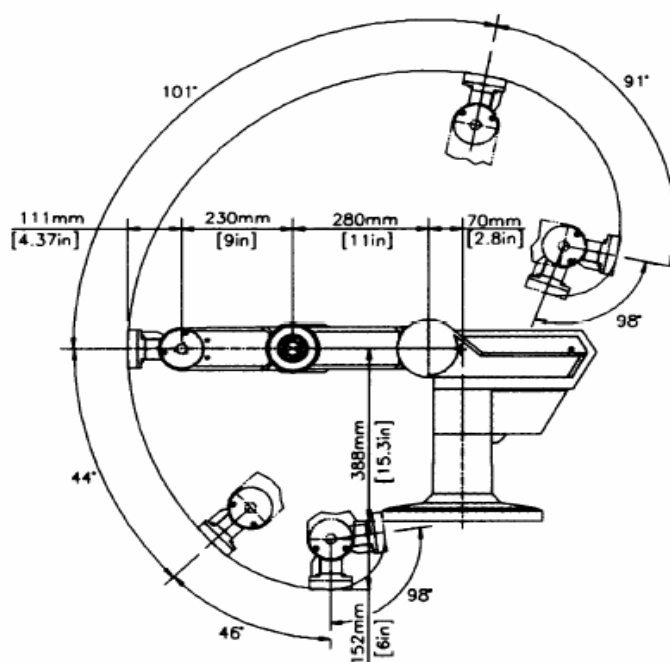


ภาพประกอบ 7 แสดงแขนกลของหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9

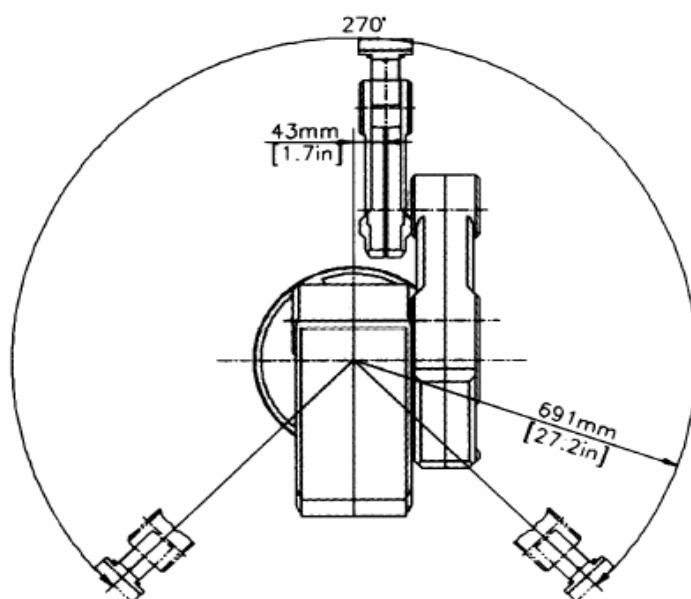
ขอบเขตพื้นที่ทำงาน

ขอบเขตพื้นที่ทำงานของหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9 ได้จากความยาวของแขนหุ่นยนต์และองศาการหมุนของแต่ละจุดต่อ ภาพประกอบ 8 ได้แสดงขนาดความยาวของแขนหุ่นยนต์และส่วนที่ยื่นออกไป ภาพประกอบ 9 แสดงพื้นที่ทำงานเมื่อมองจากด้านบนลงมา

ฐานของหุ่นยนต์จะยึดแน่นอยู่กับจุดรองรับ หรือบางครั้งอาจยึดอยู่กับแผ่นรับที่เลื่อนได้ (Slide Base) ซึ่งสามารถเลือกขนาดความยาวได้ตามต้องการ



ภาพประกอบ 8 แสดงขอบเขตการทำงานมองจากด้านข้างหุ่นยนต์

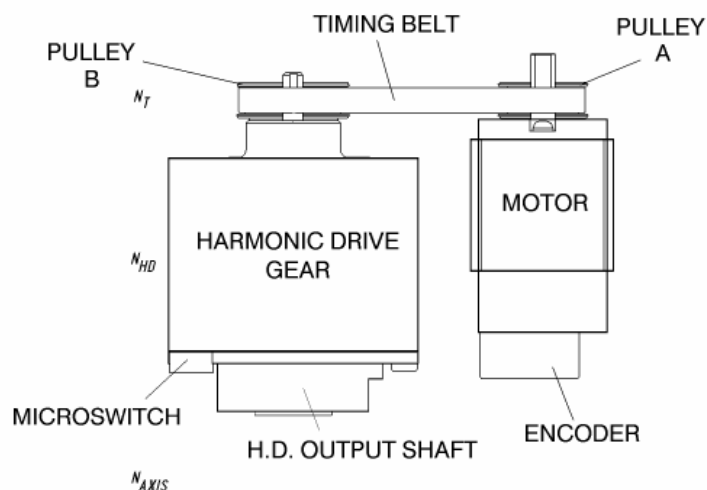


ภาพประกอบ 9 แสดงขอบเขตการทำงานมองจากด้านบนหุ่นยนต์

ระบบการขับเคลื่อน

ระบบการขับเคลื่อนของหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9 จะประกอบด้วยอุปกรณ์ 3 ส่วน คือ

1. เซอร์โวมอเตอร์กระแสตรง
2. ฮามอนิกส์เกียร์
3. สายพานและพูลเลย์



ภาพประกอบ 10 แสดงระบบขับเคลื่อนหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9

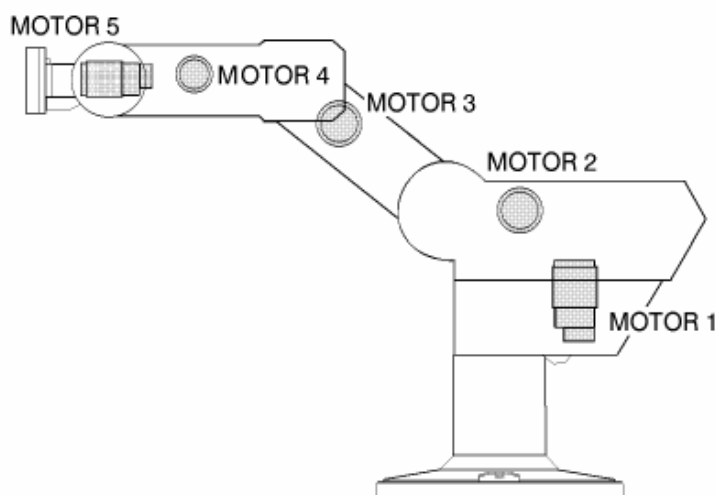
ภาพประกอบ 10 แสดงระบบการขับเคลื่อนของ หุ่นยนต์ SCORBOT-ER9 แกนที่ 1-4 ส่วนการขับเคลื่อนแกนที่ 5 จะไม่มีสายพานและพูลเลย์ จะมีแต่ฮาร์มอนิกส์เกียร์เท่านั้น

มอเตอร์

หุ่นยนต์ SCORBOT-ER9 จะขับเคลื่อนแขนหุ่นยนต์ด้วยเซอร์โวมอเตอร์กระแสตรง โดยใช้หลักการเปลี่ยนแปลงค่าสัญญาณจากคอนโทรลเลอร์ (กำลังไฟฟ้า) ให้ออกมาควบคุมมอเตอร์ในลักษณะการหมุนของเพลลา (กำลังทางกล)

แขนของหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9 จะหมุนหรือเคลื่อนที่อย่างแม่นยำโดยอาศัยหลักการดังต่อไปนี้

- มอเตอร์สามารถหมุนได้หลายความเร็วและมีความแม่นยำในการหมุนสูงมาก เช่น ถ้านำไปใช้ในการพ่นสี ก็สามารถเลือกปรับความเร็วให้เหมาะสมได้
- มอเตอร์สามารถเลือกปรับความเร็วได้อย่างละเอียดถี่ถ้วนและสามารถปรับอัตราเร่งได้ตามลักษณะของงาน
- มอเตอร์สามารถให้แรงบิดสูงในสภาวะแตกต่างของความเร็ว
- มอเตอร์สามารถหยุดการหมุนได้อย่างรวดเร็วในทุกตำแหน่งการทำงาน หรือเปลี่ยนแปลงทิศทางกะทันหันโดยไม่มีการเหลื่อมล้ำตำแหน่ง
- ถึงแม้ว่ามอเตอร์ที่ติดตั้งอยู่ในหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9 จะต้องทำงานภายใต้น้ำหนักและแรงเฉื่อยของตัวเอง แต่ก็ได้ออกแบบให้มีน้ำหนักเบาและขนาดกะทัดรัด แต่มากด้วยประสิทธิภาพการทำงาน

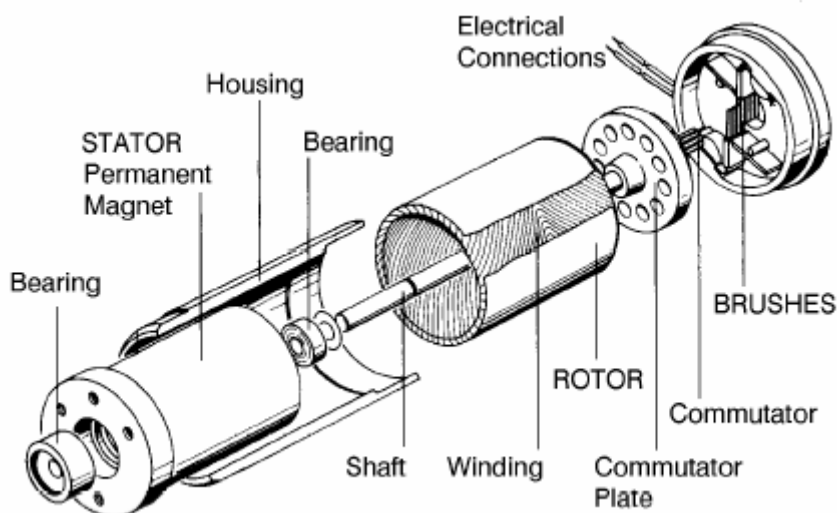


ภาพประกอบ 11 แสดงจุดที่ติดตั้งมอเตอร์ในหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9

ภาพประกอบ 11 แสดงการติดตั้งตัวมอเตอร์ภายในหุ่นยนต์ในจุดต่างๆในการขับเคลื่อนทั้งแบบการส่งกำลังแบบอัตราทดสองชั้น (แกน 1-4) และอัตราทดชั้นเดียว (แกน 5)

โครงสร้างของมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง

หลักการทำงานของมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง จะคล้ายการทำงานของมอเตอร์ไฟฟ้าโดยทั่วไป คือ จะให้กระแสไฟฟ้าไหลผ่านขดลวดตัวนำในมอเตอร์ไฟฟ้าเพื่อสร้างสนามแม่เหล็ก แล้วอาศัยสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นเปลี่ยนเป็นแรง ซึ่งอยู่ในรูปแบบการหมุนของเพลามอเตอร์



ภาพประกอบ 12 แสดงโครงสร้างพื้นฐานของมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง

ภาพประกอบ 12 แสดงโครงสร้างพื้นฐานและส่วนประกอบต่างๆของมอเตอร์ไฟฟ้าเพื่อให้เห็นถึงลักษณะโครงสร้างของมอเตอร์ไฟฟ้าที่ใช้กับหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9 ซึ่งมีส่วนประกอบหลักอยู่ด้วยกัน 3 ส่วนด้วยกัน คือ

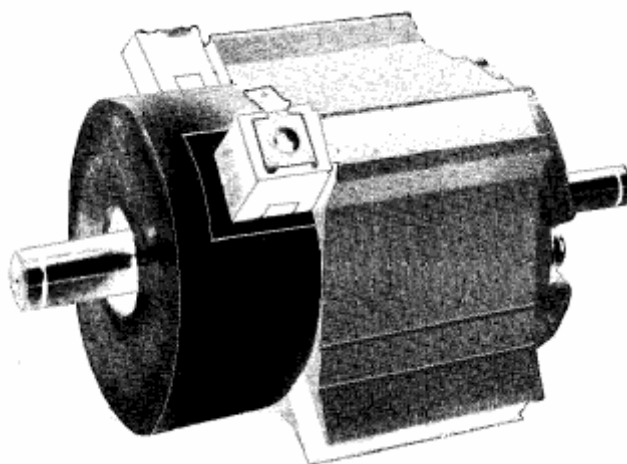
1. สเตเตอร์ (Stator) เป็นที่อยู่กับที่มีหน้าที่สร้างสนามแม่เหล็ก โดยจะใช้แม่เหล็กถาวรหรือแม่เหล็กที่เกิดขึ้นจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้าชั่วคราวก็ได้

2. โรเตอร์ (Rotor) เป็นส่วนที่หมุนอยู่ระหว่างสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้น และอาศัยการหมุนนี้ต่อเพลาส่งกำลังเพื่อนำไปหมุนโหลดภายนอก โรเตอร์โดยทั่วไปจะประกอบด้วยแผ่นเหล็กหล่อเจาะรูแล้วร้อยลวดตัวนำเข้าไปพันเป็นขดลวดโรเตอร์ ส่วนปลายของลวดตัวนำทั้งสอง จะนำมาต่อเข้ากับซีคอมมิวเตเตอร์ ซึ่งมีไว้สำหรับต่อกระแสไฟฟ้าเข้าไปสร้างสนามแม่เหล็กในโรเตอร์โดยผ่านแปรงถ่าน

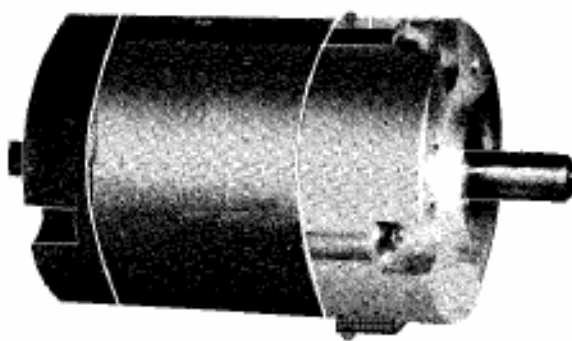
3. แปรงถ่าน (Brushes) จะทำหน้าที่ต่อไฟฟ้าจากแหล่งจ่ายไฟไปยังโรเตอร์ผ่านทางซีคอมมิวเตเตอร์ขณะที่โรเตอร์หมุน

มอเตอร์ของหุ่นยนต์

หุ่นยนต์ SCORBOT-ER9 จะใช้แม่เหล็กถาวรเป็นส่วนประกอบในมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรงเพื่อใช้ในการขับเคลื่อนแขนของหุ่นยนต์



ภาพประกอบ 13 แสดงมอเตอร์ในแกนที่ 1, 2 และ 3



ภาพประกอบ 14 แสดงมอเตอร์ในแกนที่ 4 และ 5

แกนที่ 1, 2 และ 3 ของหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9 จะทำงานด้วยมอเตอร์ที่แสดงไว้ในภาพประกอบ 13 ส่วนแกนที่ 4 และ 5 จะทำงานด้วยมอเตอร์ที่แสดงไว้ในภาพประกอบ 14

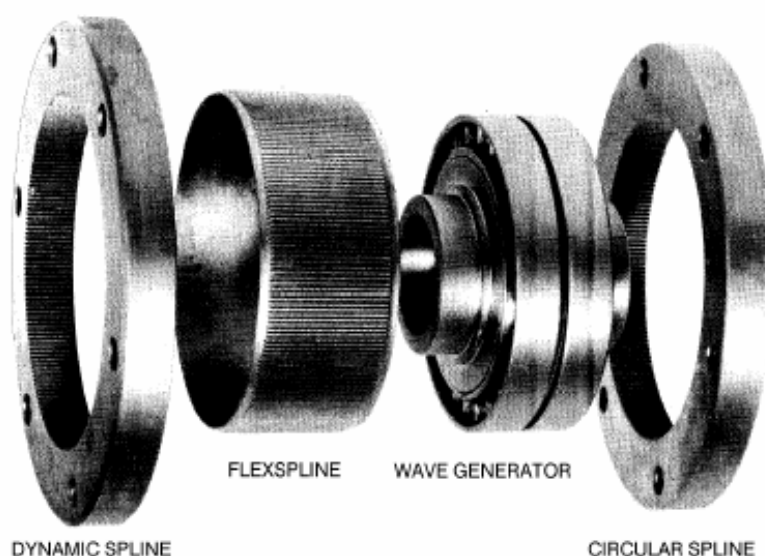
ซึ่งมอเตอร์ดังที่กล่าวมาจะสามารถทำหน้าที่ให้การเคลื่อนไหวแขนของหุ่นยนต์ไปในตำแหน่งต่างๆ ของพื้นที่ทำงานได้อย่างรวดเร็ว รับภาระยกโหลดได้ด้วยแรงบิดที่สูง และทำงานได้ละเอียดแม่นยำเนื่องจากมีสัญญาณป้อนกลับมาตรวจสอบด้วยเอ็นโคเดอร์

ตาราง 5 แสดงคุณสมบัติของมอเตอร์ที่ใช้กับหุ่นยนต์

	คุณสมบัติของมอเตอร์	
	มอเตอร์แกนที่ 1,2,3	มอเตอร์แกนที่ 4,5
แรงบิดสูงสุด	1.01 Nm.	0.19 Nm.
แรงบิดทำงาน	0.23 Nm.	0.09 Nm.
ความเร็วทำงานสูงสุด	4000 rpm	4500 rpm
น้ำหนัก	1.29 kg	0.28 kg

ระบบส่งกำลังเกียร์ฮามอนิกส์

ระบบส่งกำลังเกียร์ฮามอนิกส์ที่ใช้กับหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9 จะมีอัตราทดเกียร์ที่สูงมาก



ภาพประกอบ 15 แสดงโครงสร้างเกียร์ฮาร์มอนิกส์

เกียร์ฮาร์มอนิกส์ที่ใช้ในหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9 จะประกอบด้วย 4 ส่วนคือ

1. Circular Spline เป็นเหล็กแข็งรูปวงแหวนมีฟันเฟืองอยู่ด้านใน เป็นส่วนที่ใช้ติดตั้งอยู่กับแกนของหุ่นยนต์
2. Wave Generator เป็นแผ่นเหล็กบางรูปวงรี จะต่อเข้ากับเพลารับกำลัง ส่วนประกอบรอบข้างด้านนอกจะมีลูกปืนกลมติดตั้งไว้รอบๆ
3. Flex Spline เป็นส่วนที่เคลื่อนที่ได้ รูปร่างทรงกระบอกบาง มีฟันเฟืองด้านนอก มีหน้าที่ต่อกำลังงานไปที่เพลาส่งกำลังไปใช้งาน
4. Dynamics Spline เป็นเหล็กแข็งทรงกระบอก มีฟันเฟืองด้านใน

ฟันเฟืองด้านนอกของ Flex Spline จะมีขนาดเกือบจะเท่ากับฟันเฟืองด้านในของ Circular Spline เพียงแต่ว่าฟันเฟืองของ Circular Spline จะมีสองส่วนที่สัมผัสกัน และเฟืองทั้งสองจุดดังกล่าวจะสัมผัสกันก็ต่อเมื่อ Wave Generator จะทำหน้าที่ดัน Flex Spline ออกมาด้านข้าง เพราะว่า Wave Generator มีลักษณะเป็นรูปวงรี จึงถูกดันออกให้เฟืองสัมผัสกันเพียงสองส่วนเท่านั้น ดังนั้น เมื่อเพลารับของมอเตอร์หมุน Wave Generator ก็จะมีมุมตามไปด้วย ทำให้ส่วนที่เป็นฟันเฟืองที่สัมผัสกันหมุนตาม แต่อย่างไรก็ตาม ทิศทางการหมุนจะสวนทางกัน คือ เมื่อ Wave Generator หมุนไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา Flex Spline จะหมุนทวนเข็มนาฬิกา และจะทำให้ส่วนที่สัมผัสฟันเฟืองทั้งสองหมุนทวนเข็มนาฬิกาด้วย

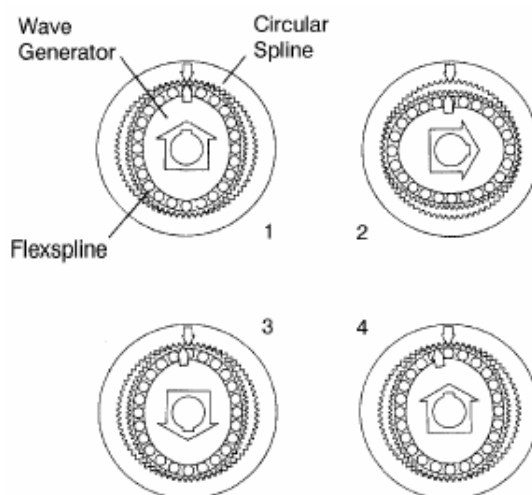
อัตราทดฮาร์มอนิกส์เกียร์ (Harmonic Drive Gear Ratios)

จากฮาร์มอนิกส์เกียร์ทั้งหมด อัตราทดของฮาร์มอนิกส์เกียร์หาได้จาก เอารอบการหมุนของเพลาลับหารด้วยรอบการหมุนของเพลตาม นั่นคือ ถ้าฟันเฟืองของ Flex Spline เท่ากับ N_f และทุก 1 รอบการหมุนของเพลาลับ จะทำให้การหมุนของเพลตามเท่ากับ $2/N_f$ รอบ (มีฟันเฟืองสองส่วนที่สัมผัสกัน) จะได้

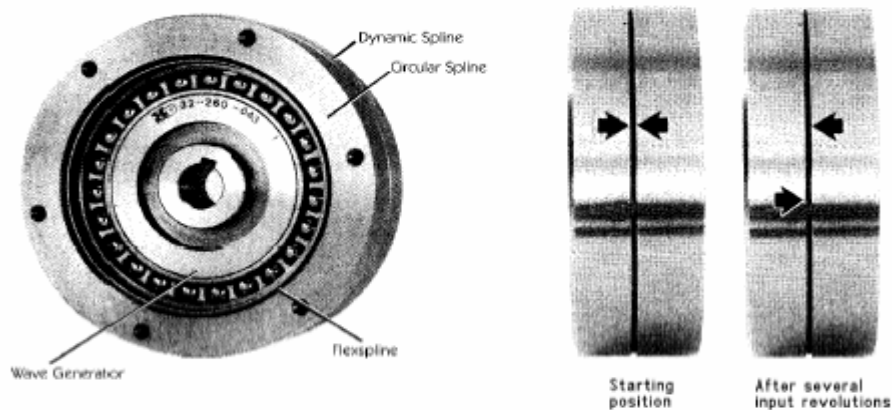
$$HD \text{ gear ratio} = \frac{1}{\left(\frac{2}{N_f}\right)} = \frac{N_f}{2} \quad (2-10)$$

ฮาร์มอนิกส์เกียร์ที่ใช้กับหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9 มีอัตราทดเกียร์ในแต่ละแกน ดังนี้

Axis 1 — 161:1
Axis 2 — 160:1
Axis 3 — 160:1
Axis 4 — 100:1
Axis 5 — 100:1



ภาพประกอบ 16 แสดงการทำงานของเกียร์ฮาร์มอนิกส์



ภาพประกอบ 17 แสดงการทำงานของเกียร์ฮาร์มอนิกส์

อัตราทดเกียร์รวมในแต่ละแกน (Axis Gear Ratios)

อ้างอิงจากภาพประกอบ 10 การส่งกำลังสำหรับแกนที่ 1 ถึงแกนที่ 4 จะเป็นแบบอัตราทด 2 ชั้น คืออัตราทดสายพาน และอัตราทดฮามอนิกส์เกียร์

