การแก้ปัญหาด้วยวิธีตรงของระบบควบคุมทางพลศาสตร์ที่เหมาะสมด้วยวิธีการแก้ปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น ร่วมกับวิธีของรุงเง - กุตตา

ปริญญานิพนธ์

ของ

อัมราพร บุญประทะทอง

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

มีนาคม 2547

การแก้ปัญหาด้วยวิธีตรงของระบบควบคุมทางพลศาสตร์ที่เหมาะสมด้วยวิธีการ
แก้ปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น ร่วมกับวิธีของรุงเง - กุตตา

บทคัดย่อ

ของ

อัมราพร บุญประทะทอง

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
มีนาคม 2547

อัมราพร บุญประทะทอง (2547). *การแก้ปัญหาด้วยวิธีตรงของระบบควบคุมทางพลศาสตร์ที่เหมาะสมด้วยวิธีการแก้ปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น ร่วมกับวิธีของรุงเง-กุตตา.* ปริญญานิพนธ์ วศ.ม.(วิศวกรรมเครื่องกล). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม: พันตรี ดร. ทวิวัชร วีระแกล้ว, ดร. สโรช ไทรเมฆ.

งานวิจัยนี้เป็นงานวิจัยที่ต้องการหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมพลศาสตร์ (Dynamic optimal control) ที่มีรูปแบบของปัญหาเป็นสมการพีชคณิตเชิงอนุพันธ์ (Differential algebraic equation) ซึ่งการแก้ปัญหานั้นต้องใช้วิธีการแก้ปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) เท่านั้น แต่เนื่องจากการแก้ปัญหาโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) เป็นการแก้ปัญหาของพารามิเตอร์ (Parameters) ที่ไม่ขึ้นกับเวลา ดังนั้นจึงต้องทำการแปลงปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมพลศาตร์ (Dynamic optimal control) ให้อยู่ในรูปของพารามิเตอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา (Parameterized) เสียก่อน โดยนำหลักการของคอลโลเคชัน (Collocation) ในระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical method) เข้ามาช่วยในการแปลง หลักการดังกล่าวมีวิธีแก้ปัญหาหลายวิธีด้วยกัน ซึ่งในงานวิจัยนี้จะนำวิธีของการหาค่าอินติเกรทของ รุงเง – กุตตา (Runge – Kutta) มาใช้ เพื่อลดจำนวนของตัวแปรโดยเฉพาะตัวแปรสเตท (States) และ โคสเตท (Costates) วิธีคอลโลเคชันนี้จะแปลงสเตท (States) โคสเตท (Costates) และเงื่อนไขต่างๆ ที่อยู่ในรูปของปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมพลศาสตร์ (Dynamic optimal control problem) ให้เป็นปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมสถิตยศาสตร์ (Static optimal control problem) และสามารถแก้ปัญหาต่อไปด้วยหลักการแก้ปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) ได้ ซึ่งกระบวนการหาคำตอบทั้งหมดใช้หลักการของวิธีตรง (Direct approach) ซึ่งทำได้โดยสมมุติค่าเริ่มต้นขึ้นมาก่อนโดยไม่ต้องผ่านหลักการทางคณิตศาสตร์อื่นๆ และดำเนินการหาคำตอบที่ตรงตามเงื่อนไขทั้งหมดของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) ไปเรื่อยๆ ตามระเบียบวิธีเชิงตัวเลข จนกว่าจะได้คำตอบที่เหมาะสมที่สุด

คำตอบที่ได้จากกระบวนการข้างต้นเมื่อนำมาเปรียบเทียบกับการหาคำตอบด้วยวิธีอ้อม (Indirect approach) แล้ว ปรากฏว่าคำตอบส่วนใหญ่มีความใกล้เคียงกันมาก แม้จะมีความแม่นยำน้อยกว่าแต่ข้อได้เปรียบของวิธีตรง (Direct approach) คือ สามารถหาคำตอบสำหรับบางปัญหาที่ไม่สามารถหาคำตอบด้วยวิธีอ้อม (Indirect approach) ได้ หรือหากต้องการความแม่นยำที่สูงขึ้นก็สามารถนำคำตอบที่ได้จากวิธีตรง (Direct approach) มาใช้เป็นคำตอบเริ่มต้น (Initial guess) ให้กับการหาคำด้วยวิธีอ้อม (Indirect approach) ได้เช่นกัน

The Direct Approach of General Dynamic Opimal Control : Nonlinear Programming and Rung-Kutta Method

AN ABSTRACT

BY

AMARAPORN BOONPRATATONG

Presented in partial fulfillment of the requirements

for the Master of Engineering degree in Mechanical Engineering

at Srinakharinwiroj University

March 2004

Amaraporn Boonpratatong. (2004). *The Direct approach of general dynamic optimal control :nonlinear programming and Runge-Kutta* . Master thesis, M.Eng. (Mechanical Engineering).Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committee : Gen. Dr. Tawiwat Veerakleaw , Dr. Saroj Saimek .

Solving optimal control problems in the way of numerical is very important scheme. However, some methods are hard to implement into computer programming or some require solvers to have the advance knowledge of calculus of variation represented as maximum principle. One of popular numerical method to avoid those problems is the direct transcription method with nonlinear programming. This scheme is good to implement in the programming and also solvers are required only to know some optimization techniques. The purpose of this research is to implement the general-purposes program in MATLAB code to solve all classical cases of optimal control and some realistic problems. Solvers can select many forms of direct transcription. In this research, direct transcription method in the form of Rung-Kutta is used to implement in this general software called the general purposes-program. Also the graphic user interface is provided in the general-purposes program. The selected classical optimal control problems are solved by this program and compare the results from the general purposes-program program with the analytical solutions, and the applications of the practical problems are shown.

The numerical solutions of the optimal solutions show that most numerical solution of state variables are really close to those from analytical results. However, the numerical solutions of control inputs are quietly different from those of analytical solution since they are not confined by the solution of co-state variables or Lagrange multipliers as in the analytical method.

In the application of the general purposes-program, this program perform may not well in some large-scaled nonlinear optimal control problems because the deficiency of the nonlinear programming solver. However, the general purposes program can perform

well in solving small nonlinear optimal control problems in either fixed end time or variable end time optimal control problem.

การแก้ปัญหาด้วยวิธีตรงของระบบควบคุมทางพลศาสตร์ที่เหมาะสมด้วยวิธีการ
แก้ปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น ร่วมกับวิธีของรุงเง - กุตตา

ปริญญานิพนธ์

ของ

อัมราพร บุญประทะทอง

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
มีนาคม 2547

ปริญญานิพนธ์

เรื่อง

การแก้ปัญหาด้วยวิธีตรงของระบบควบคุมทางพลศาสตร์ที่
เหมาะสมด้วยวิธีการแก้ปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น ร่วมกับวิธีของรุงเง-กุตตา.

ของ

นางสาว อัมราพร บุญประทะทอง

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

…………………………………………………………… คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

(รองศาสตราจารย์ ดร. นภาภรณ์ หะวานนท์)

วันที่ …….. เดือน …………..… พ.ศ. 2547

คณะกรรมการสอบปริญญานิพนธ์

…………………………………………………………….. ประธาน

(พันตรี ดร. ทวิวัขร วีระแกล้ว)

…………………………………………………………….. กรรมการ

(ดร. สโรช ไทรเมฆ)

……………………………………………………………กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(พันเอก สุภโชค สัมปัตตะวณิช)

……………………………………………………………กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม

(ดร. สินชัย ชินวรรัตน์)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ สำเร็จได้ด้วยความกรุณาของ พันตรี ดร. ทววัชร วีระแกล้ว ประธานกรรมการควบคุมการทำปริญญานิพนธ์ และ ดร. สโรช โทรเมฆ กรรมการควบคุมการทำปริญญานิพนธ์ ที่กรุณาให้คำปรึกษา แนะนำ ให้ความช่วยเหลือ และแก้ไขความบกพร่อง อีกทั้งให้กำลังใจขณะดำเนินการทำปริญญานิพนธ์ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงตลอดไป

ขอขอบพระคุณ พันเอกสุภโชค สัมปัตตะวณิช รองศาสตราจารย์ วิชิต บัวแก้ว ดร.พิชัย อัษฎมงคล พันตรี ดร. อโณทัย สุขแสงพนมรุ้ง และ ดร.สินชัย ชินวรรัตน์ ที่ช่วยตรวจแก้ปริญญานิพนธ์ และให้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ต่องานวิจัย

ขอขอบพระคุณ บริษัท เอส คอมเพรสแอร์ จำกัด ที่ให้โอกาสในการศึกษาหาความรู้เพิ่มเติมแก่ผู้วิจัย

ขอขอบคุณบิดา มารดา ครอบครัวชัยมงคล และ ครอบครัวบุณยะประภัศร ในความสนับสนุนช่วยเหลือและให้กำลังใจ เป็นอย่างดีตลอดเวลา

ขอขอบคุณเพื่อนร่วมชั้น โครงการความร่วมมือหลักสูตรปริญญาโท มศว. และ รร. จปร.สาขาวิศวกรรมเครื่องกล รุ่น1 ทุกท่านที่ให้ความช่วยเหลือและเป็นกำลังใจ

อัมราพร บุญประทะทอง

สารบัญ

สารบัญ(ต่อ)

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ หน้า

บัญชีภาพประกอบ(ต่อ)

ภาพประกอบ หน้า

บัญชีภาพประกอบ (ต่อ)

ภาพประกอบ หน้า

บัญชีตาราง

ตาราง หน้า

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและสำคัญของปัญหา

การหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุดสำหรับระบบควบคุมทางพลศาสตร์ (Optimal control) พบเห็นได้ทั่วไปในชีวิตประจำวันของคนเรา โดยเฉพาะการควบคุมการเคลื่อนไหวของร่างกาย เช่น สมองของคนสามารถคาดคะเนได้โดยอัตโนมัติว่าควรใช้แรงเท่าใดในการเตะลูกฟุตบอลให้กลิ้งไปถึงเป้าหมายระยะต่างๆ ตามความต้องการ (Objective) รวมไปถึงในอุตสาหกรรมการผลิต หรือแม้กระทั่งในระบบเศรษฐศาสตร์ เป้าหมายที่อาจเปลี่ยนไปตามระยะเวลาและสถานการณ์ ทำให้ต้องมีการเปลี่ยนแปลงการควบคุมเพื่อให้ได้ภาวะที่ เหมาะสมที่สุดที่จะบรรลุเป้าหมายในขณะนั้น การหาคำตอบสำหรับปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดสำหรับระบบควบคุม (Optimal control problem) โดยทั่วไปจำเป็นต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical method) ในการคำนวณ ซึ่งในปัจจุบันมีโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์มากมายที่เอื้ออำนวยในการคำนวณดังกล่าวพร้อมกับความสามารถพิเศษด้านการคำนวณทางวิศวกรรมด้วย เช่น MATLAB Mathematica เป็นต้น งานวิจัยนี้จึงนำโปรแกรม MATLAB มาใช้หาคำตอบดังกล่าว แต่เนื่องจากค่าที่ต้องกำหนดให้โปรแกรมในแต่ละปัญหานั้นแตกต่างกันไป และค่อนข้างซับซ้อน อาจเป็นอุปสรรคให้การหาคำตอบเป็นไปอย่างล่าช้าและเกิดความผิดพลาดได้ง่าย จึงเพิ่มการพัฒนาโปรแกรมให้ติดต่อกับผู้ใช้ได้โดยผ่านหน้าจอรับข้อมูล (Graphic user interface) พร้อมกับแสดงผลการวิเคราะห์ออกมาในรูปของกราฟแสดงผล ซึ่งเข้าใจง่ายและยังสะดวกแก่ผู้ใช้ที่ไม่มีความรู้ทางด้านวิศวกรรมมาก่อนอีกด้วย

ในการหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมทางพลศาสตร์ โดยทั่วไปจำเป็นต้องกำหนดเป้าหมายที่ต้องการ (Objective) ให้ระบบเสียก่อน และรวบรวมเงื่อนไขต่างๆ ของระบบในสภาวะหรือ ณ เวลาที่สนใจ เช่น ณ เวลาเริ่มต้น และ ณ เวลาสุดท้าย เพื่อนำมาพิจารณาร่วมกันในการหาคำตอบ ซึ่งวิธีการหาคำตอบสามารถทำได้หลายวิธี ขึ้นอยู่กับรูปแบบของปัญหาว่าจะเหมาะสมกับวิธีใด แต่โดยทั่วไปจะนำหลักทางคณิตศาสตร์ในการหาค่าเหมาะสมที่สุดมาใช้ร่วมกับการปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งจากการศึกษางานวิจัยต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องพบว่า มีการนำการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข มาใช้กันอย่างหลากหลายตามความเหมาะสมของแต่ละงานวิจัย แต่ปัจจัยที่สำคัญที่มักจะเป็นปัญหาสำหรับความแม่นยำและความรวดเร็วในการหาคำตอบดังกล่าวคือ ค่าเริ่มต้นที่กำหนดให้ในการคำนวณ ดังนั้นผู้วิจัยจึงนำหลักการหาค่าอินติเกรทด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของรุงเง-กุตตา (Rung-Kutta) มาใช้เพื่อลดผลกระทบของ

ปัญหาดังกล่าว เนื่องจากวิธีนี้เป็นการอินติเกรทแบบไปข้างหน้า (Forward) ซึ่งคำนวณหาค่าเริ่มต้นได้เอง ซึ่งผู้วิจัยตั้งสมมุติฐานว่าจะส่งผลให้การคำนวณมีความแม่นยำและรวดเร็วมากขึ้น

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

1.2.1 เพื่อสร้างโปรแกรมคำนวณสำหรับแก้ปัญหาระบบควบคุมทางพลศาสตร์ที่เหมาะสมโดยวิธีตรง(Direct Method)

1.2.2 เพื่อศึกษาแนวทางที่จะลดปัญหาในการกำหนดค่าเริ่มต้น(Initial guesses) ซึ่งส่งผลโดยตรงต่อระยะเวลาที่ใช้ในการหาคำตอบ รวมทั้งโอกาสที่จะหาคำตอบได้

1.3 ขอบเขตของโครงการวิจัย

1.3.1 ใช้วิธีของรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta) ในการอินติเกรทหาค่าของสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ต่างๆ

1.3.2 ใช้วิธีการแก้ปัญหาโปรแกรมของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) ในการหาค่าเหมาะสมที่สุด

1.3.3 เขียนโปรแกรมคำนวณที่ง่ายสำหรับผู้ใช้งาน โดยใช้หน้าจอรับข้อมูลจากผู้ใช้ (Graphic user interface) ในโปรแกรม MATLAB

1.4 วิธีดำเนินการวิจัย

1.4.1 ศึกษาทฤษฎีการหาคำตอบที่เหมาะสมของระบบควบคุมทางพลศาสตร์ โดยวิธีการตรง (Direct method)

1.4.2 ศึกษาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับหาคำตอบของการอินติเกรทของรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta)

1.4.3 ศึกษาวิธีการแก้ปัญหาของระบบสมการด้วยวิธีการแก้ปัญหาของโปรแกรมแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear programming)

1.4.4 ศึกษาหลักการของโปรแกรม Matlab ทั้งในส่วนการคำนวณและการสร้างหน้าจอรับข้อมูลจากผู้ใช้ (Graphic user interface)

1.4.5 สร้างโปรแกรมคำนวณสำหรับหาคำตอบภายใต้ทฤษฎีในข้อ 1-3 และเชื่อมต่อโปรแกรม การคำนวณกับหน้าจอรับข้อมูล (GUI)

1.4.6 เลือกปัญหาพื้นฐานที่สามารถหาคำตอบได้ด้วยวิธีการวิเคราะห์และคำนวณหาคำตอบเก็บไว้

1.4.7 ทดลองโปรแกรมกับปัญหาเดียวกับในข้อ 6 และนำคำตอบที่ได้มาเปรียบเทียบกัน ปรับปรุงความแม่นยำของโปรแกรมและทดลองเปรียบเทียบซ้ำ

1.4.8 สรุปผลการทำงานของโปรแกรม ความถูกต้องแม่นยำ ความรวดเร็วในการคำนวณ ความสะดวกในการใช้งาน และจัดทำรายงาน

1.5 แผนการดำเนินงานตลอดโครงการวิจัย (ให้ระบุขั้นตอนโดยละเอียด)

ลำดับ	รายการ	เดือน (พ.ศ. 2546-2547)													
		ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.
1	ศึกษาทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง	●	●	●	●	●	●	●	●	●					
2	สร้างโปรแกรม								●	●	●	●			
3	เลือกปัญหาพื้นฐานสำหรับทำการทดสอบโปรแกรม ทำการคำนวณและเก็บค่าไว้										●	●	●		
4	ทดลองใช้โปรแกรมแก้ปัญหาเดียวกันกับข้อ 3. และนำคำตอบที่ได้มาเปรียบเทียบกัน											●	●		
5	ปรับปรุงความแม่นยำของโปรแกรมและทดลองเปรียบเทียบซ้ำ													●	
6	สรุปผลการทำงานของโปรแกรม และจัดทำรายงาน														●

1.6 งบประมาณของโครงการวิจัย

7.1 ค่าเอกสาร , แหล่งข้อมูล	3,000	บาท
7.2 ค่าเดินทาง	2,000	บาท
7.3 ค่าจัดทำรายงาน	2,000	บาท

1.7 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับและหน่วยงานที่นำผลการวิจัยไปใช้ประโยชน์

ได้โปรแกรมสำหรับวิเคราะห์หาคำตอบที่เหมาะสมที่สุดสำหรับระบบควบคุมพลศาสตร์ ซึ่งสามารถลดปัญหาของค่าเริ่มต้น (Initial guesses) หรือนำมาเป็นค่าเริ่มต้นที่ดีของการหาคำตอบในวิธีทางอ้อม (Indirect method) ได้ นำมาใช้เพื่อส่งเสริมการศึกษาในทางวิศวกรรม ซึ่งสามารถเผยแพร่และพัฒนาต่อไปเพื่อให้สอดคล้องกับแนวทางการศึกษาในกรณีต่างๆได้อย่างอิสระ เป็นประ โยชน์ต่อหน่วยงานทางการศึกษาที่เกี่ยวข้องทุกหน่วยงาน และสามารถร่วมกันพัฒนาโปรแกรมให้มีความสะดวก แม่นยำมากขึ้น

บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 บทปริทัศน์วรรณกรรม (Literature Review)

Eric Neavdal.[22] ศึกษา "การแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของการควบคุมแบบต่อเนื่องด้วย spreadsheet " (Solving continuous time optimal control problems with a spreadsheet) สร้างรูปแบบการคำนวณ สำหรับแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของการควบคุมแบบต่อเนื่อง (Continuous time optimal control) ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขวิธีของรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta) ประกอบกับวิธีแก้ปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) ซึ่งคำนวณบน สเปรดชีท (Spreadsheet) ใน Microsoft excel เหมาะสำหรับผู้ใช้ที่เข้าใจการทำงานในสเปรดชีท (Spreadsheet) ได้ดีกว่าอัลกอริทึม (Algorithm) การใช้งานทำได้โดยกำหนดค่าต่างๆ ลงในสเปรดชีท (Spreadsheet) ที่มีสูตรการคำนวณสำหรับปัญหาแต่ละกรณี ซึ่งผู้ใช้ต้องเลือกประเภทการคำนวณให้เหมาะสมกับปัญหาที่นำมาใช้ และเน้นทำการทดสอบปัญหาทางเศรษฐศาสตร์ ผลที่ได้คือ โปรแกรมสามารถใช้แก้ปัญหาทางการหาค่าสูงสุดของระบบควบคุม (Optimal control) ได้อย่างหลากหลายและแม่นยำ แต่ยังมีความล่าช้าและไม่สะดวกในการกำหนดข้อมูลเริ่มต้น

Arsit Boonyaprapasorn [7] ศึกษา "การแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะสมของระบบควบคุมพลศาสตร์ โดยใช้โปรแกรมคำนวณทางคณิตศาสตร์และ MATLAB" (Solving optimal control problems using mathematical programming and Matlab) สร้างโปรแกรมการคำนวณ หาคำตอบของปัญหาโดยการคำนวณด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical method) และใช้วิธีของHermit-Simpsonในการแก้ปัญหาการอินติเกรทของสมการเชิงอนุพันธ์ (ODE) ประกอบกับการแก้ปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) การคำนวณใช้โปรแกรม MATLAB ซึ่งมีหน้าจอรับข้อมูลจากผู้ใช้ (Graphic user interface) และเน้นทำการทดสอบกับระบบทางวิศวกรรม ผลที่ได้คือ โปรแกรมสามารถแก้ปัญหาทาง การหาค่าสูงสุดของระบบควบคุม (Optimal control) ได้อย่างหลากหลาย และค่อนข้างแม่นยำ แต่ยังมีปัญหาสำหรับปัญหาบางประเภทเพราะใช้เวลาในการหาคำตอบนานเกินไป

TTI Gmbh[29] ศึกษา "GESOP การแสดงกราฟฟิกสำหรับจำลองเหตุการณ์และหาค่าที่เหมาะสมที่สุด" (Graphical environment for simulation and optimization) ออกแบบซอฟแวร์สำหรับการวิเคราะห์ระบบทางพลศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Ordinary nonlinear differential equations) และเงื่อนไขต่างๆของระบบ โดยมีหน้าจอรับข้อมูลจากผู้ใช้ (Graphic user interface) ซอฟแวร์จะสร้างข้อมูลโครงสร้างเบื้องต้นของแนวการเคลื่อนที่และ

นำมาหาค่าที่เหมาะสมที่สุดเพื่อนำค่าที่ได้ไปปรับปรุงแนวการเคลื่อนที่นั้นอีกครั้ง ก่อนจะแสดงผลออกมาเป็นภาพจำลองเหตุการณ์ สิ่งที่ผู้ใช้ต้องกำหนดให้โปรแกรมคือ เงื่อนไขต่างๆของระบบและคอสฟังชันนอล (Cost functional) เท่านั้น และสามารถเลือกรูปแบบการแก้ปัญหาได้ 4 รูปแบบคือ ไดเร็คมัลติเพิลชูตติ้ง (Direct multiple shooting) ไดเร็คคอลโลเคชัน (Direct collocation) ไฮบริดออบติไมเซอร์ (Hybrid optimizer) และสปลาซโซลเวอร์ (Sparse solver) ผลที่ได้คือ โปรแกรมใช้งานได้สะดวกและให้คำตอบที่เข้าใจง่าย แต่ในปัญหาบางประเภทยังใช้เวลาหาคำตอบนานเกินไป

TTI Gmbh[28] ศึกษา “ASTOS ซอฟแวร์สำหรับหาแนวการเคลื่อนที่ที่เหมาะสมที่สุดของอากาศยาน” (Aerospace trajectory optimization software) ออกแบบซอฟแวร์สำหรับจำลองแนวการเคลื่อนและหาค่าที่เหมาะสมที่สุดในการปล่อย การลงจอด และวงโคจรของอากาศยาน ซึ่งเกิดจากการนำฐานข้อมูลของอากาศยานทั้งหมดมาใช้ร่วมกับซอฟแวร์สำหรับหาค่าเหมาะสมที่สุด (GESOP) มีหน้าจอรับข้อมูลจากผู้ใช้ (Graphic user interface) ซึ่งผู้ใช้สามารถเลือกโครงสร้างตามรายการที่มีในซอฟแวร์หรือถ่ายโอนข้อมูลโครงสร้างจากไฟล์ โปรแกรมสามารถกำหนดคุณสมบัติและสมการที่สำคัญของระบบนั้นๆ พร้อมทั้งตรวจเช็คความสอดคล้องของข้อมูลได้โดยอัตโนมัติ โดยไม่จำเป็นต้องรับคำสั่งจากผู้ใช้เพิ่มเติมอีก ผลที่ได้คือ โปรแกรมใช้งานได้สะดวกและให้คำตอบที่เข้าใจง่าย แต่ในปัญหาบางประเภทยังหาคำตอบไม่ได้

J.T. Betts [5] ศึกษา “ลักษณะการลู่เข้าหาคำตอบของฟังก์ชั่นไม่ต่อเนื่องที่ไม่สามารถหาคำตอบได้ด้วยวิธีของรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta) ในปัญหาการควบคุมเพื่อให้ได้ค่าที่เหมาะสมที่สุด” (Convergence of nonconvergent IRK discretizations of optimal control problems) เปรียบเทียบผลการหาคำตอบของค่าที่เหมาะสมที่สุดของระบบพลศาสตร์ เมื่อใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบ แทรปิซอยดอล (Trapezoidal) กับการใช้สูตรของ รุงเง-กุตตา (Runge-Kutta) ในการหาค่าอินติเกรทโดยวิธีแรกใช้ซอฟแวร์ของ SOCS (Sparse optimal control software) ของบริษัท Boeing และวิธีที่สองใช้สูตรของ รุงเง-กุตตา (Runge-Kutta) ให้สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) เงื่อนไขของการวิเคราะห์เปรียบเทียบคือ แนวโน้มการลู่เข้าหาคำตอบ (Converge) และโอกาสที่จะหาคำตอบได้ของแต่ละวิธี ผลที่ได้คือวิธีแทรบปิซอยดอล (Trapezoidal) จะให้คำตอบที่ใกล้เคียงและใช้เวลาสั้นกว่า วิธีของรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta)

2.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ระบบพลศาสตร์ (Dynamic system) ในทางวิศวกรรมส่วนใหญ่จะแสดงสมการของระบบอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์(Differential equations) เช่น ในการเคลื่อนที่ของอนุภาคเป็นเส้นตรง โดยมีแรงภายนอกกระทำต่ออนุภาค มีสมการการเคลื่อนที่เป็น $\ddot{x} = u$ โดยที่ x แทนตำแหน่งในการเคลื่อนที่ของอนุภาค และ u แทนแรงภายนอกที่กระทำ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งได้สองสมการคือ

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad (2.1)$$

$$\dot{x}_2 = u \qquad (2.2)$$

โดยที่ x_2 คือ ความเร็วของอนุภาค และทั้งค่า x_1 และ x_2 สามารถคำนวณหาได้ถ้าทราบ u หรือ แรงภายนอกที่กระทำ ดังนั้นจากระบบพลศาตร์ทั่วไปเราสามารถสร้างสมการการเคลื่อนที่ของระบบให้อยู่ในรูปของ

$$\dot{x}_i = f_i(x_1,...,x_n,u_1,...,u_m,t), \quad i = 1,...,n$$

โดยที่ t คือ เวลา x_i คือ state variables ของระบบ เช่น เจนเนอรอลไรซ์โคออร์ดิเนต (Generalized coordinates) และ u_i คือ control variable หรือ อินพุทที่ใส่ให้ระบบ และ f_i คือ ฟังชันที่ขึ้นกับตัวแปร x u และ t

จากAscher(1) กล่าวว่าปัญหาของสมการเชิงอนุพันธ์สามารถแบ่งได้สองประเภทคือ 1. ปัญหาแบบเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) 2. ปัญหาของเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) ในระบบทั่วๆไปสภาวะเริ่มต้นหรือเงื่อนไขเริ่มต้นของระบบ มักเป็นค่าที่ทราบอยู่ก่อนแล้ว เช่น “อนุภาคเริ่มเคลื่อนที่จากสภาวะหยุดนิ่ง ที่เวลาเริ่มต้น 0 วินาที” เขียนได้เป็น $x(t_0)=0$ นั่นคือ เงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) สามารถเขียนได้ในรูป

$$\psi[x(t_0), u(t_0), t_0] = \psi_0 \tag{2.3}$$

และเช่นเดียวกันสำหรับสภาวะที่ปลายทาง (Terminal condition)

$$\psi[x(t_f), u(t_f), t_f] = \psi_f \tag{2.4}$$

หรือเขียนได้ในอีกรูปแบบหนึ่งคือ

$$\psi_0 \leq 0 \tag{2.5}$$

และ

$$\psi_f \leq 0 \tag{2.6}$$

นอกจากนี้ยังมีเงื่อนไขขอบเขตของ State variable คือ

$$x_L \leq x(t) \leq x_u \tag{2.7}$$

โดยที่ x_L และ x_u คือ ค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของสเตทวาริเอเบิล (State variable) ตามลำดับ เช่นเดียวกันสำหรับเงื่อนไขขอบเขตของคอนโทรลวารเอเบิล (Control variable)

(2.8)

$$u_L \leq U(t) \leq U_u$$

โดยที่ u_L และ u_u คือค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของ control variable ตามลำดับ

