

กิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R.
และโปรแกรม Euler สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี

ปริญญาานิพนธ์
ของ
ทรรศนีย์ รัตนวิจิตร

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
เมษายน 2553

กิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R.
และโปรแกรม Euler สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี

ปริญญานิพนธ์
ของ
ทรรศนีย์ รัตนวิจิตร

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
เมษายน 2553
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R.
และโปรแกรม Euler สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี

บทคัดย่อ
ของ
ทรรศนีย์ รัตนวิจิตร

เสนอต่อบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
เมษายน 2553

ทรรศนีย์ รัตนวิจิตร. (2553). *กิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี.*

ปริญญาโท กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะกรรมการควบคุม: อาจารย์ ดร.สายัณห์ โสระโร, อาจารย์ธัญชัย ภูอุดม, ผู้ช่วยศาสตราจารย์ชุตินรณ เพ็ญเพียร.

ในการจัดการเรียนการสอนวิชาแคลคูลัส ระดับปริญญาตรีนั้น จากการออกแบบสอบถามพบว่า การประยุกต์ของอนุพันธ์เป็นเนื้อหาหนึ่งที่นิสิตคิดว่าเป็นเนื้อหาที่มีความยากมาก เพราะนิสิตมองไม่เห็นภาพของการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรสองตัวเทียบกับเวลา ทำให้ไม่สามารถเขียนความสัมพันธ์เพื่อสร้างเป็นสมการได้ ผู้วิจัยจึงหาวิธีที่จะช่วยแก้ปัญหาที่เกิดขึ้น ซึ่งโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตชื่อ C.a.R. สามารถสร้างกิจกรรมเพื่อให้ผู้เรียนได้สำรวจแนวคิดที่สำคัญของเนื้อหาเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ ใช้ออกแบบกิจกรรมเพื่อช่วยให้นิสิตได้เห็นการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรสองตัวในเวลาเดียวกันได้ และโปรแกรม Euler มีความสามารถในการประมวลผลเชิงสัญลักษณ์ ช่วยประหยัดเวลาในการคำนวณ นิสิตสามารถทำแบบฝึกหัดได้มากขึ้น เกิดเป็นทักษะและความชำนาญพื้นฐานเพื่อใช้ในการเรียนระดับสูงต่อไป ซึ่งทั้งสองโปรแกรมเป็นโปรแกรมแบบ GPL คือสามารถใช้และเผยแพร่ได้โดยไม่เสียค่าลิขสิทธิ์

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมาย (1) เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิต ในการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ (2) เพื่อศึกษาความพึงพอใจของนิสิตที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

กลุ่มตัวอย่างเป็นนิสิตระดับปริญญาตรีที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา คณ 111 (คณิตศาสตร์ 1) ประจำปีการศึกษา 2552 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ กรุงเทพมหานคร จำนวน 16 คน ผู้วิจัยทดลองสอนกลุ่มตัวอย่างด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler โดยทดลอง 16 คาบ ในห้องคอมพิวเตอร์และประเมินผลการเรียนรู้เรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ของนิสิตจากคะแนนไปกิจกรรม คะแนนแบบทดสอบย่อย และคะแนนแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ และให้นิสิตตอบแบบวัดความพึงพอใจต่อกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

ผลการวิจัยพบว่า นิสิตกลุ่มตัวอย่างสามารถสอบผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 70 ของจำนวนนิสิตทั้งหมดที่ระดับนัยสำคัญ .01 และนิสิตกลุ่มตัวอย่างมีความพึงพอใจในการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler อยู่ในระดับมาก ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า นิสิตระดับปริญญาตรี มีความสามารถในการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ โดยใช้กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

INSTRUCTIONAL ACTIVITIES ON DERIVATIVES AND APPLICATION
BY USING C.a.R. SOFTWARE AND EULER SOFTWARE
FOR UNDERGRADUATE STUDENTS

AN ABSTRACT
BY
TASANEE RATANAWIJITR

Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the
Master of Education Degree in Mathematics
at Srinakharinwirot University
April 2010

Tasanee Ratanawijitr. (2010). *Instructional Activities on Derivatives and Application by Using C.a.R. Software and Euler Software for Undergraduate Students*.