อัตราทดรวมทั้งหมดของเพลาส่งกำลังเพื่อที่จะทำให้แขนของหุ่นยนต์เคลื่อนไหวได้ หาได้จาก

$$N_T \times N_{HD} = N_{AXIS} \quad (2-11)$$

เมื่อ

$$N_T = \text{อัตราทดของสายพาน หาได้จาก } \frac{PullayB}{PullayA}$$

$$N_{HD} = \text{อัตราทดฮามอนิกส์เกียร์}$$

$$N_{AXIS} = \text{อัตราทดรวมทั้งหมด}$$

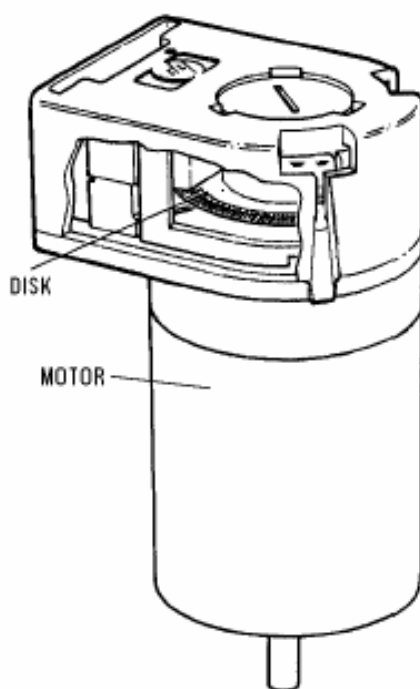
ตาราง 6 แสดงอัตราทดเกียร์ของหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9

	SCORBOT-ER9 Gear Ratios		
	N_T	N_{HD}	N_{AXIS}
Axis 1	1.33 : 1	161 : 1	214.13 : 1
Axis 2	1.52 : 1	160 : 1	243.80 : 1
Axis 3	1.33 : 1	160 : 1	213.33 : 1
Axis 4	1.80 : 1	100 : 1	180 : 1
Axis 5		100 : 1	100 : 1

ดังนั้น ถ้าต้องการให้แกนที่ 3 หมุน 1 รอบ (360°) มอเตอร์จะต้องหมุนไปทั้งหมด 213.33 รอบ แต่ในความเป็นจริง การเคลื่อนที่ในแต่ละแกนจะเคลื่อนที่ได้ในวงจำกัด ขึ้นอยู่กับลิมิตสวิตช์ (Limit Switch) ที่ติดตั้งไว้ในแต่ละแกนเพื่อป้องกันไม่ให้น๊อคเกินกว่าที่กำหนดไว้ ซึ่งจะมีผลให้สายไฟหรือท่อลมขาดได้

เ็นโค้ดเดอร์ (Encoders)

การหาตำแหน่งและการเคลื่อนไหวของแขนหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9 กำหนดได้จากการป้อนกลับของสัญญาณจากแสงไฟในเ็นโค้ดเดอร์ส่งกลับมายังตัวคอนโทรลเลอร์ เ็นโค้ดเดอร์จะทำงานโดยใช้จานหมุนเจาะรูซึ่งติดตั้งอยู่กับเพลามอเตอร์แล้วให้แสงจากหลอดแอลอีดี (LED) ส่องผ่านจานหมุนแล้วส่งสัญญาณนับไปตรวจสอบและทำความเข้าใจที่ตัวคอนโทรลเลอร์

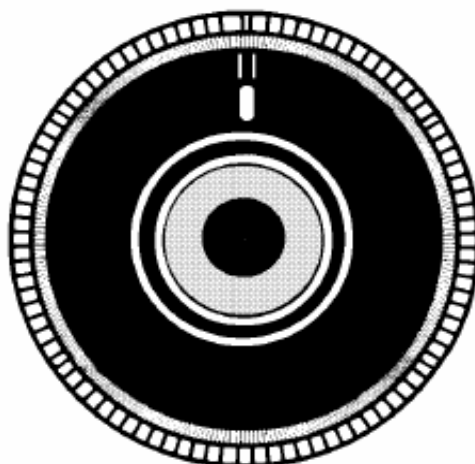


ภาพประกอบ 18 แสดงเอ็นโคดเดอร์หุ่นยนต์ SCORBOT-ER9

เอ็นโคดเดอร์ที่ใช้ในหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9 ประกอบด้วยหลอดแอลอีดี (LED) เป็นตัวส่งลำแสง ในทิศทางตรงกันข้ามจะมีวงจรไอซี (IC) ซึ่งทำหน้าที่เป็นตัวรับสัญญาณแสงที่ส่งมาให้ วงจรไอซีประกอบด้วยตัวรับสัญญาณแสงอยู่ด้วยกันหลายตัว เมื่อรับสัญญาณแสงมาแล้วก็จะทำหน้าที่เปลี่ยนสัญญาณแสงที่รับมาได้เป็นสัญญาณดิจิทัล แล้วส่งกลับไปให้คอนโทรลเลอร์ ระหว่างตัวส่งแสงและตัวรับแสงจะมีแผ่นดิสก์เจาะรูติดตั้งอยู่กับเพลาของมอเตอร์ เมื่อมอเตอร์หมุนแผ่นดิสก์นี้ก็จะหมุนตามไปด้วย

แผ่นดิสก์เอ็นโคดเดอร์จะหมุนอยู่ระหว่างตัวส่งแสงและตัวรับแสง การทำงานแสงที่ส่งไปยังตัวรับจะถูกแผ่นดิสก์เจาะรูบัง ส่วนที่ผ่านไปได้ตัวรับจะรับสัญญาณแสงเป็นช่วงๆ แล้วเปลี่ยนสัญญาณแสงที่ได้เป็นสัญญาณพัลส์ต่อเนื่องไปตลอดการหมุน

แผ่นดิสก์เอ็นโคดเดอร์ที่ใช้กับหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9 จะมีรูอยู่ 512 ช่อง จำนวนรูในแผ่นดิสก์เอ็นโคดเดอร์จะนำไปแปลงเป็นสัญญาณพัลส์ต่อไป (C-Pulse) ทุกๆ รูในแผ่นดิสก์ต่อการหมุน 1 รอบ สัญญาณพัลส์ที่ได้ จะส่งผลต่อตำแหน่งการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์

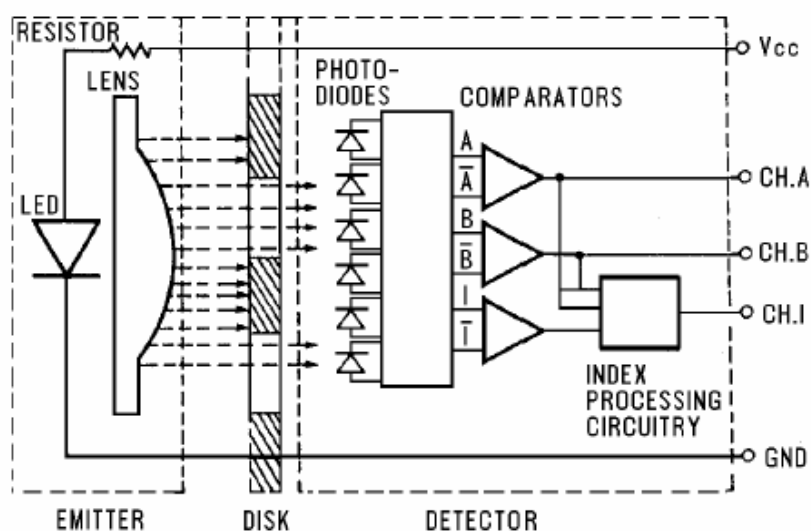


ภาพประกอบ 19 แสดงจานดิสก์เอ็นโคเดอร์หุ่นยนต์ SCORBOT-ER9

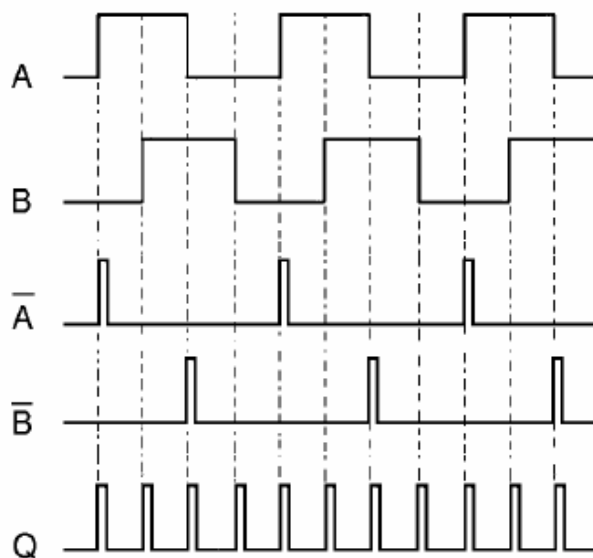
ตัวรับแสงจะมีอยู่หลายตัวเรียงสลับกันไป เมื่อรับแสงมาแล้วก็นำเข้าไปยังวงจรประมวลผล แล้วส่งสัญญาณออกมาเป็นสัญญาณ $A, \bar{A}, B, \bar{B}, I$ และ $\bar{I}$

ถ้าจะเปรียบเทียบสัญญาณที่ได้รับ สัญญาณสุดท้ายที่ส่งออกมาสำหรับช่องสัญญาณ A, B และ I จะเห็นได้ว่า สัญญาณที่ออกมาจากช่องสัญญาณ A สัญญาณจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมเหมือนกับสัญญาณช่อง B (สัญญาณช่อง B เฟสจะต่างกัน 90°) ส่วนสัญญาณ I จะส่งออกมาในรูปสัญญาณพัลส์

เมื่อแผ่นดิสก์หมุนวนเข้ามาพิก้า (มองเอ็นโคเดอร์จากด้านหลังตัวมอเตอร์) สัญญาณช่อง A จะนำหน้าสัญญาณช่อง B และเมื่อแผ่นดิสก์หมุนตามเข็มนาฬิกา สัญญาณช่อง B จะนำหน้าสัญญาณช่อง A เช่นกัน ทำให้สามารถตรวจสอบและควบคุมทิศทางการหมุนได้ตามต้องการ



ภาพประกอบ 20 แสดงอุปกรณ์ในเอ็นโคเดอร์



ภาพประกอบ 21 แสดงสัญญาณที่ออกจากจากเอ็นโคดเดอร์

ความละเอียดของเอ็นโคดเดอร์ (Encoder Resolution)

จากสัญญาณรูปสี่เหลี่ยม คอนโทรลเลอร์จะรับสัญญาณ 4 ครั้ง เมื่อเอ็นโคดเดอร์ให้แสงผ่านรู 1 ช่อง ดังนั้น 1 ช่องที่ให้แสงผ่านจะต้องนำมาคูณด้วย 4 จึงจะได้สัญญาณนับจริง

ความละเอียดของเอ็นโคดเดอร์หาได้จาก

$$S_E = \frac{360^\circ}{n} \quad (2-12)$$

เมื่อ

S_E = ความละเอียดของเอ็นโคดเดอร์ในการให้สัญญาณนับ 1 ครั้ง

n = จะนวนนับในการหมุนเอ็นโคดเดอร์ 1 รอบ

เอ็นโคดเดอร์ที่ใช้ในหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9 จะมีอยู่ 512 ช่อง เมื่อคำนวณแล้วจะได้การนับเท่ากับ 2048 ต่อการหมุนของมอเตอร์ 1 รอบ ดังนั้น ความละเอียดของเอ็นโคดเดอร์หาได้ดังนี้

$$S_E = \frac{360^\circ}{2048} = 0.176^\circ \quad (2-13)$$

และเมื่อความละเอียดจะถูกกำหนดด้วยอัตราทดเกียร์ทั้งหมดในแต่ละแกน ความละเอียดก็จะเปลี่ยนไป เมื่อเอ็นโคเดอร์ติดตั้งไว้ที่เฟลมอเตอร์แล้วหมุนเพื่อให้แกนเคลื่อนที่ ความละเอียดหาได้จากสมการ

$$S_{JOINT} = \frac{S_E}{N_{AXIS}} \quad (2-14)$$

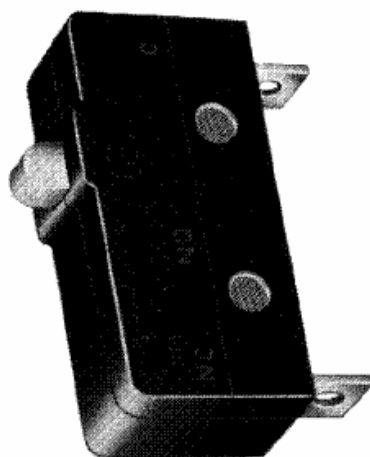
ดังนั้น ตัวอย่างความละเอียดของเอ็นโคเดอร์ของแกนที่ 3 ของหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9 หาได้ดังนี้

$$S_{J3} = \frac{0.176^\circ}{213.33} = 0.000825^\circ \quad (2-15)$$

จะเห็นได้ว่า ความละเอียดของเอ็นโคเดอร์จะมีมากขึ้น ซึ่งจะทำให้ง่ายต่อการควบคุมเพื่อหาตำแหน่งและการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ ความแม่นยำเที่ยงตรงในการทำงานสูงมาก ทำให้มีความยืดหยุ่นในการทำงานสูงตามไปด้วย

สวิตช์จำกัดระยะการทำงาน

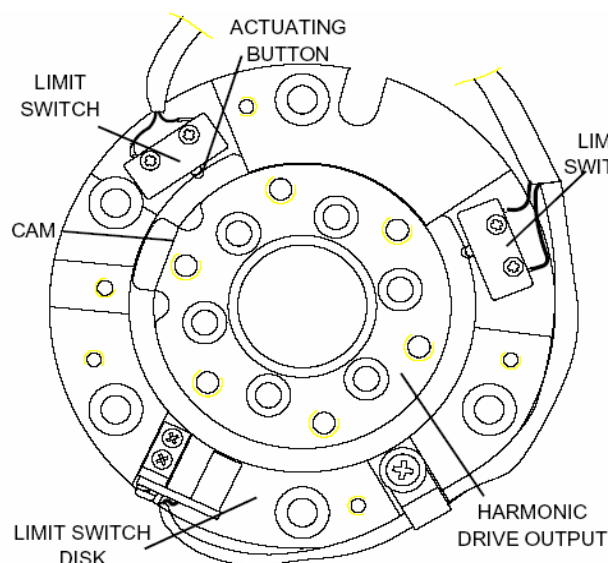
หุ่นยนต์ SCORBOT-ER9 จะใช้ลิมิตสวิตช์เป็นตัวทำหน้าที่ป้องกันการหมุนรอบจุดหมุนในแต่ละแกนไม่ให้หมุนเกินตำแหน่งที่ได้กำหนดเอาไว้ เมื่อแขนหุ่นยนต์ทำงานเกินระยะพื้นที่ทำงาน ชุดควบคุมก็จะหยุดทำงานและแสดงผลออกมาว่า ทำงานผิดพลาด (ERROR) ลิมิตสวิตช์เป็นชิ้นส่วนอิเล็กทรอนิกส์ที่ติดตั้งอยู่กับแขนกล และแยกอยู่ต่างหากกับชุดคอนโทรลเลอร์



ภาพประกอบ 22 แสดงลิมิตสวิตช์ของหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9

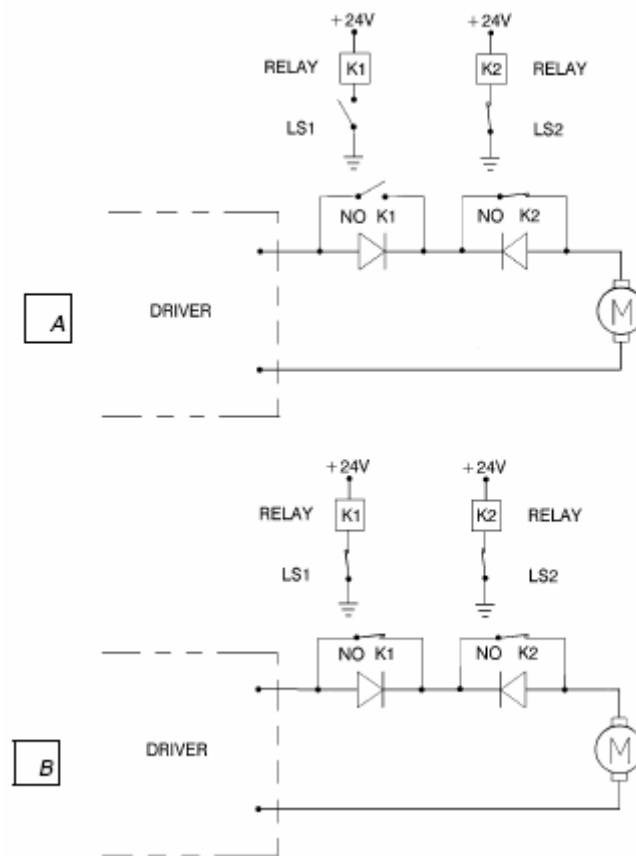
ในแกนที่ 1 ถึงแกนที่ 4 จะมีลิมิตสวิตช์ติดตั้งอยู่แกนละ 2 อัน เพื่อป้องกันไม่ให้แขนกลทำงานเกินพื้นที่ปฏิบัติงาน ทั้งการหมุนทวนเข็มนาฬิกาและตามเข็มนาฬิกา

แกนที่ 5 (ข้อหมุน) จะไม่มีการติดตั้งลิมิตสวิตช์ จึงสามารถหมุนได้มากกว่า 1 รอบ เมื่อติดตั้งมือจับ (Gripper) เข้ากับแกนที่ 5 การควบคุมการหมุนจะขึ้นอยู่กับซอฟต์แวร์ควบคุมในคอนโทรลเลอร์ ลิมิตสวิตช์จะติดตั้งอยู่กับแผ่นดิสก์ที่ยึดอยู่กับโครงของหุ่นยนต์



ภาพประกอบ 23 แสดงการติดตั้งลิมิตสวิตช์ของหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9

เพลาส่งกำลังของฮามอนิกส์เกียร์จะหมุนไปรอบๆ อยู่ท่ามกลางแผ่นดิสก์ที่ติดตั้งลิมิตสวิตช์ ที่เพลาส่งของฮามอนิกส์เกียร์จะมีลูกเบี้ยวที่ติดตั้งอยู่ เมื่อเพลาส่งหมุนลูกเบี้ยวก็จะหมุนตามไปด้วย เมื่อลูกเบี้ยวหมุนไปชนกับลิมิตสวิตช์ที่ตำแหน่งติดตั้ง ลิมิตสวิตช์จะตัดกระแสไฟฟ้าที่ส่งไปหมุนมอเตอร์ ทำให้มอเตอร์หยุดหมุน



ภาพประกอบ 24 แสดงวงจรการทำงานของลิมิตสวิทช์ที่ควบคุมแขนกล

ในภาพประกอบ 24A แสดงให้เห็นว่า เมื่อลิมิตสวิทช์ LS1 ถูกกด ทำให้น้ำคอนแทกของรีเลย์ K1 เปิด ไม่มีกระแสไฟฟ้าไปที่มอเตอร์ มอเตอร์จะไม่หมุนเพื่อป้องกันไม่ให้แขนหุ่นยนต์หมุนเกินตำแหน่งที่กำหนดไว้ ส่วนไดโอดที่ติดตั้งขนานกับน้ำคอนแทกของรีเลย์ จะยอมให้กระแสไฟฟ้าไหลผ่านได้ในกรณีที่ต้องการให้มอเตอร์หมุนย้อนกลับทิศทาง ดังนั้น จึงยอมให้แขนหุ่นยนต์หมุนได้ระหว่างลิมิตสวิทช์ที่ติดตั้งไว้ทั้งสองเท่านั้น

เมื่อลิมิตสวิทช์ถูกกด คอนโทรลเลอร์จะหยุดทำงาน (Controller OFF mode) และจะแสดงผลว่าทำงานผิดพลาดหรือฟ้องว่าถูกชน

ถ้าต้องการให้คอนโทรลเลอร์ทำงานต่อไป ต้องเปิดให้คอนโทรลเลอร์ทำงานก่อน (Controller ON mode) โดยสั่งงานที่คีย์บอร์ด (Keyboard) หรือ Teach Pendant ก็ได้ หุ่นยนต์ก็จะสามารถทำงานเคลื่อนแขนไปในทิศทางที่ต้องการได้ และถ้าในกรณีที่ลิมิตสวิทช์ไม่ได้ถูกกด น้ำคอนแทกของรีเลย์จะปิด โดยที่ไดโอดที่ต่อขนานอยู่ด้วยจะไม่มีผลใดๆกับการทำงานของวงจรดังแสดงไว้ในภาพประกอบ 24B

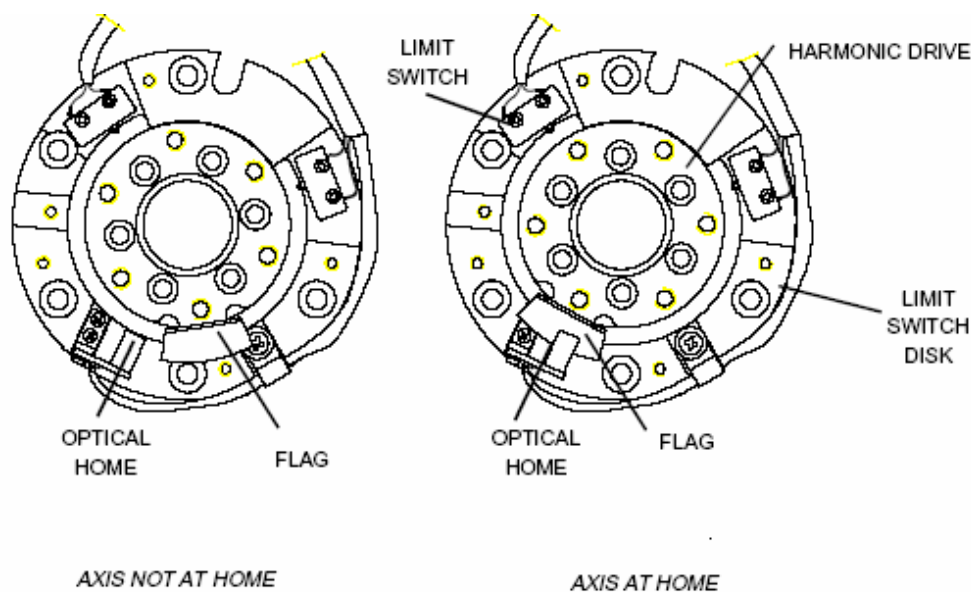
การหยุดอย่างรุนแรงและจับปล้น (Hard Stops)

เมื่อซอฟต์แวร์มีปัญหาหรือลิมิตเสียหาย แชนของหุ่นยนต์จะไม่สามารถเคลื่อนที่ได้ เช่นในกรณีที่แชนหุ่นยนต์เคลื่อนไปชนกับสิ่งกีดขวางอย่างรุนแรงหรืออยู่ในที่ร้อนเกินไป ระบบจะฟ้องว่าเกิดความผิดพลาดแล้วสั่งให้คอนโทรลเลอร์หยุดทำงานทันที (COFF) ถ้าต้องการให้คอนโทรลเลอร์ทำงานต่อไปก็กดปุ่ม CON เพื่อเปิดการทำงานของคอนโทรลเลอร์ แชนกลจึงจะสามารถเคลื่อนที่ทำงานต่อไปได้

โฮมสวิตช์ (Home Switches)