เงื่อนไขสุดท้าย คือ เงื่อนไขบังคับ (Constraints) คือ

$$c_L \leqslant c(x(t),u(t),t) \leqslant c_u \tag{2.9}$$

เงื่อนไขบังคับทางกายภาพนี้หมายถึง ข้อจำกัดทางกายภาพของระบบ เช่น ในแขนกล จะมีชิ้นส่วนบางชิ้นไม่สามารถหมุนรอบตัวได้ถึง 360 องศา อาจหมุนได้เพียง 120 องศา เนื่องจากผลของการหมุนของชิ้นส่วนที่อยู่ใกล้เคียงและตำแหน่งของชิ้นส่วนนั้นๆด้วย

มีหลายวิธีในการกำหนดรูปแบบของปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุม (Optimal control) ขึ้นอยู่กับการตั้งสมมุติฐานเกี่ยวกับ สมรรถนะ เงื่อนไขจำกัดทางกายภาพ (Constraints) หรือปลายทางที่ต้องการให้ไปถึง ซึ่งสมการที่สามารถครอบคลุมปัญหาในความสนใจได้ทั้งหมดคือ

$$J = \Phi(t, x_1, ..., x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_m)dt \tag{2.10}$$

ซึ่งสามารถพิจารณาให้มีค่ามากที่สุด หรือ น้อยที่สุดได้ตามลักษณะของปัญหา โดยทั่วไปจะเรียกสมการเช่นนี้ว่าคอสฟังชันนอล (Cost functional) ซึ่ง สามารถแบ่งพิจารณาได้เป็นสองค่าคือ

a) $\Phi(t, x_1, ..., x_n)_{t_f}$ ขึ้นอยู่กับเวลาที่ปลายและสภาวะของระบบ ณ เวลาดังกล่าว

b) $\int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_m)dt$ เป็นค่าอินติกรัลซึ่งขึ้นกับเวลาเริ่มต้นสเตทวาริเอเบิล (State variable) และคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) ฟังชัน Φ และฟังชัน L เป็นฟังชันของสเตทวาริเอเบิล (State variable) และคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable)

สมการข้างต้นจะเห็นได้ว่า $J[x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_m]$ เป็นฟังชันนอล (Functional) คือ J เป็นฟังชันของหลายตัวแปร โดยที่ตัวแปรแต่ละตัวนั้นก็เป็นฟังชันของตัวแปรอื่นด้วย และเมื่อรวม

คอสฟังชันนอล (Cost functional) เข้ากับเงื่อนไขต่างๆแล้ว เราจะได้โจทย์ปัญหาของการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุม (Optimal control) คือ

$$J = \Phi(t, x_1,\dots,x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_m)dt$$

$$\underline{x} = f(\underline{x}(t),\underline{u}(t),t)$$

$$\psi_0 \overset{=}{\leqslant} 0$$

$$\psi_f \overset{=}{\leqslant} 0$$

$$c_L \leqslant c(x(t),u(t),t) \leqslant c_u$$

$$x_L \leqslant x(t) \leqslant x_u$$

$$u_L \leqslant u(t) \leqslant u_u$$

การเลือกใช้เงื่อนไขที่เป็นสมการ หรือ อสมการนั้นขึ้นอยู่กับปัญหาที่พิจารณา คำตอบที่ต้องการจากปัญหานี้ คือ สเตทวาริเอเบิล (State variable) และ control variable ที่เป็นทั้งคำตอบของคอสฟังชันนอล (คำตอบที่ทำให้มีค่าต่ำที่สุด หรือ สูงที่สุด) และสอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งหมดของปัญหา

2.3 Transcription method **สำหรับปัญหาการหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุดสำหรับระบบควบคุมทางพลศาสตร์** (Dynamic optimal control problem)

จากหลักการของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขอธิบายได้ว่า วิธีทรานสคริปชัน (Transcription) คือการแปลงปัญหาการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมทางพลศาสตร์ไปเป็นโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ด้วยการทำให้ฟังชันนั้นเป็นฟังชันที่มีลักษณะเป็นช่วงๆ (Parameterize) ตามวิธีของการอินติเกรทโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข หรือ เทคนิคของคอลโลเคชัน (Collocation)

เนื่องจาก x(t) และ u(t) เป็นฟังชันต่อเนื่อง ดังนั้นปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบพลศาสตร์สามารถแปลงหรืออธิบายได้ในรูปของอินฟินิต (Infinite) หรือไฟไนต์ไดเมนชันนอลนอน-ลิเนียร์โปรแกรมมิ่ง (Finite dimensional nonlinear programming) และโดยทั่วไปจะใช้วิธีการวนซ้ำของนิวตัน (Newton iterative) ในการหาคำตอบสำหรับปัญหาไดเมนชันนอล (dimensional problem)

ขั้นตอนพื้นฐานของวิธีทรานสคริปชัน (Transcription method) คือ ขั้นแรกแปลงปัญหาทางพลศาสตร์ให้เป็นปัญหาทางสถิตยศาสตร์สำหรับไฟไนต์ไดเมนชันนอลพารามิเตอร์ (Finite -

dimensional parameter) ขั้นที่สองหาคำตอบของปัญหาทางสถิตยศาสตร์ โดยใช้การหาค่าที่เหมาะสมที่สุดของระบบพลศาสตร์ ด้วยวิธีการทำให้เป็นพารามิเตอร์ (Parameter) ซึ่งสามารถเลือกวิธีแก้ปัญหาได้สองแบบคือ วิธีตรง (Direct approach) และ วิธีอ้อม (Indirect approach) ขึ้นอยู่กับปัญหาที่จะนำมาพิจารณา ซึ่งสามารถเปรียบเทียบความแตกต่างได้ดังนี้

วิธีอ้อม (Indirect approach) จะจัดรูปแบบของปัญหาให้อยู่ในรูปของปัญหาที่ประกอบด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial conditions) และเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) หลังจากนั้นใช้แคลคูลัสออฟวาริเอชัน (Calculus of variations) ในการหาเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary conditions) ในการหาคำตอบด้วยวิธีนี้ใช้วิธีของออยเลอร์ลากรางจ์ (Euler Lagrange) หรือวิธีของคุน-ทักเกอร์ (Kuhn-Tucker) ทำให้ได้ระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น(Nonlinear-programming) ซึ่งต้องใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ค่อนข้างซับซ้อนมาช่วยในการแก้ปัญหา ในขณะที่วิธีตรง (Direct method) ไม่จำเป็นต้องใช้วิธีดังกล่าว แต่ใช้วิธีการแปลงปัญหาให้มีลักษณะเป็นช่วงๆ โดยใช้การจัดสเตทอิเควชัน (State equations) เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) และคอนเสตรนท์ (Constraints) ให้อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ทั่วไป (ODE) ต่อจากนั้นใช้วิธีคอลโลเคชัน (Collocation method) แทนความสัมพันธ์ของจุดสำคัญๆ ที่สอดคล้องกับสมการและเงื่อนไขต่างๆ ซึ่งจะทำให้ปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมพลศาสตร์กลายเป็นการแก้ปัญหาของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) ซึ่งสามารถหาคำตอบได้ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical method) และข้อได้เปรียบอีกอย่างของวิธีตรง คือ สามารถหาค่าที่เหมาะสมที่สุดโดยประมาณได้จากค่าเริ่มต้นที่สมมุติขึ้นมาอย่างหยาบๆ ได้

2.3.1 วิธีอ้อม (Indirect method) หรือ Indirect transcript

ใช้หลักการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ของแคลคูลัสออฟวาริเอชัน (Calculus of variations) หลักการของการหาค่าต่ำสุด (Minimum principle) หรือ (Pontryagin’s minimum principle) ในการหาคำตอบของฟังชัน โดยการหาเงื่อนไขของการเป็นค่าต่ำที่สุดหรือสูงที่สุดหรือที่เรียกว่า Necessary conditions ซึ่งทำให้รูปแบบของคอสฟังชันนอล (Cost functional) ถูกเปลี่ยนจากสมการอินติกรัลมาเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งอาจเป็นได้ทั้งสมการอนุพันธ์ที่เป็นเชิงเส้นและที่ไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งในที่นี้ใช้หลักการของแคลคูลัสออฟวาริเอชัน (Calculus of variations) ในการพิจารณาหาค่าต่ำที่สุดหรือสูงที่สุด

2.3.1.1 แคลคูลัสออฟวาริเอชัน(Calculus of variations)

ฟังชันที่จะนำมาใช้หาค่าต่ำที่สุดหรือสูงที่สุดโดยวิธีนี้จะต้องเป็นฟังชันต่อเนื่อง ซึ่งสุดท้ายคำตอบจะเป็นสเกลาร์ วิธีนี้แบ่งการพิจารณาปัญหาเป็น 3 กรณี ได้แก่

2.3.1.1.1 กรณีที่มีเวลาและตำแหน่งปลายทางที่แน่นอน(Fixed end times and end points)

ให้ฟังชัน $F(t, x_1, . . . , x_n, \dot{x}_1, . . . , \dot{x}_n)$เป็นฟังชันนอล (Functional) ที่ต่อเนื่องและสามารถหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอนุพันธ์อันดับสองเทียบกับตัวแปรแต่ละตัวได้ในช่วงของ $t_0 \leqslant t \leqslant t_f$ รวมทั้งมีค่าตรงกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) -
$x_i(t_0) = x_{i1}, x_i(t_f) = x_{i2}$ หาค่า $x_i(t), i = 1,..., n$ ที่ทำให้ฟังชัน F มีค่าต่ำที่สุดหรือสูงที่สุด

$$J\left[x_1,..., x_n\right] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1,..., x_n, \dot{x}_1,..., \dot{x}_n)dt \tag{2.11}$$

สมมุติให้ $x_i(t), i = 1,..., n$ เป็นค่าที่ทำให้ $J\left[x_1,..., x_n\right]$มีค่าต่ำที่สุดหรือสูงที่สุด ถ้าเพิ่มค่าให้ $x_i(t)$ ด้วย $h_i(t)$ ดังนั้นเพื่อให้ค่า $x_i(t)$ ยังคงสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) ค่า $h_i(t_0) = h_i(t_f) = 0$ ดังนั้นจะได้ฟังชันนอล(Functional) ΔJ คือ

$$\begin{aligned}\Delta J &= J\left[x_1{+}h_1,..., x_n{+}h_n\right] \quad J\left[x_1,..., x_n\right] \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \Big[F(t, x_1{+}h_1,..., x_n{+}h_n, \dot{x}_1{+}\dot{h}_1,..., \dot{x}_n{+}\dot{h}_n) \\ &\qquad F(t, x_i,..., x_n, \dot{x}_1,..., \dot{x}_n)\Big]dt\end{aligned} \tag{2.12}$$

จากกฎการกระจายของเทย์เลอร์ (Taylor) โดยตัดเทอมที่มีดีกรีสูงๆทิ้ง จะได้

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i \;\; dt \tag{2.13}$$

โดยที่ ∂J เป็นค่าประมาณของ ΔJ เมื่อเทอมที่มีดีกรีสูงๆถูกตัดทิ้งไป และทำการอินติเกรทบายพาร์ท (By part) เทอมที่สองจะได้

$$\partial J = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i|_{t_f} \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i|_{t_0} \qquad (2.14)$$

เงื่อนไขของการเป็นค่าที่ต่ำที่สุดหรือสูงที่สุด คือ $\delta J = 0$ สำหรับทุกๆ ค่าที่ของ $h_i(t)$และเนื่องจาก $h_i(t_0) = h_i(t_f) = 0$ ดังนั้นเงื่อนไขของการเป็นค่าต่ำสุดหรือสูงสุด – (Necessary condition) สำหรับ $\delta J = 0$ คือ

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1,...,n \qquad (2.15)$$

2.3.1.1.2 กรณีมีเวลาที่ปลายทางที่แน่นอนและมีตำแหน่งปลายทางที่แปรผันได้ (Fixed end times and variable end points)

ในกรณีนี้ต่างจากในกรณีแรกคือ $x_i(t_0)$และ $x\ (t_f\ )$ไม่เป็นค่าคงที่อีก ต่อไป ซึ่งสมการที่ 2.11 และ 2.14 ยังคงใช้ได้ แต่เนื่องจาก $h_i(t_0)$และ $h_i(t_f\ )$จะมีค่าแปรผันได้ ดังนั้น เงื่อนไขสำหรับการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary condition) จึงกลายเป็น

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0 \qquad (2.16)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}|_{t_0} = 0 \qquad (2.17)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}|_{t_f} = 0 \qquad (2.18)$$

2.3.1.1.3. **กรณีเวลาที่ปลายทางและตำแหน่งที่ปลายทางมีค่าแปรผันได้** (Variable end time and end points)

สมการที่ 2.11 ยังคงใช้ได้แต่ค่าของ ΔJ จะต้องเปลี่ยนไป คือ

$$
\begin{aligned}
\Delta J &= J\left[x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n\right] \quad J\left[x_1, \ldots, x_n\right] \\
&= \int_{t_0+\delta t_0}^{t_f+\delta t_f} F(t, x_1+h_1, \ldots, x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1, \ldots, \dot{x}_n+\dot{h}_n)\,dt \\
&\quad \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)\,dt \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \Big[F(t, x_1+h_1, \ldots, x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1, \ldots, \dot{x}_n+\dot{h}_n) \\
&\qquad F(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)\Big]dt \\
&\quad + \int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} F(t, x_1+h_1, \ldots, x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1, \ldots, \dot{x}_n+\dot{h}_n)\,dt \\
&\quad \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} F(t, x_1+h_1, \ldots, x_n+h_n, \ldots \dot{x}_1+\dot{h}_1, \ldots, \dot{x}_n+\dot{h}_n)\,dt
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

โดยใช้กฎการกระจายของเทย์เลอร์ (Taylor) และการตัดเทอมที่มีดีกรีสูงๆทิ้ง จะได้

$$
\begin{aligned}
\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i\right) dt \\
&\quad + F(t, x_1+h_1, \ldots, x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1, \ldots, x_n+h_n)\big|_{t_f} \delta t_f \\
&\quad F(t, x_1+h_1, \ldots, x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1, \ldots, x_n+h_n)\big|_{t_0} \delta t_0
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

โดยที่ δJ เป็นค่าประมาณของ ΔJ เมื่อตัดเทอมที่มีดีกรีสูงๆ ทิ้ง แล้วอินติเกรทบายพาร์ท(By part) เทอมที่สองในอินติกรัลจะได้

$$
\begin{aligned}
\delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right) h_i\,dt + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i\right)\Big|_{t_f} \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h_i\right)\Big|_{t_0} \\
&\quad + \Big[F(t, x_1+h_1, \ldots, x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1, \ldots, \dot{x}_n+\dot{h}_n)\Big]_{t_f} \delta t_f \\
&\quad \Big[F(t, x_1+h_1, \ldots, x_n+h_n, \dot{x}_1+\dot{h}_1, \ldots, \dot{x}_n+\dot{h}_n)\Big]_{t_0} \delta t_0
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

และสำหรับกรณีนี้จะได้ว่า $h_i(t_0) = \delta x_i|_{t_0} \quad \dot{x}_i|_{t_0}\delta t_0$ และ $h_i(t_f) = \delta x_i|_{t_f} \quad \dot{x}_i|_{t_f}\delta t_f$ เราสามารถลดรูปสมการได้เป็น

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right)h_i dt + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i\right)|_{t_f} \quad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i\right)|_{t_0}$$

$$+ \; F \quad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i\right)_{t_f} \delta t_f \quad F \quad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i\right)_{t_0} \delta t_0 \qquad (2.22)$$

เงื่อนไขสำหรับพิจารณาการเป็นค่าสูงสุดต่ำสุดคือ $\delta J = 0$ สำหรับทุกๆค่าของ $h_i(t), \delta x_i|_{t_f}, \; \delta x_i|_{t_0}, \delta t_f, \delta t_0$ ดังนั้นสมการที่ 2.22 เมื่อเป็นเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary conditions) จะได้

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}|_{t_0} = 0 \qquad (2.23)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}|_{t_f} = 0 \qquad (2.24)$$

$$F \quad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i\right)_{t_f} = 0 \qquad (2.25)$$

$$F \quad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i\right)_{t_0} = 0 \qquad (2.26)$$

2.3.1.2 แคลคูลัสออฟวาริเอชัน (Calculus of variation) **สำหรับฟังชันนอล** (Functional) **ที่มีเงื่อนไขบังคับ**(Constraints)

พิจารณาฟังชันนอล (Functional)

$$J[x_1,...,x_n] = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x_1,...,x_n, \dot{x}_1,...,\dot{x}_n)dt$$

โดยที่ฟังชันสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ(Constraints) $g_i(t,x_1,...,x_n,\dot{x}_1,...,\dot{x}_n)=0$, j=1,...,m และ $m<n$ ซึ่งค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสามารถหาได้โดยกำหนดฟังชันใหม่ $J'\left[x_1,...,x_n\right]$

$$J'\left[x_1,...,x_n\right] = \int_{t_f}^{t_0}\Big[F(t,x_1,...,x_n,\dot{x}_1,...,\dot{x}_n) + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j(t)g_i(t,x_1,...,x_n,\dot{x}_1,...,\dot{x}_n)\Big]dt \quad (2.27)$$

โดยที่ $\lambda_j(t)$ คือ ตัวคูณลากรางจ์ (Lagrange multipliers) $F'=F+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g_j$ จะนำมาใช้แทน F ในการคำนวณหาเงื่อนไขการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary conditions) ซึ่งใช้ได้กับทั้งสามกรณีคือ 1. กรณีที่มีเวลาและตำแหน่งปลายทางที่แน่นอน (Fixed end times and end points) 2.กรณีมีเวลาที่ปลายทางที่แน่นอนและมีตำแหน่งปลายทางที่แปรผันได้ (Fixed end times and variable end points) และ 3.กรณีเวลาที่ปลายทางและตำแหน่งที่ปลายทางมีค่าแปรผันได้ (Variable end time and end points)

2.3.1.2.1 **กรณีเมื่อค่าต่าง ๆ ที่จุดปลายทางเป็นฟังชันที่เกี่ยวข้องกับเงื่อนไขบังคับ** (Constraints)

พิจารณาฟังชันของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด - $J=\int_{t_0}^{t_f}F(t,x_1,...,x_n,\dot{x}_1,...,\dot{x}_n)dt$

เมื่อ ฟังชัน $x_i(t_f)$สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ - $s_k(t,x_1,...,x_n)_{t_f}=0, k=1,...,p$ ณ เวลาที่จุดปลาย ซึ่งสามารถหาคำตอบได้ด้วยการกำหนดฟังชันใหม่ $J'\left[x_1,...,x_n\right]$ดังนี้

$$J'\left[x_1,...,x_n\right] = \int_{t_0}^{t_f}F(t,x_1,...,x_n,\dot{x}_1,...,\dot{x}_n)dt + \sum_{k=1}^{p}\nu_k s_k \quad (2.28)$$

โดยที่ ν_k คือ ตัวคูณลากรางจ์(Lagrange multipliers) สำหรับกรณีที่เวลาและตำแหน่งที่ปลายมีค่าแปรผันได้ ดังนั้นสมการที่ 2.22 จะกลายเป็น

$$J' = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} h_i dt + \sum_{i=1}^{n} \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^{p} \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \, \delta x_i \;|_{t_f}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \;|_{t_0} + F \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^{p} \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \quad_{t_f} \delta t_f$$

$$F \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \quad_{t_0} \delta t_0 \tag{2.29}$$

เงื่อนไขของการเป็นค่าต่ำที่สุดหรือสูงที่สุด (Necessary conditions) ในดีกรีหนึ่ง คือ $\delta J' = 0$ ที่เป็นจริงสำหรับค่าเหล่านี้ $h_i(t), \delta x_i|_{t_f}, \delta x_i|_{t_0}, \delta t_f$ และ δt_0

จะได้ เงื่อนไขของการเป็นค่าต่ำที่สุดหรือสูงที่สุด(Necessary conditions) สำหรับดีกรีหนึ่ง ดังนี้

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

เงื่อนไขขอบเขตคือ

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^{p} \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \quad_{t_g} = 0 \, ; \, \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} |_{t_0} = 0, i = 1, \ldots, n$$

$$F \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i + \sum_{k=1}^{p} \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \quad_{t_f} = 0 \, ; \; F \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \dot{x}_i \quad_{t_0} = 0 \tag{2.30}$$

คำตอบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขข้างต้นรวมทั้งเงื่อนไข s_k=0 คือ คำตอบที่ให้ค่าสูงที่สุดหรือต่ำที่สุดสำหรับในกรณีนี้

2.3.1.2.2 **กรณีเงื่อนไขบังคับ** (Constraints) **ทั่วไป**

กรณีนี้เป็นการรวมผลของกรณีข้างต้อนทั้งสองกรณีเข้าด้วยกัน โดยพิจารณาฟังชัน

$$J\left[x_1,\ldots,x_n\right]=\int_{t_0}^{t_f}F(t,x_1,\ldots,x_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)dt$$

โดยที่ฟังชัน $x_i(t)$สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (Constraints) - $g_i(t,x_1,...,x_n,\dot{x}_1,...,\dot{x}_n)=0$, $j=1,...,m$ และเงื่อนไขบังคับที่เกี่ยวข้องกับจุดปลาย - $s_k(t,x_1,...,x_n)_{t_f}=0$, $k=1,...,p$ โดยที่ $p<m$ ดังนั้นฟังชันที่กำหนดขึ้นมาใหม่จึงเป็น

$$\begin{aligned}J'\left[x_1,\ldots,x_n\right]=\int_{t_f}^{t_0}\Big[&F(t,x_1,\ldots,x_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)\\&+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(t)g_i(t,x_1,\ldots,x_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n)\Big]dt\\&+\sum_{k=1}^{p}\nu_k s_k\end{aligned} \quad (2.31)$$

โดยที่ $\lambda_j(t)$ และ ν_k คือ ตัวคูณลากรางจ์ (Lagrange multipliers)

สำหรับกรณีทั่วไปที่เวลาและตำแหน่งที่จุดปลายมีค่าแปรผันได้ สมการที่2.22 จะกลายเป็น

$$\begin{aligned}\delta J'=&\int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F'}{\partial x_i}\quad\frac{d}{dt}\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i}h_i dt+\sum_{i=1}^{n}\quad\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i}+\sum_{k=1}^{p}\nu_k\frac{\partial s_k}{\partial x_i}\,\delta x_i\;\Big|_{t_f}\\&\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i\;\Big|_{t_0}+F'\quad\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i+\sum_{k=1}^{p}\nu_k\frac{\partial s_k}{\partial t}\;{}_{t_f}\;\delta t_f\\&F'\quad\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i\;{}_{t_0}\;\delta t_0\end{aligned} \quad (2.32)$$

โดยที่ $F'=F+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g_j$

และเงื่อนไขสำหรับการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุดคือ

$$\frac{\partial F'}{\partial x_i} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} = 0 \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{k=1}^{p} \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial x_i} \quad {}_{t_g} = 0 \tag{2.34}$$

$$\frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i}\Big|_{t_0} = 0 , i = 1,\ldots,n \tag{2.35}$$

$$F' \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F'}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i + \sum_{k=1}^{p} \nu_k \frac{\partial s_k}{\partial t} \quad {}_{t_f} = 0 \tag{2.36}$$

$$F' \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F'}{\partial x_i}\dot{x}_i \quad {}_{t_0} = 0 \tag{2.37}$$

คำตอบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขข้างต้นทั้งหมดรวมทั้งเงื่อนไขที่ - $g_i(t,x_1,...,x_n,\dot{x}_1,...,\dot{x}_n) = 0$, j=1,...,m และ $s_k(t,x_1,...,x_n)_{t_f} = 0$, $k = 1,..., p$ คือ คำตอบที่ให้ค่าสูงที่สุดหรือต่ำที่สุด

บทที่ 3

Direct scheme

จากทฤษฎีที่กล่าวมาแล้วในบทที่ 2 ทำให้ทราบว่าการแก้ปัญหาด้วยวิธีที่ตรงเป็นวิธีที่ง่ายกว่า ซึ่งหลักการของวิธีดังกล่าวสามารถอธิบายได้ดังนี้

3.1 **วิธีตรง** (Direct method) **หรือ** Direct transcription

พิจารณาปัญหาซึ่งต้องการหาค่า control variable $\bar{u}(t)$ ที่ทำให้ปริมาณของคอสฟังชันนอล (Cost functional) มีค่าต่ำที่สุด

$$J' = \Phi(\bar{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} L(t,\bar{x},\bar{u})\,dt \tag{3.1}$$

ซึ่งสอดคล้องกับ

(3.2)

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(t,\bar{x},\bar{u})$$
$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0 \tag{3.3}$$

ในที่นี้สเตทวาริเอเบิล (State variables) คือ $\bar{x}(t) \in R^n$ ซึ่งเวลาที่จุดปลายคือ t_f มีค่าแน่นอนและรู้สภาวะเริ่มต้นทั้งหมด ในทำนองเดียวกันกับในบทที่ 2 เงื่อนไขบังคับพลศาสตร์ (Dynamic constraints) จะถูกนำมารวมไว้ในคอสฟังชันนอล (Cost function) ผ่านตัวคูณลากรางจ์ $\bar{\lambda}(t) \in R^n$ จะได้

$$J = \Phi + \int_0^{t_f} [L + \bar{\lambda}^T(\bar{f} \quad \dot{\bar{x}})]\,dt \tag{3. 4}$$

เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้นค่าแรกที่ได้จากการสุ่มเดา (Initial guess) คือ $\bar{u}_0(t)$ จะได้ค่า control input $\bar{u}^1(t)$ และปรับปรุงค่านี้ไปเรื่อยๆ ในแนวทางที่จะทำให้คอสฟังชันนอล (Cost functional) มีค่าลดลง ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้งสองคือ $\bar{u}^1(t) = \bar{u}^0(t) + \bar{h}_u(t)$ โดยที่ $\bar{h}_u(t)$ คือ ค่าที่เพิ่มขึ้นของค่าเริ่มต้น (Initial guess)

หลักการของไดเรคทรานสคริปชัน (Direct transcription) คือ การทำปัญหาให้เป็นพารา-มิเตอร์ (Parameter) จะทำให้ปัญหากลายเป็นปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น ทำได้โดยนำวิธีคำนวณค่าอินติเกรทบนพื้นฐานของรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta) มาใช้

โดเมนของเวลาของปัญหาจะถูกแบ่งออกเป็นจำนวน N เฟส (Phase) และ N+1 โหนด (Node) ตัวแปรทั้งหมด x(t) u(t) และ t ในปัญหาการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมพลศาสตร์ จะถูกกำหนดให้ตรงกับแต่ละเฟส (Phase) ในแต่ละช่วงเวลา (Interval)

ตัวแปรแรกที่จะนำมาพิจารณาคือ เวลา(t) ในแต่ละช่วงเวลา(Interval) k เวลาเริ่มต้น (Initial- time) t_{in}^k และเวลาที่จุดสุดท้าย t_f^k จะกำหนดได้ดังนี้ $t_{in}^k \leqslant t \leqslant t_f^k$ หรือ $t_{in}^{k+1} = t_f^k$ ต่อจากนั้นกลุ่มของตัวแปรที่ไม่เป็นอิสระ(Dependent variable) , state variable และ control variable จะถูกกำหนดขึ้นเป็นเซตของตัวแปรใหม่คือ Z ซึ่งเวกเตอร์ของตัวแปร Z สำหรับแต่ละ phase(k) เขียนได้ดังนี้

$$\underline{Z} = \begin{matrix} x^k(t) \\ u^k(t) \end{matrix} \tag{3.5}$$

โดยที่ $x^{(k)}$ คือ เวคเตอร์ที่มีมิติ $n^{(k)} \times 1$ และ $u^{(k)}$ คือ เวกเตอร์ที่มีมิติ $m^{(k)} \times 1$ ซึ่งแทนสเตทวาริเอเบิล (State variables) และ control variables ตามลำดับ หรือในบางปัญหาอาจมีตัวแปรอิสระที่ไม่ขึ้นกับเวลา (Independent variables) และ p^k ซึ่งมีมิติ $n_p^{(k)} \times 1$ ยกตัวอย่างเช่น แรงดึงดูดของโลก ความหนาแน่นของของไหล ค่านิจสปริง เป็นต้น