Master thesis, M.Ed. (Mathematics). Bangkok: Graduate School, Srinakharinwirot University. Advisor Committees: Dr. Sayun Sotaro, Mr. Thanuchai Pooudom, Asst. Prof. Chutiwon Penpean.

From undergraduate students' questionnaires about learning and teaching calculus, Applications of derivatives is one content of difficult' contents. Relate rate is one point of undergraduate students' difficulties so they couldn't construct an equation relating the quantities whose rates of change are known to the quantity whose rate of change is to be found. The researcher found that dynamics geometry C.a.R. Program could help students to overcome this difficulty. C.a.R. can be created activities to demonstrate figure of the change of two variables at the same time. When C.a.R. was used, students could make conjectures to construct an equation relating the quantity whose rates of change is to be found to other the quantities whose rate of change are known. Moreover students could investigate the concept of derivatives and applications. While Euler program is Computer Algebra System (CAS) save time in calculations. Allow students to do more exercises. That is the way students develop their basic skills and expertise to use in advance. Both are the general public license (GPL).

The purposes of this study were (1) to determine the effectiveness of such activity in terms of students' achievement, and (2) to evaluate students' attitude toward instructional activity.

The study took place at Srinakharinwirot University in Bangkok during the second semester of the 2009 academic year with 16 undergraduate students who were enrolling in MA 111 (Mathematics 1) participated as subjects. The researcher taught them a total of 16 periods in a computer laboratory. Lesson activities, sub-tests, and achievement test were used in assessment of students' performance. To find out their preference toward the instructional, a questionnaire was also given to each student in the experimental group. To pass the instructional, students' must obtain at least 60% of the total scores, the score from lesson activities, sub-tests, and achievement test.

The results showed that more than 70% of the experimental group pass the instructional at .01 level of significant. This clearly indicated that undergraduate students profit from the instructional designed by the researcher. The scores on questionnaire showed an average satisfaction of the experimental group toward the instruction.

ปริญญานิพนธ์
เรื่อง

กิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R.
และโปรแกรม Euler สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี

ของ
ทรรศนีย์ รัตนวิจิตร

ได้รับอนุมัติจากบัณฑิตวิทยาลัยให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

..... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(รองศาสตราจารย์ ดร.สมชาย สันติวัฒนกุล)
วันที่ เดือน เมษายน พ.ศ. 2553

คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์

คณะกรรมการสอบปากเปล่า

..... ประธาน
(อาจารย์ ดร. สายัณห์ ไสระโร)

..... ประธาน
(อาจารย์ ดร. รุ่งฟ้า จันทจักรภรณ์)

..... กรรมการ
(อาจารย์ธนชัย ภูอุดม)

..... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์อุษาวดี จันทรวงศ์)

..... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ชุตินันท์ เพ็ญเพียร)

..... กรรมการ
(อาจารย์ ดร. สายัณห์ ไสระโร)

..... กรรมการ
(อาจารย์ธนชัย ภูอุดม)

..... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ชุตินันท์ เพ็ญเพียร)