หุ่นยนต์ SCORBOT-ER9 จะใช้สวิตช์แบบแสงที่ติดตั้งอยู่ระหว่างลิมิตสวิตช์ทั้งสองเป็นตัวกำหนดสถานะอ้างอิงตำแหน่งเริ่มต้น

โฮมสวิตช์จะติดตั้งอยู่ในแผ่นดิสก์ ระหว่างลิมิตสวิตช์ทั้งสองที่ติดตั้งไว้เพื่อป้องกันการเคลื่อนที่เกินขอบเขตการทำงาน และทำงานร่วมกับแผ่นแฟล็ก (Flag) ที่ติดตั้งไว้กับเพลลาของฮาร์โมนิกส์เกียร์



ภาพประกอบ 25 แสดงการติดตั้งโฮมสวิตช์

ในระหว่างที่หุ่นยนต์ทำการโฮม จุดหมุนแต่ละแกนของหุ่นยนต์จะหมุนไปด้วย และในขณะที่แผ่นแฟล็ก (Flag) หมุนไปตัดสัญญาณไฟของชุดสวิตช์โฮม สัญญาณไฟที่ถูกตัดจะมีผลให้มีการส่งสัญญาณไปที่คอนโทรลเลอร์

ช่วงที่โฮมสวิตช์ทำงาน มอเตอร์ก็จะหมุนต่อไปเรื่อยๆตามสัญญาณพัลส์ที่คอนโทรลเลอร์สั่งให้หมุน เพียงแต่ตำแหน่งที่โฮมสวิตช์ทำงานจะถูกกำหนดให้เป็นตำแหน่งโฮมของหุ่นยนต์ในแต่ละแกนเท่านั้น

ออปติไมซ์เซชัน (Optimization)

ออปติไมซ์เซชัน (Optimization) เป็นวิธีการหรือกระบวนการ ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นเครื่องมือที่นำมาใช้โดยมีจุดประสงค์เพื่อหาค่าที่เหมาะสมที่สุดซึ่งค่าเหมาะสมที่สุดนี้เป็นได้ทั้งค่าที่ต่ำสุด หรือค่า สูงสุด เป้าหมายของการออปติไมซ์เซชัน (Optimization goal) ทำให้มีความคุ้มค่าที่สุดทั้งด้านการลงทุน, พลังงาน, การใช้ประโยชน์และมีความปลอดภัยนั่นเอง ก่อนที่เราจะสามารถนำออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ไปประยุกต์เพื่อใช้งานเราจะต้องทำการศึกษาและเข้าใจในรายละเอียดเสียก่อน ออปติไมซ์เซชัน (Optimization) นั้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับทุกสาขาวิชา ซึ่งสามารถแบ่งได้เป็น 2 ประเภทคือสถติกออปติไมซ์เซชันและไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Static and dynamics optimization) ในการหาคำตอบของปัญหาโดยเทคนิควิธีออปติไมซ์เซชัน (Optimization) จำเป็นที่จะต้องทำการอธิบายถึงคุณลักษณะของปัญหาให้ออกมาในรูปของ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เสีย ก่อนซึ่งมีองค์ประกอบโครงสร้างของปัญหา (Elements of problem formulation) ในทอมทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญและจำเป็นต้องทำความเข้าใจสามทอมด้วยกันซึ่งก็คือตัวแปรสถานะ (State variables) ตัวแปรควบคุมป้อนเข้า (Control input) และฟังก์ชันนอลหรือ ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ (functional or objective function) ซึ่งมีรายละเอียดปลีกย่อยดังนี้

ดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables)

คือตัวแปรหรือสิ่งที่ระบุชี้ชัดถึงรายละเอียดของการออกแบบ ในทางคณิตศาสตร์แล้วตัวแปรของการออกแบบก็คือตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่จะต้องถูกค้นหาค่านั้นเอง ยกตัวอย่างเช่น ปัญหาการหาขนาดที่เหมาะสม คือ ดีไซน์วาริเอเบิลก็คือความยาวและความสูง ในการกำหนดหรือเลือกว่าสิ่งไหนคือดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) นั้น ผู้ออกแบบจำเป็นจะต้องใช้สัญชาตญาณ, ความชำนาญ และพื้นความรู้มาเป็นองค์ประกอบการตัดสินใจ แต่ก็มีหลักการพื้นฐานเช่นกันก็คือดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) จะต้องเป็นลิเนียร์อินดิเพนเดนท (Linear independent) หมายความว่าดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) จะไม่สามารถถูกกำหนดขึ้นมาจากการใช้ความสัมพันธ์ทางเลขคณิตได้ ตัวอย่างเช่น การออกแบบหน้าต่างของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เหมาะสม เราจะไม่สามารถกำหนดดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) เป็นความยาว, ความกว้างและพื้นที่ได้ เพราะถ้าหากเรากำหนดดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) เป็นความยาวและความกว้างแล้ว ตัวแปรที่สามคือพื้นที่จะเกิดขึ้นมาเองโดยอัตโนมัติ ดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) สามารถมีได้หลายตัวเพื่อที่จะให้การออกแบบนั้นมีความสมบูรณ์ และกลุ่มดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) เหล่านี้จะถูกเรียกว่า ดีไซน์เวกเตอร์ (Design vector: matrix) และใช้อักษร n แทนจำนวนใดๆ ของดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) และในทอมทางคณิตศาสตร์นั้นมักจะใช้อักษร x และมีตัวเลขน้อยเพื่อระบุลำดับที่ของตัวแปรของการออกแบบนั้นๆ มักมีการเขียนสัญลักษณ์ของดีไซน์เวกเตอร์หลายลักษณะดังนี้ คือ $[X]$, X หรือ x , $[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ และ $x_i, i = 1, 2, \dots, n$

ดีไซน์พารามิเตอร์ (Design Parameters)

คือสิ่งที่คงที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงในขณะที่กำลังออกแบบอยู่ถึงแม้ว่าจะมีการออกแบบในลักษณะที่แตกต่างกัน เช่น ภาระที่กระทำ, คุณสมบัติของวัสดุและลักษณะรูปทรงเป็นต้น ดีไซน์พารามิเตอร์ (Design parameters) สามารถมีได้หลายตัวเช่นเดียวกับดีไซนวาร์เอเบิล (Design variables) และเป็น เวกเตอร์ (Vector: matrix) เช่นกัน สามารถเขียนสัญลักษณ์ได้คล้ายๆ กันดังนี้ คือ $[P]$, P หรือ p และ $[p_1, p_2, \dots, p_q]^T$

ดีไซน์ฟังก์ชัน (Design Functions)

คือข้อมูลสำคัญเกี่ยวกับการออกแบบโดยจะใช้ดีไซนวาร์เอเบิล (Design variables) และ ดีไซน์พารามิเตอร์ (Design parameters) มาประเมินค่า และเป็นตัวพิสูจน์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของปัญหาการออกแบบด้วย ดีไซน์ฟังก์ชัน (Design functions) นี้สามารถแสดงออกมาในรูปแบบของดีไซนออบเจกทิฟและ/หรือเงื่อนไขบังคับ (Design objectives and/or constraints) ซึ่งจะเป็นตัวผลักดันให้เกิดการค้นหาคำออกแบบที่เหมาะสมขึ้นมาและต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบังคับด้วยจึงจะถือว่าการออกแบบที่สมบูรณ์และใช้งานได้ (Feasible) ตัวอย่างเช่น ต้องการออกแบบให้โครงสร้างมีมวลน้อยที่สุดนี้ก็กลายเป็นออบเจกทิฟฟังก์ชัน (Objective function) โดยที่ความเค้นในวัสดุจะต้องน้อยกว่าความต้านแรงดึงคราก (Yield strength) นี่ก็จะเป็นคอนสเทรนต์ฟังก์ชัน (Constraint functions) ซึ่งมีรายละเอียดปลีกย่อยดังต่อไปนี้

1. ออบเจกทิฟฟังก์ชัน (Objective Function)

เป็นดีไซน์ฟังก์ชัน (Design function) ตัวหนึ่งของออปติไมซ์เซชัน (Optimization) โดยทั่วไปจะเป็นแบบฟังก์ชันเดียว รูปแบบของวัตถุประสงค์จะเป็นการหาปริมาณที่น้อยที่สุดหรือปริมาณที่มากที่สุด และปริมาณที่ว่านี้ก็เป็นปริมาณสเกลาร์ ในเทอมทางคณิตศาสตร์นั้นจะเขียนสัญลักษณ์ได้หลายแบบดังนี้ คือ $f(X)$ และ $f(x_1, x_2, \dots, x_q)$

2. คอนสเทรนต์ฟังก์ชัน (Constraint Functions)

เป็นดีไซน์ฟังก์ชัน (Design function) ตัวหนึ่งที่มีอิทธิพลต่อการออกแบบเป็นอย่างมาก และสามารถมีได้มากกว่าหนึ่งฟังก์ชันได้ (เป็นได้ทั้งสมการและอสมการ) ดังนั้นจึงเป็นเวกเตอร์ (Vector: matrix) และจะใช้เครื่องหมายดำเนินการเปรียบเทียบสามตัวคือ $\leq$, $\geq$ และ $=$ ซึ่งเงื่อนไขบังคับนี้จะมีได้สามรูปแบบด้วยกันคือ อันคอนสเทรนต์ (Unconstraint) อีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints) และอีนอวอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraint) มีรายละเอียดดังนี้

2.1 อันคอนสเทรนต์ (Unconstraint)

เป็นแบบไม่มีเงื่อนไขบังคับมากำหนด

2.2 อีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality Constraints)

เป็นเงื่อนไขที่บังคับให้การออกแบบต้องเป็นไปตามเงื่อนไขอย่างเคร่งครัดโดยจะต้องไม่ขาดและไม่เกินจากเงื่อนไข มีลักษณะเป็นสมการ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนจะใช้อักษร g เงื่อนไขบังคับนี้สามารถมีได้หลายตัวและเป็นเวกเตอร์ สามารถเขียนสัญลักษณ์ได้หลายแบบดังนี้ คือ $[G]$, $[g_1, g_2, \dots, g_l]$ และ $g_l, l = 1, 2, \dots, m$ จำนวนดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) n จะต้องมีขนาดที่มากกว่าจำนวน m อีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints) จึงจะสามารถทำการหาค่าที่เหมาะสม (Optimization) ได้โดยจะต้องสอดคล้องกับฟังก์ชัน (Objective function) เครื่องหมายที่เข้ามาเกี่ยวข้องคือเครื่องหมายเท่ากับ โดยฝั่งขวามือของเครื่องหมายจะเป็นเลขศูนย์ ดังตัวอย่างนี้ $g_1(\mathbf{X}): f(\mathbf{X}) - 500 = 0$ เป็นต้น

2.3 อินอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality Constraints)

เป็นเงื่อนไขบังคับที่มีความยืดหยุ่นในการออกแบบ เพราะจะบังคับในลักษณะเป็นช่วงให้เปรียบเทียบ มีลักษณะเป็นอสมการ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนจะใช้อักษร c เงื่อนไขบังคับนี้สามารถมีได้หลายตัวและจะเป็นเวกเตอร์ สามารถเขียนสัญลักษณ์ได้หลายแบบดังนี้ คือ $[C]$, $[c_1, c_2, \dots, c_m]$ และ $c_l, l = 1, 2, \dots, m$ เครื่องหมายที่เข้ามาเกี่ยวข้องคือเครื่องหมายมากกว่าหรือเท่ากับและน้อยกว่าหรือเท่ากับแต่จะนิยมแบบน้อยกว่าหรือเท่ากับในงานด้านวิศวกรรมมากกว่า โดยฝั่งขวามือของเครื่องหมายจะเป็นเลขศูนย์ ดังตัวอย่างนี้ $c_1(\mathbf{X}): f(\mathbf{X}) - 1 \leq 0$ เป็นต้น

ไซด์คอนสเทรนต์ (Side Constraints)

เป็นเงื่อนไขบังคับที่นำมาใช้เพื่อกำหนดตัวเลขช่วงให้กับดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) และมักมีการกำหนดเป็นลักษณะขีดจำกัดบนและขีดจำกัดล่าง

ดีไซน์สเปส (Design Space)

ก็คือปริภูมิที่จะถูกใช้เพื่อการออกแบบที่เหมาะสมนั่นเอง เป็นปริภูมิที่เกิดขึ้นจากหลักการของปริภูมิยูคลิดเดียนหรือปริภูมิคาร์ทีเซียน (Euclidean or cartesian n-dimensional space) ที่มีมิติใดๆ ซึ่งมิติใดๆ นี้เกิดขึ้นจากกลุ่มดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) แต่จะไม่เหมือนกับระบบปริภูมิอ้างอิงทั่วไปที่มีสามมิติตามที่เรารู้จักกัน เพราะจะมีความซับซ้อนกว่า ยกตัวอย่างเช่น มีดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) 10 ตัว ก็จะมีมิติของปริภูมิเป็น 10 มิติ เป็นการยากมากที่จะอธิบายโดยการวาดภาพหรือเขียนกราฟออกมา ด้วยเหตุนี้จึงใช้ไซด์คอนสเทรนต์ (Side constraints) มาเป็นตัวจำกัดขอบเขตของปริภูมิ ซึ่งหากผลเฉลยอยู่ในช่วงขอบเขตนี้ก็ถือว่ายอมรับได้ (Feasible)

ฟอร์มมาตรฐานออปติไมซ์เซชัน (The Standard Format Optimization)

จากที่กล่าวมานั้นล้วนแต่เป็นองค์ประกอบทั่วไปของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการใช้เทคนิคออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ทั้งสิ้น และมีการเขียนในเทอมทางคณิตศาสตร์ได้หลายๆ แบบ ดังนี้

$$\text{หาค่าน้อยที่สุดของ} \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2-16)$$

$$\begin{aligned} \text{โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข:} \quad & g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ & g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{aligned} \quad (2-17)$$

$$\begin{aligned} & g_l(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ & c_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \\ & c_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \end{aligned} \quad (2-18)$$

$$\begin{aligned} & c_l(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \\ & x_j^l \leq x_j \leq x_j^u, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2-19)$$

หรือเขียนสั้นๆ ได้ดังนี้

$$\text{หาค่าน้อยที่สุดของ} \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2-20)$$

$$\text{โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข:} \quad g_l(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (2-21)$$

$$c_l(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (2-22)$$

$$x_j^l \leq x_j \leq x_j^u, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2-23)$$

หรือเขียนในลักษณะที่เป็นเวกเตอร์ดังนี้

$$\text{หาค่าน้อยที่สุดของ} \quad f(X), [X]_n \quad (2-24)$$

$$\text{โดยสอดคล้องกับเงื่อนไข:} \quad [g(X)]_l = 0 \quad (2-25)$$

$$[c(X)]_l \leq 0 \quad (2-26)$$

$$X^{low} \leq X \leq X^{up} \quad (2-27)$$

จากฟอร์มมาตรฐานของปัญหาการออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ที่อยู่ในรูปแบบเทอมทางคณิตศาสตร์ที่เป็นภาษาสากลนั้นสามารถสื่อสารออกมาเป็นภาษาพูดได้ดังนี้ คือ หาค่าน้อยที่สุด (Minimize) ของออปเจกทิฟฟังก์ชัน (Objective function) f โดยจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข (Subject to) บังคับเชิงเท่ากับ (Equality constraints) จำนวน l เงื่อนไข และต้องสอดคล้องกับอีนีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints) จำนวน i เงื่อนไข ทั้งนี้ดีไซน์วารีเอเบิล (Design variables) ทั้งหมดจำนวน n ตัวแปร ต้องอยู่ในช่วงขอบเขตล่างและขอบเขตบนของไซด์คอนสเทรนต์ (Side constraints) เท่านั้น

ออปติไมซ์เซชันกับปัญหาทางวิศวกรรม

ปัญหาทางวิศวกรรมที่ดีไซน์วาริเอเบิล (Design Variables) ไม่ขึ้นกับเวลาและมีการนำเอาออปติไมซ์เซชัน (Optimization) เข้ามาประยุกต์ใช้งานจะเรียกกันว่า สถิติกออปติไมซ์เซชัน (Static optimization) ส่วนปัญหาที่ขึ้นกับเวลาจะเรียกว่า ไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมาพบว่าเป้าหมายของออปติไมซ์เซชัน (Goal of optimization) คือการค้นหาค่าที่เหมาะสมของดีไซน์วาริเอเบิล (Design variables) ที่มีออปเจกทิฟฟังก์ชัน (Objective function) เป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด (Minimum or maximum) ซึ่งมีอยู่สองลักษณะคือ โกลบอล (Global) และโลคอล (Local)

กรณีน้อยสุด (Minimum) กลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_n)$ เป็นโกลบอลมินิมัม (Global minimum) ได้ถ้า

$$f(x_1, \dots, x_n) \leq f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) \quad (2-28)$$

เมื่อ $\bar{h}^T = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n] \neq 0$ เป็นเวกเตอร์ที่เพิ่มค่าให้กับ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ แล้วทำให้เกิดค่าของฟังก์ชันที่มากขึ้นกว่าเดิม และกลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_n)$ มีค่าน้อยที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับบริเวณข้างเคียง (Neighborhood) แล้วจะเรียกว่าโลคอลมินิมัม (Local minimum)

กรณีมากที่สุด (Maximum) กลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_n)$ เป็นโกลบอลแมกซิมัม (Global maximum) ได้ถ้า

$$f(x_1, \dots, x_n) \geq f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) \quad (2-29)$$

เมื่อ $\bar{h}^T = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_n] \neq 0$ เป็นเวกเตอร์ที่เพิ่มค่าให้กับ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ แล้วก็ยังทำให้ค่าของฟังก์ชันน้อยกว่าเดิม และกลุ่มของเวกเตอร์ $\bar{x}^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ ที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x_1, \dots, x_n)$ มีค่ามากที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับบริเวณข้างเคียง (Neighborhood) แล้วจะเรียกว่าโลคอลแมกซิมัม (Local maximum)

ไดนามิกออปติไมซ์เซชัน

ปัญหาทางวิศวกรรมที่ตัวแปรต่างๆ (Variables) ขึ้นกับเวลา (Time-dependent) จะถูกเรียกว่าไดนามิก (Dynamics) และมักจะใช้สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equations) มาเป็นตัวแสดงระบบไดนามิก (Dynamic systems) ดังนี้

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), i = 1, \dots, n \quad (2-30)$$

เมื่อ t คือเวลา (Time), x_i คือสแตตวารีเอเบิล (State variables) ตัวอย่างเช่น พิกัดทั่วไป หรืออนุพันธ์เวลา (Generalized coordinates or time derivatives), u_i คือคอนโทรลอินพุต (Control inputs) และ f_i คือ non-linear ฟังก์ชัน (Nonlinear functions) ของสแตตวารีเอเบิล (State variables) และคอนโทรลอินพุต (Control inputs) หากทำการกำหนดค่าให้กับคอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_1(t), \dots, u_m(t)$ เป็นเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) เราก็จะสามารถทำการคำนวณวิถี (Trajectory) ของสแตตวารีเอเบิล (State variables) $x_i(t)$ ได้ด้วยวิธีอนาลิติกหรือวิธีเชิงตัวเลข (Analytical or numerical) ได้ ตัวอย่างเช่นการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง (Rectilinear) ของอนุภาค (Particle) หนึ่งหน่วยมวลภายใต้แรงกระทำภายนอกที่ป้อนให้ สามารถเขียนอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equation) เป็น $\ddot{x} = u$ เมื่อ x คือตำแหน่งของอนุภาคและ u คือแรงกระทำ จะเห็นได้ว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง (Second-order differential equation) แต่สามารถทำการแปลงให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First-order differential equation) ดังสมการ (2-30) ได้ นั่นคือให้ $\dot{x}_1 = x_2$ และ $\dot{x}_2 = u$ สำหรับระบบทางวิศวกรรมที่แสดงได้ด้วยสมการ (2-30) นั้น โดยปกติแล้วจะต้องมีการกำหนดสภาวะเริ่มต้นเสมอ (Initial state) จากนั้นก็ทำการเลือกช่วงเวลาให้กับคอนโทรลอินพุต (Control inputs) $u_1(t), \dots, u_m(t)$ เพื่อให้หาค่าของฟังก์ชัน (Objective function) เป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด ปัญหาไดนามิกจะเรียกหาค่าของฟังก์ชัน (Objective function) ว่าคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) และเขียนเป็นสมการดังนี้

$$J = \Phi(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (2-31)$$

เมื่อ t_0 คือเวลาเริ่มต้น, t_f คือเวลาสุดท้าย, ส่วนคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ประกอบไปด้วยสองส่วน ส่วนแรกคือ $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)$ ซึ่งจะขึ้นอยู่กับเวลาสุดท้าย (Final time) และสภาวะสุดท้าย (Final state) ของระบบ ส่วนที่สองคือ $\int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt$ เป็นส่วนที่ขึ้นอยู่กับเวลาที่ผ่านมา (Time history) ของสแตตวารีเอเบิล (State variables) และคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variables) โดยที่ Φ และ L คือ non-linear ฟังก์ชัน (Nonlinear functions) ของสแตตวารีเอเบิล (State variables) และคอนโทรลวารีเอเบิล (Control variables)

การแก้ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) นั้นนอกจากจะอาศัยพื้นฐานความรู้จาก สแตติกออปติไมซ์เซชัน (Static optimization) แล้วยังจะต้องใช้ความรู้และความเข้าใจทางด้านแคลคูลัสของแปร (Calculus of variations) อย่างมากอีกด้วย ระบบไดนามิก (Dynamic) ทางด้านวิศวกรรมนั้นแบ่งออกได้เป็นสองลักษณะด้วยกันตามระดับขั้นความเสรี (Degree

of freedom) นั่นก็คือ ระบบขั้นความเสรีเดี่ยว (Single-stage systems) และระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage systems) ส่วนด้านวิธีการหาคำตอบของปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) นั้นแบ่งได้เป็นสองลักษณะใหญ่ๆ ด้วยกัน คือ วิธีไคเรคท์ (Direct methods) และวิธีอินไคเรคท์ (Indirect methods) ซึ่งวิธีไคเรคท์ (Direct methods) จะให้ผลคำตอบที่หยาบมากกว่าแต่ก็มีความซับซ้อนน้อยกว่าวิธีอินไคเรคท์ (Indirect methods)

ดังนั้นการศึกษาและทำความเข้าใจวิธีการแบบอินไคเรคท์ (Indirect methods) ซึ่งจะเริ่มต้นจากการศึกษาและทำความเข้าใจแคลคูลัสของฟาริเอเบิล (Calculus of variations) โดยเริ่มจากระบบขั้นความเสรีเดี่ยว (Single-stage systems) และระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage systems) เพราะต้องใช้เป็นฐานในการใช้งานกับวิธีอินไคเรคท์ (Indirect methods)

แคลคูลัสของฟาริเอเบิล (Calculus of Variations)

โดยจะเริ่มจากระบบขั้นความเสรีเดี่ยว (Single-stage systems) และระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage systems) ตามลำดับ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนแคลคูลัสของฟาริเอเบิล (Calculus of variation) ก็คือฟังก์ชันนอล (Functional) เขียนเป็นสมการได้เป็น

$$J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt \quad 2-32)$$

ซึ่งเป็นการเปลี่ยนฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous functions) $x(t)$ ให้เป็นจำนวนจริง นั่นคือ ถ้ากำหนด $x(t)$ ก็จะสามารถหาค่าของฟังก์ชันนอล (Functional) ได้โดยการใช้วิธีอนาไลติกหรือวิธีเชิงตัวเลข (Analytical or numerical) โดยที่ฟังก์ชันนอล (Functional) อาจขึ้นอยู่กับหลายๆฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous functions) ก็ได้ดังเช่น

$$J[x_1, x_2, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) dt \quad 2-33)$$