เงื่อนไขบังคับพลศาสตร์ (Dynamic constraints) หรือ state equation ซึ่งเขียนอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง สามารถเขียนในรูปของพารามิเตอร์ (Parameter) สำหรับช่วงเวลา (Time -interval) k ใดๆ

$$y^k = f^k(x^k(t), u^k(t), p^k, t) \tag{3.6}$$

ตัวแปร p ในสมการจะถูกกำหนดสำหรับแต่ละเฟส (Phase) k

เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) จะถูกกำหนดไว้ที่เวลาเริ่มต้นของเฟส (Phase) แรก (k=1) และ เฟสสุดท้าย(k=n) ซึ่งก็คือ

$$\psi_L \leqslant \psi \begin{array}{l} x^{(1)}(t_0{}^{(1)}), u^{(1)}(t_0{}^{(1)}), p^{(1)}, t_0 \\ x^{(1)}(t_f{}^{(1)}), u^{(1)}(t_f{}^{(1)}), p^{(1)}, t_f \\ x^{(2)}(t_0{}^{(2)}), u^{(2)}(t_0{}^{(2)}), p^{(2)}, t_0 \\ x^{(2)}(t_f{}^{(2)}), u^{(2)}(t_f{}^{(2)}), p^{(2)}, t_0 \\ x^{(N)}(t_0{}^{(N)}), u^{(N)}(t_0{}^{(N)}), p^{(N)}, t_0 \\ x^{(N)}(t_f{}^{(N)}), u^{(N)}(t_f{}^{(N)}), p^{(N)}, t_f \end{array} \leqslant \psi_u \qquad (3.7)$$

เพื่อความสะดวกฟังชันทั้งหมดที่อยู่ในเทอมอินติกรัล ของอินติกรัลคอส (Integral cost) L สามารถเขียนอยู่ในรูปของควอดราเจอร์ (Quardrature)

$$\int_{t_0^{(k)}}^{t_f^{(k)}} \overline{W}^{(k)} \left[\underline{x}^{(k)}(t), \underline{u}^{(k)}(t), \underline{p}^{(k)}, t \right] dt. \qquad (3.8)$$

โดยที่ $\overline{W}^{k}$ คือ ฟังชันในรูปของควอดรเจอร์ (Quardrature) ซึ่ง $\underline{f}$ และ $\underline{g}$ จะต้องเป็นฟังชันที่ต่อเนื่องด้วย ให้ $\underline{Q}^{(k)}(t)$ คือ เป็นคอลโลเคชัน (Collocation) ของฟังชันต่อเนื่องเขียนได้ดังนี้

$$\underline{Q}^{k}(t) = \begin{array}{c} \underline{f}^{(k)} \\ \underline{g}^{(k)} \\ \underline{w}^{(k)} \end{array}, \qquad (3.9)$$

เมื่อเปรียบเทียบกันแล้ว ψ จึงเหมือนเป็นฟังชันของค่าเป็นจุดๆ ไม่ต่อเนื่อง

ในทำนองเดียวกันเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ทั้งหมดสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของพารา-มิเตอร์ (Parameter) ได้ดังนี้

$$\underline{g}_L{}^k \leqslant \underline{g}^k(\underline{x}^k(t), \underline{u}^k(t), \underline{p}^k, t) \leqslant \underline{g}_U{}^k \tag{3.10}$$

โดยที่ $\underline{g}^k$ คือเวกเตอร์ (Vector) ของเงื่อนไขบังคับ(Constraints) มีมิติ $n_g \times 1$ ซึ่งในบางปัญหาเงื่อนไขบังคับ (Constraints) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของขอบเขต(Bounds)หรือช่วง (Ranges) ของ state หรือ control variables.

$$\underline{x}_L{}^k \leqslant \underline{x}^k(t) \leqslant \underline{x}_U{}^k \tag{3.11}$$

$$\underline{u}_L{}^k \leqslant \underline{u}^k(t) \leqslant \underline{u}_U{}^k \tag{3.12}$$

จุดประสงค์หลักของปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบพลศาสตร์ คือ การคำนวณหรือเลือกเวกเตอร์ (Vector) $u^{(k)}(t)$และเวกเตอร์ของตัวแปรอิสระ $p^{(k)}$ สำหรับทำให้คอสฟังชันนอล (Cost functional) มีค่าต่ำที่สุด นั่นคือ เมื่อทำเป็นพารามิเตอร์ (Parameter) แล้วเป็นดังนี้

$$J = \varphi(\underline{x}^{(N)}(t_f{}^{(N)}, \underline{u}^{(N)}(t_f{}^{(N)}), \underline{p}^{(N)}, t_f) \tag{3.13}$$

$$+\sum_{j=1}^{N} \int_{in}^{t_F{}^{(j)}} L^{(j)}\ \underline{x}^{(j)}(t), \underline{u}^{(j)}(t), \underline{p}^{(j)}, t\ dt$$

โดยที่ $L^{(j)}$ คือ ฟังชันของพหุนาม

3.1.1 วิธีของรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta)

เนื่องจากเป็นการหาค่าอินติเกรทแบบไปข้างหน้า (Forward) จึงตัดปัญหาในเรื่องของค่าเริ่มต้นไปได้และยังให้ความแม่นยำค่อนข้างสูง การนำวิธีมาใช้ในการหาค่าอินติเกรทจะต้องลด สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองลงเป็นสมการอันดับหนึ่งสองสมการดังนี้

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}\left[F(t) \quad kx \quad c\dot{x}\right] = f(x,\dot{x},t) \tag{3.14}$$

เมื่อกำหนดให้ $\dot{x} = y$ สมการข้างต้นจะกลายเป็น

$$\dot{x} = y \tag{3.15}$$

$$\dot{y} = f(x,y,u,t) \tag{3.16}$$

ซึ่งทั้ง x และ y รอบๆ x_i และ y_i สามารถเขียนได้ในรูปอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) กำหนดให้ $h = \Delta t$ จะได้

$$x = x_i + \frac{dx}{dt}_i h + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{h^2}{2} + \ldots \tag{3.17}$$

$$y = y_i + \frac{dy}{dt}_i h + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{h^2}{2} + \ldots \tag{3.18}$$

เมื่อตัดเทอมที่มีดีกรีสูงๆ ทิ้งและแทนเทอมอนุพันธ์ด้วยค่าเฉลี่ยของความชัน จะได้

$$x = x_i + \frac{dx}{dt}_{iav} h \tag{3.19}$$

$$y = y_i + \frac{dy}{dt}_{iav} h$$

วิธีของรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta) นั้นค่อนข้างง่ายสำหรับการคำนวณ เพียงแต่ในเทอมกลางของสมการข้างต้นจะต้องแตกเป็นสองเทอมและจะต้องคำนวณค่า t,x,y,f ทั้งสี่ค่าของแต่ละจุด

ตาราง 3.1 แสดงค่าตัวแปรต่างๆ สำหรับวิธีของรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta)

t	x	$y = \dot{x}$	$f = \dot{x}$
$T_1 = t_i$	$X_1 = x_i$	$Y_1 = y_i$	$F_1 = f(T_1, X_1, Y_1, u)$
$T_2 = t_i + \frac{h}{2}$	$X_2 = x_i + F_1\frac{h}{2}$	$Y_2 = y_i + F_1\frac{h}{2}$	$F_2 = f(T_2, X_2, Y_2, u)$
$T_3 = t_i + \frac{h}{2}$	$X_3 = x_i + F_2\frac{h}{2}$	$Y_3 = y_i + F_2\frac{h}{2}$	$F_3 = f(T_3, X_3, Y_3, u)$
$T_4 = t_i + h$	$X_4 = x_i + F_3 h$	$Y_4 = y_i + F_3 h$	$F_4 = f(T_4, X_4, Y_4, u)$

ซึ่งค่าต่างๆ ข้างต้น จะคำนวณตามสมการดังนี้

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6}\left[Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 + Y_4\right] \tag{3.20}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left[F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4\right] \tag{3.21}$$

จะเห็นว่าค่าของ Y ทั้ง 4 ค่าจะถูกแบ่งเป็น 6 ส่วน ในช่วงของความชัน $\frac{dx}{dt}$ และจะเห็นว่าค่าของ F ทั้ง 4 ค่าจะถูกแบ่งเป็น 6 ส่วน ในช่วงของความชัน $\frac{dy}{dt}$

แม้วิธีของรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta) ทำได้โดยไม่จำเป็นต้องทราบค่าต่างๆ ของอนุพันธ์ แต่หากต้องการความแม่นยำที่สูงขึ้น ทำได้โดยคำนวณหาค่า 4 ค่าของอนุพันธ์อันดับหนึ่งตามวิธีของอนุกรมเทยเลอร์ให้อยู่ในเทอมของ h^4 นอกจากนั้นวิธีของรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta) ยังสามารถใช้กับเวกเตอร์ (Vector) ได้ ดังในระบบสมการเชิงอนุพันธ์ เช่น

$$\dot{x} = f(x,t) \tag{3.22}$$

ถ้ามี 2 ตัวแปร x และ y สามารถกำหนด $z = \frac{x}{y}$ และเขียนอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ได้สองสมการดังนี้

$$\begin{matrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{matrix} = \begin{matrix} y \\ f(x,y,t) \end{matrix} = F(x,y,t) \tag{3.23}$$

หรือ

$$\dot{z} = F(x,y,t) \tag{3.24}$$

ซึ่งหาตอบได้ด้วยวิธีเดียวกันกับสมการหนึ่งตัวแปร

3.1.2 การแก้ปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming problem)

ปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดซึ่งมีแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Math model) ที่อธิบายด้วยสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น เราเรียกว่าการแก้ปัญหาของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming problem) ซึ่งปัญหาเกี่ยวกับการออกแบบทางวิศวกรรมส่วนใหญ่ก็เป็น สมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นแทบทั้งสิ้น ในการพิจารณาว่าปัญหาใดเป็นการแก้ปัญหาของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นหรือไม่นั้น ไม่จำเป็นที่ปัญหานั้นจะต้องเป็นสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นทั้งหมด ถ้ามีเพียง สมการใดสมการหนึ่งเป็นสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นก็สามารถพิจารณาเป็นแก้ปัญหาของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นได้ การแก้ปัญหาของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นนั้นมักจะถูกนำมาใช้กับปัญหาการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดของคอสฟังชันนอล (Cost functional) ประกอบกับเงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการ (Equality constraints) และเงื่อนไขบังคับที่เป็นอสมการ (Inequality constraints) ถ้าฟังชันที่พิจารณาเป็นสมการเชิงเส้น การแก้ปัญหาก็จะเป็นการแก้ปัญหาแบบเชิงเส้น (Linear programming) ถ้านอกเหนือจากนั้นจะพิจารณาให้เป็นปัญหาของสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น แม้ว่าการแก้ปัญหาของระบบสมการเชิงเส้นง่ายกว่าระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น แต่ไม่สามารถครอบคลุมปัญหาที่มี คอสฟังชันนอล (Cost functional) และเงื่อนไขบังคับ

(Constraints) ที่ไม่เป็นเชิงเส้นได้ ดังนั้นการจะแก้ปัญหาระบบสมการดังกล่าวจึงต้องใช้วิธีการแก้ปัญหาของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นเท่านั้น

มีตัวอย่างมากมายของปัญหาแบบนี้ที่มีเพียงคอสฟังชันนอล (Cost functional) เท่านั้นที่เป็นสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น ในขณะที่เงื่อนไขบังคับ (Constraints) อื่นๆ เป็นสมการเชิงเส้น ในทางคณิตศาสตร์ คำตอบของปัญหาคือสิ่งที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary condition) และเงื่อนไขของการเป็นค่าเหมาะสมที่สุด (Sufficient conditions) ซึ่งขึ้นอยู่กับแต่ละระดับของปัญหา ในเบื้องต้นเมื่อได้คำตอบที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary condition) จะถือว่าคำตอบนั้นเป็นคำตอบหนึ่งที่สามารถเป็นค่าที่เหมาะสมที่สุด (Optimum) ได้ และถ้าค่านี้ยังสามารถสอดคล้องกับเงื่อนไขของการเป็นค่าเหมาะสมที่สุด (Sufficient condition) ได้ด้วยจะเรียกว่าเป็นค่าที่เหมาะสมที่สุด (Optimum) อย่างแท้จริง นั่นคือคำตอบที่เหมาะสมที่สุด (Optimum solution) ต้องสอดคล้องทั้งเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary condition) และเงื่อนไขของการเป็นค่าเหมาะสมที่สุด (Sufficient conditions) พร้อมๆ กัน

รูปแบบทั่วไปของระบบสมการที่ใช้ แก้ปัญหาของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น เขียนได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
\text{Subject to} \quad & h_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,\ k = 1,2,\ldots,l \\
& g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant 0,\ j = 1,2,\ldots,m \\
& x_i^l \leqslant x_i \leqslant x_i^u \quad i = 1,2,\ldots,n
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

หรือ ในรูปของเวกเตอร์ (Vector)

$$
\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & f(X), [X]_n \\
\text{Subject to} \quad & [h(X)]_l = 0 \\
& [g(X)]_m \leqslant 0 \\
& X^{low} \leqslant X \leqslant X^{up}
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

3.1.2.1 **ปัญหาแบบไม่มีเงื่อนไขบังคับ** (Unconstraints)

Minimize $f(x_1, x_2) : \quad x_1 x_2$

ในกรณีนี้การออกแบบตัวแปรเป็นสิ่งที่สำคัญ เช่น ถ้าไม่มีการกำหนดขอบเขตบนให้กับตัวแปร คำตอบที่ได้ก็คือ ค่าบวกที่มีค่ามากที่สุด ดังนั้นขอบเขตบนและล่างของตัวแปรจึงเป็นสิ่งสำคัญที่จะทำให้ได้คำตอบตามวัตถุประสงค์ เช่น $0 \leqslant x_1 \leqslant 3\,;\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 3$

3.1.2.2 **ปัญหาแบบที่มีเงื่อนไขบังคับเป็นสมการ** (Equality constraints)

กรณีนี้จะมีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ที่เป็นสมการเพียงอย่างเดียว เช่น

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimize} & f(x_1, x_2) : \quad x_1 x_2 \\
 & h_1(x_1, x_2) : 20x_1 + 15x_2 \quad 30 = 0 \\
\text{Subject to} & h_2(x_1, x_2) : (x_1^2 / 4) + (x_2^2) \quad 1 = 0 \\
 & 0 \leqslant x_1 \leqslant 3\,;\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 3
\end{array}
\tag{3.27}
$$

โดยปกติแล้ว ปัญหาดังกล่าวมักไม่สามารถหาค่าเหมาะสมที่สุดได้เนื่องจากเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ทั้งสองสมการสามารถให้คำตอบสำหรับปัญหาแบบสองตัวแปรได้ด้วยตัวมันเองอยู่แล้วและปัญหาประเภทนี้มักมีหลายคำตอบซึ่งเป็นลักษณะที่พบบ่อยในการแก้ปัญหาของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น ในกรณีนี้ตัวแปรที่จะทำให้คอสฟังชันนอล (Cost functional) มีค่าต่ำสุดจะเป็นคำตอบที่เหมาะสมที่สุด และปัญหาประเภทนี้มักจะหาคำตอบด้วยการตรวจสอบหาคำตอบมากกว่าที่จะได้คำตอบมาจากเงื่อนไขต่างๆ ได้โดยตรง

3.1.2.3 **พิจารณาปัญหาแบบที่มีเงื่อนไขบังคับเป็นอสมการ** (Inequality constraints)

กรณีนี้จะมีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ที่เป็นอสมการเพียงอย่างเดียว เช่น

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimize} & f(x_1, x_2) : \quad x_1 x_2 \\
 & h_1(x_1, x_2) : 20x_1 + 15x_2 \quad 30 \leqslant 0 \\
\text{Subject to} & h_2(x_1, x_2) : (x_1^2 / 4) + (x_2^2) \quad 1 \leqslant 0 \\
 & 0 \leqslant x_1 \leqslant 3\,;\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 3
\end{array}
\tag{3.28}
$$

โดยทั่วไปแล้วเงื่อนไขบังคับเป็นสมการ (Equality constraints) เมื่อพิจารณาเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์จะเป็นปัญหาที่แก้ได้ง่าย แต่ยากสำหรับการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขและคำตอบค่อนข้างอยู่ในวงจำกัด ในขณะที่เงื่อนไขบังคับเป็นสมการ (Inequality constraints) เมื่อพิจารณาเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์แล้วแก้ได้ยากกว่าแต่มีความยืดหยุ่นมากกว่าในแง่ของการค้นหาคำตอบที่เหมาะสม เนื่องจากขอบเขตของคำตอบที่ใช้ได้กว้างกว่า

3.1.3 **หลักการทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้** (Mathematical concept)

Matlab มีซิมโบลิกทูลบอกซ์ (Symbolic toolbox) ทางคณิตศาสตร์ที่เอื้ออำนวยและครอบคลุมสำหรับการคำนวณทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ซึ่งช่วยผู้ใช้ในการวินิจฉัยปัญหาทางด้านแคลคูลัส พีชคณิตเชิงเส้น การหาคำตอบของระบบสมการและในสาขาอื่นๆได้ง่ายขึ้นโดยไม่ต้องใช้ความรู้ทางการคำนวณทางคอมพิวเตอร์มากนัก ซึ่งหลักพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่จะนำมาใช้ในการแก้ปัญหาของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น คือ อนุพันธ์ต่างๆ อนุพันธ์ย่อย เวกเตอร์ เมตริก อนุพันธ์ของเมตริก และการหาคำตอบของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น จาโคเบียน (Jacobian) และ เฮสเซี่ยน (Hessian) ซึ่งเราสามารถใช้ซิมโบลิก (Symbolic) ใน Matlab คำนวณหาค่าเหล่านี้ได้โดยไม่ต้องกำหนดขึ้นมาใหม่

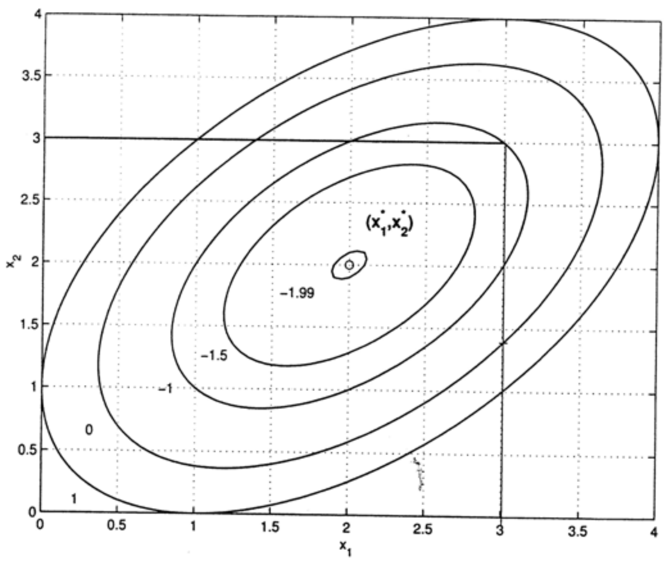
3.1.3.1 **การแก้ปัญหาของระบบสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น ด้วยวิธีการวิเคราะห์**

วิธีนี้จะนำเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary conditions) และเงื่อนไขของเป็นค่าเหมาะสมที่สุด (Sufficient conditions) มาใช้เพื่อสร้างเงื่อนไขของการเป็นค่าเหมาะสมที่สุด แล้วจึงใช้เทคนิคของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการหาคำตอบ จนกระทั่งได้คำตอบซึ่งอยู่ในขอบเขตที่นำมาใช้ได้ แล้วจึงเลือกใช้ค่าที่ต่ำที่สุดหรือสูงที่สุดนั้นๆ

พิจารณาปัญหาแบบไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Unconstraints)

Minimize $$f(x_1, x_2) : (x_1 \quad 1)^2 + (x_2 \quad 1)^2 \quad x_1 x_2$$

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 3; \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant 3$$



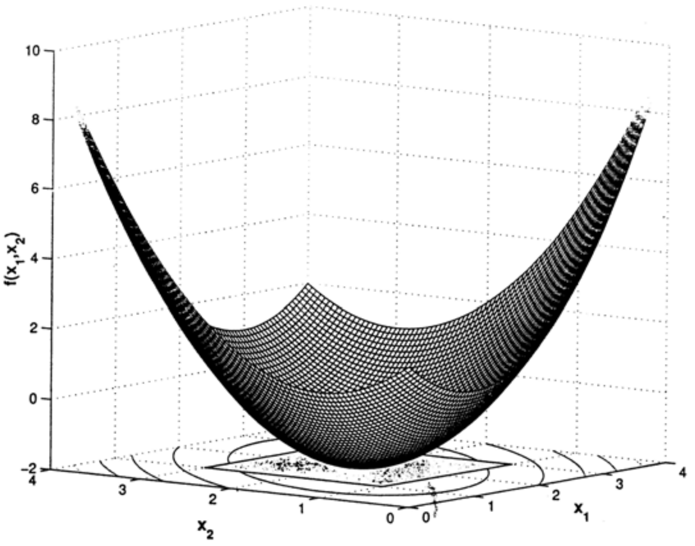


Figure 4.9 Three-dimensional plot of Figure 4.6.

ภาพประกอบ 3.1 แสดงคอนทัวร์ (Contour) และกราฟสามมิติกับระนาบที่สัมผัสจุดต่ำสุดของกราฟรูป

ตาข่ายสำหรับปัญหาที่ไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Unconstraints) ข้างต้น

จากภาพประกอบ 3.1 การเปลี่ยนแปลงของตัวแปรต้นสำหรับการเคลื่อนที่ คือ ∇x และการเปลี่ยนแปลงของฟังชันที่เป็นผลจากการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวคือ ∇f ซึ่งจากรูปเราสามารถสรุปได้ว่าคำตอบที่เหมาะสมที่สุดจะต้องเป็นจุดที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\nabla f \succ 0 \qquad \text{สำหรับทุกค่าของ} \quad x$$

เงื่อนไขอันดับหนึ่ง (First order condition) เมื่อค่าการเปลี่ยนแปลงของ dx_1 และ dx_2 มีค่าน้อยๆ ค่าของฟังชัน ณ จุดนั้นสามารถประมาณได้จากระนาบที่สัมผัสจุดนั้น และเมื่อพิจารณาจุดต่างๆ ในระนาบนั้นเพื่อหาค่าที่เหมาะสมที่สุดได้ที่ไม่ทำให้ค่าของฟังชันเปลี่ยนแปลง คือ df=0 และจากการเลื่อนหาค่าดังนั้น dx_1 และ dx_2 ต้องไม่เท่ากับศูนย์ด้วย ทำให้ได้สมการดังนี้

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = 0 \qquad (3.29)$$

$$df = \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{matrix} \begin{matrix} dx_1 \\ dx_2 \end{matrix} = 0 \qquad (3.30)$$

เนื่องจาก $dx_1 \neq 0$ และ $dx_2 \neq 0$ จะได้

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \qquad (3.31)$$

หรือ เรียกได้ว่าเกรเดียน (Gradient) ของจุดที่เหมาะสมจะต้องมีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ

$$\nabla f(x_1, x_2) = 0 \qquad (3.32)$$

สมการข้างต้นเรียกได้อีกอย่างว่าเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary conditions) หรือ (First order conditions) สำหรับการหาค่าเหมาะสมที่สุดที่ไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints)

พิจารณาปัญหาแบบที่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints)

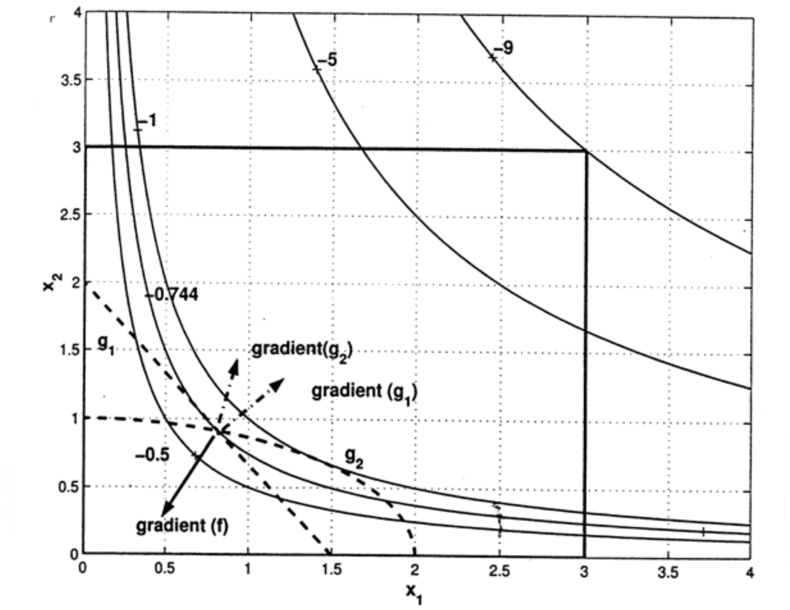
ปัญหาที่มี (Inequality constraints)

$$\text{minimize} \quad f(x_1, x_2): \quad x_1 x_2$$

$$\text{subject to} \quad h_1(x_1, x_2): 20x_1 + 15x_2 \quad 30 = 0$$

$$h_2(x_1, x_2): x_1^2 / 4 + x_2^2 \quad 1 \leq 0 \qquad (3.33)$$

$$0 \leq x_1 \leq 3; \quad 0 \leq x_2 \leq 3$$



ภาพประกอบ 3.2 แสดงคอนทัวร์ (Contour) และเกรเดียนท์ (Gradient) ของปัญหาแบบที่มีเงื่อนไข
บังคับเป็นอสมการ (Inequality constraints)

ทิศทางของเกรเดียนท์ (Gradient) สำหรับคอสฟังชันนอล (Cost functional) และ (Constraints) จากรูป 3.2 พบว่าบริเวณที่เป็นคำตอบนั้นเกรเดียนของคอสฟังชันนอล (Cost functional) และเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ขนานกันแต่มีทิศทางตรงข้ามกัน ซึ่งในบริเวณนี้จะพบว่าเกรเดียนแต่ละเส้นจะเป็นสัดส่วนกันด้วยค่าคงที่ค่าหนึ่ง กำหนดให้เป็น λ_1 จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างเกรเดียนดังนี้

$$\nabla f = \quad \lambda_1 \nabla h_1 \text{ หรือ } \nabla f + \lambda_1 \nabla h_1 = 0$$

3.1.3.1.1 **วิธีของลากรางจ์** (Lagrange)

วิธีนี้เป็นการแปลงปัญหาโดยขยายบางส่วนออกไป เรียกว่า Lagrangian คือ เมื่อพิจารณาคอสฟังชันนอล (Cost functional) และเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ที่มีอยู่ เราสามารถสร้าง Lagrangian ได้จากการนำคอสฟังชันนอล (Cost functional) เดิมมารวมกันแบบเชิงเส้นกับ คอสฟังชันนอล (Cost functional) ซึ่งค่าคงที่หลังจากการรวมจะเรียกว่า “Lagrange multipliers “

$$\text{Minimize} \qquad F(x_1, x_2, \lambda_1) = f(x_1, x_2) + \lambda_1 h_1(x_1, x_2) \tag{3.34}$$

$$\text{หรือ} \qquad F(X, \lambda) = f(X) + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k h_k(X)$$

หาเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary conditions) โดยพิจารณาฟังชัน $F(x_1, x_2, \lambda_1)$ เป็นแบบไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Unconstraints) ซึ่งมีตัวแปร คือ x_1, x_2, λ_1 ซึ่งจะต้องหาค่า $x^*_1, x^*_2, \lambda^*_1$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_1} = 0 \tag{3.35}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_2} = 0 \tag{3.36}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = h_1 = 0 \tag{3.37}$$

$$\text{หรือ} \qquad \nabla F = \nabla f + [\nabla h_1 \; \nabla h_2 \cdots \nabla h_l] \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \lambda_l \end{matrix} = 0 \tag{3.38}$$

เนื่องจากฟังชันมีตัวแปรต้นสองตัวจึงมีเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary conditions) สองสมการ ซึ่งเทอมที่อยู่ทางซ้ายของสมการคือ เกรเดียนของฟังชันลากราง-เจียน (Lagrangian) และสมการสุดท้ายก็คือเงื่อนไขบังคับ (Constraints) นั่นเอง

3.1.3.1.2 **วิธีของคุน-ทักเกอร์** (Kuhn-Tucker)

วิธีนี้คล้ายกับที่กล่าวมาแล้วในวิธีของลากรางจ์ (Lagrange)

$$\text{Minimize} \quad f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$\text{Subject to} \quad h_k(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,\ k = 1,2,...,l$$

$$g_j(x_1, x_2, ..., x_n) \leqslant 0,\ j = 1,2,...,m$$

$$x_i^l \leqslant x_i \leqslant x_i^u \quad i = 1,2,...,n$$

ทำเป็นลากรางเจียน (Lagrangian)

Minimize

$$F(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_l,\beta_1,...,\beta_m) = f(x_1,...,x_n) + \lambda_1 h_1 + ... + \lambda_l h_l + \beta_1 g_1 + ... + \beta_m g_m \tag{3.39}$$