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์นี้สำเร็จได้ด้วยดี เพราะได้รับความกรุณาและความช่วยเหลืออย่างดียิ่งจาก อาจารย์ ดร. สายัณห์ โสระโร ที่คอยให้คำปรึกษาและเป็นธุระเกี่ยวกับงานวิจัยในทุกขั้นตอน ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งเป็นอย่างมาก และกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ธนชัย ภูอุดม ที่ได้สละเวลาอันมีค่ายิ่งเพื่อให้ความรู้ คำปรึกษา เป็นผู้เชี่ยวชาญตรวจเครื่องมือ คอยเป็นธุระเกี่ยวกับงานวิจัยทุกขั้นตอนและให้ข้อเสนอแนะต่าง ๆ อีกมากมายที่เป็นประโยชน์ในการจัดทำปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งเป็นอย่างมาก และขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอกราบขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ชุตินวรรณ เพ็ญเพียร ที่คอยให้กำลังใจ ให้ความรู้ความเข้าใจในการจัดทำปริญญานิพนธ์ฉบับนี้อย่างละเอียด ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งเป็นอย่างมาก และกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอกราบขอบพระคุณ อาจารย์เมตต์ แยมวงษ์ และอาจารย์สุวรรณา คล้ายกระแสน ที่ให้ความกรุณาช่วยเป็นผู้เชี่ยวชาญในการตรวจเครื่องมือ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอกราบขอบพระคุณ อาจารย์ ดร. รุ่งฟ้า จันท์จารุภรณ์ และรองศาสตราจารย์ อุษาวดี จันทรสนธิ ที่กรุณาร่วมเป็นกรรมการสอบปากเปล่า และให้คำแนะนำในสิ่งที่เป็นประโยชน์เพื่อให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอกราบขอบพระคุณ อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ และเจ้าหน้าที่ของภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒทุกท่าน ที่กรุณาให้ความช่วยเหลืออำนวยความสะดวกในการทดลองใช้เครื่องมือและเก็บรวบรวมข้อมูลที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้จนสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

ขอขอบคุณนิสิต กศ.บ.คณิตศาสตร์ กศ.บ.ฟิสิกส์ กศ.บ.วิทยาศาสตร์ทั่วไป และนิสิต วท.บ. ภูมิศาสตร์กลุ่มตัวอย่างทุกคน ที่ให้ความร่วมมือในการวิจัยครั้งนี้ด้วยดี

ขอขอบคุณ พี่-น้องและเพื่อน ๆ คณิตศาสตร์ทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือและกำลังใจด้วยดี

ขอกราบขอบพระคุณผู้อำนวยการสุรต อัตนวานิช ผู้อำนวยการโรงเรียนสมุทรปราการ ที่อนุญาตให้ลาการปฏิบัติราชการเพื่อมาสอบปากเปล่าปริญญานิพนธ์ รวมถึงรองผู้อำนวยการทุกท่าน คุณครูโรงเรียนสมุทรปราการและเจ้าหน้าที่ทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือและคอยให้กำลังใจ

ขอกราบขอบพระคุณ อาจารย์จันทพงศ์ สอนสะอาด อาจารย์ยุวดี สอนสะอาด และครอบครัว สอนสะอาดทุกคนที่คอยให้คำแนะนำที่ดีและคอยเป็นกำลังใจให้เสมอมา

ขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อมนต์ รัตนวิจิตร คุณแม่สนอง รัตนวิจิตร และนางสาวประณิธี รัตนวิจิตร ที่คอยดูแล ห่วงใยและเป็นทุกอย่างให้ผู้วิจัยเสมอมา

คุณค่าและประโยชน์ของปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ ขอมอบเป็นเครื่องบูชาพระคุณบิดา มารดา ครู อาจารย์ทุกท่าน ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทความรู้แก่ผู้วิจัย

ทรรศณีย์ รัตนวิจิตร

งานวิจัยนี้ได้รับทุนสนับสนุนการทำปริญญานิพนธ์
จาก
งบประมาณเงินรายได้คณะวิทยาศาสตร์ ประจำปี 2553
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ภูมิหลัง	1
ความมุ่งหมายของการวิจัย	4
ความสำคัญของการวิจัย	5
ขอบเขตของการวิจัย	5
ประชากรที่ใช้ในการวิจัย	5
กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย	5
ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย	5
เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย	5
ตัวแปรที่ศึกษา	6
นิยามศัพท์เฉพาะ	6
สมมติฐานของการวิจัย	7
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	8
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับ	
สร้างกิจกรรมการเรียนการสอน	8
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต	8
เอกสารที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต	8
เอกสารที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรม C.a.R.	10
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต	11
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมระบบพีชคณิต	15
เอกสารที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมระบบพีชคณิต	15
เอกสารที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรม Euler	19
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้โปรแกรมระบบพีชคณิต	20
ลักษณะของโปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler	24
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์	
และการประยุกต์	26
เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ ...	26
งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ ...	30