ฟังก์ชันนอล (Functional) สมการ (2.33) เป็นการเปลี่ยนฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous functions) หลายๆ ฟังก์ชัน ก็คือ $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ให้เป็นจำนวนจริงนั่นเอง ในการนำเอาแคลคูลัสของฟาริเอเบิล (Calculus of variations) มาใช้นั้นมีเป้าหมายเดียวกันกับสแตติกออปติไมซ์เซชัน (Static Optimization) นั่นก็คือ ค้นหาเนคเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary Conditions) สำหรับเอ็กทรีมัม (Extremum) สำหรับฟังก์ชันนอล (Functional) และการตรวจสอบว่าเอ็กทรีมัม (Extremum) ที่หาได้เป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด (Sufficient conditions) ในการนำเอาแคลคูลัสของฟ

วารีเคเบิล (Calculus of variations) มาใช้กับไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization) จะเกี่ยวข้องกับจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้าย ซึ่งมีได้หลายกรณี ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ฟังก์ชันนอลของฟังก์ชันเดียว (Functional of a Single Function)

เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ของระบบขั้นความเสรีเดี่ยว (Single-stage systems) โดยมีรายละเอียดของจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายหลายลักษณะดังนี้ คือ

กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว (Fixed End Time and End Points)

ถ้าฟังก์ชัน $F(t, x, \dot{x})$ สามารถทำอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองได้อย่างต่อเนื่องโดยอยู่ระหว่างช่วงเวลา $t_0 \leq t \leq t_f$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0) = x_0$ และ $x(t_f) = x_f$ ก็จะเป็นการกำหนดการค้นหาค่าของฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) $x(t)$ ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt$ นั้นเอง ซึ่งมีวิธีการทำได้ดังนี้ คือ เรากำหนดให้ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x]$ ถ้า $x(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h(t)$ ดังนั้นเพื่อให้ยังคงสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) อยู่ ดังนั้น $h(t_0) = h(t_f) = 0$ ก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\Delta J = J[x + h] - J[x] = \int_{t_0}^{t_f} [F(t, x + h, \dot{x} + \dot{h}) - F(t, x, \dot{x})] dt \quad (2-34)$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt \quad (2-35)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตบายพาส (Integrating by parts) สมการ (2-35) ก็จะได้พบว่า

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0} \quad (2-36)$$

เมื่อเนคเซสเซอร์รีคอนดิชัน (Necessary conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h(t_0) = h(t_f) = 0$ จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) และกำหนดไว้ดีกว่า F จะต้องทำอนุพันธ์ได้

อย่างต่อเนื่องสองครั้ง นั่นก็หมายความว่า $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง และเมื่อ $\delta J = 0$ ซึ่งพบว่า

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2-37)$$

ซึ่งสมการ (2-37) นี้เป็นที่รู้จักกันในนาม สมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0) = x_0$ และ $x(t_f) = x_f$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์-ควอซี (Euler-Cauchy) ได้

กำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวแต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed End Time, Variable End Points)

แตกต่างกับกรณี (Fixed End Time and End Points) เพียงแค่จุดสุดท้ายเท่านั้น ดังนั้นจึงใช้สมการ (2-34 - 2-37) ได้ เพียงแต่เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ไม่ได้ถูกกำหนดไว้ตายตัว และ $h(t_0), h(t_f)$ ก็สามารถกำหนดได้ตามชอบใจ ทำให้ได้เนccessary conditions (Necessary conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2-38)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0} = 0 \quad (2-39)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} = 0 \quad (2-40)$$

ซึ่งสมการ (2-38 - 2-40) นี้เป็นที่รู้จักกันในนามสมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ซึ่งสามารถหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) โดยวิธีออยเลอร์-ควอซี (Euler-Cauchy) ได้

เวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable End Time and End Points)

กรณีนี้ถือได้ว่าเป็นรูปแบบทั่วไปของปัญหาทางวิศวกรรมเลยก็ว่าได้ แต่ก็มีวิธีการหาคำตอบคล้ายๆ กับกรณี (Fixed End Time, Variable End Points) ถ้า $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x]$ ถ้า $x(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h(t)$ ดังนั้นก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\begin{aligned}
\Delta J &= J[x+h] - J[x] \\
&= \int_{t_0+\delta_0}^{t_f+\delta_f} F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) dt - \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_f} [F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) - F(t, x, \dot{x})] dt \\
&\quad + \int_{t_f}^{t_f+\delta_f} F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) dt - \int_{t_0+\delta_0}^{t_0+\delta_0} F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) dt
\end{aligned} \tag{2-41}$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\begin{aligned}
\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt + F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_f} \delta t_f \\
&\quad - F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \tag{2-42}$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตโดยพาส (Integrating by parts) สมการ (2-42) ก็จะได้พบว่

$$\begin{aligned}
\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0} \\
&\quad + F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_f} \delta t_f - F(t, x+h, \dot{x}+\dot{h}) \Big|_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \tag{2-43}$$

เมื่อ $h(t_0) = \delta x \Big|_{t_0} - \dot{x} \Big|_{t_0} \delta t_0$ และ $h(t_f) = \delta x \Big|_{t_f} - \dot{x} \Big|_{t_f} \delta t_f$ ดังนั้นสมการ (2-43) เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right) \Big|_{t_f} - \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta x \right) \Big|_{t_0} \\
&\quad + \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_f} \delta t_f - \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right] \Big|_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \tag{2-44}$$

เมื่อเนคเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h(t)$, $\delta x \Big|_{t_f}$, $\delta x \Big|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทำให้ได้เนคเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary conditions) และมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) คือ

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2-45)$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right|_{t_0} = 0, \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right|_{t_f} = 0, \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right]_{t_f} = 0, \left[F - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} \right]_{t_0} = 0 \quad (2-46)$$

ซึ่งจุดสุดท้ายที่ t_0, t_f และค่าของฟังก์ชันที่จุดสุดท้าย $x(t_0), x(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทั้ง 4 นั้นนั่นเอง

ฟังก์ชันนอลของหลายฟังก์ชัน (Functional of N Functions)

เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ของระบบหลายระดับขั้นความเสรี (Multistage systems) โดยมีรายละเอียดของจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายหลายลักษณะดังนี้ คือ

กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว (Fixed End Times and End Points)

ถ้าฟังก์ชัน $F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ สามารถทำอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองได้อย่างต่อเนื่องโดยอยู่ระหว่างช่วงเวลา $t_0 \leq t \leq t_f$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0) = x_{i1}$ และ $x_i(t_f) = x_{i2}$ ก็จะเป็นการกำหนดการค้นหาค่าของฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) $x_i(t), i=1, \dots, n$ ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x, \dot{x}) dt$ นั่นเอง ซึ่งมีวิธีการทำได้ดังนี้ คือ เรากำหนดให้ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) ที่เป็นเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functional) คือ

$$J[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt \quad (2-47)$$

ถ้า $x_i(t), i=1, \dots, n$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h_i(t), i=1, \dots, n$ และเพื่อให้ยังคงสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ดังนั้น $h_i(t_0) = h_i(t_f) = 0$ ก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\begin{aligned} \Delta J &= J[x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n] - J[x_1, \dots, x_n] \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) - F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt \end{aligned} \quad (2-48)$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไปก็จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt \quad (2-49)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตบายพาส (Integrating by parts) สมการ (2-49) ก็จะได้พบว่ามี

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \Big|_{t_f} - \frac{\partial F}{\partial x_i} h_i \Big|_{t_0} \right] \quad (2-50)$$

เมื่อเนคเซสเซอร์รีคอนดิชัน (Necessary conditions) ก็คือ $\delta J = 0$ ที่ $h_i(t_0) = h_i(t_f) = 0$ จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) และกำหนดไว้ดีกว่า F จะต้องทำอนุพันธ์ได้อย่างต่อเนื่องสองครั้งนั้นก็หมายความว่า $\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและเมื่อ $\delta J = 0$ ดังนั้นพบว่า

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2-51)$$

ซึ่งสมการ (2.51) นี้เป็นที่รู้จักกันในนามสมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x_i(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0) = x_{i1}$ และ $x_i(t_f) = x_{i2}$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์-ควอซี (Euler-Cauchy) ได้

กำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวแต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed End Time and Variable End Points)

แตกต่างกับกรณี (Fixed End Times and End Points) เพียงแค่จุดสุดท้ายเท่านั้น ดังนั้นจึงใช้สมการ (2-47 – 2-51) ได้ เพียงแต่เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0)$ และ $x_i(t_f)$ ไม่ได้ถูกกำหนดไว้ตายตัว และ $h_i(t_0), h_i(t_f)$ ก็สามารถกำหนดได้ตามชอบใจ ทำให้ได้เนคเซสเซอร์รีคอนดิชัน (Necessary condition) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2-52)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2-53)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_f} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2-54)$$

ซึ่งสมการ (2-52 – 2-54) นี้เป็นที่รู้จักกันในนามสมการของออยเลอร์ (Euler's equation) ซึ่งจะทำให้ผลเฉลยของ $x_i(t)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $x_i(t_0)$ และ $x_i(t_f)$ ซึ่งเราสามารถทำการหาค่าโดยใช้ความรู้ทางแคลคูลัส (Calculus) หาค่าได้โดยวิธีออยเลอร์-คาวชี (Euler-Cauchy) ได้เช่นกัน

เวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable End Time and End Points)

กรณีนี้ถือได้ว่าเป็นรูปแบบทั่วไปของปัญหาทางวิศวกรรมเลยทีเดียว แต่ก็มียุทธวิธีในการหาคำตอบคล้ายๆ กับกรณี (Fixed End Times and End Points) ถ้า $x_i(t), i=1, \dots, n$ เป็นฟังก์ชันเป้าประสงค์ (Desire function) ที่เป็นอีกทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x_1, \dots, x_n]$ ถ้า $x_i(t)$ ถูกเพิ่มค่าด้วย $h_i(t)$ ดังนั้นก็จะพบการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (Functional) ΔJ เป็น

$$\begin{aligned}\Delta J &= J[x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n] - J[x_1, \dots, x_n] \\ &= \int_{t_0 + \delta t_0}^{t_f + \delta t_f} F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt \\ \Delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \right. \\ &\quad \left. - F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt \\ &\quad + \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) dt\end{aligned}\quad (2-55)$$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) และตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป จะได้การเปลี่ยนแปลงเป็น

$$\begin{aligned}\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) dt \\ &\quad + F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \Big|_{t_f} \delta t_f \\ &\quad - F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \Big|_{t_0} \delta t_0\end{aligned}\quad (2-56)$$

เมื่อ δJ เป็นค่าโดยประมาณของ ΔJ เนื่องจากได้ตัดเทอมที่มีเลขชี้กำลังสูงทิ้งไป ดังนั้นเมื่อทำการอินทิเกรตบายพาส (Integrating by parts) สมการ (2-56) ก็จะพบว่า

$$\begin{aligned}
\delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_f} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \Big|_{t_0} \\
& + \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \right]_{t_f} \delta t_f \\
& - \left[F(t, x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n, \dot{x}_1 + \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_n) \right]_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \quad (2-57)$$

เมื่อ $h_i(t_0) = \delta x_i|_{t_0} - \dot{x}_i|_{t_0} \delta t_0$ และ $h_i(t_f) = \delta x_i|_{t_f} - \dot{x}_i|_{t_f} \delta t_f$ ดังนั้นสมการ (2-57) จะเป็น

$$\begin{aligned}
\delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_f} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_0} \\
& + \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_f} \delta t_f - \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \quad (2-58)$$

เมื่อ $\delta J = 0$ ที่ $h_i(t)$, $\delta x_i|_{t_f}$, $\delta x_i|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทำให้ได้เนccessary conditions (Necessary conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2-59)$$

และมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) เป็น

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0, \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_f} = 0, i = 1, \dots, n \\
\left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_f} = 0, \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} = 0, i = 1, \dots, n
\end{aligned} \quad (2-60)$$

ซึ่งจุดสุดท้ายที่ t_0, t_f และค่าของฟังก์ชันที่จุดสุดท้าย $x_i(t_0), x_i(t_f)$ สามารถคำนวณได้จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ทั้ง 4 นั้นนั่นเอง

ฟังก์ชันนอลมีเงื่อนไขบังคับ (Functional with Constraints)

เป็นฟังก์ชันนอล (Functional) ที่มีเงื่อนไขบังคับเข้ามาเกี่ยวข้องด้วยซึ่งอาจจะเป็นได้ทั้งอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints) และอีนีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Inequality constraints) ในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะวิธีลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier)

ฟังก์ชันคอนสเทรนต์ (Function Constraints)

ทำการพิจารณาฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x_1, \dots, x_n]$ ซึ่งจะต้องเกี่ยวข้องหรือมีความสอดคล้องกับฟังก์ชันอีควอลิตีคอนสเทรนต์ (Equality constraints)

$g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0, j = 1, \dots, m$ และ $m < n$ เสมอ เมื่อเราใช้เทคนิควิธีการแบบลากรางจ์ มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) ก็จะได้ฟังก์ชันนอลใหม่เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt \quad (2-61)$$

เมื่อ $\lambda_j(t)$ คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) และ $F' = F + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j$ ซึ่งจะเป็น F' ตัวใหม่ของเนคเซสเซอร์รีคอนดิชัน (Necessary conditions) เพื่อให้สำหรับเอ็กทรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functional) นั้นเอง โดยจะนำไปใช้กับลักษณะของเวลาและจุดสุดท้าย ทั้งสามแบบดังที่กล่าวมาแล้ว นั่นก็คือ กำหนดจุดสุดท้ายและเวลาสุดท้ายไว้ตายตัว (Fixed end time and end points), กำหนดเวลาสุดท้ายไว้ตายตัวแต่จุดสุดท้ายแปรผันได้ (Fixed end time, variable end points) และเวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable end time and end points) ซึ่งกระทำได้เพียงแค่เปลี่ยนจาก F เป็น F' ก็สามารุทำการหาเนคเซสเซอร์รีคอนดิชัน (Necessary conditions) ซึ่ง $\delta J' = 0$ ได้เช่นกัน โดยที่ $g_j = 0$ ก็ทำให้สามารถเอ็กทรีมัม (Extremum) ได้

ฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับที่จุดสุดท้าย (End Point Function Value Constraints)

เอ็กทรีมัมของฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x_1, \dots, x_n]$ ซึ่งฟังก์ชัน $x_i(t_f)$ จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) $s_k(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0, k = 1, \dots, p$ ณ เวลาสุดท้าย การหาผลเฉลยของปัญหานี้จะสามารถทำการเขียนฟังก์ชันนอล (Functional) ใหม่ได้เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt + \sum_{k=1}^p \nu_k s_k \quad (2-62)$$

เมื่อ ν_k คือค่าคงตัวลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Constant Lagrange multiplier) ทำให้สามารถดัดแปลงสมการ (2-57) ได้เป็น

$$\begin{aligned}
\delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\left\{ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \right\} \delta x_i \right]_{t_f} \\
& - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_0} + \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f \\
& - \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} \delta t_0
\end{aligned} \quad (2-63)$$

เมื่อเนคเซสเซอร์รีคอนดิชัน (Necessary condition) ก็คือ $\delta J' = 0$ ที่ $h_i(t)$, $\delta x_i|_{t_f}$, $\delta x_i|_{t_0}$, δt_f และ δt_0 จึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จะได้เนคเซสเซอร์รีคอนดิชัน (Necessary conditions) เป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1, \dots, n \quad (2-64)$$

โดยที่ $s_k = 0$ จึงจะทำให้ได้คำตอบที่เป็นที่ยอมรับได้ (Feasible) และมีเงื่อนไขขอบเขตเป็น

$$\begin{aligned}
\left[F - \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \right]_{t_f} &= 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} = 0 \quad i = 1, \dots, n \\
\left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} &= 0; \quad \left[F - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} = 0
\end{aligned} \quad (2-65)$$

ฟังก์ชันเงื่อนไขบังคับทั่วไป (General Constraints)

จากหัวข้อ (Fixed End Times and End Points และ Fixed End Times and Variable Points) เราสามารถเอ็กซ์ตรีมัม (Extremum) ของฟังก์ชันนอล (Functional)

$J[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt$ ได้โดยที่ฟังก์ชัน $x_i(t)$ สอดคล้องกับฟังก์ชันอีควอลิตี้คอนสเทรนต์ (Equality constraints) $g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0$ เมื่อ $j = 1, \dots, m$ โดย $m < n$ เสมอ และสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับที่จุดสุดท้าย (End point constraints)

$s_k(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} = 0, k = 1, \dots, p$ โดย $p < m$ เสมอ ดังนั้นเมื่อใช้เทคนิควิธีลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) ก็จะได้ฟังก์ชันนอล (Functional) ใหม่เป็น

$$J'[x_1, \dots, x_n] = \int_{t_0}^{t_f} \left[F(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) g_j(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \right] dt + \sum_{k=1}^p \nu_k s_k \quad (2-66)$$

เมื่อ $\lambda_j(t)$ และ ν_k คือลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) ดังนั้นหากกรณีปัญหาเป็นแบบเวลาสุดท้ายและจุดสุดท้ายแปรผันได้ (Variable end time and end points) ก็จะสามารถดัดแปลงสมการ (2-58) ได้เป็น

$$\begin{aligned} \delta J' = & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F'}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i dt + \sum_{i=1}^n \left[\left\{ \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \right\} \delta x_i \right]_{t_f} \\ & - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) \Big|_{t_0} + \left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f \\ & - \left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} \delta t_0 \end{aligned} \quad (2-67)$$

เมื่อ

$$F' = F + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j$$

ทำให้ได้เนccessary conditions (Necessary conditions) สำหรับเอ็กทรีมัม (Extremum) ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\partial F'}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} &= 0 \\ \left[\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \right]_{t_f} &= 0 \\ \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \Big|_{t_0} &= 0, i = 1, \dots, n \\ \left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^p \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \right]_{t_f} &= 0 \\ \left[F' - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right]_{t_0} &= 0 \end{aligned} \quad (2-68)$$

โดยที่ $g_j = 0, j = 1, \dots, m$ และ $s_k = 0, k = 1, \dots, p$ จึงจะทำให้ได้คำตอบที่เป็นที่ยอมรับได้

การตรวจสอบเอ็กทรีมัมว่าเป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด (Sufficient Conditions for Minimum and Maximum)

จากหัวข้อที่ผ่านมาเป็นการหาเนccessary conditions (Necessary conditions) สำหรับใช้เอ็กทรีมัม (Extremum) เท่านั้น ซึ่งยังไม่สามารถบอกได้ว่าเป็นค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด ในหัวข้อนี้จะเป็นการตรวจสอบเพื่อบ่งชี้ว่าเอ็กทรีมัม (Extremum) เป็นค่าใดกันแน่ ในที่นี้จะกล่าวเฉพาะการตรวจหาค่าน้อยสุดเท่านั้น เพราะการตรวจหาค่ามากที่สุดก็ใช้หลักการเดียวกัน เรามาพิจารณาปัญหาการหาค่าสเกลาร์ $x(t)$ ที่ทำให้ฟังก์ชันนอล (Functional) $J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_f} F(x, \dot{x}, t) dt$ นี้มีค่าน้อยสุด เมื่อ t_0 และ t_f ถูกกำหนดไว้ตายตัว และ F สามารถทำอนุพันธ์อย่างต่อเนื่องอย่างน้อยสองครั้งเทียบกับ $x, \dot{x}$ และ t ต่อไปหากเรากำหนดให้ $x(t)$ เป็นค่าที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าน้อยสุด ต่อไปลองทำการเพิ่มค่า $x(t)$ ด้วย $h(t_0) = h(t_f) = 0$ เราจะได้พบการเปลี่ยนแปลงของคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ที่สอดคล้องกับการเพิ่มค่า $h(t)$ เป็น $\Delta J = J[x+h] - J[x]$ แล้วใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) กระจายเทอมก็จะได้

$$\Delta J = \delta J + \delta^2 J + \text{high-order-terms} \quad (2-69)$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \Big|_{t_f} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \Big|_{t_0} \\ \delta^2 J &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left(h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2h\dot{h} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} + \dot{h}^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \right) dt \end{aligned}$$

ซึ่งจากในหัวข้อที่ผ่านมา เราพบว่า $x(t)$ จะเป็นค่าน้อยสุดก็ต่อเมื่อ $\Delta J = \delta^2 J > 0$ (ค่ามากที่สุดก็คือ $\Delta J = \delta^2 J < 0$) และเราสามารถเขียนให้กระชับได้เป็น

$$\delta^2 J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} h(t) & \dot{h}(t) \end{bmatrix} \tilde{F} \begin{bmatrix} h(t) \\ \dot{h}(t) \end{bmatrix} dt \quad (2-70)$$

เมื่อ

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} & \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \end{bmatrix}$$

ซึ่งถ้าค่าของ $\tilde{F}$ เป็นบวก (Positive definite) ก็จะทำให้ $x(t)$ เป็นค่าน้อยสุด แต่หากค่า $\tilde{F}$ เป็นลบ (Negative definite) ก็จะทำให้ $x(t)$ เป็นค่ามากที่สุด

สรุปเกี่ยวกับไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic Optimization Conclusion)

ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) มีจุดเริ่มต้นจากสมการการเคลื่อนที่ก็คือ $\sum F = ma = m\ddot{x}$ แต่ในการแก้ปัญหาด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์นั้นไม่สะดวกถ้าสมการมีรูปแบบเป็นสมการกำลังสองดังกล่าว ดังนั้นจึงนิยามจัดรูปสมการเป็นกำลังหนึ่งคือ $\dot{x}_1 = x_2$ และ $\dot{x}_2 = \sum F/m$ ดังสมการ (2.30) คือ

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), i = 1, \dots, n$$

ปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) นั้น จะมีการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตเสมอ (Initial and boundary conditions) และอาจจะมีการเพิ่มเงื่อนไขบังคับ (Constraints) เข้าไปด้วย แล้วจึงกำหนดคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) ว่าต้องการค่าน้อยสุดหรือมากที่สุด ดังนี้

$$J = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt$$

โดยที่คอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) มีสองส่วนก็คือ $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f}$ ซึ่งเรียกว่า เทอร์มินอลเทอม (Terminal term) และ $\int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt$ ซึ่งเรียกว่า อินทิกรัลเทอม (Integral term) ซึ่งหากกำหนด $L = \sum_{i=1}^m u_i^2$ จะเรียกว่าปัญหาลังงานน้อยสุด (Minimum energy), หากกำหนด $L = \sum_{i=1}^m |u_i|$ จะเรียกว่าปัญหาเชื้อเพลิงน้อยสุด (Minimum fuel), หากกำหนด $\Phi = t_f$ จะเรียกว่าปัญหาเวลาน้อยสุด (Minimum time) และหากกำหนด $\Phi = x_2(t_f)$ จะเรียกว่าปัญหาความเร็วสูงสุด (Maximum velocity) เป็นต้น ซึ่ง Φ และ L จะเรียกว่า สภาวะของปัญหา (State of the problem) และสามารถแก้ปัญหาได้ด้วยเทคนิคทางตัวเลข (Numerical techniques) มีสองลักษณะใหญ่คือ วิธีไดเรกต์ (Direct methods) และวิธีอินไดเรกต์ (Indirect methods) โดยอาศัยหลักการของแคลคูลัสของฟาริเอเบิล (Calculus of variations) ทำให้สามารถเขียนคอสฟังก์ชันนอล (Cost functional) โดยทั่วไปที่มีลากรางจ์มัลติพลายเออร์ (Lagrange multiplier) ν_i , λ_i และ μ_i เข้ามาเกี่ยวข้องได้ดังนี้คือ

$$J = \Phi + \sum_{l=1}^q \nu_l s_l + \int_{t_0}^{t_f} L + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\dot{x}_i - f_i) + \sum_{i=1}^r \mu_i g_i + \sum_{i=1}^p \mu_i (c_i + s_i^2) dt$$

$$J' = \Phi' + \int_{t_0}^{t_f} L' dt$$

เมื่อ

$$\Phi' = \Phi + \sum_{l=1}^q \nu_l s_l$$

$$L' = L + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\dot{x}_i - f_i) + \sum_{i=1}^r \mu_i g_i + \sum_{i=1}^p \mu_i (c_i + s_i^2)$$