ดังนั้นจึงมีตัวแปรไม่ทราบค่าทั้งหมด n+l+m ตัว ซึ่งต้องการสมการจำนวนเท่ากันในการหาคำตอบ จึงนำเงื่อนไขสำหรับดีกรีหนึ่ง (First order) มาใช้ จะได้ n สมการจาก

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{h_i}{x_i} + ... + \lambda_l \frac{h_l}{x_i} + \beta_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + ... + \beta_m \frac{\partial g_m}{\partial x_i} = 0 \qquad i = 1,2,...,n \tag{3.40}$$

จะได้ l สมการจากเงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการ (Equality constraints)

$$h_k(x_1, x_2, ..., x_n) = 0; \quad k = 1,2,...,l \tag{3.41}$$

และจะได้ m สมการจาก

$$\beta_j g_j = 0 \rightarrow \; if \;\; \beta_j = 0 \; then \; g_j \prec 0 \qquad (3.42)$$

$$if \;\; g_i = 0 \; then \; \beta_j \succ 0$$

คำตอบที่สอดคล้องสมการทั้งหมด n+l+m สมการจะเป็นค่าที่เหมาะสมที่สุด

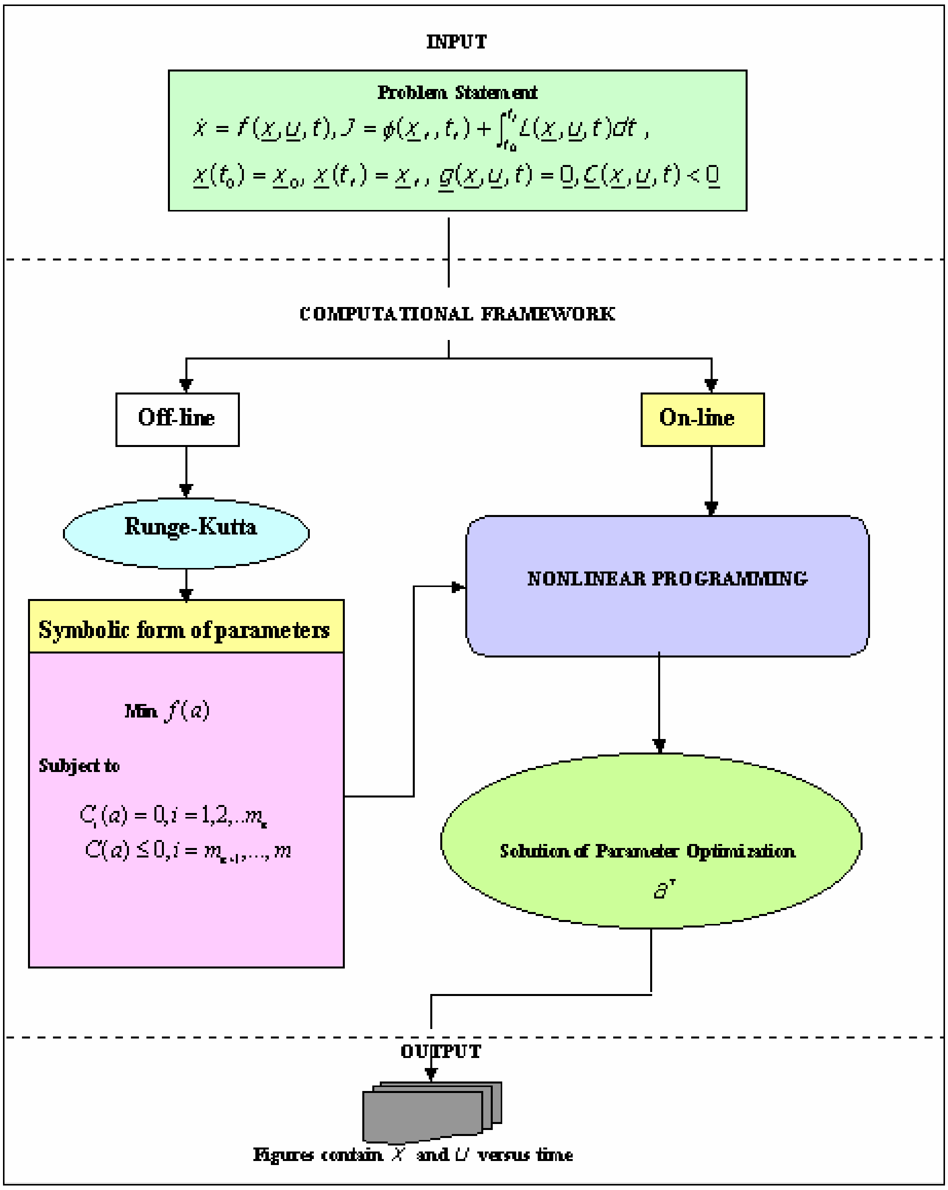
บทที่ 4
การออกแบบและวิธีใช้โปรแกรม

4.1 การออกแบบโปรแกรม

จุดประสงค์ในการออกแบบโปรแกรม คือ ต้องการให้ใช้งานกับอินพุท (Input) ที่อยู่ในรูปแบบต่างๆ (General) ได้โดยสร้างส่วนรอรับข้อมูล (Graphical user interface) ที่เหมาะสมขึ้นจาก MATLAB (GUI) และเชื่อมโยงกับกล่องเครื่องมือ (Toolbox) ต่าง ๆ ของ MATLAB โดยเก็บค่าพารามิเตอร์ (Parameters) ต่างๆ ในการคำนวณไว้ในรูปของซิมโบลิก (Symbolic) กล่าวคือ โปรแกรมนำความสามารถของ MATLAB มาใช้ 3 ส่วนได้แก่ 1.Symbolic 2.Optimization solver 3. Graphic user interface ซึ่งทั้งหมดทำงานสัมพันธ์กันตลอดเวลา โปรแกรมจะแบ่งปัญหาเป็น 3 ประเภทโดยใช้เวลาเป็นเกณฑ์ในการพิจารณา คือ 1.กรณีรู้เวลาปลายทางที่แน่นอน (Fixed end time) 2. กรณีไม่รู้เวลาปลายทางที่แน่นอน (Variable end time) 3.กรณีเวลาน้อยที่สุด (Minimum time) ซึ่งผู้ใช้จะต้องเป็นผู้กำหนดประเภทของปัญหาเอง หลังจากโปรแกรมได้รับปัญหาจากผู้ใช้แล้วจะแบ่งการทำงานเป็น 2 ขั้นตอน

1. โปรแกรมจะใช้วิธีทรานสคริปชัน (Transcription method) ด้วยวิธีของรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta) โดยการทำให้เป็นพารามิเตอร์ (Parameterize) แปลงปัญหาที่รับเข้ามาให้อยู่ในรูปของซิมโบลิก (Symbolic)สำหรับนำไปใช้ในส่วนของการแก้ปัญหาโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) และเก็บสมการพีชคณิต (Algebraic equation) ทั้งหมดไว้ในแฟ้มข้อมูล ในทำนองเดียวกันสำหรับคอสฟังชันนอล (Cost functional) โปรแกรมก็จะทำให้เป็นพารามิเตอร์ (Parameterize) ด้วยซิมป์สัน (Simpson rule)

2.โปรแกรมจะแก้ปัญหาโดยใช้การแก้ปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) ดังที่อธิบายไว้ในบทที่ 3 และใช้เกรเดียน (Gradient) เป็นสิ่งบ่งชี้ที่จะทำให้ได้ทิศทางของคำตอบเร็วขึ้น โดยผู้ใช้สามารถเลือกให้โปรแกรมคำนวณโดยใช้เกรเดียน (Gradient) หรือไม่ก็ได้ และเมื่อได้คำตอบ โปรแกรมจะรอรับคำสั่งในการแสดงกราฟซึ่งแสดงผลของสเตทวาริเอเบิล (State variable) และคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) เทียบกับ เวลา (t)



ภาพประกอบ 4.1 แสดงโฟลชาร์ท (Flowchart) ของ General proposes program

4.2 โครงสร้างของโปรแกรม

4.2.1 อินพุท(Input)สำหรับโปรแกรม

โปรแกรมจะรับค่าต่างๆ ที่เป็นองค์ประกอบของปัญหาตามที่ได้กล่าวไว้แล้วใน บทที่ 2 ซึ่งค่าอินพุททั้งหมดโปรแกรมจะรับจากการป้อนของผู้ใช้ผ่านหน้าจอรับข้อมูล (Graphic user interface)

4.2.2 ขอบข่ายการทำงาน

โครงสร้างของโปรแกรมแบ่งเป็น 2 ส่วนใหญ่ๆ เช่นเดียวกับในหัวข้อ 4.1

4.2.2.1 ขั้นตอนที่ 1 เรียกว่าส่วนออฟไลน์ (Off-line) ทำงานในส่วนของการแปลงปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุม (Optimal control) ไปเป็นปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming)

4.2.2.2 ขั้นตอนที่ 2 เรียกว่าส่วนออนไลน์ (On-line) ทำงานในส่วนของการแก้ปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น(Nonlinear programming)

4.2.3 โครงสร้างการทำงานของส่วนออฟไลน์ (Off-line)

ส่วนออฟไลน์ (Off-line) จะรับข้อมูลต่างๆ ของปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมพลศาสตร์ (Optimal control problem) จากหน้าจอรับข้อมูล (Graphic user interface) ในรูปของข้อมูลแบบสตริง (String data) และเปลี่ยนเป็นข้อมูลแบบเวกเตอร์ ในรูปของข้อมูลซิมโบลิก (Symbolic data)

โปรแกรมจะทำตัวแปรต่างๆให้เป็นพารามิเตอร์ (Parameterize) เช่น state variables control variables และ เวลา (t) หลังจากนั้นจะสร้างเวกเตอร์ของเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ด้วย คอลโลเคชัน (Collocation) ของรุงเง-กุตตา (Rung-Kutta) และ กำหนดคอสฟังชันนอล (Cost functional) ซึ่งข้อมูลทั้งหมดจะถูกแยกเก็บไว้ในไฟล์ต่างๆ ตามประเภทของข้อมูล ซึ่งไฟล์ดังกล่าวจะกลายเป็นอินพุทไฟล์ (Input file) สำหรับเอ็นแอลพีโซลเวอร์ (NLP solver) ที่มีอยู่ในโปรแกรม MATLAB คือ เอฟมินคอน (fmincon) และฟังชันภายในเอฟมินคอน (fmincon) จะทำการอ่านข้อมูลและคืนค่าที่คำนวณได้ออกมาไว้ในไฟล์

อินพุทไฟล์ (Input file) ทั้งหมดมีองค์ประกอบดังนี้

$$\text{Min } F(\underline{a})$$

Subject to

$$c_i(\underline{a}) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,m_e$$

$$c_i(\underline{a}) \leq 0, \quad i = m_e + 1, m_e + 2, \ldots m_c$$

โดยที่ m_c = จำนวนของเงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการ (Equality constraints) รวมกับจำนวนของเงื่อนไขบังคับที่เป็นอสมการ (Inequality constraints) m_e = จำนวนของเงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการ (Equality constraints)

4.2.4 โครงสร้างการทำงานของส่วนออนไลน์ (On-line)

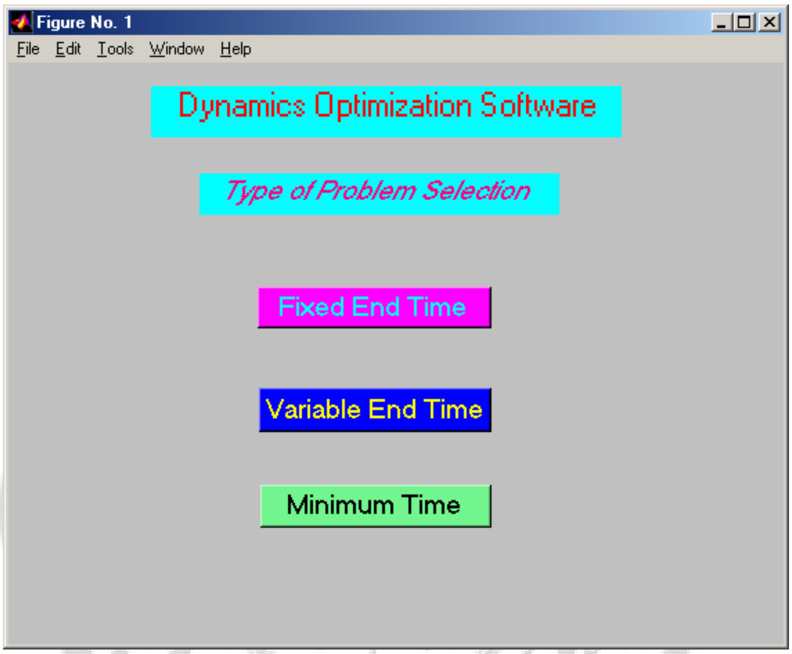
ส่วนออนไลน์(On-line) เป็นส่วนหลักการแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุด (Optimization) ใช้ฟังชันเอฟมินคอน (fmincon) ซึ่งเป็นกล่องเครื่องมือที่ใช้หาค่าที่เหมาะสมที่สุด (Optimization toolbox) ที่มีอยู่แล้วใน MATLAB เป็น ฟังชันหลักในการแก้ปัญหา ซึ่งฟังชันต่างๆ ภายในเอฟมินคอน (fmincon) จะทำหน้าที่ดังนี้ ขั้นแรกเมื่อรับอินพุท (Input) มาแล้วจะคืนค่าของเงื่อนไขบังคับที่เป็นสมการ (equality) และไม่เป็นสมการ (Inequality constraints) ซึ่งแทนค่าพารามิเตอร์สำหรับการหาค่าที่เหมาะสมที่สุด (Optimization parameter) $\underline{a}$ ลงไปแล้ว ขั้นที่สองเป็นการแทนค่าของ $F(\underline{a})$ ขั้นที่สามเป็นการรับค่าจากสองขั้นตอนแรกนำมาคำนวณจนกว่าจะได้คำตอบ a^*

โดยทั่วไปการหาคำตอบของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) จะมีการปรับเปลี่ยนค่าเกรเดียน (Gradient) ของคอสฟังชันนอล (Cost functional) และจาโคเบียน (Jacobian) ของเงื่อนไขบังคับ (Constraints) อยู่ตลอดเวลาซึ่งในที่นี้ใช้การคำนวณแบบแบ่งช่วงตรงกลาง (Central difference) ดังนั้นถ้ามีการกำหนดเกรเดียน (Gradient) และจาโคเบียน (Jacobian) ไว้แล้วการคำนวณจะรวดเร็วขึ้น

4.3 วิธีใช้โปรแกรม

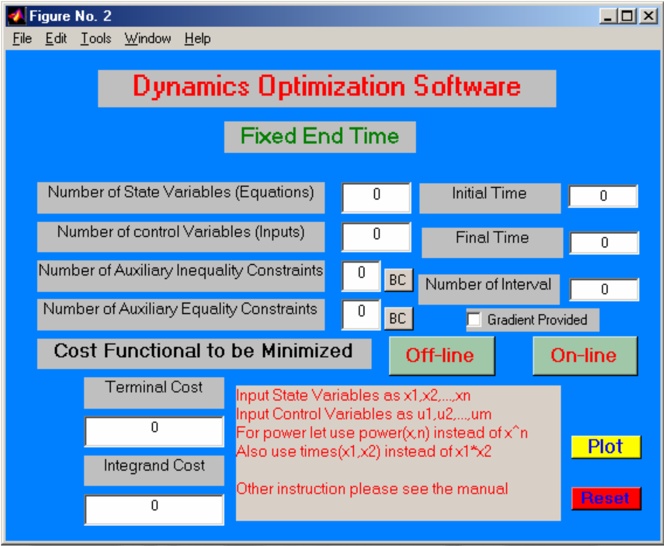
ก่อนการเริ่มใช้งาน ผู้ใช้ต้องทำความเข้าใจส่วนของหน้าจอรับข้อมูล (Graphic user interface) เสียก่อน

หน้าต่างแรกของโปรแกรมแสดงตัวเลือกสำหรับระบุชนิดของปัญหา โดยพิจารณาจากเวลาที่ปลายทาง (Final time) t_f และคอสฟังชันนอล (Cost functional) ซึ่งแบ่งเป็นกรณีที่รู้เวลาปลายทางแน่นอน (Fixed end time) กรณีไม่รู้เวลาปลายทางแน่นอน (Variable end time) และกรณีเวลาน้อยที่สุด (Minimum time)

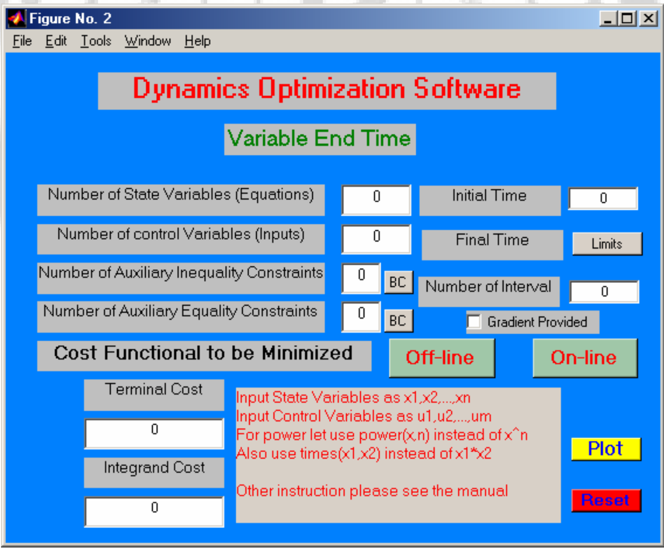


ภาพประกอบ 4.2 แสดงหน้าต่างแรกของ General purpose-program

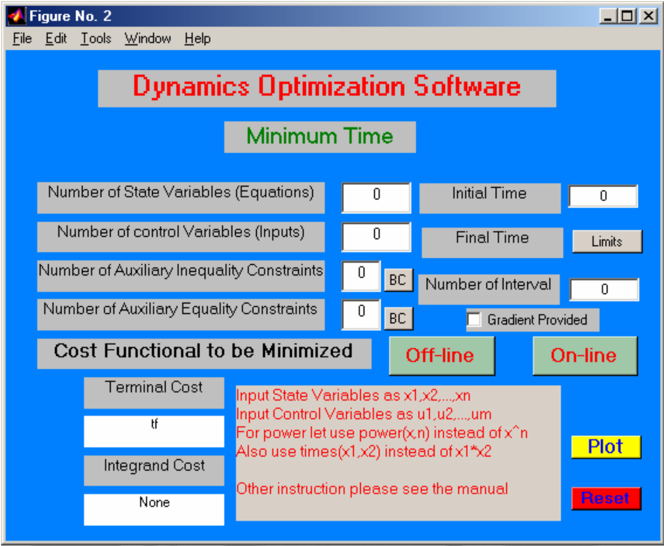
เมื่อกำหนดประเภทของปัญหาโดยคลิกที่ปุ่มแล้ว จะปรากฏหน้าต่างที่สองซึ่งแสดงส่วนรับข้อมูลต่างๆ ของปัญหาในแต่ละกรณี เมื่อใส่ข้อมูลในหน้าต่างนี้และกด enter หน้าต่างสำหรับรับรายละเอียดของแต่ละส่วนจะปรากฏขึ้นต่อไป



ภาพประกอบ 4.3 แสดงหน้าต่างที่สองของกรณีที่รู้เวลาปลายทางแน่นอน (Fixed end time)



ภาพประกอบ 4.4 แสดงหน้าต่างที่สองสำหรับกรณีไม่รู้เวลาปลายทางแน่นอน (Variable end time)



ภาพประกอบ 4.5 แสดงหน้าต่างที่สองสำหรับกรณีเวลาน้อยที่สุด (Minimum time)

4.3.1 ตัวอย่างในการใช้โปรแกรม

$$J \quad {}_{0}^{t_f} (2x_1^{2} \quad 2x_1u_1 \quad u_1^{2})dt \qquad (4.1)$$

สมการของเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด(Necessary condition) คือ

$$f(x_1,u_1) \quad \dot{x}_1 \quad x_1 \quad u_1 \qquad (4.2)$$

เงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition)

$$x_1(t_0) \quad 5 \qquad (4.3)$$

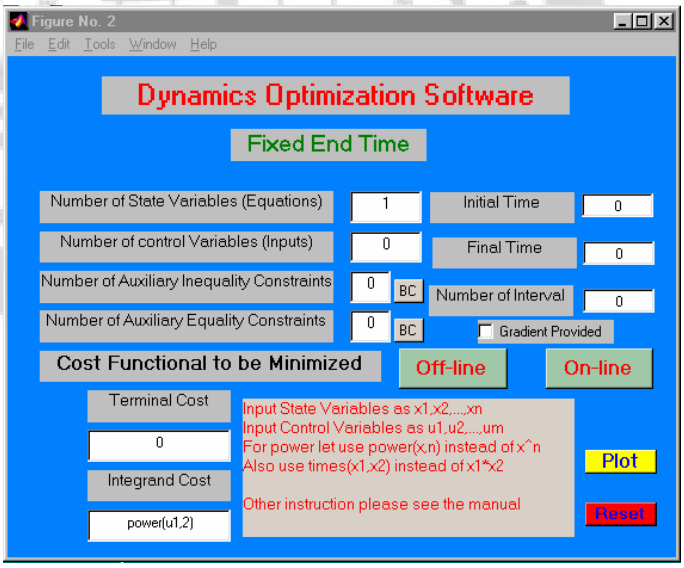
$$x_1(t_f) \quad 1 \tag{4.4}$$

เวลาที่ปลาย (Final time)

$$t_f \quad \ln(2)\,. \tag{4.5}$$

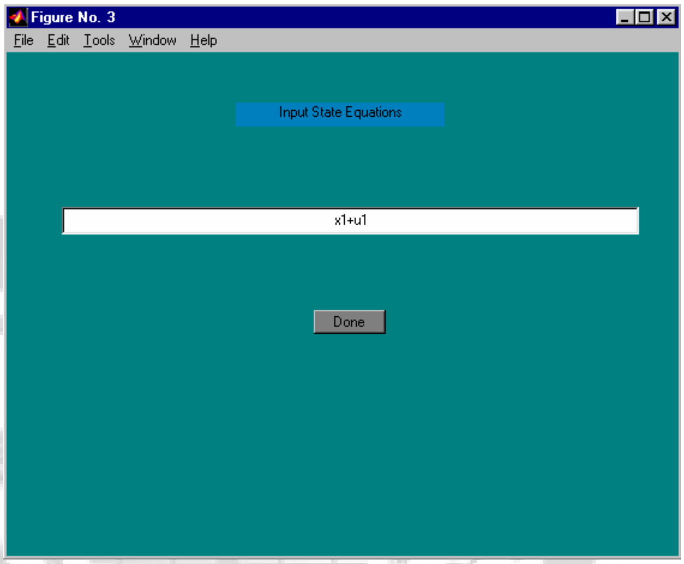
กำหนดข้อมูลข้างต้นทั้งหมดให้โปรแกรมดังนี้

1. หน้าต่างที่1 ดังในภาพประกอบ 4.2 เลือกปัญหากรณีรู้เวลาปลายทางที่แน่นอน (Fixed end time) เนื่องจากทราบเวลาที่ปลาย (Final time)
2. โปรแกรมจะปรากฏหน้าต่างที่ 2 ดังในภาพประกอบ 4.3 รอรับจำนวนของสเตทวาริเอเบิล (State variable) สำหรับในปัญหานี้คือ “1” แล้วเอนเทอร์ (Enter)



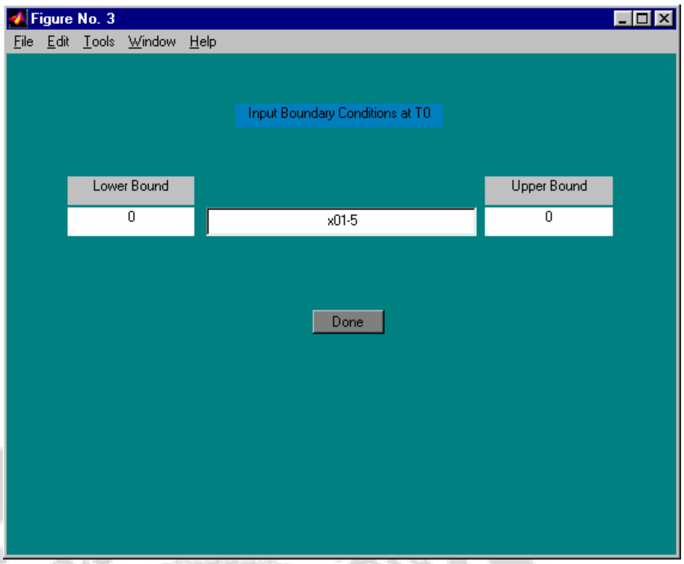
ภาพประกอบ 4.6 แสดงการกำหนดจำนวนของสเตทวาริเอเบิล (State variable)

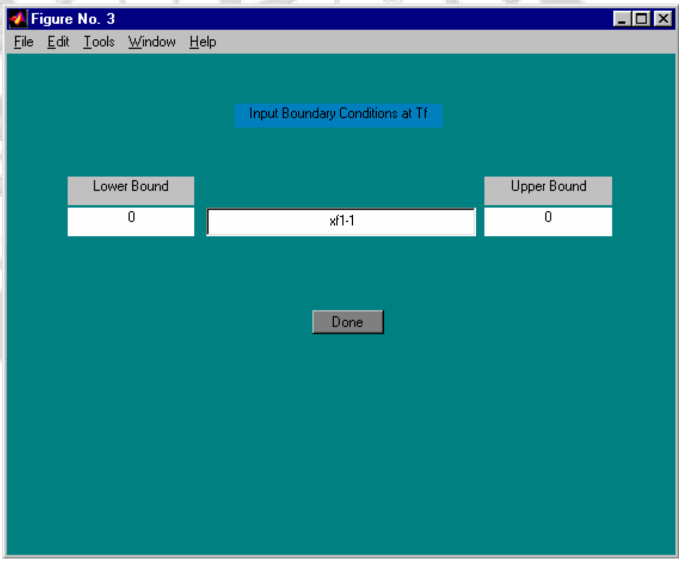
3. หน้าต่างที่ 3 จะปรากฏขึ้นรอรับสมการของสเตทวาริเอเบิล (State variable๗ ดังในสมการ 4.2 ซึ่งในที่นี้ต้องกำหนดเป็น “x1+u1” เมื่อกำหนดค่าเรียบร้อยให้คลิกที่ปุ่ม “ Done”



ภาพประกอบ 4.7 แสดงการกำหนดสเตทอิเควชัน (State equation)

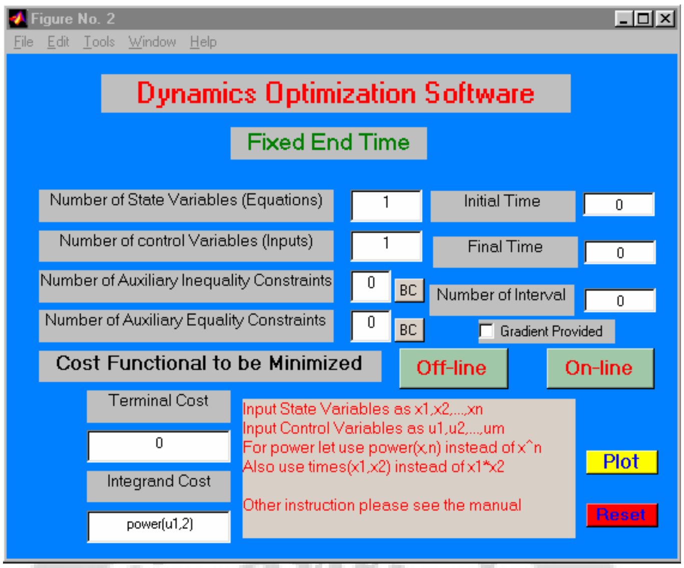
4. หน้าต่างที่ 4 จะปรากฏขึ้นรอรับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) ต่างๆ ซึ่งในที่นี้มีทั้งหมดสองเงื่อนไข ดังในสมการที่ 4.3 และ 4.4 ในที่นี้ต้องกำหนดเป็น “x01-5” และ “xf1-1” ตามลำดับ เมื่อกำหนดค่าเรียบร้อยให้คลิกที่ปุ่ม “ Done”