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
3 วิธีดำเนินการวิจัย	34
การกำหนดประชากรและเลือกกลุ่มตัวอย่าง	34
การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	34
การเก็บรวบรวมข้อมูล	43
การจัดกระทำข้อมูลและการวิเคราะห์ข้อมูล	43
4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	45
5 สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	53
ความมุ่งหมายของการวิจัย	53
สมมติฐานของการวิจัย	53
วิธีดำเนินการวิจัย	53
สรุปผลการวิจัย	55
อภิปรายผล	56
ข้อเสนอแนะ	59
บรรณานุกรม	60
ภาคผนวก	67
ภาคผนวก ก รายนามผู้เชี่ยวชาญ	68
ภาคผนวก ข การวิเคราะห์ข้อมูล	70
ภาคผนวก ค คู่มือการใช้กิจกรรมการเรียนรู้การสอน	82
ภาคผนวก ง แผนการจัดการเรียนรู้การสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler	102
ภาคผนวก จ กิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ โดยใช้ โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี.....	147
ภาคผนวก ฉ เฉลยกิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดย ใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี ...	221

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
ภาคผนวก (ต่อ)	
ภาคผนวก ข แบบทดสอบย่อย แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง อนุพันธ์และการประยุกต์ เฉลยแบบทดสอบย่อย และเฉลยแบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์	288
ภาคผนวก ข แบบวัดความพึงพอใจของนิสิตต่องิจกรรมการเรียนเรื่องอนุพันธ์ และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler	313
ประวัติย่อผู้วิจัย	317

บัญชีตาราง

ตาราง		หน้า
1	ลักษณะของโปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler	24
2	เกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบย่อย	40
3	เกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง อนุพันธ์และการประยุกต์	41
4	ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนน จากการทำใบกิจกรรมรายบุคคลของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง	46
5	ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนน จากการทำแบบทดสอบย่อยของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง	47
6	ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจาก การทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง	47
7	ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนผลสัมฤทธิ์ ทางการเรียนของนิสิตกลุ่มตัวอย่างในการเรียนเรื่องอนุพันธ์และ การประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler	48
8	ค่าร้อยละของจำนวนนิสิตกลุ่มตัวอย่างที่ได้คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง อนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม	49
9	การทดสอบจำนวนนิสิตที่สอบผ่านเกณฑ์ เรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler มีจำนวนมากกว่า ร้อยละ 70 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด	49
10	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานและระดับความพึงพอใจของนิสิต ที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอนเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler	51
11	แสดงค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 1	71
12	แสดงค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 2	71
13	แสดงค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	72
14	แสดงค่าความยากง่าย (p), ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของ แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 1 เรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ สำหรับนิสิต ที่เป็นกลุ่มนำร่อง.....	73

บัญชีตาราง (ต่อ)

ตาราง		หน้า
15	แสดงค่าความยากง่าย (p), ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 2 เรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ สำหรับนิสิตที่เป็นกลุ่มนาร่อง.....	73
16	แสดงค่าความยากง่าย (p), ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ สำหรับนิสิตที่เป็นกลุ่มนาร่อง.....	74
17	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบวัดความพึงพอใจของนิสิตที่เรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler และค่าความเชื่อมั่นของแบบวัดความพึงพอใจของนิสิตกลุ่มนาร่อง.....	75
18	การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้ระหว่างเรียนจากใบกิจกรรมเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง	76
19	การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้ระหว่างเรียนจากการทำแบบทดสอบย่อยเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง	77
20	การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง	77
21	ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง ในการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler คะแนนเต็ม 100 คะแนน	77
22	ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้จากใบกิจกรรม แบบทดสอบย่อย แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 16 คน	78
23	คะแนนแบบวัดความพึงพอใจของนิสิตกลุ่มตัวอย่างที่เรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler	79
24	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบวัดความพึงพอใจของนิสิตที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler	80