สมการดังกล่าวนี้นำไปใช้กับปัญหาไดนามิกออปติไมซ์เซชัน (Dynamic optimization) ได้ทุกปัญหา เพราะได้รวมเอาเงื่อนไขบังคับเชิงเท่ากันและเชิงเบี่ยงเทียบ (Equality and inequality constraints) เข้าไว้ด้วยกันแล้ว เพียงแค่ตัดเทอมที่ไม่มีในปัญหานั้นๆ ออกก็จะได้รูปสมการตามโจทย์ของปัญหานั้นๆ นั่นเอง

การทบทวนเอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การหาความเหมาะสมสูงสุด มีแก้ไขและพัฒนาเพื่อให้เกิดประโยชน์ จากการศึกษาเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับงานที่จะทำการวิจัยนี้ พบว่ามีการศึกษาและทำการทดลองอย่างต่อเนื่อง มีการนำเอาหลักการวิธีความนิ่มนวลที่สุดมาทำการศึกษาเพื่อหาข้อดีและปัญหา

ทวิวัชร วีระเกล้า และ ปณณฐา สารลักษณ์ (2548) การเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้พลังงานน้อยที่สุดกับการใช้ความนิ่มนวลที่สุดในระบบพลศาสตร์ (The Comparison of Using Minimum Energy and Minimum Jerk in Dynamic Systems) เป็นการนำเสนอปัญหาในการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์ในรูปแบบของความต้องการความนิ่มนวลของระบบตลอดการทำงาน ซึ่งโดยทั่วไปแล้วในการกำหนดฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์นั้น นิยมใช้ พลังงาน เวลา ความเร็ว และระยะขจัด แต่ในงานวิจัยนี้ได้เน้นที่ความนิ่มนวลของระบบ เนื่องจากเป็นที่ทราบกันดีว่าในการทำงานของระบบพลศาสตร์นั้นความนิ่มนวลเป็นที่ต้องการในหลายระดับด้วยกัน เช่นความนิ่มนวลในการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ จากการวิจัยสรุปได้ว่าคำตอบที่ได้มีความใกล้เคียงกับการใช้พลังงานน้อยที่สุดเป็นฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมสูงสุดซึ่งจะมีผลดีในการวิเคราะห์ทางตัวเลขและนำผลลัพธ์ที่ได้ไปใช้งานได้อย่างเหมาะสม กล่าวคือ ได้ทั้งความนิ่มนวลและประหยัดพลังงาน

ทวิวัชร วีระเกล้า ทำการศึกษาปัญหาเรื่องความเหมาะสมสูงสุดของการใช้เวลาน้อยที่สุดของการเคลื่อนที่เป็นแบบเชิงเส้น (The minimum time problem of linear dynamic optimization) โดยใช้วิธีการพิจารณาหลายวิธีในที่ช่วยอำนวยความสะดวกในการวิเคราะห์ตามหลักการระเบียบวิธีเชิงตัวเลข โดยตรงได้สะดวกขึ้นซึ่งขึ้นอยู่กับคุณลักษณะของปัญหาเรื่องการใช้เวลาน้อยที่สุด (Minimum Time Problem) นั้นด้วยแนวคิดหนึ่งก็คือการพิจารณา ปัญหาการใช้เวลาที่น้อยที่สุด มีความเหมือนกับปัญหาการใช้พลังงานสูงสุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้าย (Maximum energy with free final time problem) ในเอกสารทางวิชาการฉบับนี้ได้อธิบายถึงรายละเอียดความเหมือนกันระหว่างปัญหาทั้งสองข้อ คือปัญหาพลังงานสูงสุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้ายและปัญหาเวลาที่น้อยที่สุด สำหรับระบบที่เป็นเชิงเส้นแต่การพิจารณาโดยวิธีการใช้พลังงานสูงสุดที่ไม่คำนึงถึงเวลาสุดท้ายมีข้อดีกว่าหลายประการ ทำได้ดีที่สุดได้มีการเปรียบเทียบ ผลการทดลองของทั้งสองปัญหาโดยวิธีระเบียบวิธีเชิงตัวเลขทั้งวิธีตรงและวิธีอ้อม ทำให้เกิดความชัดเจนยิ่งขึ้น

Sunil K. Agrawal, T. Veerakleaw and B.C. Fabien (2544) New Computational Framework for Trajectory Optimization of Higher-Order Dynamic Systems, AIAA Journal of Guidance Control and Dynamic Vol.24 No.2 pp.228 - 236, 2544 ในการใช้ ทฤษฎีของระบบวิเคราะห์ปัญหาของการหาค่าต่ำสุดและสูงสุด เป็นที่ยอมรับแล้วว่า ระบบการเคลื่อนที่ ที่อยู่ในรูปอนุพันธ์อันดับสูง มีข้อได้เปรียบเป็นอย่างมากในเรื่องของการคำนวณเมื่อเปรียบเทียบกับระบบเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยเฉพาะสมการการเคลื่อนที่ทางด้านวิศวกรรมเครื่องกล จะอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับที่สองเสมอ อันเนื่องมาจากการใช้กฎข้อที่สองของนิวตัน ในบทความฉบับนี้ได้นำเสนอข้อมูลเปรียบเทียบอย่างชัดเจนในการคำนวณระหว่างสมการการเคลื่อนที่ที่อยู่ในรูปสมการอันดับสูง และ สมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง การที่จะเปรียบเทียบได้นั้นผู้วิจัยได้สร้างซอฟต์แวร์ขึ้นมาด้วยวิธีทางตรง และทางอ้อม เพื่อสามารถยืนยันได้ว่าไม่ว่าสมการการเคลื่อนที่จะอยู่ในรูปแบบใดก็สามารถที่จะใช้โปรแกรมเดียวกันหาคำตอบเพื่อใช้ในการเปรียบเทียบ

สุวิมล เสนิงค์ ณ อรุณยา (2550) ศึกษาเกี่ยวกับโครงสร้างผ้าคลุมรถยนต์อัตโนมัติที่ใช้การออกแบบจากทฤษฎีของระบบหุ่นยนต์โดยอาศัยกลไกการทำงานของแขนกลสองตำแหน่งซึ่งเคลื่อนที่ทั้งแบบหมุน และแบบเชิงเส้นเพื่อได้สมการการเคลื่อนที่ของผ้าคลุมรถยนต์อัตโนมัติซึ่งอธิบายโดยสมการออยเลอร์-ลากรางจ์เพื่อนำค่าแรงบิดและแรงภายนอกของโมเมนต์มาวิเคราะห์การทำงานของแขนกลทำให้ทราบค่าที่เหมาะสมที่สุดที่มอเตอร์ สามารถทำงานได้โดยการพัฒนาโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ที่ได้ผลสูงสุดทางระบบพลศาสตร์โดยทั่วไปจำเป็นต้องกำหนดเป้าหมายที่ต้องการให้ระบบเสียก่อนและรวบรวมเงื่อนไขต่างๆ ของระบบในสถานะ หรือ ณ เวลาที่สนใจ เช่นเวลาเริ่มต้น และเวลา

สุดท้าย เพื่อนำมาพิจารณาร่วมกันในการหาคำตอบ ซึ่งวิธีการหาคำตอบสามารถทำได้หลายวิธีขึ้นอยู่กับรูปแบบของปัญหาว่าจะเหมาะสมวิธีใด แต่โดยทั่วไปจะนำหลักทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการหาค่าเหมาะสมที่สุดมาใช้ร่วมกับปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น แต่เนื่องจากปัญหาเป็นแบบพารามิเตอร์ที่ขึ้นกับเวลาจึงต้องทำการแปลงปัญหาทางออปติไมเซชันผ่านวิธีทางแคลคูลัสของความแปรปรวน ซึ่งเป็นวิธีอ้อมทำให้ปัญหาถูกแปลงจากปัญหาทางการควบคุมที่ได้ผลสูงสุดทางระบบพลศาสตร์เป็นปัญหาทางการควบคุมที่ได้ผลสูงสุดของระบบสถิตศาสตร์โดยจากการทดสอบโปรแกรมที่ได้มีความแม่นยำและความรวดเร็วในการหาคำตอบ ซึ่งสามารถจำลองโครงสร้างการทำงานเพื่อเป็นแนวทางในการออกแบบของจริงต่อไป

Shiler H, Chang and V. Wong. The Practical Implementation of Time Optimal Control for Robotic Manipulators, Robotic & Computer – Integrate Manufacturing. เอกสารฉบับนี้ได้กล่าวถึงผลการทดลองสำหรับ Time optimal control สำหรับ Robotic Manipulators ซึ่งจะแก้ปัญหา ระบบที่ไม่ต่อเนื่องสมการการเคลื่อนที่ที่มีลำดับมากระบบการเคลื่อนที่ที่ไม่มีรูปแบบที่แน่นอนและมีการล่าช้า (Delay) จากการควบคุม ผู้เขียนเสนอให้ใช้ Simplified model และกำหนดการควบคุมการตอบสนองโดยได้ทดลองกับ UCLA Direct Drive ซึ่งผลการทดลองสามารถลดเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ทั้งยังเพิ่มความแม่นยำในการเคลื่อนที่ให้กับเครื่องมือที่นำมาทดลองด้วย

M.C. Renolds and P.H. Meckl. Composite Optimization Scheme for time Optimal Control. งานวิจัยนี้ได้นำเสนอวิธีการแก้ปัญหาค่าต่ำสุด สูงสุด โดยเปลี่ยนให้เป็นปัญหาไทม์ออปติไมซคอนโทรล (Time Optimal Control problem) แล้วใช้ทั้ง Quadratic และ linear programming ซึ่งเป็น linear programming จะสามารถคาดการณ์ค่าเริ่มต้นที่เหมาะสมในการแก้ปัญหการควบคุมที่ได้ผลสูงสุด (Optimal Control) ของระบบที่ประกอบไปด้วยมวล 2 ก้อน และ สปริง แสดงให้เห็นถึงคุณสมบัติที่น่าสนใจในการเปลี่ยนสมการเดิมให้เป็นสมการกำลังสอง หรือ คอควาติคโปรแกรมมิ่ง (quadratic programming)

จากงานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งหมดนั้นพบว่าได้มีการศึกษาถึงระบบการเคลื่อนที่ได้ผลมาพอสมควรทำให้เกิดแนวทางการทำการวิจัยใหม่ๆเกิดขึ้นในการศึกษาถึงเรื่อง “แนวทางใหม่ในการหาคำตอบของการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดโดยใช้วิธีความนิ่มนวลที่สุดมาประยุกต์ใช้กับแขนกล” นั้นมีความจำเป็นที่จะต้องมีส่วนที่กล่าวถึงปัญหาการเคลื่อนที่ (Problem Statement) โดยใช้ทฤษฎีและหลักการมาทำการกำหนดฟังก์ชันหรือพฤติกรรมของปัญหาจากนั้นก็ทำการวิเคราะห์ผลการทดลองด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ต่อไป

บทที่ 3

อุปกรณ์และวิธีการทดลอง

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. การกำหนดปัญหา
2. เงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหา
3. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์
4. ปัญหาความไม่แน่นอนที่สุด

การกำหนดปัญหา

ในระบบพลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น (Linear) และไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear) นั้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง (First Order Derivative Function) ได้ดังนี้

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t); \quad i = 1, \dots, n \quad (3-1)$$

โดยที่ $x \in R^n$, $u \in R^m$ เป็นตัวแปรที่เรียกว่า States , Control Input และ เวลา ตามลำดับ รูปแบบของปัญหาในที่นี้คือการหาค่าของ Control Input $u(t)$ และ ตัวแปร State $x(t)$ ที่ทำให้วัตถุประสงค์ที่ต้องการความไม่แน่นอนสูงสุดเป็นจริง ในการศึกษาวิจัยนี้ใช้กรณีที่มีเวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed End Time and Fixed End Points) อย่างไรก็ตามทั้ง States และ Control Input ต้องมีเงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหาโดยกำหนด $x(t_0) = x_0$, t_0 คือเวลาเริ่มต้น และ $x(t_f) = x_f$, t_f คือเวลาจุดสุดท้ายที่พิจารณา

ฟังก์ชันของค่าความเหมาะสมสูงสุดของปัญหาความไม่แน่นอนสูงสุด คือ อนุพันธ์อันดับที่สาม เทียบกับเวลา หรือ ตัวแปรที่เป็นอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของ Control Input (u) ดังนั้น Jerk จึงสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของตัวแปรได้ดังนี้

$$Jerk = \ddot{x} \propto \dot{u} \quad (3-2)$$

กำหนดให้

$$\dot{u} = \tilde{u} \quad (3-3)$$

จากสมการที่ (3.1) จึงเขียนใหม่ได้ว่า

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_{n+m}, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_m, t); \quad i = 1, \dots, n+m \quad (3-4)$$

ในที่นี้ $\tilde{u}$ คือค่าตัวแปร Control Input ของระบบพลศาสตร์ ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหาความนิ่ม นวลที่สุดโดยวิธีทางอ้อม (Minimum Indirect Jerk Problem) ได้ดังนี้

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^m \tilde{u}_i^2 dt \quad (3-5)$$

ในลักษณะคล้ายกัน ฟังก์ชันวัตถุประสงค์ของปัญหาความนิ่ม นวลที่สุดโดยวิธีทางตรง (Minimum Direct Jerk Problem) ได้ดังนี้

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \ddot{x}_i^2 dt \quad (3-6)$$

J เป็น Cost Function ของความกระด้าง (Jerks)

เงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหา

ในการศึกษางานวิจัยนี้ใช้หลักการของแคลคูลัสความแปรปรวน (Calculus of Variations) หาเงื่อนไขของค่าต่ำที่สุดและสูงที่สุด ซึ่งเป็นวิธีอ้อมของปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดสำหรับ ระบบควบคุมในระบบทางพลศาสตร์ ขึ้นกับการตั้งสมมุติฐานเกี่ยวกับสมรรถนะเงื่อนไขจำกัดทาง กายภาพหรือปลายทางของระยะทางการทำงานให้ฟังก์ชันนอลเป็นฟังก์ชันพื้นฐานซึ่งสมการที่สามารถ ครอบคลุมปัญหาทั้งหมดคือ

$$J = \phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (3-7)$$

ซึ่ง

$$\phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} \quad (3-8)$$

จะขึ้นอยู่กับเวลาสุดท้าย (Final Time) และ สภาวะสุดท้าย (Final States) ของระบบ และ

$$\int_{t_i}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (3-9)$$

เป็นส่วนที่ขึ้นอยู่กับเวลาที่ผ่านไป (Time History) ของสแตตและคอนโทรลวารีเอเบิล (State and Control Variables)

ในการหาค่าความเหมาะสมของฟังก์ชันในระบบพลศาสตร์ได้เพิ่มตัวคูณลากรางจ์ (Lagrange Multipliers) เข้าไปในคอสฟังก์ชันนอล (Cost Functional) จะได้สมการดังนี้

$$J'(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = \int_{t_i}^{t_f} L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (3-10)$$

ซึ่ง

$$L'(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = L + \sum_{i=1}^n \lambda_i(f_i) \quad (3-11)$$

โดยที่ $\lambda_i(t)$ คือตัวคูณลากรางจ์ (Lagrange Multipliers) ดังนั้น สมการ (3.10) เขียนใหม่ได้ดังนี้

$$J'(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = \int_{t_i}^{t_f} [L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)[\dot{x}_i - f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m)]] dt \quad (3-12)$$

การเลือกใช้เงื่อนไขไดนามิกขึ้นอยู่กับปัญหาที่ต้องการพิจารณาโดยฟังก์ชันนอล ในการศึกษาจะใช้กรณีที่มีเวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed End Time and End Points) ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่กำหนดเวลาเริ่มต้น t_0 และเวลาสุดท้าย t_f รวมทั้งค่าของฟังก์ชัน $x(t_0)$ และ $x(t_f)$ ไว้แล้วความสามารถในการแบ่งแยกกันของฟังก์ชัน (Differentiable Functions) เป็นไปตามสภาวะขอบเขตของ $x(t_0) = x_0$, $x(t_f) = x_f$, $u(t_0) = u_0$ and $u(t_f) = u_f$ โดยเวลาที่ใช้จะอยู่ระหว่าง $t_i \leq t \leq t_f$

ให้ฟังก์ชัน $L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ แสดงฟังก์ชันนอลได้ว่า

$$J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m] = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) dt \quad (3-13)$$

ถ้าให้ $x(t_0)$ ถูกเพิ่มค่าขึ้นโดย $h_{xj}(t_0)$, $u(t_0)$ ถูกเพิ่มค่าขึ้นโดย $h_{uk}(t_0)$ แต่ยังคงอยู่ในเงื่อนไขขอบเขต ทำให้ $h_{xj}(t_0) = h_{xj}(t_f) = h_{uk}(t_0) = h_{uk}(t_f) = 0$ ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงในฟังก์ชันนอล ΔJ เป็น

$$\begin{aligned}\Delta J &= J[x_1 + h_{x1}, \dots, x_n + h_{xj}, u_1 + h_{u1}, \dots, u_m + h_{uk}] \\ \Delta J &= J[x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m]\end{aligned}\quad (3-14)$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \left[L \left(t, x_1 + h_{x1}, \dots, x_n + h_{xj}, \dot{x}_1 + \dot{h}_{x1}, \dots, \dot{x}_n + \dot{h}_{xj}, u_1 + h_{u1}, \dots, u_m + h_{uk}, \dot{u}_1 + \dot{h}_{u1}, \dots, \dot{u}_m + \dot{h}_{uk} \right) - L(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, u_1, \dots, u_m, \dot{u}_1, \dots, \dot{u}_m) \right] dt \quad (3-15)$$

และเมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's Series) กระจายสมการและตัดเทอมที่มีดีกรีตั้งแต่สองขึ้นไป (Higher Order Terms) ที่จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\delta J' &= \int_{t_i}^{t_f} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} \right) h_{xj} dt + \int_{t_i}^{t_f} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} \right) h_{uk} dt \\ &+ \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{uk} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} h_{uk} \Big|_{t_i} \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{xj} \Big|_{t_f} - \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} h_{xj} \Big|_{t_i} \right)\end{aligned}\quad (3-16)$$

แต่ถ้ามีการกำหนดสภาวะสุดท้ายไว้ตายตัวแล้วที่ $h_{xj}|_{t_f} = h_{xj}|_{t_i} = 0$ ทำให้เราเขียนเทอมต่างๆของ สมการ (3-16) แยกส่วนย่อยได้เป็น

$$\frac{\partial L'}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_j} = 0 \quad (3-17)$$

และ

$$\frac{\partial L'}{\partial u_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{u}_k} = 0 \quad (3-18)$$

สำหรับ $j = 1, \dots, n$ และ $k = 1, \dots, m$.

สมการ(3-17) และ สมการ (3-18) เป็นเนสเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ที่จะนำไปแก้ปัญหาร่วมกับตัวคูณลากรางค์ (Lagrange Multipliers) $\lambda_j(t)$, และ Control Inputs $u_k(t)$

เราสามารถหาความสัมพันธ์ของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของเนสเซสเซอร์ีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ได้หลายทาง

สำหรับ

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t), \quad i = 1, \dots, n \quad (3-19)$$

เนสเซสซารีคอนดิชัน (Necessary conditions) ของสมการ (3-19)

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial L}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (3-20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, \quad k = 1, \dots, m \quad (3-21)$$

จากเนสเซสซารีคอนดิชัน (Necessary Conditions) ที่อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ และ สมการพีชคณิต (Differential and Algebraic Equations) ที่มีการระบุเงื่อนไขขอบเขตที่เวลาต่างกันสองเวลา จะมีการเรียกชื่อว่าปัญหาเงื่อนไขขอบเขตสองจุด (TPBVP: Two Point Boundary Valued Problem)

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

หุ่นยนต์ประกอบไปด้วยแขนกลที่ต่อยังกันเข้าด้วยจุดต่อที่เป็น Open kinematics chain จุดต่อจะเป็นแบบจุดหมุน (Revolute joint) และจุดต่อเลื่อน (Prismatic) จำนวนจุดต่อมารวมกันเป็นจำนวน องศาความอิสระ (Degree of freedom) ซึ่งจำนวนองศาความอิสระนี้เป็นสิ่งหนึ่งที่ใช้จำแนกชนิดของหุ่นยนต์เช่น หุ่นยนต์ 5 แกน มีจำนวนองศาความอิสระเท่ากับ 5 เป็นต้น นอกจากนี้ยังใช้การจัดลำดับแขนกลเป็นการระบุชนิดของหุ่นยนต์เช่น หุ่นยนต์ RRP (SGARA) มีแขนกลเป็นจุดหมุน, จุดหมุน และจุดต่อเลื่อน(RRP ย่อมาจาก Revolute, Revolute, Prismatic) เป็นต้น บริเวณพื้นที่ที่หุ่นยนต์ทำงานเรียกว่า Workspace ซึ่งเป็นพื้นที่ที่หุ่นยนต์สามารถเข้าถึงได้

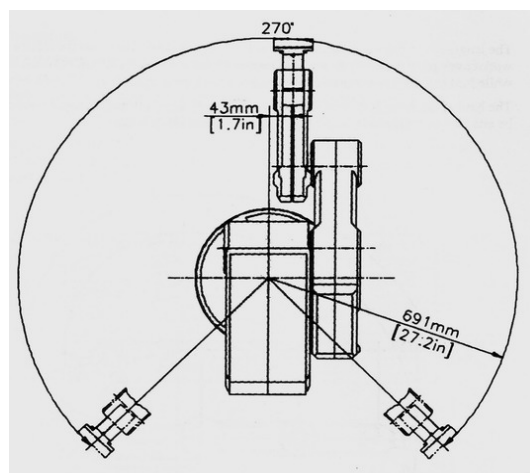
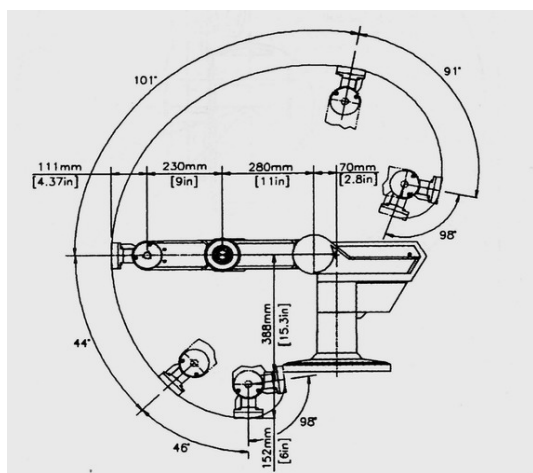
ระบบของข้อต่อจะแบ่งเป็นสี่แบบ คือ ระบบโครงข้อหมุน (Revolute Joint-R) ที่ยอมให้แขนหมุนได้รอบแกนหมุน เช่น ข้อศอก และระบบแกนเลื่อน (Prismatic Joint-P) ที่ยอมให้มีการยืดหรือหดของแขน เช่น เสาร์ับสัญญาณวิทยุ ข้อต่อแบบทรงกระบอก (Cylindrical joints) เป็นข้อต่อที่มีจุดโยงที่ยอมให้แขนกลเคลื่อนที่แบบเลื่อนตำแหน่งขนานกับแกนและการเคลื่อนที่แบบหมุนรอบแกน ข้อต่อแบบสเฟียริคอล (Spherical joints) เป็นข้อต่อที่มีจุดต่อโยงเคลื่อนที่ไปได้ทุกทิศทาง