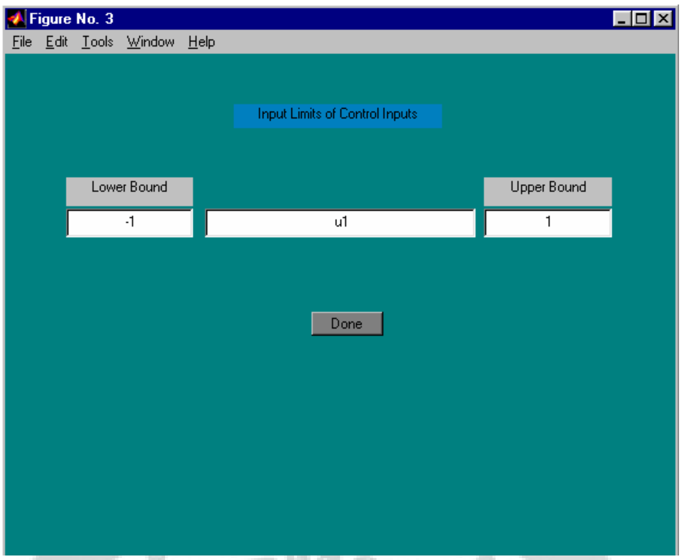
ภาพประกอบ 4.8 แสดงการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) ทั้งสองเงื่อนไข ที่ t_0 และ t_f

5. โปรแกรมจะกลับมายังหน้าต่างที่สองเพื่อรอรับจำนวนของคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) ซึ่ง ในที่นี้คือ “1” แล้วเอนเทอร์ (Enter)



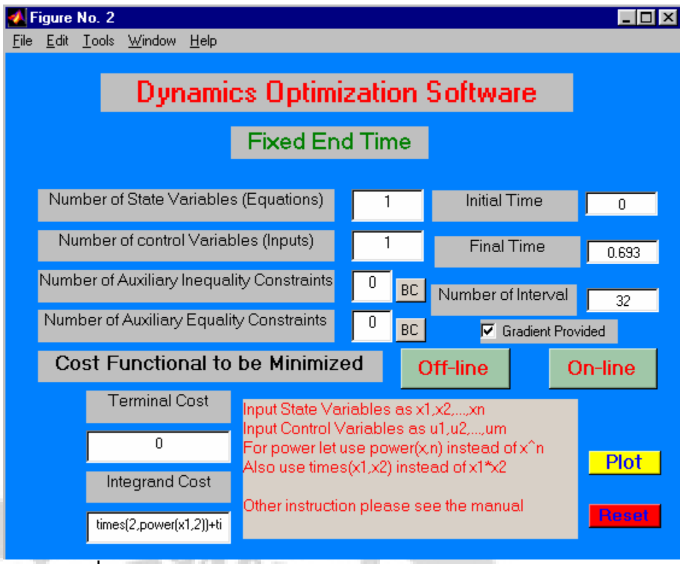
ภาพประกอบ 4.9 แสดงการกำหนดจำนวนของคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable)

6. หน้าต่างที่ 5 จะปรากฏขึ้นเพื่อรอรับขอบเขตของคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) ในที่นี้กำหนดให้เป็น -1 ถึง 1 เมื่อกำหนดค่าเรียบร้อย ให้คลิกที่ปุ่ม “Done”



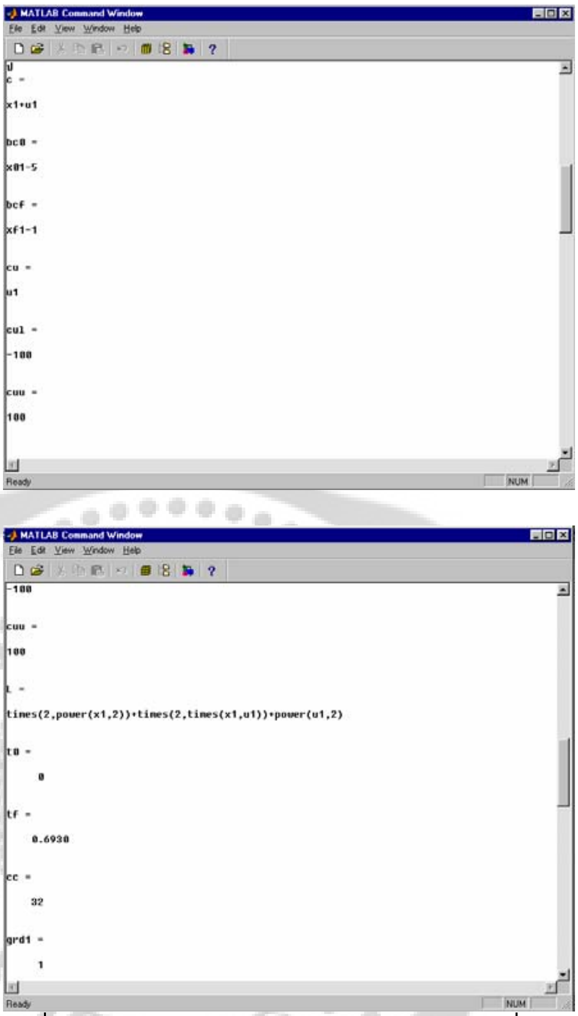
ภาพประกอบ 4.10 แสดงการกำหนดขอบเขตของคอนโทรลอินพุท (Control input)

7. โปรแกรมจะกลับมายังหน้าต่างที่สองเพื่อรอรับค่าเงื่อนไขขอบเขต (Constraints) ต่างๆ ซึ่ง ในที่นี้ไม่มี จึงกำหนดให้เป็น “0” แล้วเอนเทอร์ enter ต่อจากนั้นต้องกำหนดสมการของคอสฟังชันนอล (Cost functional) ทั้งสองส่วนคือเทอร์มินอลคอส (Terminal cost) และ อินติเกรนด์คอส (Integrand cost) ดังในสมการที่ 4.1 ซึ่งในที่นี้ เทอร์มินอลคอส(Terminal cost) คือ “0” และ อินติเกรนด์คอส (Integrand cost) คือ “times(2,power(x1,2))+times(2,times(x1,u1))+power(u1,2)” แล้วเอนเทอร์ (Enter) ต่อจากนั้นต้องกำหนดเวลาเริ่มต้น (Initial time) และเวลาที่ปลายทาง (Final time) ซึ่งในที่นี้คือ “0” และ“0.693” ตามลำดับ ต่อจากนั้นกำหนดจำนวนช่วงของเวลา (Interval) ซึ่งในที่นี้ใช้ “32” เนื่องจากต้องการค่าที่ค่อนข้างละเอียด และสุดท้ายในส่วนของเกรเดียน (Gradient) ในปัญหาส่วนใหญ่ การใช้เกรเดียน (Gradient) จะทำให้การหาคำตอบเป็นไปอย่างรวดเร็วขึ้น ซึ่งในที่นี้เลือกใช้โดยคลิกที่เช็คบ๊อค (Check box) ให้เกิดเครื่องหมายถูก



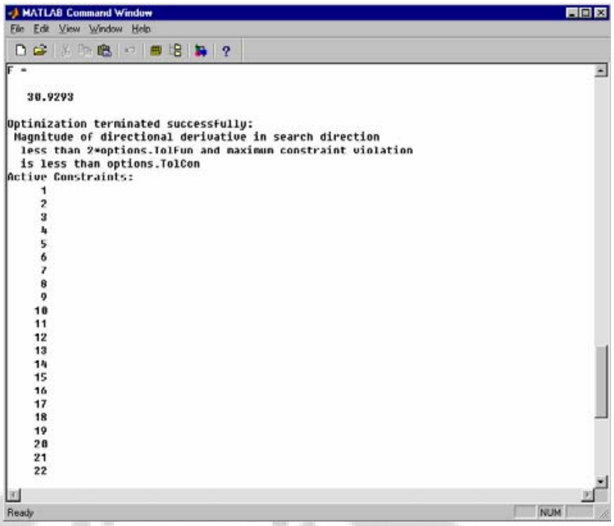
ภาพประกอบ 4.11 แสดงการกำหนดค่าเงื่อนไขบังคับ (Constraints) คอสฟังชันนอล (Cost functional) เงื่อนไขเริ่มต้น (Initial time) เวลาที่ปลาย(Final time) ช่วงเวลา(Interval) และเกรเดียน (Gradient)

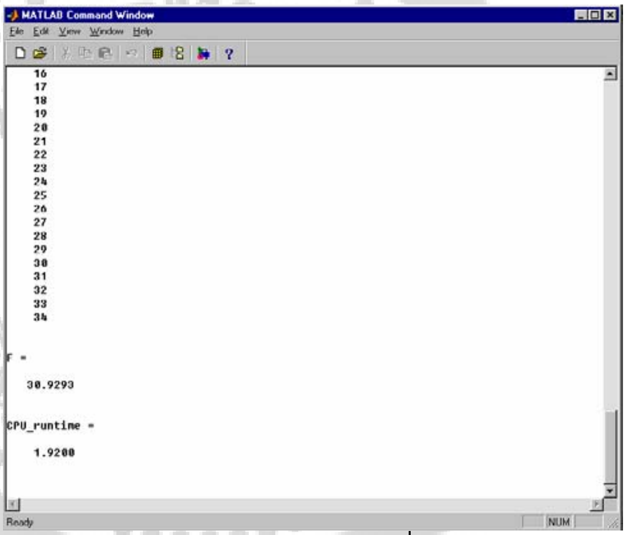
8. เมื่อกำหนดค่าต่างๆ ครบถ้วนแล้ว ให้คลิกที่ปุ่ม “Off-line” เพื่อสั่งให้โปรแกรมทำการคำนวณในส่วนออฟไลน์ (Off-line) แล้วรอจนกระทั่งการคำนวณในส่วนนี้เสร็จสิ้น (สังเกตจากปุ่มที่นูนขึ้นมาเหมือนเดิม) ที่หน้าคอมมานด์ (Command) จะปรากฏข้อความดังนี้



ภาพประกอบ 4.12 แสดงการแสดงค่าที่ปรากฏบนหน้าคอมมานด์ (Command) เมื่อทำการคำนวณในส่วนออฟไลน์ (Off-line) เสร็จสิ้น

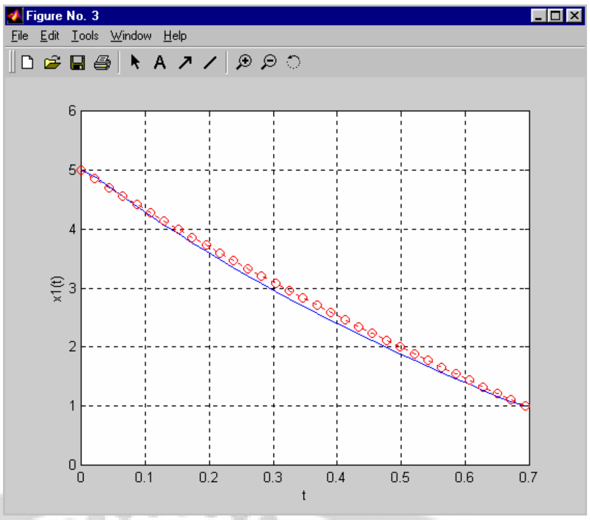
แล้วจึงคลิกที่ปุ่ม “On-line” เพื่อสั่งให้โปรแกรมทำการคำนวณในส่วนออนไลน์ (On-line) รอจนกระทั่งการคำนวณในส่วนนี้เสร็จสิ้น(สังเกตจากปุ่มที่นูนขึ้นมาเหมือนเดิมและที่หน้าคอมมานด์ (Command) จะปรากฏผลการคำนวณที่เสร็จสิ้นแล้ว)

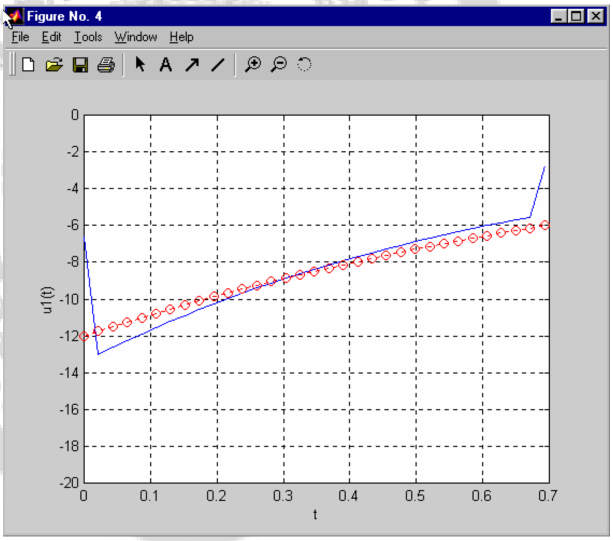




ภาพประกอบ4.13 แสดงการแสดงค่าบนหน้าคอมมาน(Command) เมื่อทำการคำนวณในส่วนออนไลน์ (On-line) เสร็จสิ้น

แล้วจึงคลิกที่ปุ่ม "Plot" เพื่อสั่งให้โปรแกรมแสดงกราฟของคำตอบของสเตทวาริเอเบิล (State variable) x(t) และคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) u(t) เทียบกับเวลา





ภาพประกอบ 4.14 แสดงกราฟความสัมพันธ์ของสเตท (State) และคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) เทียบกับเวลา เปรียบเทียบระหว่างคำตอบทางการวิเคราะห์ (Analytical) และคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical)

4.3.2 รูปแบบของการกำหนดตัวแปรสำหรับใช้กับเจนเนอรัลโพรโพส (General proposes program)

ตาราง 4.1 แสดงรูปแบบของตัวแปรที่ใช้ในโปรแกรม

Argument	Original Problem	Input form of general-purposes program
1. state variables	$x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$......	x1, x2, x3,x4,….
2. control variable	$u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t)$......	u1, u2, u3,u4,….
3. initial state variable	$x_1(t_0), x_2(t_0), x_3(t_0), x_4(t_0)$......	x01,x02,x03,x04,….
4. final state variable	$x_1(t_f), x_2(t_f), x_3(t_f), x_4(t_f)$......	xf1,xf2,xf3,xf4,….
5. การคูณของ state variables และ control variables	ตัวอย่าง $x_1(t) \quad x_2(t)$ $u_1(t) \quad u_2(t)$ $x_1(t) \quad u_1(t)$	times(x1,x2) times(u1,u2) times(x1,u1)
6. การหารของ state variables และ control variables	ตัวอย่าง $x_1(t) \div x_2(t)$ $u_1(t) \div u_2(t)$ $x_1(t) \div u_1(t)$	rdivide(x1,x2) rdivide(u1,u2) rdivide(x1,u1)
7.การยกกำลัง	ตัวอย่าง $x_1(t)^2$ $u_1(t)^8$	power (x1,2) power(u1,8)

บทที่ 5
ผลการทดสอบและวิเคราะห์ผลการทดสอบ

ในบทนี้จะแสดงการทดสอบประสิทธิภาพ ความสามารถของเจนเนอรัลโพรโพสโปรแกรม (General-purposes program) และผลการทดสอบโปรแกรม โดยพิจารณาจากการทดสอบโปรแกรมนี้กับปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมทางพลศาสตร์ทั้งหมด 6 กรณีด้วยกัน ซึ่งแต่ละกรณีก็จะแตกต่างกันด้วยเงื่อนไขของ เวลาที่จุดปลาย t_f และสเตทวาริเอเบิล (State variable) ที่ t_f คือ $\underline{x}(t_f)$

5.1 ประเภทของปัญหา

กรณีที่ 1: t_f มีค่าแน่นอน $\underline{x}(t_f)$ มีค่าแน่นอน

กรณีที่ 2: t_f มีค่าแน่นอนแต่มีบางส่วนของ $\underline{x}(t_f)$ ที่ไม่ทราบค่า

กรณีที่ 3: t_f มีค่าแน่นอนแต่ $\underline{x}(t_f)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับที่ขอบ (Boundary constraints) หรืออยู่บนทาร์เกตเคริบ (Target curve)

กรณีที่ 4: t_f ไม่ทราบค่าที่แน่นอนแต่ $\underline{x}(t_f)$ มีค่าแน่นอน

กรณีที่ 5: t_f ไม่ทราบค่าที่แน่นอนและบางส่วนของ $\underline{x}(t_f)$ ไม่ทราบค่าที่แน่นอน

กรณีที่ 6: t_f ไม่ทราบค่าที่แน่นอนแต่ $\underline{x}(t_f)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับที่ขอบ (Boundary constraints) หรืออยู่บนทาร์เกตเคริบ(Target curve)

กรณีที่ 7: ปัญหาของเวลาที่น้อยที่สุด (Minimum time)

โดยทำการทดสอบเปรียบเทียบผลระหว่างคำตอบจากการวิเคราะห์ (Analytical solution) กับคำตอบที่ได้จากโปรแกรมซึ่งเป็นวิธีทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข(Numerical method)

คำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข จะแสดงผลออกมาเป็นกราฟเปรียบเทียบระหว่างผลของคำตอบทั้งสองแบบ และหาค่าความแตกต่างระหว่างคำตอบทั้งสองแบบดังนี้

$$\text{Delta(x)} = \sqrt{(\underline{x}_a \quad \underline{x}_n)^2}$$

$$\text{Delta(u)} = \sqrt{(\underline{u}_a \quad \underline{u}_n)^2}$$

โดยที่ Delta(x) คือ ค่าสมบูรณ์ของความแตกต่างของข้อมูลทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลขและทางการวิเคราะห์ของสเตทวาริเอเบิล (State variable)

Delta(u) คือ ค่าสมบูรณ์ของความแตกต่างของข้อมูลทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลขและทางการวิเคราะห์คอนโทรลวาริเอเบิล(Control variable)

$\underline{x}_a$ คือ คำตอบทางการวิเคราะห์ของสเตทวาริเอเบิล (State variable)

$\underline{x}_n$ คือ คำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของสเตทวาริเอเบิล (State variable)

$\underline{u}_a$ คือ คำตอบทางการวิเคราะห์ของคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable)

$\underline{u}_n$ คือ คำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable)

หลังจากนั้นนำค่า Delta(x) และ Delta(u) มาหาค่า “norm” (ดูในภาคผนวก)

ซึ่ง norm มีความหมายดังนี้

$$\text{norm}(\underline{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

โดยที่ n มีค่า 1,2,3…….

$\underline{x}$ เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติเป็น 1 x n

ดังนั้น $$\text{norm}(\text{Delta}(\text{x})) = \sqrt{Delta(x_1)^2 + Delta(x_2)^2 + \ldots + Delta(x_n)^2}$$

เมื่อคำตอบทั้งสองประเภทยิ่งมีค่าใกล้เคียงกันมาก จะได้ค่า Delta(x) ที่ยิ่งมีค่าน้อย และจะส่งผลให้ค่า norm มีค่าน้อยด้วย ดังนั้นค่าDelta(x) ที่แสดงถึงความแม่นยำของคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข คือ ค่าที่มีความใกล้เคียงศูนย์มากที่สุดหรือ เท่ากับศูนย์ และค่า norm ที่ดีที่สุดต้องมีค่าใกล้เคียงศูนย์เช่นกัน

คำตอบแบบวิเคราะห์ (Analytical solutions) หาได้จากการใช้เงื่อนไขสำหรับการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary condition) ด้วยวิธีของแคลคูลัสออฟวาริเอชัน (Calculus of variation) และ

หลักการของค่าสูงสุด (Maximum principles) หรือหลักการของค่าต่ำสุด (Minimum principle) ดังได้กล่าวไว้ในบทที่ 2

5.2 ทดสอบเจนเนอรัลโพรโพสโปรแกรม (General-Purposes Program) **ด้วยปัญหาคลาสสิคอล** (Classical Problem)

5.2.1 กรณีที่ 1: t_f **มีค่าแน่นอน** $\underline{x}(t_f)$ **มีค่าแน่นอน**

ปัญหานี้ต้องการค่าที่เหมาะสมที่สุดของสเตทวาริเอเบิล (State variables) คอนโทรลวาริ-เอเบิล (Control variables) ที่จะควบคุมระบบให้ดำเนินจากเวลาเริ่มต้น (Initial time) t_0 ไปสู่เวลาที่ปลาย (Final time) t_f ด้วยค่าที่จุดปลายที่ทราบค่าแน่นอน ปัญหาชนิดนี้เรียกได้อีกอย่างว่า ปัญหาแบบ "Fixed end time- fixed end point "

ตัวอย่างที่ 1

ปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดที่ทำให้ (Cost functional) มีค่าน้อยที่สุด

$$J = \int_0^{t_f} (2x_1^2 + 2x_1u_1 + u_1^2)\,dt \tag{5.1}$$

จะได้สมการสำหรับเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุดดีกรีหนึ่ง (First order) คือ

$$f(x_1,u_1) = \dot{x}_1 = x_1 + u_1 \tag{5.2}$$

โดยที่ไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ที่อยู่ในรูปของคอนโทรลอินพุท(Control input) และสเตทวาริเอเบิล (State variable) และมีเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) และเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) ดังนี้

$$x_1(t_0) = 5 \tag{5.3}$$

$$x_1(t_f) = 1 \tag{5.4}$$

$$t_f = \ln(2)\,. \tag{5.5}$$

5.2.1.2 **ลักษณะของปัญหา**

เป็นปัญหาแบบรู้เวลาและตำแหน่งที่ปลายที่แน่นอน (Fixed end time-fixed end point) ที่มีหนึ่งคอนโทรลอินพุท (Control input) และหนึ่งสเตทวาริเอเบิล (State variable) ไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ในรูปของตัวแปรได ๆ จากหลักการของค่ามากที่สุด (Maximum principle) หรือหลักการของค่าน้อยที่สุด (Minimum principle) เราสามารถหาเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary condition) สำหรับปัญหานี้ได้ดังนี้

(i) $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u})$ กับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions)

(ii) $\dot{\underline{\lambda}} = \quad \dfrac{\partial H}{\partial \underline{x}}$ โดยที่ $H = F + \underline{\lambda}^T \underline{f}$

(iii) $\dfrac{\partial H}{\partial \underline{u}} = 0$ and H = เป็นค่าคงที่ตลอดการคำนวณ

5.2.1.3 **การคำนวณทางการวิเคราะห์** (Analytical calculation)

เนื่องจากเป็นปัญหาของการหาค่าต่ำสุด ดังนั้นจะได้ (i), (ii), (iii) อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ตามลำดับดังนี้

$$H = \quad 2x_1^2 \quad 2x_1u_1 \quad u_1^2 + \lambda(x_1 + u_1) \tag{5.6}$$

$$\dot{x}_1 = x_1 + u_1 \quad (5.7)$$

$$\dot{\lambda} = 4x_1 + 2u_1 - \lambda \quad (5.8)$$

$$u_1 = (\lambda - 2x_1)/2 \quad (5.9)$$

จากสมการข้างต้น จะได้ค่าควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (Optimal control) $u_1(t)$ และเส้นทางควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (Optimal control path) $x_1(t)$

$$x_1^*(t) = Ae^{t} + Be^{-t} \quad (5.10)$$

$$\lambda^*(t) = 2Ae^{t} - 2Be^{-t} \quad (5.11)$$

$$u_1^*(t) = -2Be^{-t} \quad (5.12)$$

โดยที่ A และB คือค่าคงที่สำหรับคำตอบทั่วไป

สุดท้ายจะหาค่า A และB ได้จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) ที่ $t = 0$ และ $t_f = \ln(2)$

$$x_1(0) = 5$$

$$A + B = 5 \quad (5.13)$$

$$x_1(t_f) = 1$$

$$Ae^{\ln(2)} + Be^{-\ln(2)} = 1 \quad (5.14)$$

$A = \quad 1$ และ $B = 6$ ดังนั้นจะได้เส้นทางที่เหมาะสมที่สุด (Optimal path) และ ค่าควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (Optimal control) ดังนี้

$$\overset{*}{x}_1(t) = 6e^{\ t} \quad e^{t} \tag{5.15}$$

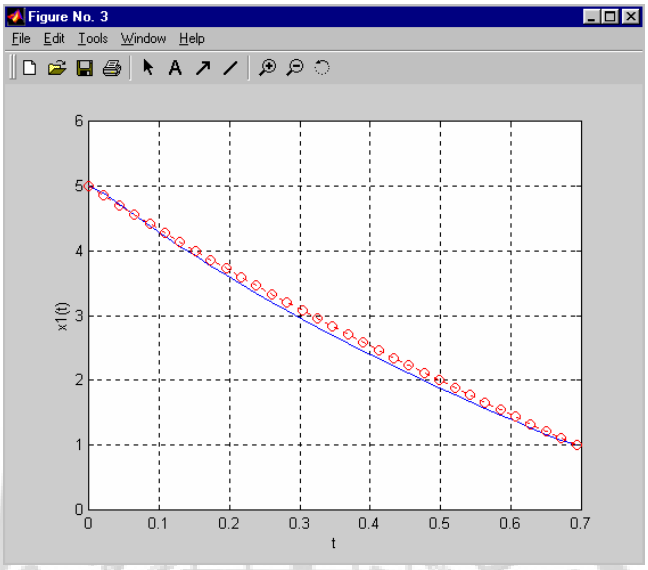
$$u_1^{*}(t) = \quad 12e^{\ t} \tag{5.16}$$

5.2.1.4 ผลที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

ปัญหาแบบที่รู้เวลาปลายทางแน่นอน (Fixed end time) ที่นำมาใช้ในโปรแกรมเจนเนอรอลโพรโพสนี้ (General-purpose) นี้ เนื่องจากไม่มีเงื่อนไขขอบเขต (Constraints) ที่อยู่ในรูปของคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) u_1 ดังนั้นขอบเขตของคอนโทรลอินพุท (Control input) จึงเป็น $\left[\ \ \infty, \infty\right]$. ดังนั้นค่าที่มีขนาดใหญ่มากพอที่จะแทนขอบเขตนี้ได้จึงกำหนดให้อยู่ที่ $\left[\ \ 10000, 10000\right]$

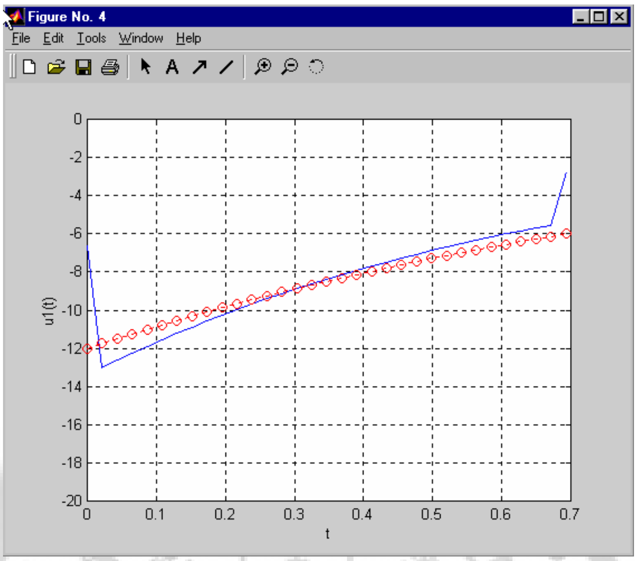
ที่ช่วงเวลา (Time interval) $N = 32$ ค่าที่เหมาะสมที่สุดของสเตท (State) และคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variables) สามารถแสดงได้ดังภาพประกอบ 5.1 ถึง 5.2 คำตอบแบบวิเคราะห์ (Analytical solution) จะเป็นเส้นประและวงกลม และคำตอบที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมจะแสดงเป็นเส้นต่อเนื่อง

ภาพประกอบ 5.1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวาริเอเบิล (State variable) x(t) เทียบกับเวลาสำหรับตัวอย่างที่1



จากกราฟจะเห็นได้ว่า แนวโน้มของคำตอบทั้งสองประเภทเป็นไปในทางเดียวกัน และสอดคล้องพอดีกับเงื่อนไขขอบเขต(Boundary condition) ได้ค่า norm ของ Delta(x_1) = 1.1331 ซึ่งมีค่าน้อย หมายความว่าค่าทั้งสองมีค่าใกล้เคียงกัน (คำตอบแบบวิเคราะห์ (Analytical solution) จะเป็นเส้นประและวงกลม และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

ภาพประกอบ 5.2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) u(t) เทียบกับเวลา t สำหรับตัวอย่างที่1



กราฟของ $u_1(t)$ และ t แสดงให้เห็นว่าแนวโน้มของคำตอบทั้งสองค่อนข้างใกล้เคียงกันในช่วงกลางๆของเวลาทั้งหมด แต่มีความแตกต่างในสภาวะเริ่มต้นและสภาวะสุดท้าย ได้ค่า norm ของ Delta(u_1) = 16.798 ซึ่งมีค่ามากกว่าศูนย์ค่อนข้างมาก หมายความว่ามีบางส่วนของคำตอบที่แตกต่างกัน แต่ก็ยังอยู่ในค่าที่ยอมรับได้ (คำตอบแบบ วิเคราะห์ (Analytical solution) จะเป็นเส้นประและวงกลม และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

5.2.2 กรณีที่ 2: t_f มีค่าแน่นอนแต่มีบางส่วนของ $\underline{x}(t_f)$ ที่ไม่ทราบค่า

กรณีนี้ต่างกับกรณีแรกเนื่องจากทราบเวลาที่จุดสุดท้ายที่แน่นอนแต่ไม่ทราบสเตทวาริเอเบิล (State variable) ที่เวลาสุดท้าย

ตัวอย่างที่ 2

$$\min J = x_1(t_f)^2 + \int_0^{\pi/2} u_1^2 dt \qquad (5.17)$$

Subject to

สเตทวาริเอเบิล (State equations)

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5.18)$$

$$\dot{x}_2 = \quad x_1 + u_1 . \quad (5.19)$$

เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ต่างๆ ดังนี้

ที่ $t_0 = 0$

$$x_1(t_0) = 0 \text{ และ } x_2(t_0) = 1 \quad (5.20)$$

ที่ $t_f = \frac{\pi}{2}$

$$x_1(t_f) \text{ และ } x_2(t_f) \text{ ไม่ทราบค่า} \quad (5.21)$$

ต้องการหาค่าที่เหมาะสมที่สุด โดยที่สภาวะที่จุดสุดท้ายไม่ทราบค่า

5.2.2.1 **ลักษณะของปัญหา**

ปัญหานี้ประกอบด้วยสองสเตทวาริเอเบิล (State variables) กับหนึ่งคอนโทรลอินพุท (Control input) และไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) อยู่ในรูปของตัวแปรใดๆ และที่สภาวะสุดท้าย t_f ค่าสเตทวาริเอเบิล (State variables) ทั้งสองมีค่าอิสระ

5.2.2.2 **การคำนวณทางการวิเคราะห์** (Analytical calculation)

จากคอสฟังชันนอล (Cost functional) และเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการฮามิลโตเนี่ยน (Hamiltonian) ได้ดังนี้

$$H = \quad u_1^{\,2} + \lambda_1 x_2 + \lambda_2(\quad x_1 + u_1) \quad (5.22)$$

ดังนั้นเงื่อนไขในการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary condition) สามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังนี้

$$\text{(i)}\quad \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u})$$

เงื่อนไขขอบเขต(Boundary conditions)

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{5.23}$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + u_1 \tag{5.24}$$

$$\text{(ii)}\quad \dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial \underline{x}}$$

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_2 \tag{5.25}$$

$$\dot{\lambda}_2 = \lambda_1 \tag{5.26}$$

$$\text{(iii)}\quad \frac{\partial H}{\partial \underline{u}} = 0$$

$$u_1^* = \frac{\lambda_2}{2} \tag{5.27}$$

สเตทวาริเอเบิล (State variable) โคสเตท (Co-state) และคอนโทรลอินพุท (Control input) สามารถหาค่าได้ในรูปของค่าคงที่ไม่เจาะจง (Arbitrary constant) ทั่วไปจากสมการ (i), (ii), (iii) ดังนี้

คำตอบของโคสเตท (Co-state) ในรูปของค่าคงที่ไม่เจาะจง (Arbitrary constant) k กับ l

$$\lambda_1(t) = k\cos(t + l) \tag{5.28}$$

$$\lambda_2(t) = k\sin(t+l) \tag{5.29}$$

$$x_1(t) = A\cos(t) + B\sin(t) + (kt\sin(t))/4 \tag{5.30}$$

$$x_2(t) = \quad A\sin(t) + B\cos(t) + k(\sin(t) + t\cos(t))/4 \tag{5.31}$$

$\lambda_1(t_f) = 0$ และ $\lambda_2(t_f) = 0$.
ที่ $t_f = \pi/2$ โคสเตท (Co-state) จะเป็น

$$\lambda_1 = \quad 2x_1(\frac{\pi}{2}) \text{ and } \lambda_2(t_f) = 0 \tag{5.32}$$

ดังนั้น $l = 0$ และ ความสัมพันธ์ระหว่าง λ_2 และ u_1 คือ

$$u_1 = k\cos(t)/2\,. \tag{5.33}$$

สเตทอิเควชัน (State equation) จะกลายเป็น

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{5.34}$$

$$\dot{x}_2 = \quad x_1 + k\cos(t)/2 \tag{5.35}$$

และเส้นทางที่เหมาะสมที่สุด (Optimal path) $x_1(t)$ and $x_2(t)$ สามารถหาค่าอยู่ในรูปของค่าคงที่ A และ B

$$x_1(t) = A\cos(t) + B\sin(t) + (kt\sin(t))/4 \quad (5.36)$$

$$x_2(t) = \quad A\sin(t) + B\cos(t) + k(\sin(t) + t\cos(t))/4 \quad (5.37)$$

เนื่องจาก $\lambda_2(t_f) = 0$ ที่ $t = \pi/2$ จึงสามารถหาค่าคงที่ A B และ k จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ที่ $t = 0$, $x_1(t_f) = 0, x_2(t_f) = 1$

$$A = 0 \quad (5.38)$$

$$B = 1 \quad (5.39)$$

$$k = \quad 8/(4+\pi) \quad (5.40)$$

ดังนั้นจะได้

$$x_1(t) = \sin(t) + \frac{2}{(4+\pi)} t\sin(t) \quad (5.41)$$

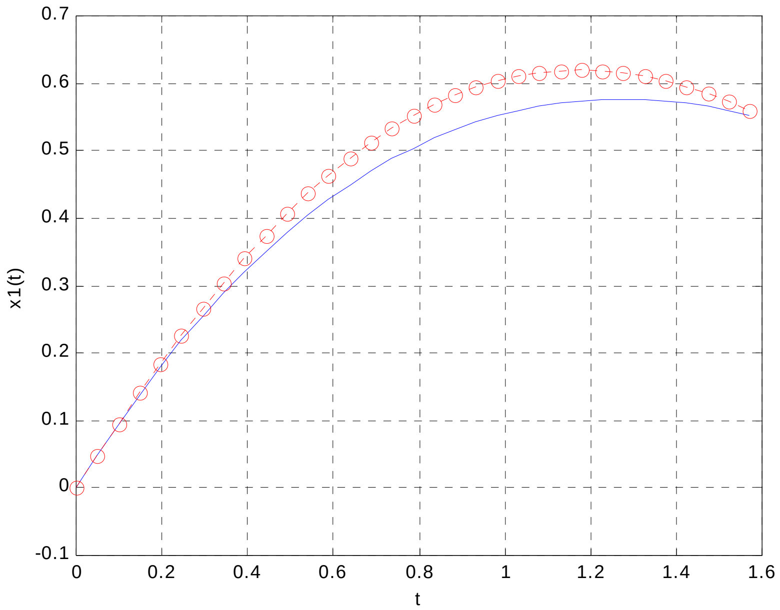
$$x_2(t) = \cos(t) + \frac{2}{(4+\pi)} (\sin(t) + t\cos(t)) \quad (5.42)$$

$$u_1(t) = \frac{4}{(4+\pi)} \cos(t) \quad (5.43)$$

5.2.2.3 ผลที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

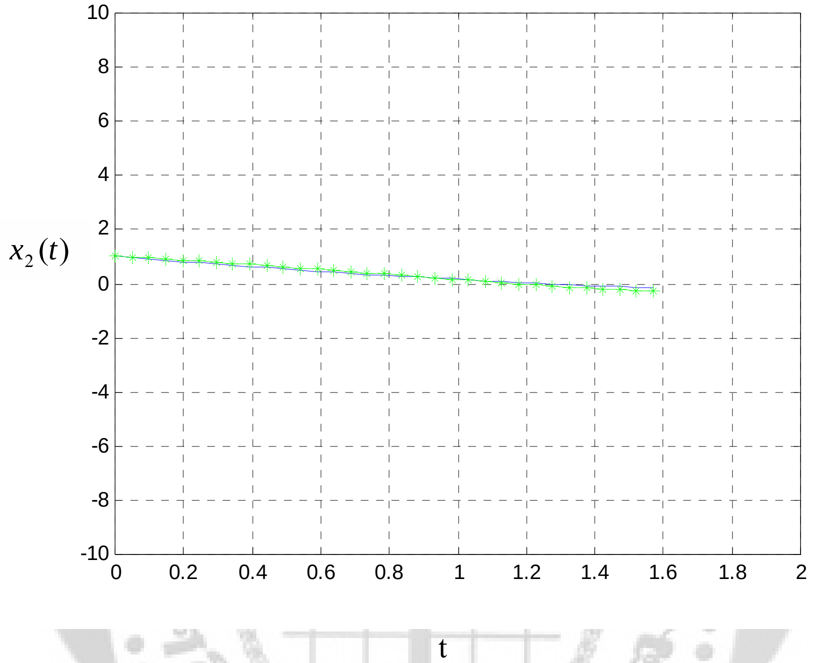
ปัญหากรณีที่รู้เวลาปลายทางที่แน่นอน (Fixed end time) ที่นำมาใช้ในโปรแกรมเจนเนอรัลโพรโพส (General-purpose) นี้ เนื่องจากไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ที่อยู่ในรูปของคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) u_1 ดังนั้นขอบเขตของคอนโทรลอินพุท (Control input) จึงเป็น $[\ \ \infty, \infty]$ ดังนั้นค่าที่มีขนาดใหญ่มากพอที่จะแทนขอบเขตนี้ได้จึงกำหนดให้อยู่ที่ $[\ \ 10000, 10000]$

ภาพประกอบ 5.3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวาริเอเบิล (State variable) x(t) เทียบกับเวลาสำหรับตัวอย่างที่ 2



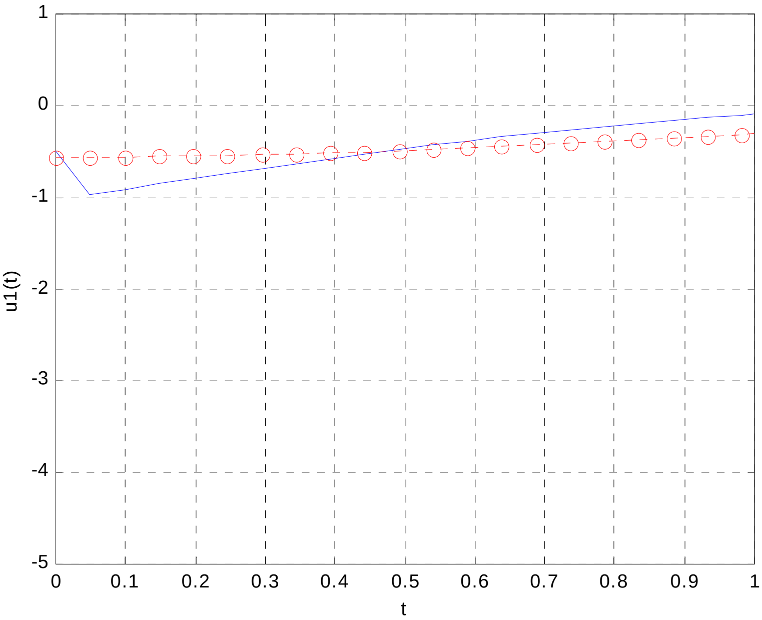
จากกราฟจะเห็นได้ว่า แนวโน้มของคำตอบทั้งสองประเภทเป็นไปในทางเดียวกัน และสอดคล้องพอดีกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) ได้ค่า norm ของ Delta(x_1) = 0.0637 ซึ่งมีค่าใกล้เคียงศูนย์มาก หมายความว่า คำตอบทั้งสองมีค่าใกล้เคียงกันเกือบทั้งหมด (คำตอบแบบวิเคราะห์ (Analytical solution) จะเป็นเส้นประและวงกลม และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

ภาพประกอบ5.4 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) u(t) เทียบกับเวลา t สำหรับตัวอย่างที่2



จากกราฟจะเห็นได้ว่า แนวโน้มของคำตอบทั้งสองประเภทเป็นไปในทางเดียวกัน และสอดคล้องพอดีกับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) ได้ค่า norm ของ Delta(x_1) = 0.1699 ซึ่งมีค่าน้อยมาก หมายความว่า คำตอบทั้งสองมีค่าใกล้เคียงกันเกือบทั้งหมด (คำตอบแบบวิเคราะห์ (Analytical solution) จะเป็นเส้นประกับ * และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

ภาพประกอบ5.5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) u(t) เทียบกับเวลา t สำหรับตัวอย่างที่2



จะเห็นได้ว่ากราฟของคำตอบแบบวิเคราะห์ (Analytical solution) และคำตอบจากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) ค่อนข้างแตกต่างกันโดยเฉพาะ ณ เวลาที่เวลาเริ่มต้นและที่ปลาย ได้ค่า norm ของ Delta(x_2) = 0.4686 ซึ่งมีค่าค่อนข้างน้อย หมายความว่าคำตอบทั้งสองมีค่าที่แตกต่างกันบางส่วน (คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นประและวงกลม และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

5.2.3 กรณีที่ 3: t_f มีค่าแน่นอนแต่ $\underline{x}(t_f)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับที่ขอบ (Boundary constraints) **หรืออยู่บนทาร์เกตเคริบ**(Target curve)

ในกรณีนี้อธิบายได้ว่าสเตทวาริเอเบิล (State variable) สามารถหาค่าได้ตามเวลาเริ่มต้น (Initial time) หรือเวลาสุดท้าย (Final time) แต่เป็นค่าที่วางตัวอยู่บนทาร์เกตเคริบ (Target curve) $g(\underline{x}(t_f), t_f)$ นั่นเอง ซึ่งในตัวอย่างนี้สเตทวาริเอเบิล (State variables) นั้นหาค่าได้แน่นอนสำหรับเวลาเริ่มต้น (Initial time) t_0 แต่เป็นฟังชันที่วางตัวอยู่บนทาร์เกตเซอร์เฟซ (Target surface) หรือทาร์เกตเคริบ (Target curve) สำหรับเวลาที่ปลายที่ทราบค่าแน่นอน t_f.

ตัวอย่างที่ 3

ระบบเป็นดีกรีสอง มีสเตทอิเควชัน (State equation) ดังนี้

$$\dot{x}_1 = u_1 \quad x_2 \tag{5.43}$$

$$\dot{x}_2 = \quad u_1 \tag{5.44}$$

โดยที่ u_1 เป็นค่าที่ควบคุมได้ เราต้องการหาคำตอบที่ทำให้ระบบเคลื่อนที่จากสภาวะ-$(x_1(t_0), x_2(t_0)) = (0,0)$ ที่เวลาเริ่มต้น $t_0 = 0$ ไปสู่สภาวะหรือตำแหน่งที่วางตัวอยู่บนทาร์เกตเคริบ (Target curve) $x_1(t_f) + x_2(t_f) = 0$ ที่ $t_f = 2$ และทำให้ค่าคอสฟังชันนอล (Cost functional) $J = \int_0^2 u_1^{\,2}\, dt.$ มีค่าต่ำที่สุด

5.2.3.1 ลักษณะของปัญหา

ปัญหานี้มีสองสเตทวาริเอเบิล (State variables) และหนึ่งคอนโทรล (Control input) ไม่มี เงื่อนไขบังคับ(Constraints) ซึ่ง ณ เวลาที่ปลาย t_f สเตทวาริเอเบิล (State variable) จะมีค่าสอดคล้องตามเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ของทาร์เกตเคริบ (Target curve)

5.2.3.2 การคำนวณทางการวิเคราะห์ (Analytic calculation)

$$H = \; u_1^{\,2} + \lambda_1(u_1 \quad x_2) + \lambda_2(\;\; u_1) \qquad (5.45)$$

$$H = \text{คงที่} \;,\; \forall\, t \qquad (5.46)$$

หาค่าที่เหมาะสมที่สุดตามเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary conditions)

(i) $\underline{\dot{x}} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u})$ กับเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) และทาร์เกตเคริบ (Target curve)

$$\dot{x}_1 = u_1 \quad x_2 \qquad (5.47)$$

ซึ่ง

$$\dot{x}_2 = \quad u_1 \qquad (5.48)$$

$$x_{01} = 0 \qquad (5.49)$$

$$x_{02} = 0 \qquad (5.50)$$

$$g(x_1(t_f), x_2(t_f), t) = x_1(t_f) + x_2(t_f) = 0 \qquad (5.51)$$

(ii) $\dot{\lambda} = \quad \dfrac{\partial H}{\partial \underline{x}}$

$$\dot{\lambda}_1 = 0 \qquad (5.52)$$

$$\dot{\lambda}_2 = \lambda_1 \qquad (5.53)$$

(iii) $\dfrac{\partial H}{\partial \underline{u}} = 0$

$$u_1 = \frac{\lambda_1 \quad \lambda_2}{2} \qquad (5.54)$$

(iv) $\underline{\lambda}(t_f) = \sum_{j=1}^{p} \mu_j \dfrac{\partial g_j}{\partial \underline{x}}$ ที่ t_f โดยที่ p คือ จำนวนของทาร์เกตเคริบ (Target curve)

$$\frac{\partial g_1}{\partial \underline{x}} = \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \qquad (5.55)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(t_f) \\ \lambda_2(t_f) \end{bmatrix} = \mu_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.56}$$

ดังนั้น

$$\lambda_1(t_f) = \lambda_2(t_f) \tag{5.57}$$

จาก (i), (ii), (iii) สเตทวาริเอเบิล (State variable) คอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) และ โคสเตท (Co-state) กับค่าคงที่ไม่เจาะจง (Arbitrary constants) จะได้

$$\lambda_1(t) = A \tag{5.58}$$

$$\lambda_2(t) = Be^t + A \tag{5.59}$$

$$x_1(t) = \quad De^{\quad t} + \frac{A}{2}t + \frac{B}{4}e^t + E \tag{5.60}$$

$$x_2(t) = De^{\quad t} + \frac{A}{2} + \frac{B}{4}e^t \tag{5.61}$$

$$u_1(t) = \frac{A}{2} + \frac{B}{2}e^t \tag{5.62}$$

โดยที่ A B D และ E คือค่าคงที่ไม่เจาะจง (Arbitrary constants)

จากเงื่อนไขขอบเขต(Boundary condition) และ $g(x_1(t_f), x_2(t_f), t) = 0$ สามารถหาค่าคงที่ต่างได้คือ $A = \quad 1, B = 0, D = 1$, and $E = \frac{3}{2}$ ดังนั้น

เส้นทางที่เหมาะสมที่สุด (Optimal trajectory) ค่าควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (Optimal control input) และ คอสฟังชันนอล (Cost functional) คือ

$$x_1(t) = \quad 1/2e^{\quad t} \quad 1/2t + (1 + 1/2) \tag{5.63}$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}e^{\quad t} \quad \frac{1}{2} \tag{5.64}$$

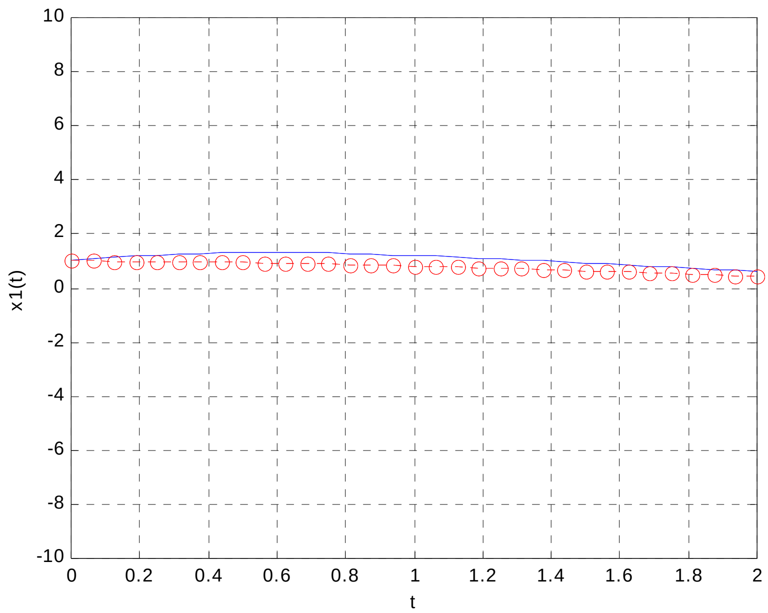
$$\lambda_1(t) = \quad 1 \qquad (5.65)$$

$$\lambda_2(t) = \quad 1 \qquad (5.66)$$

5.2.3.3 ผลที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

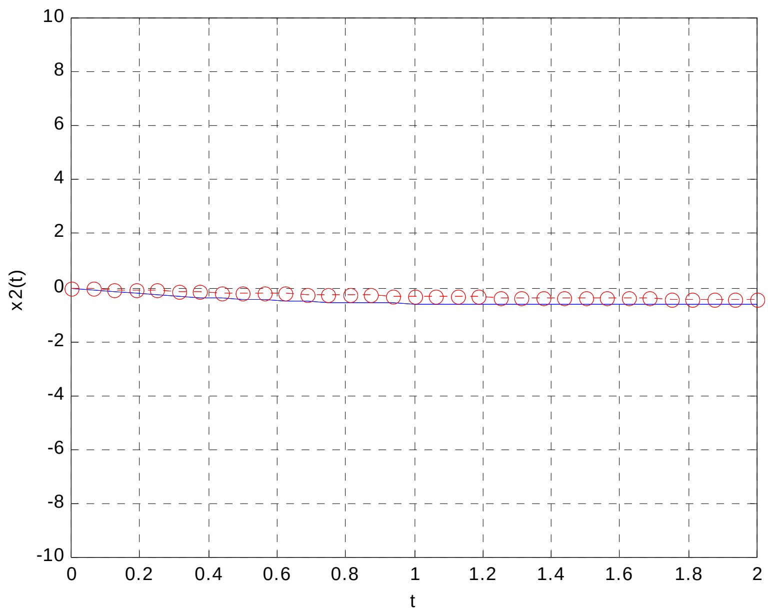
ปัญหากรณีรู้เวลาปลายทางที่แน่นอน (Fixed end time) ที่นำมาใช้ในโปรแกรมเจนเนอรัลโพรโพส (General-purpose) นี้ เนื่องจากไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ที่อยู่ในรูปของคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) u_1 ดังนั้นขอบเขตของคอนโทรลอินพุท (Control input) จึงเป็น $[\ \infty,\infty]$. ดังนั้นค่าที่มีขนาดใหญ่มากพอที่จะแทนขอบเขตนี้ได้จึงกำหนดให้อยู่ที่ $[\ 10000, 10000]$

ภาพประกอบ 5.6 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวาริเอเบิล (State variable) $x_1(t)$ เทียบกับเวลาสำหรับตัวอย่างที่ 3



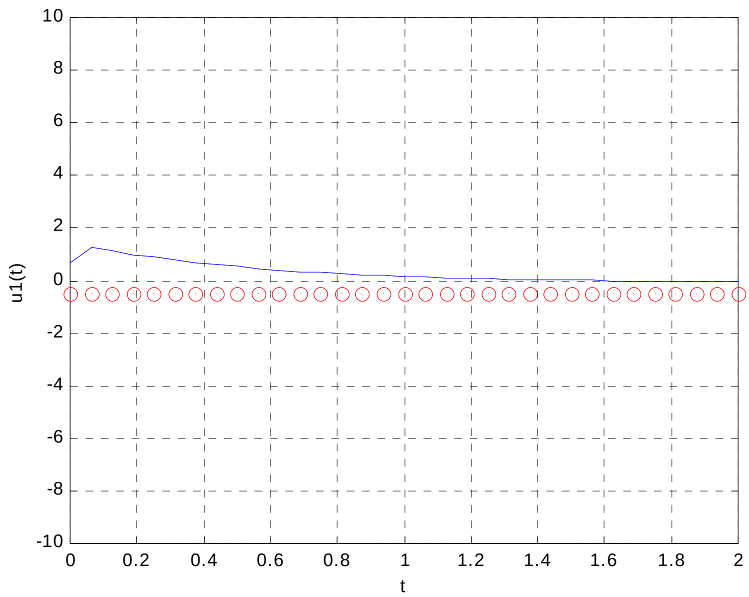
กราฟของคำตอบแบบวิเคราะห์ (Analytical solution) และคำตอบจากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) ของสเตทวาริเอเบิล (State variable) $x_1(t)$ มีแนวโน้มใกล้เคียงกัน และสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) ได้ค่า norm ของ Delta(x_1) = 0.1545 ซึ่งมีค่าใกล้เคียงศูนย์ หมายความว่า คำตอบทั้งสองมีค่าใกล้เคียงกันเกือบทั้งหมด (คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นประและวงกลม และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

ภาพประกอบ 5.7 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวาริเอเบิล (State variable) $x_2(t)$ เทียบกับเวลาสำหรับตัวอย่างที่ 3



กราฟของคำตอบแบบวิเคราะห์ (Analytical solution) และคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) ของสเตทวาริเอเบิล (State variable) $x_2(t)$ มีแนวโน้มใกล้เคียงกัน และสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) ของปัญหา ได้ค่า norm ของ Delta(x_1) = 0.1545 ซึ่งมีค่าใกล้เคียงศูนย์ หมายความว่า คำตอบทั้งสองมีค่าใกล้เคียงกันเกือบทั้งหมด (คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นประและวงกลม และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

ภาพประกอบ5.8 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) u(t) เทียบกับเวลา t สำหรับตัวอย่างที่ 3



กราฟของคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) $u_1(t)$ และ t แสดงให้เห็นความแตกต่างเล็กน้อยของคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) และคำตอบทางการวิเคราะห์ (Analytical solution) โดยเฉพาะเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial time) และเงื่อนไขที่ปลาย (Final time) แต่เมื่อพิจารณาจาก t=1 ถึง t=2 แนวโน้มของค่า $u_1(t)$ ของคำตอบทั้งสองค่อนข้างใกล้เคียงกัน ได้ค่า norm ของ Delta(u_1) = 1.2586 (คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นประและวงกลม และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

5.2.4 กรณีที่ 4: t_f ไม่ทราบค่าที่แน่นอนแต่ $\underline{x}(t_f)$ มีค่าแน่นอน

ปัญหาประเภทนี้คือการควบคุมระบบจากสภาวะเริ่มต้น $\underline{x}(t_0)$ ที่ทราบเวลาเริ่มต้นที่แน่นอน t_0 ไปสู่สภาวะปลายทาง $\underline{x}(t_f)$ ที่ไม่ทราบเวลาที่ปลาย t_f

ตัวอย่างที่ 4

พิจารณาคอสฟังชันนอล (Cost functional)

$$\min\ J = \frac{1}{2}\int_0^{t_f}(x_1^{\ 2} + u_1^{\ 2})dt \qquad (5.71)$$

Subject to

$$\dot{x}_1 = \quad x_1 + \sqrt{3}u_1 \qquad (5.72)$$

ต้องการหาค่าควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (Optimal control) $u_1(t)$ และเส้นทางที่เหมาะสมที่สุด (Optimal path) $x_1(t)$ ที่จะทำให้ $x_1(t_0) = 2$ ที่ $t = 0$ และ $x_1(t_f) = 4$, u_1 ไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints)

5.2.4.1 **ลักษณะของปัญหา**

ปัญหานี้มีลักษณะคล้ายกับในตัวอย่างที่ 1 ที่ทราบค่าต่างๆ ที่สภาวะเวลาสุดท้าย ไม่มีเงื่อนไขขอบเขต (Constraints) ในรูปของคอนโทรลอินพุท (Control input) และไม่ทราบค่าเวลาสุดท้าย t_f

5.2.4.2 **การคำนวณทางการวิเคราะห์** (Analytical calculation)

จากคอสฟังชันนอล (Cost functional) และ สเตทอิเควชัน(State equation) สามารถหาสมการฮามิลโตเนี่ยน (Hamiltonian) ได้ดังนี้

$$H = \quad \frac{1}{2}x_1^{\ 2} \quad \frac{1}{2}u_1^{\ 2} + \lambda_1(\quad x_1 + \sqrt{3}) \qquad (5.73)$$

ได้คำตอบทั่วไปคือ

$$\lambda_1(t) = Ae^{2t} \quad Be^{\ 2t}/3 \qquad (5.74)$$

$$x_1(t) = Ae^{2t} + Be^{\ 2t} \qquad (5.75)$$

$$u_1(t) = \sqrt{3}(Ae^{2t} \quad Be^{\ 2t}/3) \qquad (5.76)$$

จาก initial condition $x_{01} = 2$ จะได้

$$A + B = 0\,. \qquad (5.77)$$

จาก necessary condition จะได้

$$AB = 0. \qquad (5.78)$$

เมื่อแก้สมการทั้งสองข้างต้น จะได้ $A = 2$, $B = 0$, และ $t_f = \frac{1}{2}\ln(2)$ ดังนั้นจะได้คำตอบของ $x_1(t)$, $u_1(t)$ ดังนี้