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยจะศึกษาหาความเหมาะสมที่สุดของระบบพลศาสตร์ในหลักการความมั่นคงที่สุด มาวิเคราะห์โดยยกตัวอย่างการเคลื่อนที่ของแขนกล 5 แกน ของบริษัท ESHED ROBOTEC รุ่น SCORBOT-ER9 ในงานวิจัยครั้งนี้จะนำมาวิเคราะห์เพียง 2 แกน



ภาพประกอบ 26 แสดงรูปหุ่นยนต์ของบริษัท ESHED ROBOTEC รุ่น SCORBOT-ER9

ไฮโมจีเนียสทรานส์ฟอร์มเมชันเมตริกซ์ของหุ่นยนต์ SCORBOT ER-9 เป็นแบบ 5 องศาความอิสระ (5 DOF) โครงสร้างของแขนกลนี้ จะมีแกนเคลื่อนที่เป็นอิสระต่อกัน 5 แกน โดยทุกแกนจะเป็นการเคลื่อนที่แบบหมุน (5 Revolute joint) 4 แขนกล (4 Links) กำหนดให้ มุมระหว่างแกน (α_i) ระยะระหว่างแกน (a_i) ระยะห่างระหว่างท่อนแขน (d_i) จะเป็นค่าคงที่ที่มีแต่ก็เพียงมุมระหว่างท่อนแขน (θ_i) ที่เป็นตัวแปรที่เปลี่ยนไปตามการเคลื่อนที่ของแขนกล ดังนั้นจากรูปเราจะกำหนดให้ แกนที่ i จะหมุนรอบแกน z_i เป็นมุม θ_i เมื่อเทียบกับแกน ที่อยู่ติดกันก่อนหน้า หรือแกนที่ $i-1$



ภาพประกอบ 27 แสดงระบบพิกัดของหุ่นยนต์ 5 องศาความอิสระ

เมื่อ

θ_i คือ Joint Variables

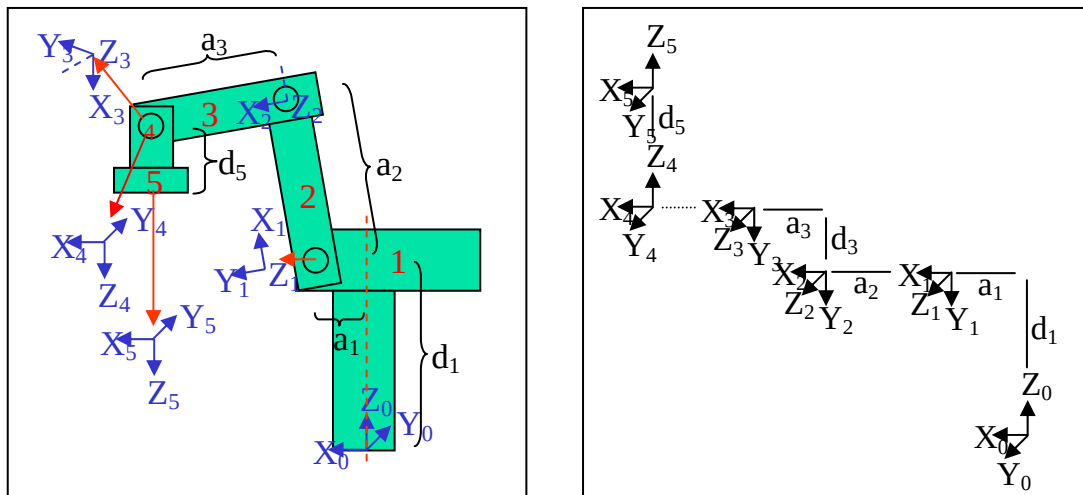
α_i, a_i, d_i คือ ค่าคงที่ D-H Parameter

A_i คือ โฮโมจีเนียสทรานส์ฟอร์มเมชันเมทริกซ์ (Homogeneous Transformation matrix) ของแต่ละแขนกล

T_0^2 คือ ผลรวมของโฮโมจีเนียสทรานส์ฟอร์มเมชันเมทริกซ์ (Homogeneous Transformation matrix) ของแขนกลทั้ง 2 แขน

หุ่นยนต์ชนิดนี้ถ้าพิจารณาให้ดีจะพบว่ามีลักษณะการทำงานที่คล้ายช่วงแขนของมนุษย์ ดังนั้น ผลรวมของโฮโมจีเนียสทรานส์ฟอร์มเมชันเมทริกซ์ทั้ง 2 แขนคือ

$$T_0^2 = A_1 \dots\dots\dots A_2$$



ภาพประกอบ 28 แสดงการกำหนดพิกัดของหุ่นยนต์ 5 องศาอิสระ

จากข้อมูลเหล่านี้นำมาจัดให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์ D-H Parameter ได้ดังนี้

ตาราง 7 แสดงค่าตัวแปร (Parameter Variable) ต่างๆของหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9

ข้อต่อ (i)	a_i (ม.)	α_i (องศา)	d_i (ม.)	θ_i (องศา)
1	a_1	α_1	d_1	$\theta_1(t)$
2	a_2	α_2	d_1	$\theta_2(t)$

โฮโมจีเนียสทรานส์ฟอร์มเมชันเมตริกซ์ (Homogeneous Transformations Matrix)

กำหนดให้

$$A_1 = T_0^1$$

$$A_2 = T_1^2$$

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\cos \alpha_1 \sin \theta_1 & \sin \alpha_1 \theta_1 & a_1 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \alpha_1 \theta_1 & -\sin \alpha_1 \cos \theta_1 & a_1 \sin \theta_1 \\ 0 & \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\cos \alpha_2 \sin \theta_2 & \sin \alpha_2 \theta_2 & a_2 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \alpha_2 \theta_2 & -\sin \alpha_2 \cos \theta_2 & a_2 \sin \theta_2 \\ 0 & \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จะได้ Forward Kinematics ของหุ่นยนต์เป็น

$$T_0^2 = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ปัญหาความน้มนวลที่สุด

ปัญหาความน้มนวลที่สุดโดยวิธีทางอ้อม (Minimum Indirect Jerk Problem) Cost Function ของการหาค่าความน้มนวลที่สุดโดยวิธีทางอ้อมกำหนดไว้ดังนี้

$$J = \int_0^1 \tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2 dt \quad (3-22)$$

การกำหนด Cost Function ในเทอมของสมการ (3-22) ได้ทำการมิไนไมซ์ (Minimized) โดยใช้ แคลคูลัสออฟวาไรเอเบิล (Calculus of Variations) หาดั้วแปรเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ออกมา

ปัญหาความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางตรง (Minimum Direct Jerk Problem) Cost Function ของการหาค่าความนิ่มนวลที่สุดโดยวิธีทางตรงกำหนดไว้ดังนี้

$$J = \int_0^1 \ddot{x}_1^2 + \ddot{x}_2^2 dt \quad (3-23)$$

สำหรับการกำหนด Cost Function ในเทอมของสมการ (3-23) ได้ทำการมิไนไมซ์ (Minimized) โดยใช้ แคลคูลัสออฟวาไรเอเบิล (Calculus of Variations) หาดั้วแปรเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ออกมาในลักษณะเดียวกัน

บทที่ 4

ผลและวิเคราะห์ผลการทดสอบ

จากปัญหาความนิ่มนวลที่สุด (Minimum Jerk Problem) เพื่อทำการหาความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์ที่ไม่เชิงเส้น (Nonlinear of Dynamic Systems) ซึ่งผู้วิจัยได้นำเสนอผลการวิจัยตามลำดับ ดังนี้

1. ผลการทดสอบโดยวิธีความนิ่มนวลที่สุด
2. ผลลัพธ์ในทางทฤษฎีโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์
3. ผลการทดลองโดยโปรแกรมควบคุมหุ่นยนต์
4. เปรียบเทียบผลลัพธ์ในทางทฤษฎีกับผลการทดลอง
5. วิเคราะห์ผลการทดสอบ

ผลการทดสอบโดยวิธีความนิ่มนวลที่สุด

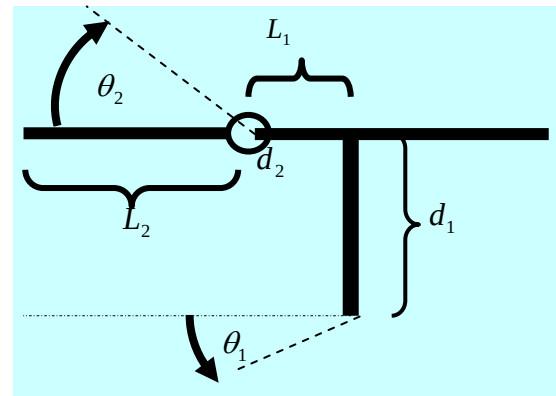
ผลลัพธ์ในทางทฤษฎีจะประกอบไปด้วย การขจัดของแขนกลทั้งสองแกน ความเร็วในการเคลื่อนที่และพลังงานที่ป้อนให้กับเพลาส่งกำลังเพื่อทำหน้าที่ในการหมุนแกนของแขนกล ซึ่งจะพิจารณาในหลักการปัญหาความเหมาะสมสูงสุดโดยวิธีความนิ่มนวลที่สุดเปรียบเทียบกับผลการทดลอง โดยกำหนดให้เวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed End Time and Fixed End Points)

ในการนำเสนอผลลัพธ์นั้นจำเป็นที่จะต้องกำหนดตัวแปรและหน่วยทางวิทยาศาสตร์ที่ใช้ให้เหมือนกันในทุกกรณีดังแสดงในตาราง 8

ตาราง 8 แสดงการกำหนดตัวแปรและหน่วยทางวิทยาศาสตร์

ตัวแปร	ความหมาย	หน่วยที่ใช้
$\theta_i, q_i, i = 1, \dots, n$	การขจัดเชิงมุมของแขนกล	เรเดียน (rad)
$\dot{\theta}_i, \dot{q}_i, i = 1, \dots, n$	ความเร็วเชิงมุมของแขนกล	เรเดียน/วินาที (rad/sec)
$u_i, i = 1, \dots, n$	แรงบิดที่กระทำกับแขนกล	นิวตัน-เมตร ($N-m$)

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่นำมาวิเคราะห์สำหรับการวิจัยครั้งนี้ กำหนดปัญหาเป็นหุ่นยนต์สองแกน มีการเคลื่อนที่ 2 องศาอิสระ (Two Degree of Freedom) จัดรูปแบบสมการอยู่ในรูปอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Order Derivative) ของระบบพลศาสตร์ที่ไม่เชิงเส้น (Nonlinear of Dynamic Systems)



ภาพประกอบ 29 แสดงรูปร่างและคุณลักษณะของหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9

สมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์สองแกน (Equation of Motion: EOM)

การหาสมการการเคลื่อนที่ เริ่มต้นจากการหาค่า ดีเอส-พารามิเตอร์ (DH-Parameter) และกำหนดให้ตัวแปรใช้หน่วยของ MKS ดังนี้

ตาราง 9 แสดงค่าตัวแปร (Parameter Variable) ต่างๆของหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9

ข้อต่อ (i)	L_i (ม.)	α_i (องศา)	d_i (ม.)	θ_i (องศา)	m_i (kg)
1	$L_1=0.07$	$\pi/2$	$d_1=0.388$	$\theta_1(t)$	$m_1 = 1$
2	$L_2=0.28$	0	$d_2=0.159$	$\theta_2(t)$	$m_2 = 1$

สมการการเคลื่อนที่ในรูปแบบกฎข้อที่สองของนิวตัน (Newton's Law)

$$\sum F = u = ma$$

$$\sum F = u = m\ddot{x} = m\ddot{\theta} \quad (4-1)$$

ได้สมการการเคลื่อนที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสอง ดังนี้

$$\begin{aligned}
u_1 = & 2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_1 \cos^2(\theta_2) + m_1 L_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 L_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 d_2^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 d_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_2 \cos^2(\theta_2) \\
& + m_2 L_1 L_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2) + 2m_2 L_1 L_2 \cos(\theta_2) - 2m_2 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2)(L_1 + L_2 \cos(\theta_2)) \\
& - m_2 L_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2)(2L_2 \cos \theta_2 + L_1)
\end{aligned} \quad (4-2)$$

และ

$$\begin{aligned}
u_2 = & m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_1 \cos^2(\theta_2) + m_2 L_1 L_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + m_2 d_2^2 \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_1 + m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 + m_2 d_2^2 \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_2 \\
& - 2m_2 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2)(L_1 + L_2 \cos(\theta_2)) - m_2 L_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2)(2L_2 \cos \theta_2 + L_1) + m_2 L_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2) \\
& (L_1 + L_2 \cos(\theta_2)) - 0.5m_2 L_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(2\theta_2) + 9.81m_2 L_2 \cos(\theta_2)
\end{aligned} \quad (4-3)$$

ปัญหาของความไม่สมดุลที่สุดในรูปแบบของปัญหานี้จะต้องเขียนใหม่ให้มี Jerk อยู่ในระบบ เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสาม ได้สมการการเคลื่อนที่ (Equation of Motion: EOM) ของระบบ Two Degree of-Freedom of SCORBOT-ER9 ดังนี้

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 = & 2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 - m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2) + m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_1 \cos^2 \theta_2 + m_1 L_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 L_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 d_2^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 d_2^2 \ddot{\theta}_2 \\
& - m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2) + m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_2 \cos^2 \theta_2 - m_2 L_1 L_2 \ddot{\theta}_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + m_2 L_1 L_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\
& - 2m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + 2m_2 L_1 L_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 - m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 - 2m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\
& - 2m_2 L_1 L_2 \ddot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - 2m_2 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2^2 \cos(2\theta_2) - m_2 L_2 \dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_2 \sin(2\theta_2) - m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2) \\
& - 2m_2 L_2^2 \dot{\theta}_2^3 \cos(2\theta_2) - m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_2 \dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2) - m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_2^3 \cos \theta_2 - 2m_2 L_1 L_2 \ddot{\theta}_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - \dot{u}_1
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
\dot{u}_2 = & -m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2) + m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_1 \cos^2 \theta_2 - m_2 L_1 L_2 \ddot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + m_2 L_1 L_2 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 + m_2 d_2^2 \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_1 \\
& - m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 + m_2 d_2^2 \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_2 - 2m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 - m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\
& - 2m_2 L_1 L_2 \ddot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - m_2 L_2^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2^2 \cos(2\theta_2) - m_2 L_2^2 \dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_2 \sin(2\theta_2) - m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2) \\
& - 2m_2 L_2^2 \dot{\theta}_2^2 \cos(2\theta_2) - 2m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_2 \dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2) - m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_2^3 \cos \theta_2 + 2m_2 L_1 L_2 \ddot{\theta}_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\
& + m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1^2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + 2m_2 L_1 L_2 \ddot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + m_2 L_2^2 \dot{\theta}_1^2 \dot{\theta}_2 \cos(2\theta_2) + m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 \sin(2\theta_2) \\
& - m_2 L_2^2 \dot{\theta}_2^3 \cos(2\theta_2) - m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_2 \dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2) - 9.81m_2 L_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2
\end{aligned}$$

กำหนดปัญหาของเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition) ให้มีเวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed End Time and Fixed End Points)

$$t_0 = 0$$

$$t_f = 1$$

$$\theta_1(0) = 0$$

$$\theta_1(1) = 44.29 * \pi / 180$$

$$\theta_2(0) = 0$$

$$\theta_2(1) = 42.56 * \pi / 180$$

เงื่อนไขที่จำเป็นในการแก้ปัญหาที่กำหนดเวลาเริ่มต้น $x(t_0) = x_0$, t_0 และเวลาสุดท้าย $x(t_f) = x_f$, t_f ที่พิจารณา

ฟังก์ชันของการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดโดยวิธีความโน้มถ่วงที่สุด โดยวิธีทางอ้อม ใช้สมการดังนี้

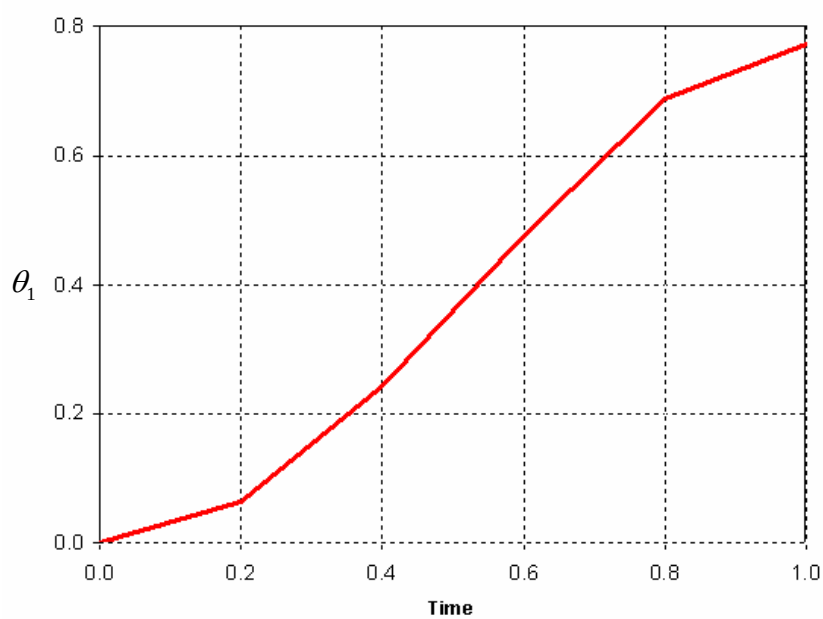
$$\text{Minimum Indirect Jerk} \quad J = \int_0^1 \tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2 dt \quad (4-4)$$

เช่นเดียวกัน ฟังก์ชันของการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดโดยวิธีความโน้มถ่วงที่สุด โดยวิธีทางตรงใช้สมการดังนี้

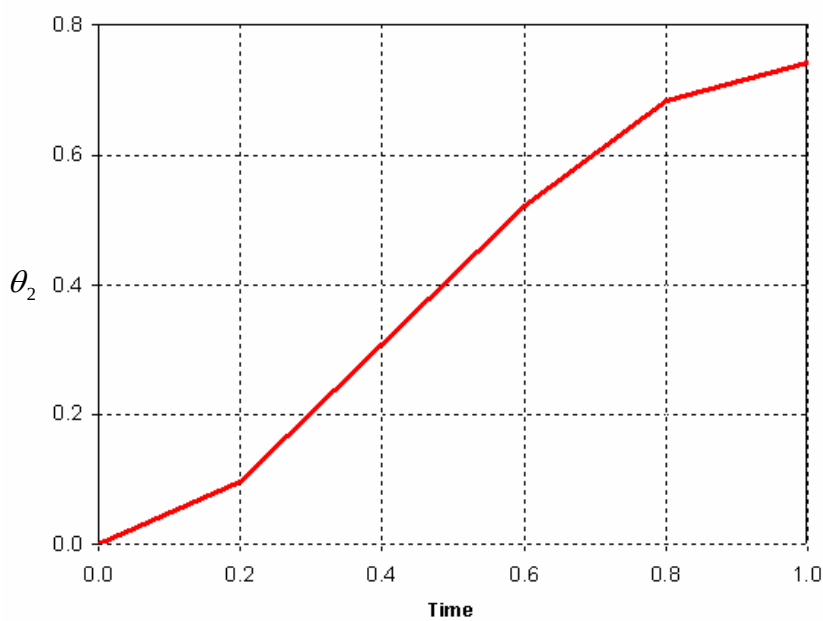
$$\text{Minimum Direct Jerk} \quad J = \int_0^1 \ddot{\theta}_1^2 + \ddot{\theta}_2^2 dt \quad (4-5)$$

ผลลัพธ์ในทางทฤษฎีโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์

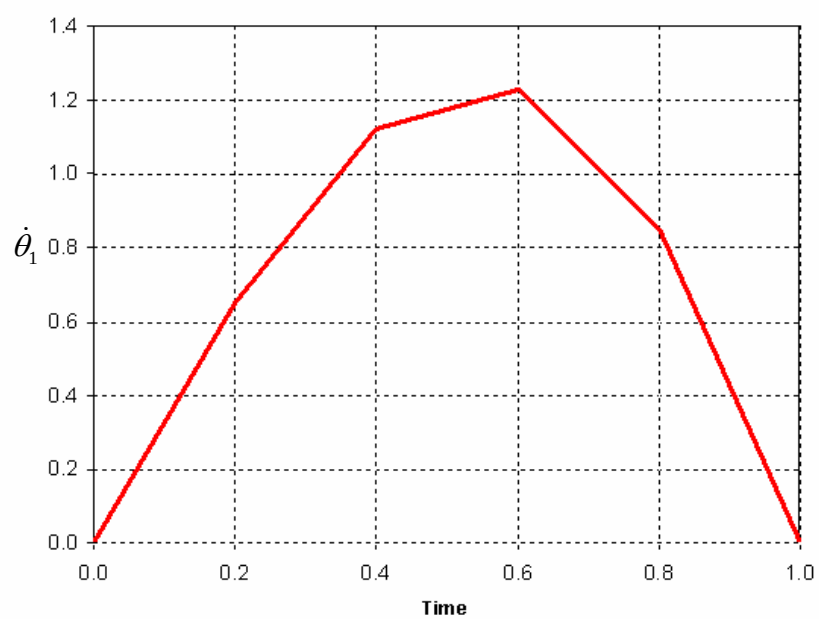
ผลลัพธ์ในทางทฤษฎีโดยวิธีความโน้มถ่วงที่สุด (Minimum Jerk) โดยใช้โปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ (MATLAB) ช่วยหาคำตอบและแสดงผลในรูปแบบของกราฟ ดังนี้



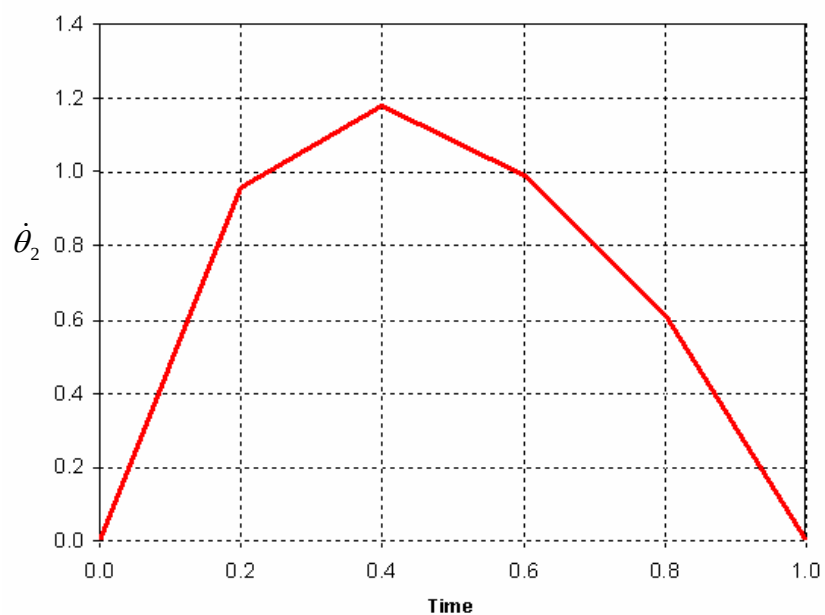
ภาพประกอบ 30 กราฟแสดงการขจัดเชิงมุมของแกนที่ 1 ต่อหน่วยเวลา



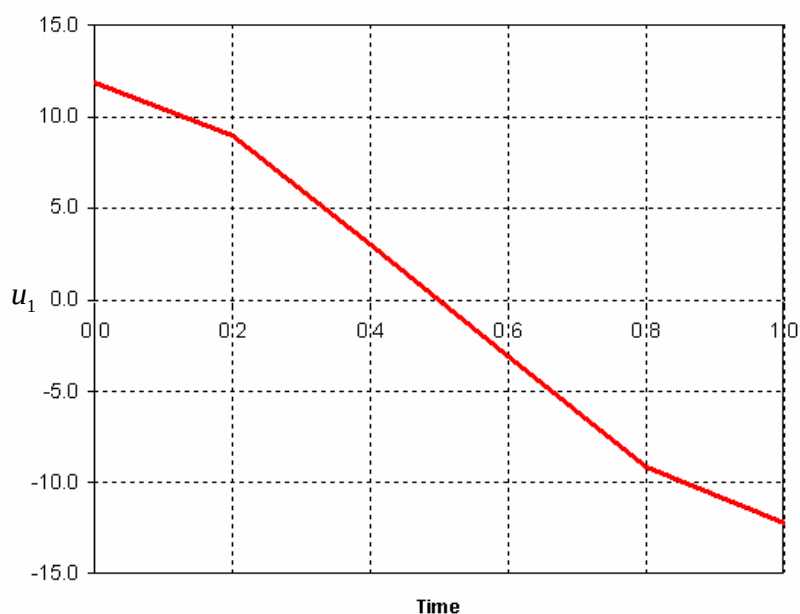
ภาพประกอบ 31 กราฟแสดงการขจัดเชิงมุมของแกนที่ 2 ต่อหน่วยเวลา



ภาพประกอบ 32 กราฟแสดงความเร็วเชิงมุมของแกนที่ 1 ต่อหน่วยเวลา

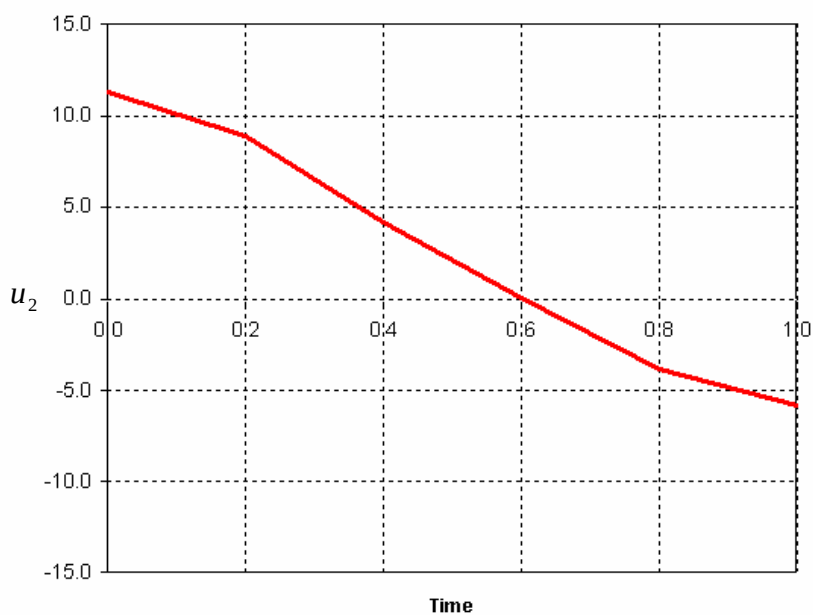


ภาพประกอบ 33 กราฟแสดงความเร็วเชิงมุมของแกนที่ 2 ต่อหน่วยเวลา



ภาพประกอบ 34 กราฟแสดงแรงบิดของแกนที่ 1 ต่อหน่วยเวลา

จากภาพประกอบ 34 แสดงให้เห็นว่า การเริ่มให้แกนกลจุดต่อที่ 1 เริ่มเคลื่อนที่ จะต้องใช้พลังงานมาก แล้วจะค่อยๆ ลดลงขณะที่มีการเคลื่อนที่แล้ว และจะจ่ายพลังงานส่วนทางกับช่วงแรก เพื่อต้องการให้แกนกลค่อยๆ หยุดการเคลื่อนที่เมื่อใกล้ถึงจุดหมายปลายทาง และจะจ่ายพลังงานมากที่สุดเมื่อต้องการเบรคให้มอเตอร์หยุดหมุน

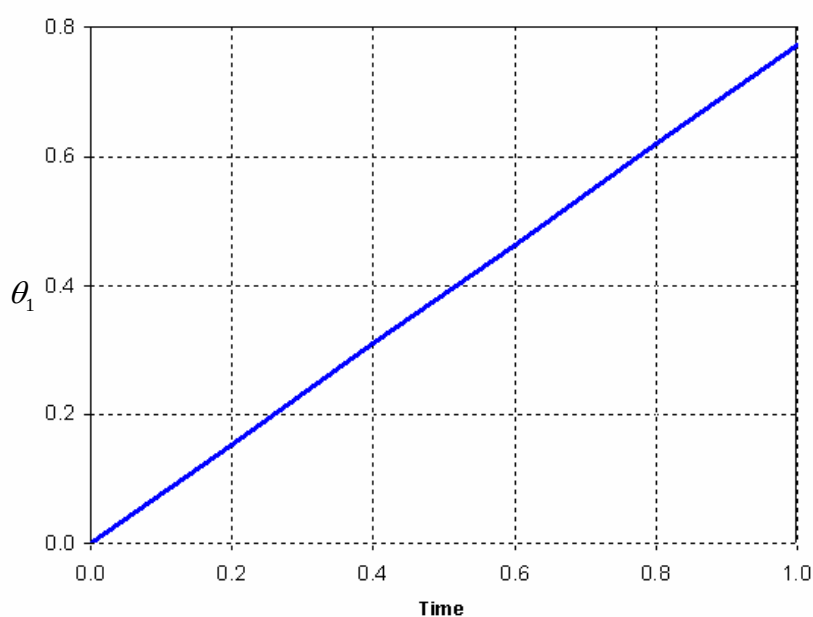


ภาพประกอบ 35 กราฟแสดงแรงบิดของแกนที่ 2 ต่อหน่วยเวลา

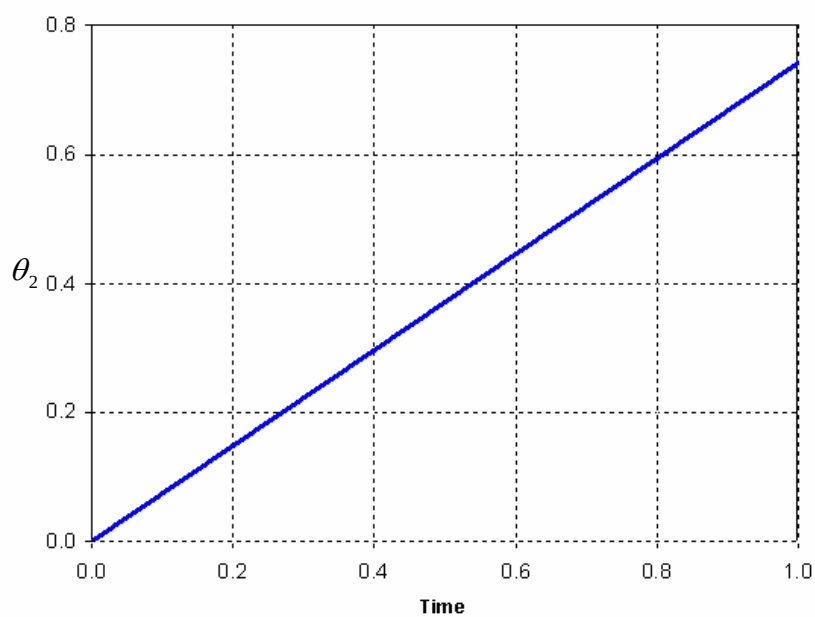
จากภาพประกอบ 35 แสดงให้เห็นว่า การเริ่มให้แขนกลจุดต่อที่ 2 เริ่มเคลื่อนที่ จะต้องใช้พลังงานมาก แล้วจะค่อยๆ ลดลงขณะที่มีการเคลื่อนที่แล้ว และจะจ่ายพลังงานสวนทางกับช่วงแรก เพื่อต้องการให้แขนกลค่อยๆ หยุดการเคลื่อนที่เมื่อใกล้ถึงจุดหมายปลายทาง และจะจ่ายพลังงานมากที่สุดเมื่อต้องการเบรคให้มอเตอร์หยุดหมุน เหมือนกับจุดต่อที่ 1 ต่างกันเพียงปริมาณพลังงานที่ป้อนเข้ามอเตอร์เพื่อให้มีการเคลื่อนที่ และต้องการให้หยุดเท่านั้น

ผลการทดลองโดยโปรแกรมควบคุมหุ่นยนต์

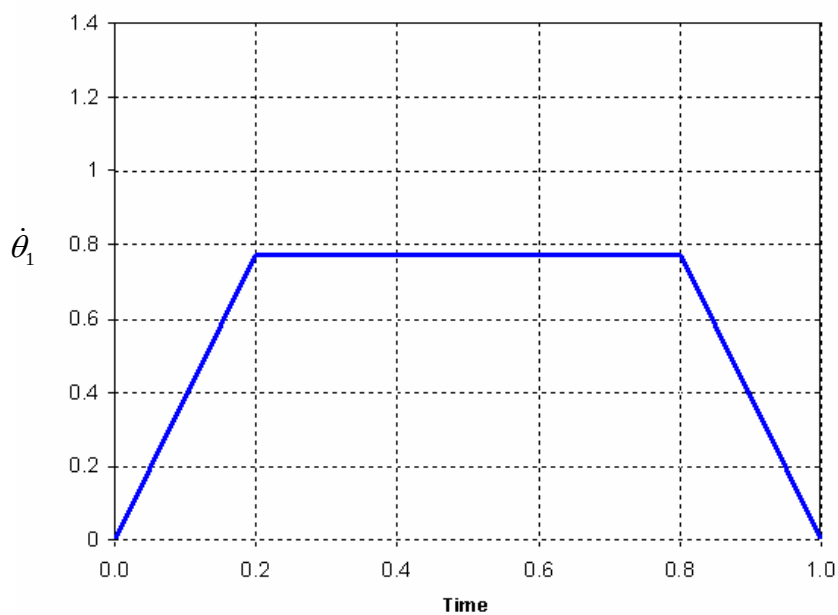
ผลการทดลองจากโปรแกรมควบคุมการทำงานของหุ่นยนต์ที่ชื่อว่า Advanced Control Languages (ACL) ของบริษัท ESHED ROBOTEC เพื่อควบคุมการทำงานของหุ่นยนต์ SCORBOT-ER9 โดยให้แขนกลทั้งสองแกนเคลื่อนที่ไปยังตำแหน่งอ้างอิง โดยกำหนดให้เวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed End Time and Fixed End Points) ผลที่ได้แสดงให้เห็นในรูปแบบกราฟ ดังนี้



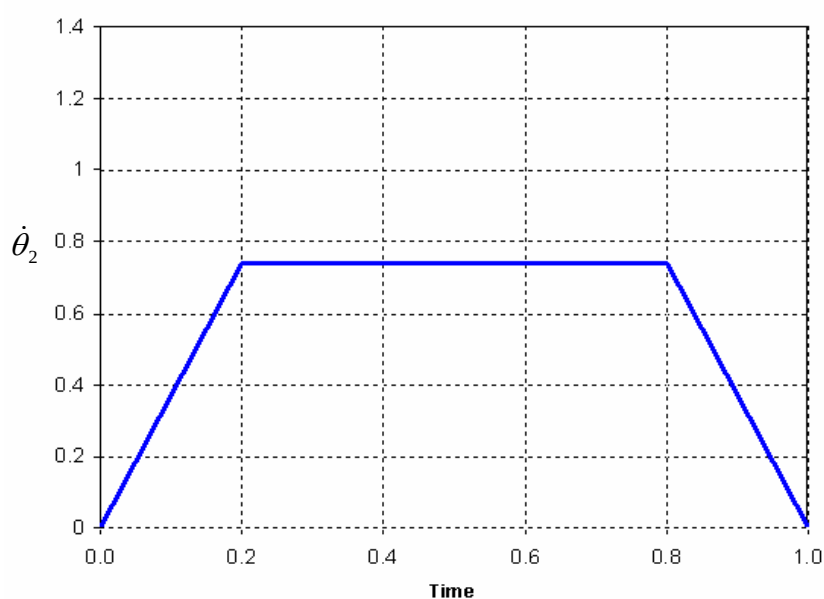
ภาพประกอบ 36 กราฟแสดงการขจัดเชิงมุมของแกนที่ 1 ต่อหน่วยเวลา



ภาพประกอบ 37 กราฟแสดงการขจัดเชิงมุมของแกนที่ 2 ต่อหน่วยเวลา



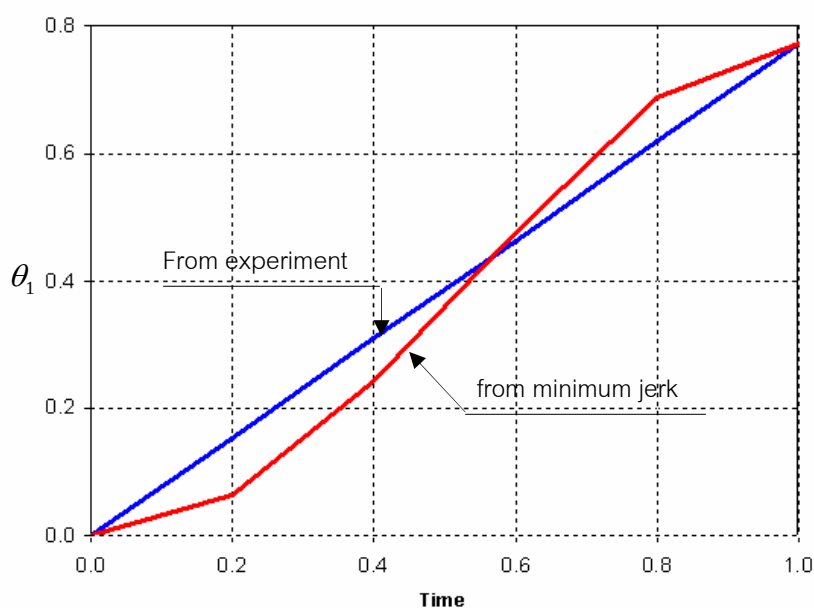
ภาพประกอบ 38 กราฟแสดงความเร็วเชิงมุมของแกนที่ 1 ต่อหน่วยเวลา



ภาพประกอบ 39 กราฟแสดงความเร็วเชิงมุมของแกนที่ 2 ต่อหน่วยเวลา

เปรียบเทียบผลลัพธ์ในทางทฤษฎีกับผลการทดลอง

เมื่อพิจารณาผลลัพธ์การหาค่าความเหมาะสมสูงสุดด้วยวิธีความโน้มถ่วงที่สุดโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์แมทแล็บ (MATLAB) และซอฟต์แวร์ระเบียบวิธีทางตัวเลขที่มีชื่อว่า Non-Linear Programming มาเปรียบเทียบกับผลการทดลองด้วยโปรแกรมควบคุมหุ่นยนต์ ผลลัพธ์ที่ได้แสดงผลในลักษณะกราฟได้ดังนี้



ภาพประกอบ 40 กราฟแสดงผลลัพธ์การเปลี่ยนแปลงการจัดเชิงมุมของแกนที่ 1 ต่อหน่วยเวลา จากวิธีความโน้มถ่วงที่สุดเปรียบเทียบกับผลการทดลอง

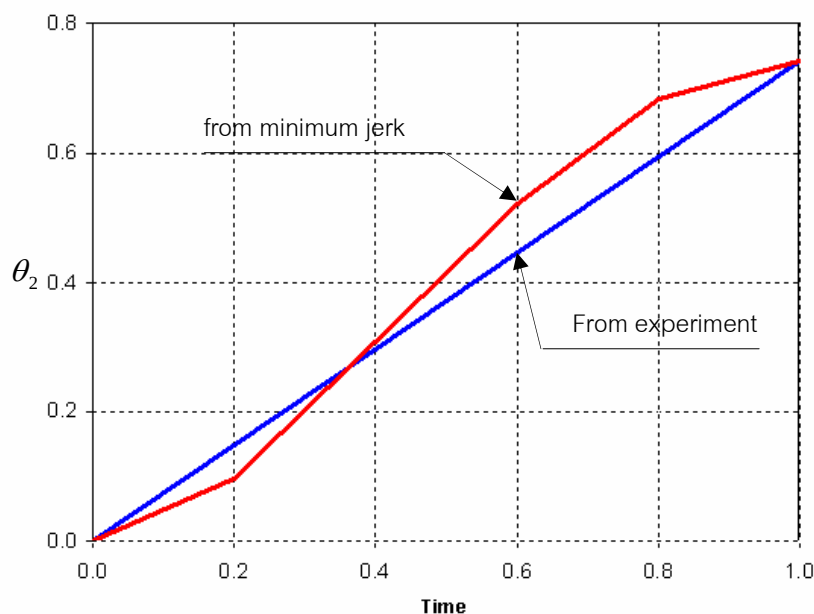
จากภาพประกอบ 40 แสดงผลลัพธ์การทดสอบหาความเหมาะสมสูงสุดในระบบพลศาสตร์ โดยวิธีความโน้มถ่วงที่สุดเปรียบเทียบกับผลการทดลอง ได้ผลดังนี้

1. วิธีความโน้มถ่วงที่สุด การเปลี่ยนแปลงการขจัดเชิงมุมของแกนที่ 1 แขนกลจะเริ่มเคลื่อนที่ออกอย่างช้าๆ และจะเพิ่มการขจัดเชิงมุมเร็วขึ้นตามลำดับ และจะค่อยๆ ลดการขจัดเชิงมุมลงอย่างช้าๆ จนหยุดนิ่งเมื่อถึงปลายทางการเคลื่อนที่

2. ผลการทดลอง แขนกลมีการเปลี่ยนแปลงการขจัดเชิงมุมจากตำแหน่งเริ่มต้นจนถึงตำแหน่งสุดท้ายด้วยการขจัดเชิงมุมคงที่ตลอดระยะเวลาการเคลื่อนที่

3. วิธีความโน้มถ่วงที่สุด การเปลี่ยนแปลงการขจัดเชิงมุมของแกนที่ 1 มีความโน้มถ่วงต่อเนื่องตลอดเวลา ต่างจากผลการทดลองที่แขนกล 1 ออกตัวอย่างรวดเร็วและหยุดการเคลื่อนที่อย่างกะทันหัน

4. เงื่อนไขทั้ง 2 กรณี กำหนดให้เวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed End Time and Fixed End Points) โดยเวลาเริ่มต้น $t_0 = 0$ และเวลาสุดท้าย $t_f = 1$ วินาที และกำหนดเงื่อนไขขอบเขต 2 ตำแหน่ง (Two Point Boundary Value Condition) ให้แขนกล 1 เคลื่อนที่ทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม 0.773 เรเดียน แขนกล 2 เคลื่อนที่ขึ้นเป็นมุม 0.743 เรเดียน



ภาพประกอบ 41 กราฟแสดงผลลัพธ์การเปลี่ยนแปลงการขจัดเชิงมุมของแกนที่ 2 ต่อหน่วยเวลา จากวิธีความโน้มถ่วงที่สุดเปรียบเทียบกับผลการทดลอง

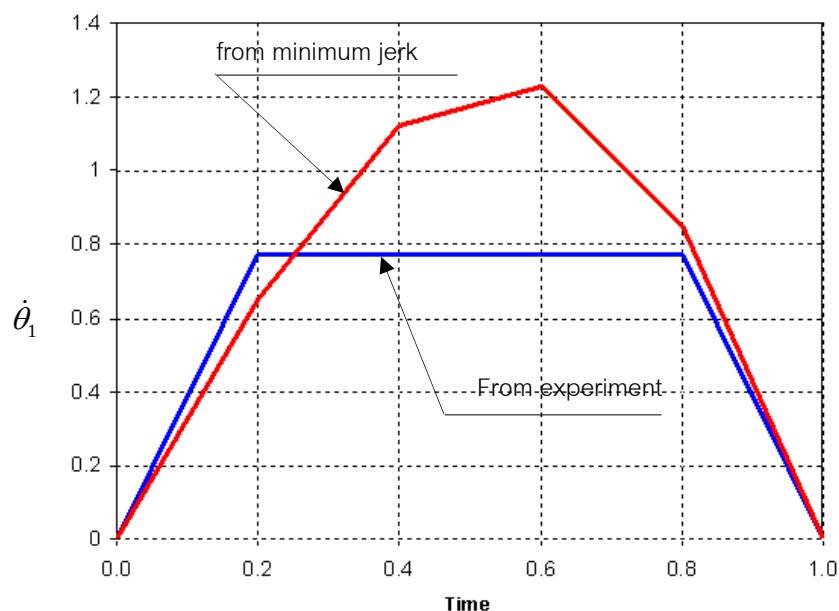
จากภาพประกอบ 41 แสดงผลลัพธ์การทดสอบหาความเหมาะสมสูงสุดในระบบพลศาสตร์ โดยวิธีความโน้มถ่วงที่สุดเปรียบเทียบกับผลการทดลอง ได้ผลดังนี้

1. วิธีความโน้มถ่วงที่สุด การเปลี่ยนแปลงการขจัดเชิงมุมของแกนที่ 2 แขนกลจะเริ่มเคลื่อนที่ออกอย่างช้าๆ และจะเพิ่มการขจัดเชิงมุมเร็วขึ้นตามลำดับ และจะค่อยๆลดการขจัดเชิงมุมลงอย่างช้าๆ จนหยุดนิ่งเมื่อถึงปลายทางการเคลื่อนที่

2. ผลการทดลอง แขนกลมีการเปลี่ยนแปลงการขจัดเชิงมุมจากตำแหน่งเริ่มต้นจนถึงตำแหน่งสุดท้ายด้วยการขจัดเชิงมุมคงที่ตลอดระยะเวลาการเคลื่อนที่

3. วิธีความโน้มถ่วงที่สุด การเปลี่ยนแปลงการเปลี่ยนแปลงการขจัดเชิงมุมของแกนที่ 2 มีความโน้มถ่วงต่อเนื่องตลอดเวลา ต่างจากผลการทดลองที่แขนกล 2 ออกตัวอย่างรวดเร็วและหยุดการเคลื่อนที่อย่างกะทันหัน