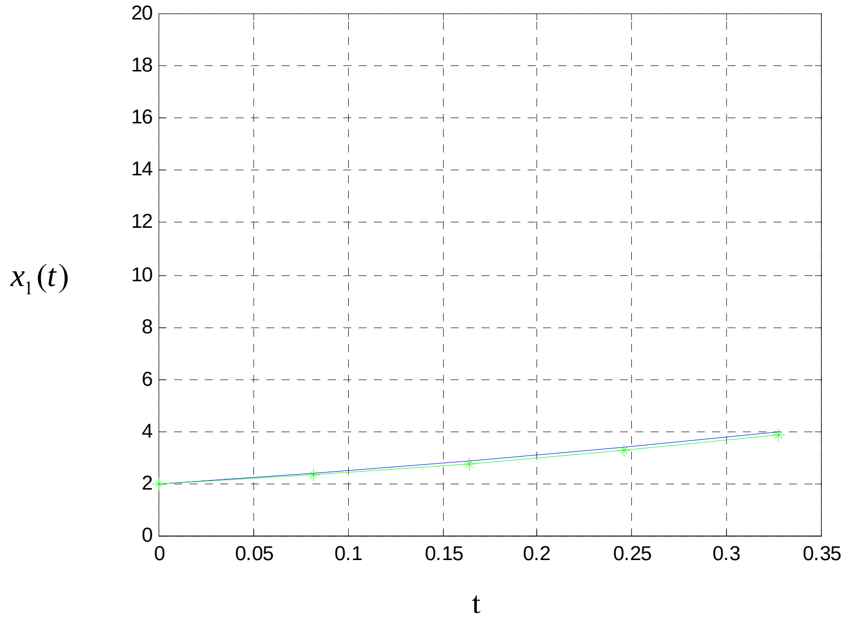
$$x_1^*(t) = 2e^{2t} \tag{5.79}$$

$$u_1^*(t) = 2\sqrt{3}e^{2t} \tag{5.80}$$

5.2.4.3 **ผลที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข**

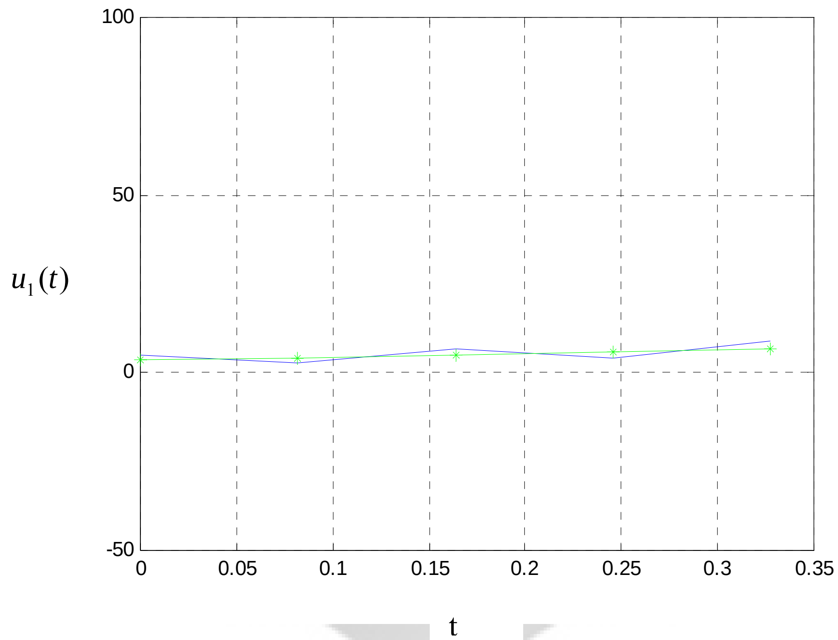
ปัญหาแบบ fixed end time ที่นำมาใช้ในโปรแกรม general-purpose นี้ เนื่องจากไม่มีค่า constraints ที่อยู่ในรูปของ control variable u_1 ดังนั้นขอบเขตของ control input จึงเป็น $[\ \infty, \infty]$. ดังนั้นค่าที่มีขนาดใหญ่มากพอที่จะแทนขอบเขตนี้ได้จึงกำหนดให้อยู่ที่ $[\ 10000, 10000]$

ภาพประกอบ 5.9 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง state variable $x_1(t)$ เทียบกับเวลาสำหรับตัวอย่างที่ 4



กราฟแสดงให้เห็นว่า $x_1(t)$ ที่เป็นคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) และวิธีทางการวิเคราะห์ (Analytical solution) มีแนวโน้มที่คล้ายคลึงกัน และคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) ได้ค่า norm ของ Delta(x_1) = 0.1477 ซึ่งมีค่าใกล้เคียงศูนย์ หมายความว่าคำตอบส่วนใหญ่มีค่าใกล้เคียงกัน (คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นต่อเนื่องสลับกับ * และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

ภาพประกอบ5.10 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง control variable u(t) เทียบกับเวลา t สำหรับตัวอย่างที่4



จากกราฟแสดงให้เห็นว่า $u_1(t)$ ที่เป็นคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) และวิธีทางการวิเคราะห์ (Analytical solution) มีแนวโน้มที่ใกล้เคียงกัน ได้ค่า norm ของ Delta(x_1) = 0.3278 ซึ่งมีค่าใกล้เคียงศูนย์ หมายความว่าคำตอบส่วนใหญ่มีค่าใกล้เคียงกัน(คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นต่อเนื่องสลับกับ * และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

5.2.5 กรณีที่ 5: t_f ไม่ทราบค่าที่แน่นอนและบางส่วนของ $\underline{x}(t_f)$ ไม่ทราบค่าที่แน่นอน

ปัญหาประเภทนี้คือ การควบคุมให้ระบบดำเนินจากสภาวะเริ่มต้น $\underline{x}(t_0)$ ไปสู่สภาวะสุดท้ายที่ไม่ทราบค่าแน่นอน $\underline{x}(t_f)$ ณ เวลาสุดท้าย t_f ที่ไม่ทราบค่าแน่นอน

ตัวอย่างที่ 5

สำหรับระบบที่มี $t_0 = 0$ และไม่ทราบค่า t_f ที่แน่นอน

$$x_1 = x_2 \qquad (5.87)$$

$$x_2 = u_1 \qquad (5.88)$$

$$x_1(t_0) = 0 \qquad (5.89)$$

$$x_2(t_0) = 1 \qquad (5.90)$$

$$x_1(t_f) = 1 \qquad (5.91)$$

$x_2(t_f) =$ ไม่ทราบค่า (5.92)

คอสฟังชันนอล(Cost functional)

$$J = \int_0^{t_f} u^2{}_1 dt \qquad (5.93)$$

โดยที่ control input u_1 เป็น constrained คือ $|u_1|$ 1 แต่ไม่มี constrained สำหรับ state variable ต้องการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดที่สอดคล้องกับคำตอบทั้งหมด

5.2.5.1 **ลักษณะของปัญหา**

ปัญหานี้มีขอบเขตจำกัดในส่วนของคอนโทรลอินพุท (Control input) u_1 ไม่ได้เป็นฟังชันของอนุพันธ์อันดับสอง แต่สามารถจัดให้อยู่ในประเภทของปัญหาที่รู้เวลาที่ปลาย โดยที่ไม่ทราบเวลาสุดท้าย t_f ที่แน่นอน

5.2.5.2 **การคำนวณทางการวิเคราะห์** (Analytic calculation)

$$H = u_1{}^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u_1 \qquad (5.94)$$

หลังจากแก้สมการของเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary condition) ทั้งหมดแล้วจะได้โคสเตท (Co-states) สเตทวาริเอเบิล (State variables) และคอนโทรลอินพุท (Control input) ดังนี้

$$\lambda_1^*(t) = c_1 \tag{5.95}$$

$$\lambda_2^*(t) = c_1 t + c_2 \tag{5.96}$$

$$x_1^*(t) = \frac{c_1}{12}t^3 + \frac{c_2}{4}t^2 + c_3 t + c_4 \tag{5.97}$$

$$x_2^*(t) = 3\frac{c_1}{12}t^2 + \frac{c_2}{2}t + t \tag{5.98}$$

$$u_1^*(t) = (c_1 t + c_2)/2 \tag{5.99}$$

จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) สามารถหาค่าคงที่และได้คำตอบของเส้นทางการเคลื่อนที่ที่เหมาะสมที่สุด (Optimal trajectories) และค่าควบคุมที่เหมาะสมที่สุด(Optimal control input) และ t_f ได้ดังนี้

$$x_1(t) = t \tag{5.100}$$

$$x_2(t) = 1 \tag{5.109}$$

$$u_1(t) = 0 \tag{5.110}$$

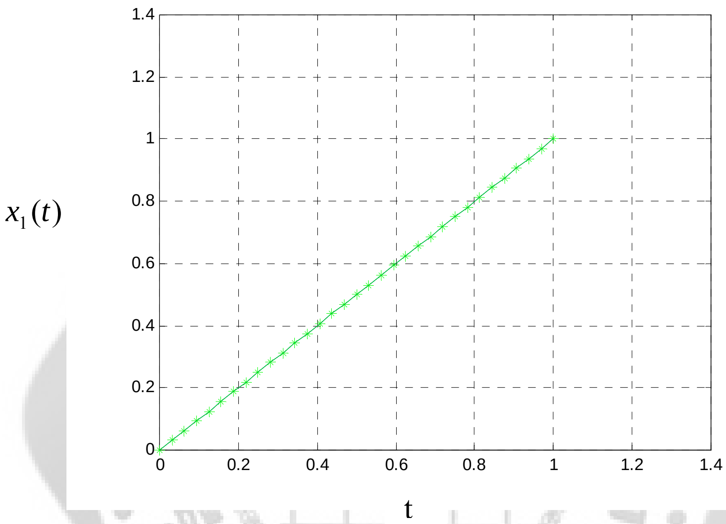
$$t_f = 1 \tag{5.111}$$

5.2.5.3 ผลที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

ปัญหากรณีที่รู้เวลาปลายทางที่แน่นอน (Fixed end time) ที่นำมาใช้ในโปรแกรม เจนเนอรัลโพรโพส (General-purpose) นี้ เนื่องจากไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ที่อยู่ในรูปของ

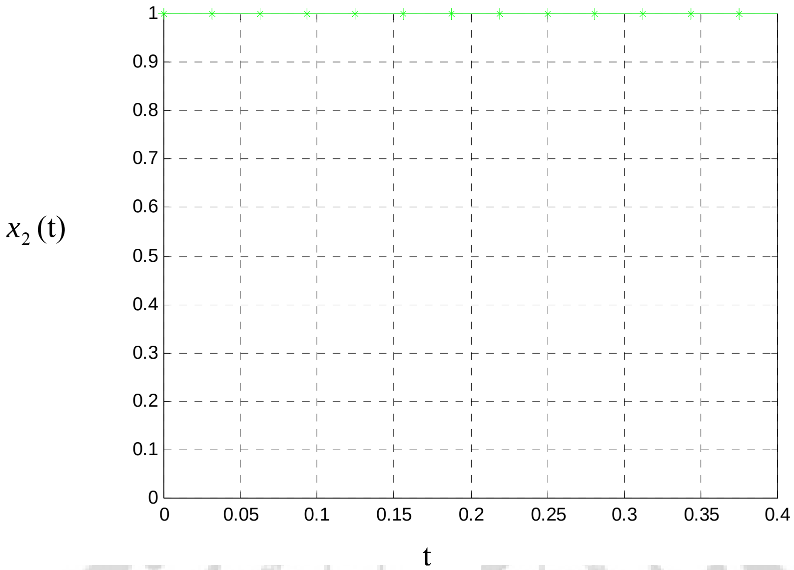
คอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) u_1 ดังนั้นขอบเขตของคอนโทรลอินพุท (Control input) จึงเป็น $[\ \infty,\infty]$. ดังนั้นค่าที่มีขนาดใหญ่มากพอที่จะแทนขอบเขตนี้ได้จึงกำหนดให้อยู่ที่ $[\ 10000, 10000]$

ภาพประกอบ 5.10 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวาริเอเบิล (State variable) $x_1(t)$ เทียบกับเวลา สำหรับตัวอย่างที่ 5



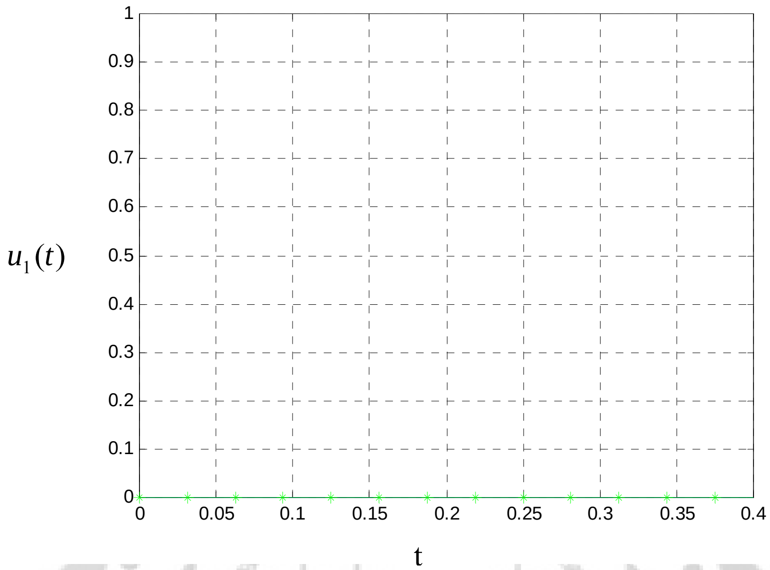
กราฟแสดงสเตทวาริเอเบิล (State variable) $x_1(t)$ ที่เป็นคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) และคำตอบจากการวิเคราะห์ (Analytical solution) ซึ่งมีแนวโน้มที่ใกล้เคียงกันมากจนเกือบจะเป็นเส้นเดียวกัน และระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) ได้ค่า norm ของ Delta(x_1) = 0.1250 ซึ่งมีค่าใกล้เคียงศูนย์ หมายความว่า คำตอบส่วนใหญ่มีค่าใกล้เคียงกัน (คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นต่อเนื่องสลับกับ * และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

ภาพประกอบ 5.12 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวาริเอเบิล (State variable) $x_2(t)$ เทียบกับเวลาสำหรับตัวอย่างที่ 5



กราฟแสดงสเตทวาริเอเบิล (State variable) $x_2(t)$ ที่เป็นคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) และคำตอบจากการวิเคราะห์ (Analytical solution) ซึ่งมีแนวโน้มที่ใกล้เคียงกันมากจนเกือบจะเป็นเส้นเดียวกัน และระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) ได้ค่า norm ของ Delta(x_2) = 0.001 ซึ่งมีค่าใกล้เคียงศูนย์มาก หมายความว่าคำตอบส่วนใหญ่มีค่าใกล้เคียงกันจนเกือบจะเท่ากันทั้งหมด (คำตอบจากการวิเคราะห์(Analytical solution) จะเป็นเส้นต่อเนื่องสลับกับ * และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

ภาพประกอบ5.13 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) u(t) เทียบกับเวลา t สำหรับตัวอย่างที่ 5



กราฟแสดงผล $u_1(t)$ ที่เป็นคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) และคำตอบที่ได้จากการวิเคราะห์ (Analytical solution) นั้นใกล้เคียงกัน ได้ค่า norm ของ Delta(u_1) = 0.2605 ซึ่งมีค่าใกล้เคียงศูนย์ หมายความว่าคำตอบส่วนใหญ่มีค่าใกล้เคียงกัน (คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นต่อเนื่องสลับกับ * และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

5.2.6 กรณีที่ 6: t_f ไม่ทราบค่าที่แน่นอนแต่ $\underline{x}(t_f)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับที่ขอบเขต (Boundary constraints) หรือวางตัวอยู่บนทาร์เกตเคริบ (Target curve)

ปัญหาประเภทนี้มีสเตทวาริเอเบิล (State variable) ที่ทราบค่าแน่นอน ณ เวลาสุดท้ายที่ไม่ทราบค่า t_f แต่สเตทวาริเอเบิล (State variable) วางตัวอยู่บนทาร์เกตเคริบ (Target curve) $g(\underline{x}(t_f), t_f)$ ซึ่งในตัวอย่างนี้สเตทวาริเอเบิล (State variables) ณ เวลาเริ่มต้น t_0 นั้นทราบค่าแน่นอน ในขณะที่สเตทวาริเอเบิล (State variable) ที่ t_f.ซึ่งไม่ทราบค่า เป็นฟังชันที่วางตัวอยู่บนทาร์เกตเคริบ (Target surface)

ตัวอย่างที่ 6

ยานเคลื่อนที่ด้วยความเร็วหนึ่งหน่วยในทิศทาง u_1 สัมพัทธ์กับความเร็ว V ในทิศทาง , มีสมการการเคลื่อนที่ดังนี้

$$\dot{x}_1 = \cos(u_1) \quad V \tag{5.112}$$

$$\dot{x}_2 = \sin(u_1) \tag{5.113}$$

ยานเคลื่อนที่จากจุดกำเนิด $(x_{01} = 0, x_{02} = 0)$ ที่ $t_0 = 0$ ไปยังจุดสุดท้ายที่มีตำแหน่งอยู่บนเส้น $xf_1 + xf_2 = k$ และทำให้ค่าต่อไปนี้มีค่าต่ำที่สุด

$$J = \int_0^{t_f} (1 + \sin(u_1))dt \, . \tag{5.114}$$

ต้องการหาคำตอบที่เป็นค่าเหมาะสมที่สุดของสเตทวาริเอเบิล (State variables) และคอนโทรลอินพุท(Control input) สำหรับกรณีที่ $V = \quad 1 + \sqrt{3}$, $k = 1$ และมี u_1 สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\sin(u_1) + 1 = (1 + V)\cos(u_1) \tag{5.115}$$

5.2.6.1 ลักษณะของปัญหา

ปัญหานี้ประกอบด้วยสองสเตทวาริเอเบิล (State variables) และหนึ่งคอนโทรลอินพุท (Control input) และมีหนึ่งทาร์เกตเคริบ (Target curve) ที่เวลาสุดท้าย t_f ซึ่งไม่ทราบค่า

5.2.6.2 การคำนวณทางการวิเคราะห์ (Analytical calculation)

ปัญหามีเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดต่ำสุด (Necessary condition) และเงื่อนไขขอบเขต(Boundary condition) ดังนี้

(i) $\underline{\dot{x}} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u})$

$$\dot{x}_1 = \cos(u_1) \quad (\;\; 1+\sqrt{3}) \qquad (5.116)$$

$$\dot{x}_2 = \sin(u_1) \qquad (5.117)$$

$$x_1(t_0) = 0 \qquad (5.118)$$

$$x_2(t_0) = 0 \qquad (5.119)$$

$$g(x_1(t_f), x_2(t_f), t) = x_1(t_f) + x_2(t_f) \quad 1 = 0 \qquad (5.120)$$

(ii) $\dot{\lambda} = \quad \dfrac{\partial H}{\partial \underline{x}}$

$$\dot{\lambda}_1 = 0 \qquad (5.121)$$

$$\lambda_2 = 0 \qquad (5.122)$$

(iii) $\dfrac{\partial H}{\partial \underline{u}} = 0$

$$\cos(u_1) + \lambda_1(\;\; \sin(u_1)) + \lambda_2(\cos(u_1)) = 0\,. \qquad (5.123)$$

จากเงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) $g(xf_1, xf_2, t)$ สามารถหาคำตอบของสเตทวาริเอเบิล (State variables) คอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) และเวลาที่ปลาย (Final time) t_f ได้ดังนี้

$$x_1^*(t) = (\cos(\frac{\pi}{6}) \quad (\;\; 1+\sqrt{3}))t \qquad (5.124)$$

$$x_2^*(t) = \sin(\frac{\pi}{6})t \qquad (5.125)$$

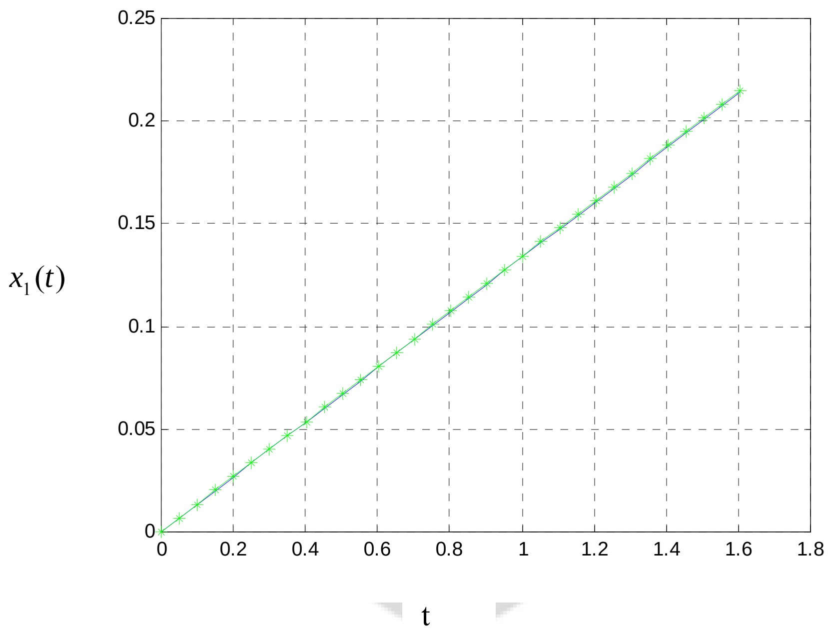
$$u_1^*(t) = \frac{\pi}{6} \qquad (5.126)$$

$$t_f = \frac{2}{3 \quad \sqrt{3}} \qquad (5.127)$$

5.2.6.3 **ผลที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข**

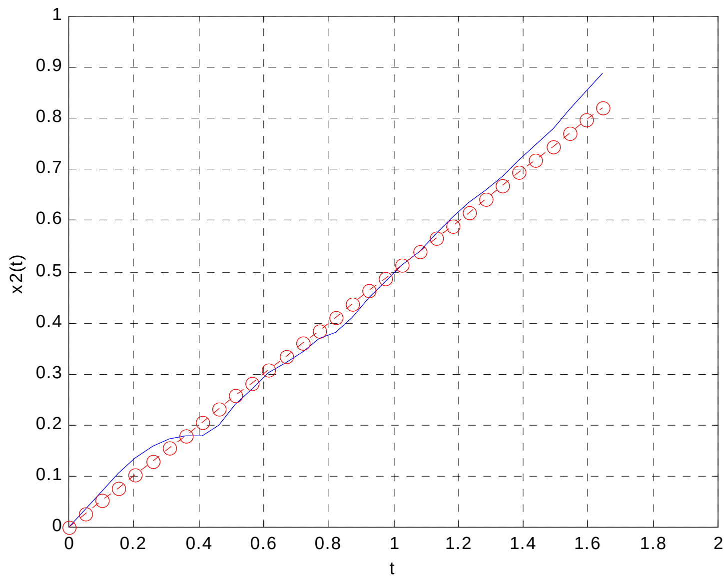
ปัญหากรณีที่ทราบเวลาปลายทางที่แน่นอน (Fixed end time) ที่นำมาใช้ในโปรแกรม เจนเนอรอลโพรโพส (General-purpose) นี้ เนื่องจากไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ที่อยู่ในรูปของคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) u_1 ดังนั้นขอบเขตของคอนโทรลอินพุท (Control input) จึงเป็น , . ดังนั้นค่าที่มีขนาดใหญ่มากพอที่จะแทนขอบเขตนี้ได้จึงกำหนดให้อยู่ที่ 10000, 10000

ภาพประกอบ 5.14 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวาริเอเบิล (State variable) $x_1(t)$ เทียบกับเวลาสำหรับตัวอย่างที่ 6



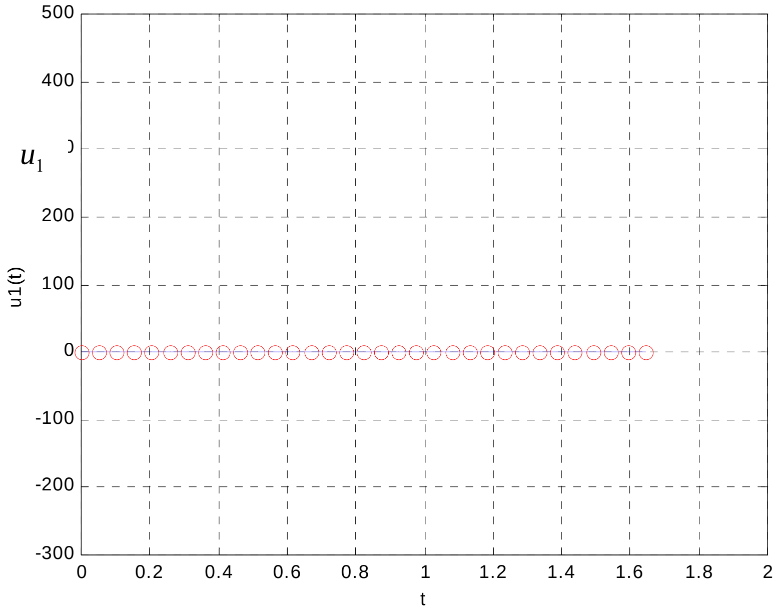
กราฟแสดงสเตทวาริเอเบิล (State variable) $x_1(t)$ ที่เป็นคำตอบจากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) และคำตอบทางการวิเคราะห์ (Analytical solution) มีแนวโน้มที่ใกล้เคียงกันมากจนเกือบจะเป็นเส้นเดียวกัน และคำตอบทางnumerical สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) ได้ค่า norm ของ Delta(x_1) = 0.4216 ซึ่งมีค่าใกล้เคียงศูนย์ หมายความว่าคำตอบส่วนใหญ่มีค่าใกล้เคียงกัน(คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นต่อเนื่องสลับกับ * และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

ภาพประกอบ 5.15 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวาริเอเบิล (State variable) $x_2(t)$ เทียบกับเวลาสำหรับตัวอย่างที่ 6



กราฟของคำตอบทางการวิเคราะห์ (Analytical solution) และคำตอบจากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) ของสเตทวาริเอเบิล (state variable) $x_2(t)$ มีแนวโน้มใกล้เคียงกัน และสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) ของปัญหา ได้ค่า norm ของ Delta(x_2) = 0.4494 ซึ่งมีค่าใกล้เคียงศูนย์ หมายความว่าคำตอบส่วนใหญ่มีค่าใกล้เคียงกัน(คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นประและวงกลม และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

ภาพประกอบ5.16 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) u(t) เทียบกับเวลา t สำหรับตัวอย่างที่ 6



กราฟแสดงผล $u_1(t)$ ที่เป็นคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) และทางการวิเคราะห์ (Analytical solution) นั้นใกล้เคียงกันมากจนเกือบจะเป็นค่าเดียวกัน ได้ค่า norm ของ Delta(u_1) = 1.3036 ซึ่งมีค่าค่อนข้างน้อย หมายความว่าคำตอบส่วนใหญ่มีค่าใกล้เคียงกัน (คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นประสลับกับวงกลม และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

5.2.7 กรณีที่ 7: ปัญหาของเวลาที่น้อยที่สุด(Minimum time)

ปัญหาประเภทนี้จะมีคอสฟังชันนอล (Cost function) $\int_0^{t_f} 1\, dt = t_f$ และต้องการหาคำตอบที่ทำให้ค่าดังกล่าวมีค่าน้อยที่สุด

5.2.7.1 การหาเวลาน้อยที่สุดของระบบควบคุมมวลเดียว

ตัวอย่างที่ 7.1

ระบบควบคุมดีกรีสอง

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad (5.128)$$

$$\dot{x}_2 = u_1 \qquad (5.129)$$

คอสฟังชันนอล (Cost functional)

$$\min J = \int_0^{t_f} (1)dt \qquad (5.130)$$

ในปัญหานี้คอนโทรลอินพุท (Control input) u_1 มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) คือ $|u_1| \quad 1$ แต่สเตทวาริเอเบิล (State variables) ไม่มีเงื่อนไขบังคับ (Constrained) ต้องการหาคำตอบของคอนโทรลอินพุท (Control input) และ คอสฟังชันนอล (Cost functional)สำหรับกรณี $x_1(t_0) = 0$, $x_2(t_0) = 0$ and $x_1(t_f) = 1$, $x_2(t_f) = 0$.

5.2.7.1.1ลักษณะของปัญหา

เป็นปัญหาเช่นเดียวกับในตัวอย่างที่ 5 แต่มีคอสฟังชันนอล (Cost functional) เป็น $\min J = \int_0^{t_f} (1)dt$

5.2.7.1.2 การคำนวณทางการวิเคราะห์ (Analytic calculation)

ค่าที่เหมาะสมที่สุดหาได้จากเงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary condition) จาก

$$H = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u_1 \qquad (5.131)$$

เงื่อนไขของการเป็นค่าสูงสุดหรือต่ำสุด (Necessary condition)

(i) $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u})$

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5.132)$$

$$x_2 = u_1 \quad (5.133)$$

(ii) $\lambda = \dfrac{\partial H}{\partial \underline{x}}$

$$\lambda_1 = 0 \quad (5.134)$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 \quad (5.135)$$

(iii) $\dfrac{\partial H}{\partial \underline{u}} = 0$

$$\lambda_2 = 0\,. \quad (5.136)$$

(iv) เนื่องจาก t_f ไม่ทราบค่า เงื่อนไขที่จะต้องเพิ่มเข้ามาคือ

H = ค่าคงที่

เมื่อแก้สมการ (i), (ii), (iii), (iv), (v) จะได้คำตอบที่เป็นค่าที่เหมาะสมที่สุดของสเตทวาริเอเบิล (State variables) คอนโทรลวาริเอเบิล (Control input) และเวลาที่ปลาย (Final time)

$$x_1(t) = \begin{matrix} \dfrac{t^2}{2}, 0 \leqslant t \leqslant t_s \\ \dfrac{t^2}{2} + 2t \quad 1, t_s \leqslant t \leqslant t_f \end{matrix} \quad (5.137)$$

$$x_2(t) = \begin{matrix} t, 0 \leqslant t \leqslant t_s \\ t + 2, t_s \leqslant t \leqslant t_f \end{matrix} \quad (5.138)$$

$$u_1(t) = \begin{cases} 1, 0 \le t \le t_s \\ 1, t_s \le t \le t_f \end{cases} \qquad (5.139)$$

$$t_f = 2 \qquad (5.140)$$

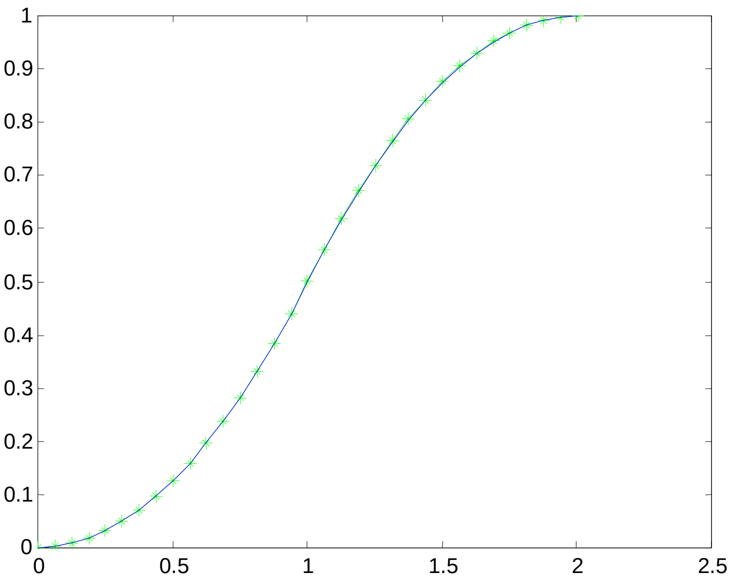
$$t_s = 1 \qquad (5.141)$$

โดยที่ t_s = ช่วงเปลี่ยนของเวลา (Switching time)

5.2.7.1.3 ผลที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

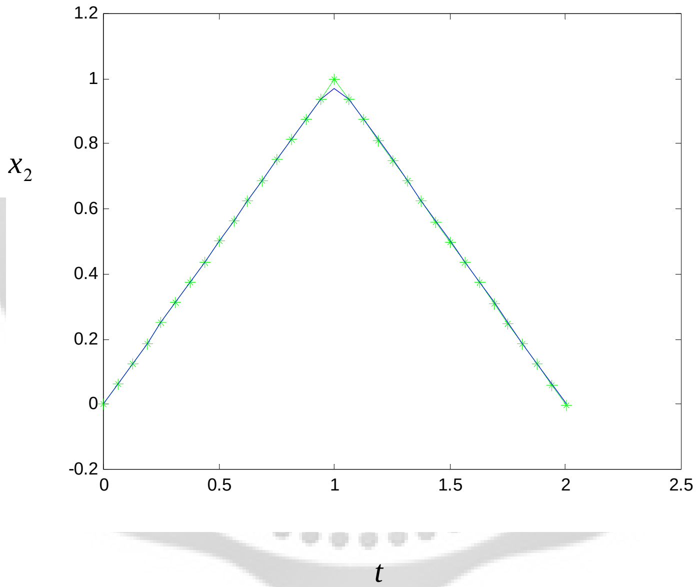
กรณีของการหาเวลาที่น้อยที่สุดนี้ จากเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ทำให้ค่าของคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) u_1 อยู่ในช่วง $[\ 1, 1]$

ภาพประกอบ 5.17 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวาริเอเบิล (State variable) $x_1(t)$ เทียบกับเวลา สำหรับตัวอย่างที่ 7.1



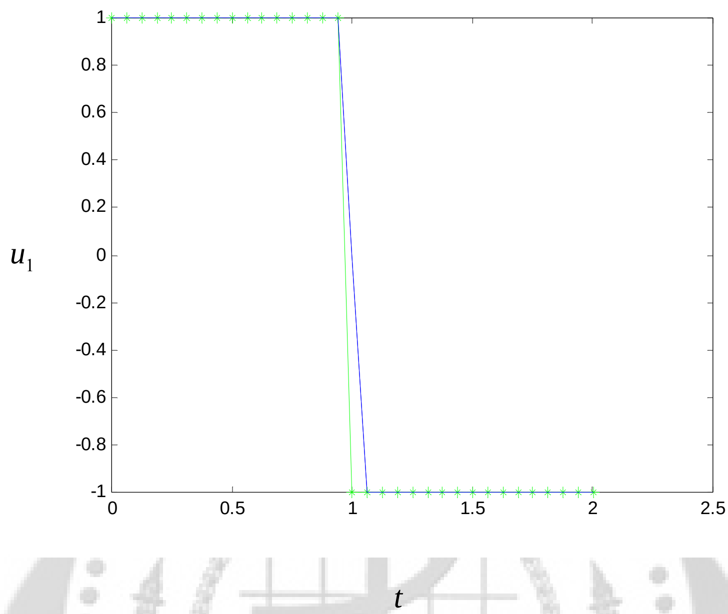
กราฟในภาพประกอบที่ 5.16 แสดงสเตทวาริเอเบิล (State variable) $x_1(t)$ ที่เป็นคำตอบจากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข(Numerical solution) และคำตอบทางการวิเคราะห์ (Analytical solution) มีแนวโน้มที่ใกล้เคียงกันมากจนเกือบจะเป็นเส้นเดียวกัน และคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) (คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นต่อเนื่องสลับกับ * และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

ภาพประกอบ 5.18 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวาริเอเบิล (State variable) $x_2(t)$ เทียบกับเวลา สำหรับตัวอย่างที่ 7



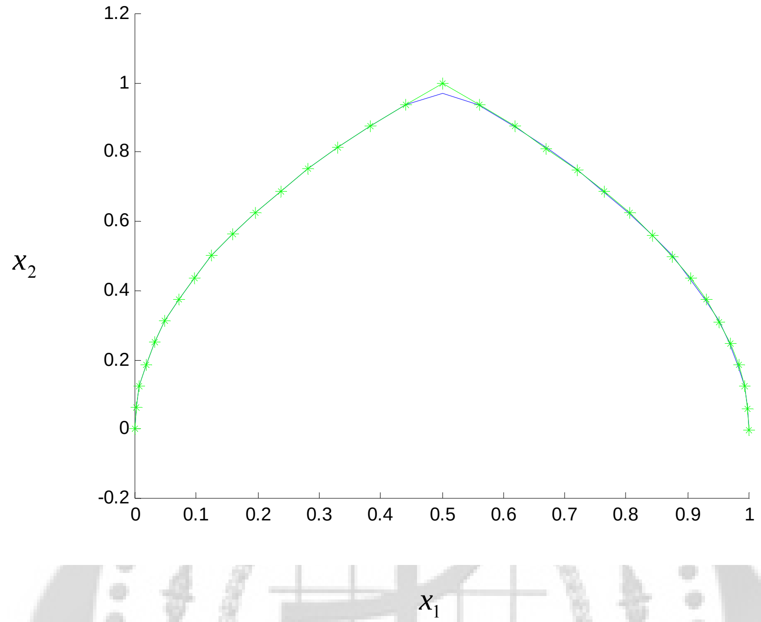
กราฟแสดงสเตทวาริเอเบิล (State variable) $x_2(t)$ ที่เป็นคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) และคำตอบทางการวิเคราะห์ (Analytical solution) ซึ่งมีแนวโน้มที่ใกล้เคียงกันมากจนเกือบจะเป็นเส้นเดียวกัน และคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) (คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นต่อเนื่องสลับกับ * และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

ภาพประกอบ5.19 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) u(t) เทียบกับเวลา t สำหรับตัวอย่างที่ 6



กราฟแสดงคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) $u_1(t)$ ที่เป็นคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) มีแนวโน้มและค่าที่ใกล้เคียงกับ คำตอบทางการวิเคราะห์ (Analytical solution) แต่มีความแตกต่างเกิดขึ้นเล็กน้อยบริเวณใกล้ช่วงเปลี่ยนเวลา (Switching time) t_s (คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นต่อเนื่องสลับกับ * และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

ภาพประกอบ5.20 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง state variable $x_1(t)$ เทียบกับ $x_2(t)$ สำหรับตัวอย่างที่ 7.1



กราฟในภาพประกอบ5.17 แสดงเฟสเพลน (Phase plane) ของ x_1 และ x_2 แนวโน้มของคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) และคำตอบทางการวิเคราะห์ (Analytical solution) ใกล้เคียงกันมาก (คำตอบแบบ analytical จะเป็นเส้นต่อเนื่องสลับกับ * และคำตอบที่ได้จากโปรแกรมจะเป็นเส้นต่อเนื่อง)

5.2.7.2 **ปัญหา** Barchistrochrone

คำจำกัดความของปัญหา คือ ปัญหานี้เป็นปัญหาประเภทการหาเวลาที่น้อยที่สุด (Minimum time) และมีเงื่อนไขต่างๆ ดังนี้

$$\min J = t_f \tag{5.142}$$

$$\dot{x}_1 = x_3 \cos(u_1) \tag{5.143}$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \sin(u_1) \tag{5.144}$$

$$\dot{x}_3 = g \sin(u_1) \tag{5.145}$$

$$x_{02} = 0 \tag{5.146}$$

$$x_{03} = 0 \tag{5.147}$$

$$xf_1 = l \tag{5.148}$$

$$t_0 = 0\,. \tag{5.149}$$

$$x_1 \tan(\theta) \quad x_2 + \bar{h} \geqslant 0$$

และ $x_2(t_f)$ และ $x_3(t_f)$ ไม่ทราบค่าที่แน่นอน

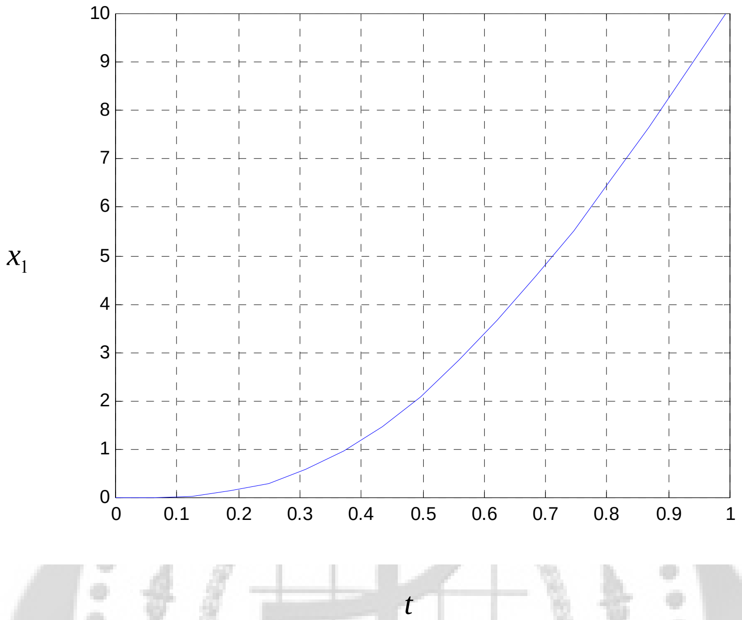
ซึ่งตัวแปรทำสำคัญต่างๆ มีค่าดังนี้ : $\tan(\theta) = 0.5$ $l = 10$ และ $g = 32.174$ คำตอบทางการวิเคราะห์ (Analytical solution) ของปัญหาแบบเวลาน้อยที่สุด (Minimum time) t_f ส่วนใหญ่จะหาจากหลักการของค่ามากที่สุด (Maximum Principle) ใน Bryson and Ho [11] และรายละเอียดของปัญหานี้อยู่ในงานวิจัยของBrenane [9] ได้เวลาน้อยที่สุดคือ

$$t_f = \frac{2}{g}(l + \bar{h}\cot(\ )(\theta + \cot(\theta))^{\frac{1}{2}} \quad (\frac{2\bar{h}}{g}\cot(\theta)(\theta \quad \frac{\pi}{2} + \cot(\theta)))^{\frac{1}{2}} = 0.993077078\,. \tag{5.150}$$

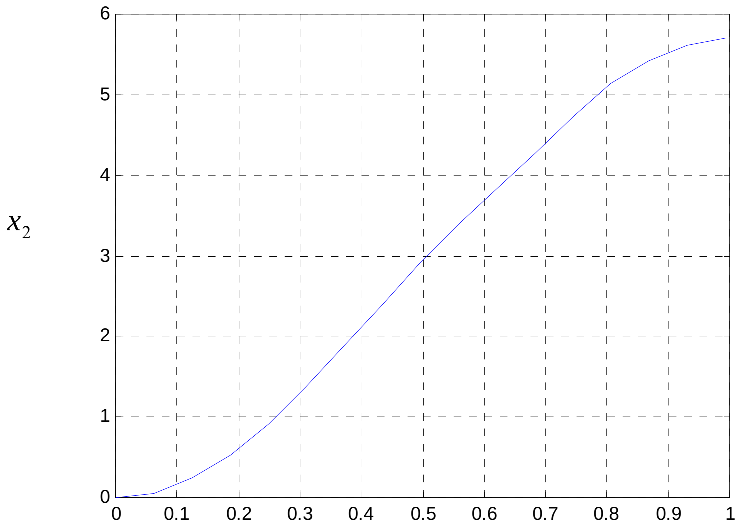
5.2.7.2.1 **ผลที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลข**

กรณีของการหาเวลาที่น้อยที่สุดนี้ จากเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ทำให้ค่าของคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) u_1 อยู่ในช่วง $[\ \pi, \pi]$

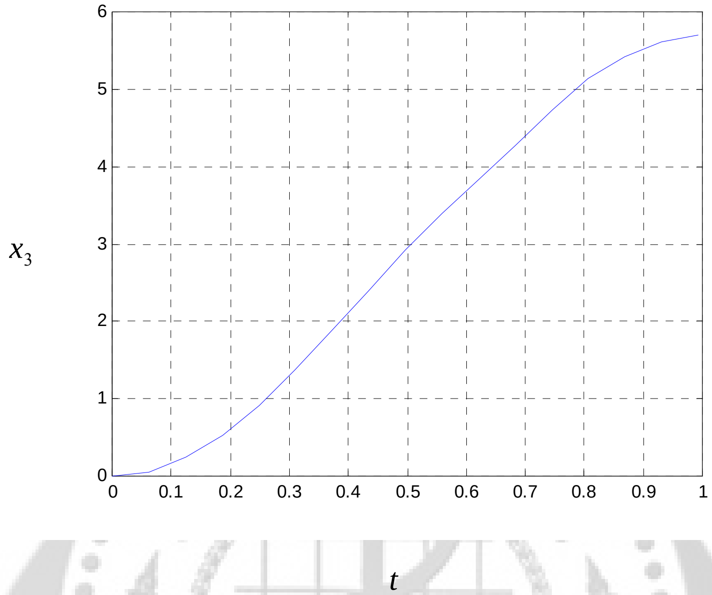
ภาพประกอบ 5.21 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวาริเอเบิล (State variable) $x_1(t)$ เทียบกับเวลา สำหรับตัวอย่างที่ 7.2



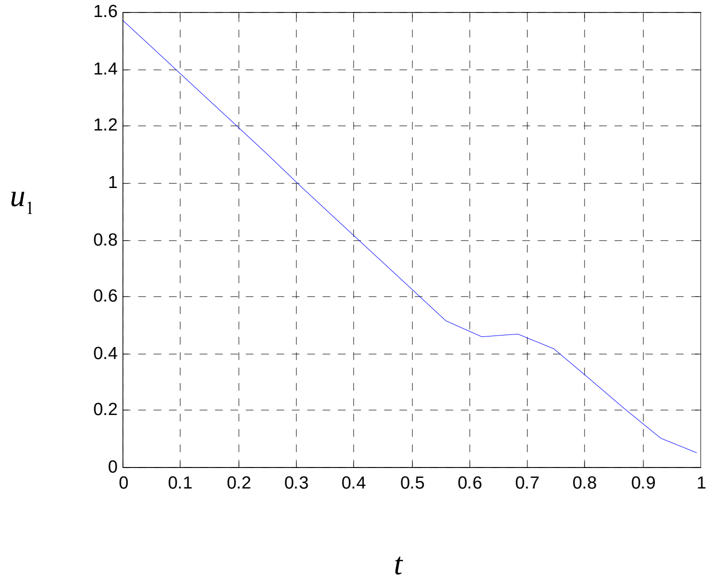
ภาพประกอบ 5.22 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวาริเอเบิล (State variable) $x_2(\mathrm{t})$ เทียบกับเวลา สำหรับตัวอย่างที่ 7.2



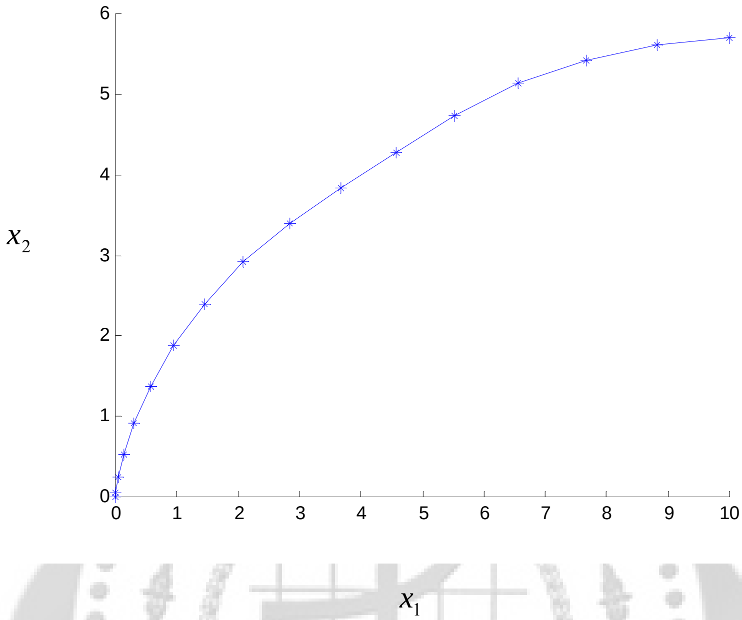
ภาพประกอบ 5.23 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวาริเอเบิล (State variable) $x_3(t)$ เทียบกับเวลา สำหรับตัวอย่างที่ 7.2



ภาพประกอบ5.24 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) u(t) เทียบกับเวลา t สำหรับตัวอย่างที่ 7.2



ภาพประกอบ 5.25 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเตทวาริเอเบิล (State variable) $x_1(t)$ เทียบกับ $x_2(t)$ สำหรับตัวอย่างที่ 7.2



กราฟในภาพประกอบที่ 5.23 แสดงว่าเฟสเพลน (Phase plane) ของ $x_1(t)$ และ $x_2(t)$ ซึ่งเป็นคำตอบที่ได้จากโปรแกรมนี้ มีค่าใกล้เคียงกับเฟสเพลน (Phase plane) ในงานวิจัยของ Brenane[9].

5.3 สรุปผลการทดสอบ

สิ่งที่นำมาพิจารณาเปรียบเทียบประสิทธิภาพ ความสามารถ ของโปรแกรมนี้ คือ คำตอบทางการวิเคราะห์ (Analytical solution) ซึ่งคำนวณด้วยแคลคูลัสออฟวาริเอชัน (Calculus of variation) หลักการการเป็นค่าต่ำสุดหรือสูงสุด (Minimum and maximum principle) และคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) ซึ่งคำนวณด้วยเจนเนอรัลโพรโพสโปรแกรม (General-purpose program) ผลที่ได้คือ โดยส่วนใหญ่คำตอบทั้งสองมีค่าใกล้เคียงกันทั้งแนวโน้มและค่าบริเวณขอบเขตต่างๆ

แต่อย่างไรก็ตาม ยังมีบางส่วนของคำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) ที่แตกต่างจากคำตอบทางการวิเคราะห์ (Analytical solution) เนื่องจากกระบวนการของไดเร็คทรานสคริปชัน (Direct transcription) ของวิธีทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) ยังไม่มีการควบคุมคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) ที่ดีพอ เมื่อเทียบกับกระบวนการของอินไดเร็คทราสคริปชัน

(Indirect transcription) ที่มีฟังชันต่างๆ เข้ามาช่วย เช่น สมการของลากรางจ์ (Lagrange) ซึ่งความคลาดเคลื่อนนี้จะพบได้บ่อยในปัญหาของเวลาน้อยที่สุด (Minimum time) และปัญหาที่ไม่ทราบเวลาที่ปลายแน่นอน (Variable endtime) เช่น ในตัวอย่างที่ 7 กรณีของเวลาน้อยที่สุด (Minimum time) แสดงให้เห็นความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นบริเวณช่วงเปลี่ยนเวลา (Switching time)

นอกจากนี้เมื่อเปรียบเทียบความใกล้เคียงของคำตอบของคอนโทรลอินพุท (Control input) กับคำตอบของสเตทวาริเอเบิล (State variable) จะเห็นว่าคำตอบของคอนโทรลอินพุท (Control input) จะมีส่วนที่ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตต่างๆ มากกว่า คำตอบของสเตทวาริเอเบิล (State variable) เช่น ในตัวอย่างที่1 ซึ่งจะเห็นความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นบริเวณเวลาเริ่มต้น (Initial time) t_0

บทที่ 6
สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ

6.1 สรุปและวิจารณ์ผลการทดสอบ

การแก้ปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดของระบบควบคุมทางพลศาสตร์(Dynamic optimization problem) ด้วยวิธีทรานสคริปชัน (Transcription method) คือ การแปลงปัญหาดังกล่าวให้อยู่ในรูปที่สามารถแก้ปัญหาด้วยวิธีของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) ได้ เนื่องจากการหาค่าสูงสุดของระบบพลศาสตร์ (Dynamic optimization) มีลักษณะของปัญหาเป็นแบบต่อเนื่อง (Continuous) แต่วิธีของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) เป็นการแก้ปัญหาแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete) ดังนั้นกระบวนการจึงแบ่งเป็นสองขั้นตอนด้วยกัน คือ ขั้นแรกทำการแปลงปัญหาจากปัญหาที่ขึ้นกับเวลาต่อเนื่อง (Continuous time) เป็นปัญหาที่ไม่ต่อเนื่อง (Discrete) โดยใช้เทคนิคของคอลโลเคชัน (Collocation) ในการหาค่าอินติเกรทด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical integration) ซึ่งในงานวิจัยนี้ใช้วิธีของ รุงเง – กุตตา(Rung-Kutta) ในการแก้ปัญหา ซึ่งในส่วนนี้ปัญหาจะถูกแปลงจากการหาค่าเหมาะสมที่สุดทางพลศาสตร์ (Dynamic optimization) ไปเป็นการหาค่าเหมาะสมที่สุดแบบพารามิเตอร์ (Parameter optimization) หรือการหาค่าเหมาะสมที่สุดทางสถิตย์ศาสตร์ (Static optimization) ขั้นที่สอง นำปัญหาที่ได้จากขั้นตอนที่ 1 มาหาคำตอบด้วยวิธีของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming)

ในงานวิจัยนี้สร้างกระบวนการหาคำตอบตามขั้นตอนข้างต้นบนโปรแกรม MATLAB และใช้หน้าจอรับข้อมูล(Graphic user interface) (GUI) ของ MATLAB สร้างส่วนที่ติดต่อกับผู้ใช้งาน เพื่อให้ง่ายต่อการใช้งานและเปิดกว้างแก่ผู้ที่เริ่มศึกษาการหาค่าเหมาะสมที่สุด (Optimization) กระบวนการคำนวณใช้การคำนวณผ่านซิมโบลิค (Symbolic) ประกอบกับ กล่องเครื่องมือสำหรับหาค่าเหมาะสมที่สุด (Optimization toolbox) ในโปรแกรม MATLAB ที่มีอยู่แล้ว คือ ฟังชันเอฟมินคอน (fmincon) ซึ่งจะหาคำตอบในส่วนของวิธีของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) ด้วยกระบวนการของซีเควนเชียลควอดราติกโปรแกรมมิ่ง (Sequential quadratic programming (SQP)) ร่วมกับของควอซี-นิวตัน (Quasi-Newton)

จากผลการทดสอบกับปัญหาคลาสสิคอล (Classical problem) ทั้งที่เป็นปัญหาที่เป็นเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นพบว่าเจนเนอรอลโพรโพสโปรแกรม (General proposes-program) สามารถให้คำตอบทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical solution) ของสเตทวาริเอเบิล (State variable) และคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) ที่ค่อนข้างแม่นยำเมื่อเทียบกับคำตอบทาง

การวิเคราะห์ (Analytical solution) ที่ได้จากวิธีของแคลคูลัสออฟวาริเอชัน (Calculus of variation) และหลักการของการเป็นค่าต่ำสุด (Minimum principle) แต่เมื่อพิจารณาในปัญหาบางประเภทจะเห็นว่าคำตอบของคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) ที่ได้จากโปรแกรมยังค่อนข้างแตกต่างกับคำตอบทางการวิเคราะห์ (Analytical solution) เนื่องจากวิธีการของไดเร็คทรานสคริปชัน (Direct transcription) นั้นยังไม่มีเงื่อนไขใด ๆ เข้ามาช่วยควบคุมคอนโทรลวาริเอเบิล (Control variable) ในขณะที่วิธีการของอินไดเร็คทรานสคริปชัน (Indirect transcription) มีฟังชันต่างๆ เข้ามาช่วยควบคุม เช่น สมการของลากรางจ์(Lagrange)

การออกแบบโปรแกรมนี้เน้นการแก้ปัญหาของการหาค่าเริ่มต้น (Initial guess) และลดจำนวนของพารามิเตอร์ (Parameter) ที่ใช้ในการหาคำตอบ ด้วยวิธีการหาค่าอินติเกรทด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical integration) ของรุงเง-กุตตา (Runge-Kutta) ซึ่งทำให้การหาคำตอบเป็นไปอย่างรวดเร็ว และเป็นประโยชน์ในการนำคำตอบที่ได้นำมาใช้เป็นค่าเริ่มต้น (Initial guess) สำหรับปัญหาที่มีขนาดใหญ่กว่าได้ต่อไป

6.2 ข้อแนะนำสำหรับการวิจัยต่อไป

เนื่องจาก ฟังชันเอฟมินคอน (fmincon) สามารถแก้ปัญหาที่มีเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ที่เป็นสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear) ได้ดีในกรณีที่ปัญหามีขนาดไม่ใหญ่เกินไป ดังนั้นในการแก้ปัญหาที่มีขนาดใหญ่มากๆ ควรมีการเพิ่มเติมทางเลือกวิธีอื่นในการหาคำตอบในส่วนของวิธีการแก้ปัญหาของโปรแกรมที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear programming) โดยสามารถนำมาเชื่อมกับส่วนไดนามิคลิงค์ (Dynamic link) ที่มีอยู่ของ MATLAB ได้

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นางสาวอัมราพร บุญประทะทอง
วันเดือนปีเกิด	19 มิถุนายน 2520
สถานที่เกิด	กรุงเทพมหานคร
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	40/93 ซ.โชคชัย4 ถ.ลาดพร้าว ต.ลาดพร้าว อ.ลาดพร้าว จ. กรุงเทพฯ 10230
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ.2535	มัธยมศึกษาตอนต้น สุรศักดิ์มนตรี
พ.ศ. 2538	มัธยมศึกษาตอนปลาย สันติราษฎร์วิทยาลัย
พ.ศ. 2543	อุดมศึกษา(วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต) มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้า ธนบุรี
พ.ศ. 2547	บัณฑิตศึกษา(วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