4. เงื่อนไขทั้ง 2 กรณี กำหนดให้เวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed End Time and Fixed End Points) โดยเวลาเริ่มต้น $t_0 = 0$ และเวลาสุดท้าย $t_f = 1$ วินาที และกำหนดเงื่อนไขขอบเขต 2 ตำแหน่ง (Two Point Boundary Value Condition) ให้แขนกล 1 เคลื่อนที่ทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม 0.773 เรเดียน แขนกล 2 เคลื่อนที่ขึ้นเป็นมุม 0.743 เรเดียน



ภาพประกอบ 42 กราฟแสดงผลลัพธ์การเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงมุมของแกนที่ 1 ต่อหน่วยเวลา จากวิธีความโน้มถ่วงที่สุดเปรียบเทียบกับผลการทดลอง

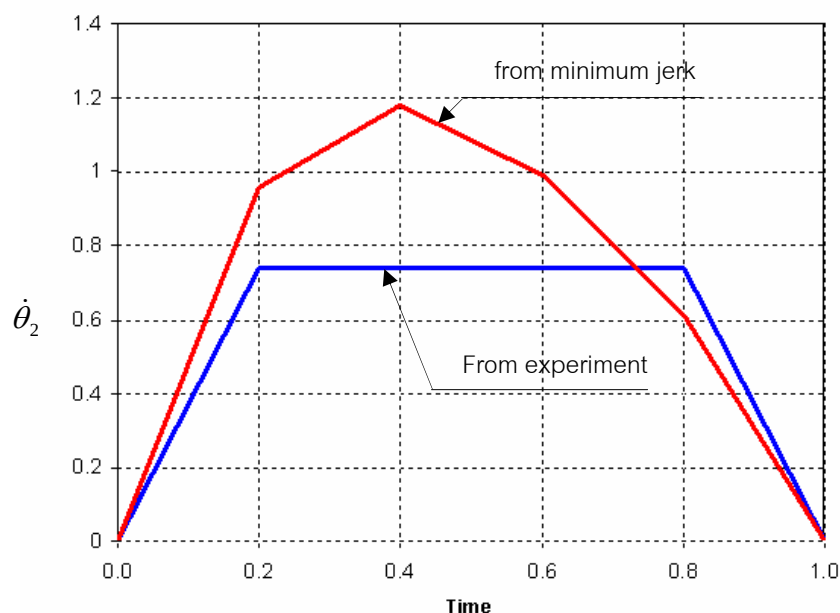
จากภาพประกอบ 42 แสดงผลลัพธ์การทดสอบหาความเหมาะสมสูงสุดในระบบพลศาสตร์ โดยวิธีความนึ่มวลที่สุดเปรียบเทียบกับผลการทดลอง ได้ผลดังนี้

1. วิธีความนึ่มวลที่สุด การเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงมุมของแกนที่ 1 แขนกลจะเริ่มเคลื่อนที่ออกอย่างช้าๆ และจะเพิ่มความเร็วเชิงมุมเร็วขึ้นตามลำดับ และจะค่อยๆ ลดความเร็วเชิงมุมลงอย่างช้าๆ จนหยุดนิ่งเมื่อถึงปลายทางของการเคลื่อนที่

2. ผลการทดลอง แขนกลมีการเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงมุมจากตำแหน่งเริ่มต้นจนถึงตำแหน่งสุดท้ายด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ตลอดระยะเวลาการเคลื่อนที่

3. วิธีความนึ่มวลที่สุด การเปลี่ยนแปลงการเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงมุมของแกนที่ 1 มีความนึ่มวลต่อเนื่องตลอดเวลา ต่างจากผลการทดลองที่แขนกล 1 ออกตัวอย่างรวดเร็วและหยุดการเคลื่อนที่อย่างกะทันหัน

4. เงื่อนไขทั้ง 2 กรณี กำหนดให้เวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed End Time and Fixed End Points) โดยเวลาเริ่มต้น $t_0 = 0$ และเวลาสุดท้าย $t_f = 1$ วินาที และกำหนดเงื่อนไขขอบเขต 2 ตำแหน่ง (Two Point Boundary Value Condition) ให้แขนกล 1 เคลื่อนที่ทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม 0.773 เรเดียน แขนกล 2 เคลื่อนที่ขึ้นเป็นมุม 0.743 เรเดียน



ภาพประกอบ 43 กราฟแสดงผลลัพธ์การเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงมุมของแกนที่ 2 ต่อหน่วยเวลา จากวิธีความนึ่มวลที่สุดเปรียบเทียบกับผลการทดลอง

จากภาพประกอบ 43 แสดงผลลัพธ์การทดสอบหาความเหมาะสมสูงสุดในระบบพลศาสตร์ โดยวิธีความนิ่มนวลที่สุดเปรียบเทียบกับผลการทดลอง ได้ผลดังนี้

1. วิธีความนิ่มนวลที่สุด การเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงมุมของแกนที่ 2 แขนกลจะเริ่มเคลื่อนที่ออกอย่างช้าๆ และจะเพิ่มความเร็วเชิงมุมเร็วขึ้นตามลำดับ และจะค่อยๆ ลดความเร็วเชิงมุมลงอย่างช้าๆ จนหยุดนิ่งเมื่อถึงปลายทางการเคลื่อนที่

2. ผลการทดลอง แขนกลมีการเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงมุมจากตำแหน่งเริ่มต้นจนถึงตำแหน่งสุดท้ายด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ตลอดระยะเวลาการเคลื่อนที่

3. วิธีความนิ่มนวลที่สุด การเปลี่ยนแปลงการเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงมุมของแกนที่ 2 มีความนิ่มนวลต่อเนื่องตลอดเวลา ต่างจากผลการทดลองที่แขนกล 2 ออกตัวอย่างรวดเร็วและหยุดการเคลื่อนที่อย่างกะทันหัน

4. เงื่อนไขทั้ง 2 กรณี กำหนดให้เวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed End Time and Fixed End Points) โดยเวลาเริ่มต้น $t_0 = 0$ และเวลาสุดท้าย $t_f = 1$ วินาที และกำหนดเงื่อนไขขอบเขต 2 ตำแหน่ง (Two Point Boundary Value Condition) ให้แขนกล 1 เคลื่อนที่ทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม 0.773 เรเดียน แขนกล 2 เคลื่อนที่ขึ้นเป็นมุม 0.743 เรเดียน

วิเคราะห์ผลการทดสอบ

ผลการทดสอบหาความเหมาะสมสูงสุดโดยวิธีความนิ่มนวลที่สุด โดยกำหนดให้มีเวลาและตำแหน่งที่แน่นอน (Fixed End Time and Fixed End Points) ผลการวิเคราะห์ แขนกลมีการเคลื่อนที่ได้ อย่างนิ่มนวล โดยแขนกลจะเริ่มเคลื่อนที่ออกอย่างช้าๆ และจะเพิ่มความเร็วเชิงมุมเร็วขึ้นตามลำดับ และจะค่อยๆ ลดความเร็วเชิงมุมลงอย่างช้าๆ จนหยุดนิ่งเมื่อถึงปลายทางการเคลื่อนที่ ซึ่งจะแตกต่างกับการใช้โปรแกรมควบคุมหุ่นยนต์ แขนกลมีการเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงมุมจากตำแหน่งเริ่มต้นจนถึงตำแหน่งสุดท้ายด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ตลอดระยะเวลาการเคลื่อนที่ ซึ่งดูได้จากกราฟเปรียบเทียบ

ในส่วนของสมการสามารถกำหนดค่าเริ่มต้นและค่าสุดท้ายให้กับสมการเพื่อให้ได้แรงที่มากกระทำกับระบบได้ในอนาคต และนำผลลัพธ์ที่ได้ไปใช้งานอย่างเหมาะสมสูงสุด ปัญหาในการศึกษาและวิจัยครั้งนี้ คือไม่สามารถนำค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ที่ได้จากการวิเคราะห์ไปทดลองใช้กับหุ่นยนต์ได้ เนื่องจากโปรแกรมที่ใช้ควบคุมหุ่นยนต์ไม่ได้รับการป้อนค่าพารามิเตอร์ใดๆ เข้าไป

บทที่ 5

สรุปและข้อเสนอแนะ

สรุปผลการทดสอบ

จากการศึกษาและวิจัยครั้งนี้แสดงให้เห็นว่า การวิเคราะห์หาค่าผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีความนิ่ม นวลที่สุดตลอดเวลาการทำงาน โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือสำหรับการวิเคราะห์หา ผลลัพธ์ของค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบพลศาสตร์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น โดยใช้หุ่นยนต์ของบริษัท ESHED ROBOTEC รุ่น SCORBOT-ER9 เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการวิจัยได้ใช้โปรแกรม คอมพิวเตอร์แมทแล็บ และซอฟต์แวร์ระเบียบวิธีทางตัวเลขที่มีชื่อว่า Nonlinear Programming ที่ พัฒนาโดย พันเอก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทวิวัชร วีระเกล้า มาเป็นเครื่องมือช่วยวิเคราะห์และ แสดงผลในลักษณะของกราฟ

ผลลัพธ์ที่ได้จากการศึกษาและวิจัยตามวัตถุประสงค์ ทำให้ได้ค่าความเหมาะสมสูงสุด คือ แขนกลจะเคลื่อนที่ได้ อย่างนิ่มนวล โดยจะเริ่มเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้นอย่างช้าๆและจะเพิ่มความเร็วขึ้น ตามลำดับ พอใกล้ถึงจุดหมายปลายทางแขนกลจะค่อยๆลดความเร็วลงและหยุดนิ่งเมื่อถึงปลายทาง การเคลื่อนที่ ซึ่งแตกต่างจากผลการทดลองที่แขนกลเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ ผลการเปรียบเทียบดู ได้จากบทที่ 4

จากผลลัพธ์ของการวิจัยจะเป็นแนวทางสำหรับการนำไปประยุกต์ใช้กับโปรแกรมควบคุม หุ่นยนต์ เพื่อควบคุมให้หุ่นยนต์เคลื่อนที่ได้ อย่างนิ่มนวล สามารถทำงานที่เกี่ยวข้องกับวัสดุที่เปราะบาง เสียรูปได้ง่าย ออกแรงจับชิ้นงานได้ไม่มากนัก และปัญหาที่มีความใกล้เคียงกันได้ต่อไป

ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

ในการวิจัยขั้นต่อไปควรวิเคราะห์การเคลื่อนที่ให้หมดทุกแกน และคำนึงถึงรูปทรงน้ำหนัก ของแขนกลให้มีความใกล้เคียงกับของจริงให้มากที่สุด รวมถึงการเพิ่มความซับซ้อนของการเคลื่อนที่ หรือจะกำหนดให้แขนกลมีจำนวนองศาอิสระมากขึ้นไป มีความหลากหลายในชนิดของการเคลื่อนที่ ของแขนกล และที่สำคัญควรเลือกหุ่นยนต์ที่มีโปรแกรมควบคุมหุ่นยนต์ยืดหยุ่นพอที่จะยอมให้มีการ บ่อนค่าพารามิเตอร์ต่างๆที่ได้จากการทดสอบในทางทฤษฎีเข้าไปทดลอง เพื่อที่จะได้เห็นผลการ ทดลองที่ชัดเจนมากขึ้น

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- กนต์ธร ชำนิประศาสน์; และ ไชยภักดิ์ แห้งการ. (2550). *คู่มือการใช้ MATLAB สำหรับงานวิศวกรรม*. นครราชสีมา: มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี สำนักวิศวกรรมศาสตร์.
- จำนงค์ ผายสระน้อย. (2551). *การศึกษาผลลัพธ์ที่ได้จากการรวมความถี่และพลังงานน้อยที่สุดของระบบพลศาสตร์เชิงเส้น*. วิทยานิพนธ์ วศ.ม. (วิศวกรรมเครื่องกล). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- ธัญชัย สลักดีปรีดา. (2543). *การหาค่าเหมาะสมที่สุด: หลักการพื้นฐานและขั้นตอนวิธีการ*. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์.
- วิรัช สิริทรัพย์ไพบูลย์. (2551). *โปรแกรมเชื่อมต่อกับผู้ใช้ทางกราฟิกในการหาสมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ด้วยโปรแกรม MATLAB*. วิทยานิพนธ์ วศ.ม. (วิศวกรรมเครื่องกล). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- สุธรรม ศรีเกษม; เมทินี ทองชัยกุล, น.ต.; และ สง่า ศรีสุขปรีดา, ร.อ.(ม.ป.ป.). *MATLAB เพื่อการแก้ปัญหาทางวิศวกรรม*. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรังสิต.
- HG. Bock. (1978). *Numerical Solution of Nonlinear Multipoint Boundary Value Problems with Application to Optimal Control*, ZAMM pp.58.
- JJ. Craig. (1986). *Introduction to Robotic: Mechanics and Control*. Addison-Wesley Publishing Company.
- Kirk DE. (1970). *Optimal Control Theory An Introduction*. Prentice Hall Electrical Engineering Series. Englewood Cliffs. New Jersey.
- Lung-Wen Tsai. (n.d.). *Robot Analysis : the mechanics of series and parallel manipulators*. John Wiley & Sons.
- Mark W. Spong; Seth Hutchinson; & M. Vidyasagar. (n.d.). *Robot Modeling and Control*. John Wiley & Sons, Inc.
- M.C. Renolds; & P.H Mecki. (n.d.). *Composite Optimization Scheme for Time Optimal Control*.
- P. Piromsopa; et al. (2005). *A Study on the Comparison between Minimum Jerk and Minimum Energy of Dynamics Systems*. Proceeding of the 2005 International Conference on Computational Intelligence for Modeling. Control and Automation. Web Technology and Internet Commerce.

- Sunil K. Agrawal; & B.C. Fabien. (1999). *Optimization of Dynamic Systems*. Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Sunil K. Agrawal, T. Veeraklaew; & B.C. Fabien. (1998). Direct and Indirect Optimization of Linear Time-Invariant Dynamic Systems Using Transformations. *Optimal Control Application and Method*. 19: 393-410.
- Sunil K. Agrawal, T. Veeraklaew; & B.C. Fabien. (2001). New Computational Framework for Trajectory Optimization of Higher-Order Dynamic Systems. *AIAA Journal of Guidance Control and Dynamic*. 24(2): 228-236.
- Sunil K. Agrawal; & T. Veeraklaew. (1998). *Dynamic Optimization of Linear Systems with Constraint Using Higher-Order Method with Penalty Function*. WCCM Fourth World Congress on Computational Mechanics. Vol.1.
- TR. Kane; & DA. Levinson. (1985). *Dynamics: Theory and Applications*. McGraw-Hill.
- T. Veeraklaew; & P. Salaluk. (2005). *The Comparison of Using Minimum Energy and Minimum Jerk in Dynamic Systems*. The 19th Conference of Mechanical Engineering Network of Thailand.
- T. Veeraklaew. (2000). *Extensions of Optimization Theory and New Computational Approaches for Higher-order Dynamic systems*. Dissertation. The University of Delaware. USA.
- T. Veeraklaew, N. Phatthana-im; & S. Heama. (2008). *Comparison between Minimum Direct and Indirect Jerks of Linear Dynamic Systems*. Proceeding of world academy of science and Technology. EGYPT.
- User Manual. (1998). *SCORBOT-ER9*. Eshed ROBOTEC.
- WS. Mark. (1989). *Robot Dynamics and Control*. Illinois: University of Illinois at Urbana-Champaign.

ภาคผนวก

ตาราง 10 แสดงผลลัพธ์การเปลี่ยนแปลงระยะจัดเชิงมุมต่อหน่วยเวลาของแกนที่ 1 จากวิธีความโน้มถ่วงที่สุดเปรียบเทียบกับผลการทดลอง

Time (sec)	Minimum Jerk (rad)	Time (sec)	Experiment (rad)
0.0	0.000000000000000	0.0	0.000000000000000
0.2	0.06511420999375	0.2	0.15460126514165
0.4	0.24266641803685	0.4	0.30920253028331
0.6	0.47866409021302	0.6	0.46380379542497
0.8	0.68762666352317	0.8	0.61840506056663
1.0	0.77300632570829	1.0	0.77300632570829

ตาราง 11 แสดงผลลัพธ์การเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงมุมต่อหน่วยเวลาของแกนที่ 1 จากวิธีความโน้มถ่วงที่สุดเปรียบเทียบกับผลการทดลอง

Time (sec)	Minimum Jerk (rad/sec)	Time (sec)	Experiment (rad/sec)
0.0	0.000000000000000	0.0	0.000000000000000
0.2	0.65068271977565	0.2	0.77300632570829
0.4	1.12130818135057	0.4	0.77300632570829
0.6	1.23150345667575	0.6	0.77300632570829
0.8	0.84920138568605	0.8	0.77300632570829
1.0	0.000000000000000	1.0	0.000000000000000

ตาราง 12 แสดงผลลัพธ์การเปลี่ยนแปลงแรงบิดต่อหน่วยเวลาของแกนที่ 1 จากวิธีความโน้มถ่วงที่สุด

Time (sec)	Minimum Jerk (N-m)
0.0	11.8452374671896
0.2	8.94501815313756
0.4	3.01723530883739
0.6	-3.09814719510726
0.8	-9.18291718173185
1.0	-12.1798681946599

ตาราง 13 แสดงผลลัพธ์การเปลี่ยนแปลงระยะจัดเชิงมุมต่อหน่วยเวลาของแกนที่ 2 จากวิธีความโน้มถ่วงที่สุดเปรียบเทียบกับผลการทดลอง

Time (sec)	Minimum Jerk (rad)	Time (sec)	Experiment (rad)
0.0	0.000000000000000	0.0	0.000000000000000
0.2	0.09565875105668	0.2	0.14856242592975
0.4	0.30823379782892	0.4	0.29712485185951
0.6	0.52367393466962	0.6	0.44568727778927
0.8	0.68239594447239	0.8	0.59424970371903
1.0	0.74281212964879	1.0	0.74281212964879

ตาราง 14 แสดงผลลัพธ์การเปลี่ยนแปลงความเร็วเชิงมุมต่อหน่วยเวลาของแกนที่ 2 จากวิธีความโน้มถ่วงที่สุดเปรียบเทียบกับผลการทดลอง

Time (sec)	Minimum Jerk (rad/sec)	Time (sec)	Experiment (rad/sec)
0.0	0.000000000000000	0.0	0.000000000000000
0.2	0.95846415830684	0.2	0.74281212964879
0.4	1.17842720336548	0.4	0.74281212964879
0.6	0.99074770443269	0.6	0.74281212964879
0.8	0.60915859650979	0.8	0.74281212964879
1.0	0.000000000000000	1.0	0.000000000000000

ตาราง 15 แสดงผลลัพธ์การเปลี่ยนแปลงแรงบิดต่อหน่วยเวลาของแกนที่ 2 จากวิธีความโน้มถ่วงที่สุด

Time (sec)	Minimum Jerk (N-m)
0.0	11.3324072932196
0.2	8.83874739083219
0.4	4.15267821148332
0.6	0.00308840211009
0.8	-3.86738861452730
1.0	-5.78068509875293

อภิธานศัพท์

อภิธานศัพท์

Algebraic Equation

สมการทางพีชคณิต

Boundary Condition

เงื่อนไขขอบเขต

Calculus of Variation

แคลคูลัสความแปรปรวน

Constrains

เงื่อนไขบังคับ

Continuous Derivatives

อนุพันธ์ต่อเนื่อง

Continuous Time

เวลาต่อเนื่อง

Combining

การรวม

Dynamics Optimization Problem

ปัญหาการหาค่าความเหมาะสมสูงสุดของระบบควบคุมทางพลศาสตร์

Differential Equation

แบ่งแยกกันของฟังก์ชัน

Direct Method

วิธีตรง

Dynamics Constraints

ขอบเขตทางพลศาสตร์

Dynamics Equation

สมการทางพลศาสตร์

Dynamics System

ระบบพลศาสตร์

Displacement

การกระจัด

Equality Constraints

เงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการ

Extremize

คำตอบที่เหมาะสมที่สุด

Extremum

ค่าที่เหมาะสมที่สุด

Final Time

เวลาสุดท้าย

First Order Condition

เงื่อนไขอันดับหนึ่ง

First Order Condition

รูปแบบของอันดับหนึ่ง

Independent Variable

ตัวแปรอิสระ

Inequality Constraints

เงื่อนไขบังคับที่เป็นอสมการ

Initial Condition

เงื่อนไขเริ่มต้น

Initial Guess

ค่าเริ่มต้น

Initial Time

เวลาเริ่มต้น

Interval

ช่วงเวลา

Jacobian Matrix

จาโคเบียนเมตริกซ์

Jerk

ความหยาบกระด้างหรือความนิ่มนวลน้อยที่สุด

Lagrange Method

วิธีของลากรางจ์

Lagrange Multipliers

ตัวคูณลากรางจ์

Linear Dynamics

พลศาสตร์ที่เป็นเชิงเส้น

Maximum Trajectory

คำตอบต่อเนื่องที่บอกค่าสูงสุด

Minimum Trajectory

คำตอบต่อเนื่องที่บอกค่าต่ำสุด

Minimum Direct Jerk

ความนิ่มนวลที่สุดทางตรง

Minimum Indirect Jerk

ความนิ่มนวลที่สุดทางอ้อม

Minimum Principle

หลักการหาค่าที่ต่ำที่สุด

Necessary Conditions

เงื่อนไขของค่าต่ำสุดและสูงสุด

Nonlinear Dynamics

ระบบไม่ใช่เชิงเส้น

Numerical Method

ระเบียบวิธีการเชิงตัวเลข

Objective

เป้าหมายที่ต้องการ

Objective Function

ฟังก์ชันเป้าหมายที่ต้องการ

Optimality Conditions

สภาวะที่เหมาะสมที่สุด

Optimization

ความเหมาะสมสูงสุด

Optimum

ค่าที่เหมาะสมที่สุด

Sufficient Conditions

สภาวะที่เพียงพอ

Second Variation

ความแปรปรวนที่สอง

State Equation

สมการแสดงสถานะ

Terminal Conditions

สภาวะที่ปลายทาง

Time Variant

ฟังก์ชันของเวลา

Time Derivative

อนุพันธ์ของเวลา

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นายมนูญ บุญยง
วันเดือนปีเกิด	14 มีนาคม 2516
สถานที่เกิด	อ.ศีขรภูมิ จ.สุรินทร์
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	906 ถ.สุรนารายณ์ ต.ในเมือง อ.เมือง จ.นครราชสีมา 30000
ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน	อาจารย์ ระดับ 7
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	อาจารย์ประจำสาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์และสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน อ.เมือง จ.นครราชสีมา

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2529	ประถมศึกษา จาก โรงเรียนบ้านสวาย อ.ศีขรภูมิ จ.สุรินทร์
พ.ศ. 2532	มัธยมศึกษาตอนต้น จาก โรงเรียนแดดสีวิทยา อ.ศีขรภูมิ จ.สุรินทร์
พ.ศ. 2535	ประกาศนียบัตรวิชาชีพ (ช่างยนต์) จากวิทยาลัยเทคนิคสุรินทร์ อ.เมือง จ.สุรินทร์
พ.ศ. 2537	ประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง (ช่างจักรกลหนัก) จาก สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขตภาคตะวันออกเฉียงเหนือ อ.เมือง จ.นครราชสีมา
พ.ศ. 2539	อุดมศึกษา วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต (วิศวกรรมเครื่องกล) จาก ศูนย์กลางสถาบันเทคโนโลยีราชมงคล อ.ธัญบุรี จ.ปทุมธานี
พ.ศ. 2552	บัณฑิตศึกษา วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมเครื่องกล) จาก มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ อ.องครักษ์ จ.นครนายก