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ	หน้า
1 ความหมายทางเรขาคณิตของอนุพันธ์	26
2 ความหมายทางเรขาคณิตของค่าเชิงอนุพันธ์	27
3 การสร้างกราฟอัตราการเปลี่ยนแปลงของข้อมูลจากการพิจารณาจุด บนกราฟข้อมูล.....	29
4 สารบัญหลัก	36
5 ตัวอย่างหน้าหลักของแต่ละหัวข้อ	37
6 ตัวอย่างกิจกรรม	37

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

แคลคูลัสเป็นวิชาที่สำคัญในสาขาคณิตศาสตร์และเป็นพื้นฐานของวิทยาการในหลายสาขา เช่น ฟิสิกส์ เคมี ชีววิทยา วิศวกรรมศาสตร์ ภูมิศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ เป็นต้น สถาบันอุดมศึกษาต่าง ๆ เห็นความสำคัญดังกล่าวจึงจัดให้มีการเรียนการสอนแคลคูลัสสำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒเป็นสถาบันในระดับอุดมศึกษาของรัฐแห่งหนึ่งซึ่งเปิดสอนวิชาแคลคูลัสให้กับนิสิตหลายรหัสวิชา โดยรายวิชา คณ 111 ชื่อวิชา คณิตศาสตร์ 1 (Mathematics I) เป็นวิชาหมวดวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์พื้นฐานสำหรับนิสิตที่เรียนคณะวิทยาศาสตร์ ซึ่งในคู่มือการศึกษาระดับปริญญาตรีปีการศึกษา 2552 (2552: 126) ได้กล่าวถึงวิชา คณ 111 (คณิตศาสตร์ 1) ว่าเป็นวิชาที่ศึกษาเกี่ยวกับลิมิตและความต่อเนื่อง อนุพันธ์ และการประยุกต์ การอินทิเกรตฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร ซึ่งล้วนเป็นเนื้อหาของวิชาแคลคูลัสทั้งสิ้น นอกจากนี้ยังได้กำหนดให้วิชาคณิตศาสตร์ 1 เป็นบุรพวิชาของรายวิชา คณ 112 (คณิตศาสตร์ 2) ซึ่งวิชา คณ 112 ถูกจัดให้เป็นบุรพวิชาของอีกหลายวิชา เช่น วิชาคณิตศาสตร์สำหรับฟิสิกส์ 1 (Mathematics for Physics I) วิชาคณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์ 1 (Mathematics for Science I) วิชาอุณหพลศาสตร์ (Thermodynamics) และวิชาคลื่น (Wave) เป็นต้น ดังนั้นจะเห็นว่าวิชา คณ 111 (คณิตศาสตร์ 1) เป็นวิชาที่มีความสำคัญและฝึกทักษะพื้นฐานให้กับนิสิตที่จะศึกษาวิชาในกลุ่มวิทยาศาสตร์ในระดับสูงต่อไป

ถึงแม้ว่าวิชาแคลคูลัสจะเป็นวิชาที่มีความสำคัญมากดังกล่าว แต่จากการที่ผู้วิจัยได้ออกแบบสอบถามนิสิตคณะวิทยาศาสตร์ ระดับปริญญาตรี มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2551 จำนวน 50 คน พบว่า สัดส่วนของนิสิตที่คิดว่าเนื้อหาการประยุกต์ของอนุพันธ์มีความยากมากมีจำนวนมากกว่าร้อยละ 50 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด การที่นิสิตคิดว่าเนื้อหาการประยุกต์ของอนุพันธ์มีความยากมากนั้น เนื่องมาจากสาเหตุหลายประการ กล่าวคือ สาเหตุประการที่หนึ่งเกิดจากการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีความซับซ้อน ต้องใช้ความรู้เรื่องกฎลูกโซ่ในการหาอนุพันธ์ อาจเกิดการผิดพลาดในการคำนวณ รวมถึงปัญหาการหารากของสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นและไม่คุ้นเคย ซึ่งใช้เวลาในการคำนวณค่อนข้างมาก สาเหตุประการที่สองเกิดจากการที่เนื้อหาแคลคูลัสค่อนข้างเป็นนามธรรม นิสิตมีปัญหาในการนึกภาพ (Visualization) เนื่องจากไม่เคยได้รับประสบการณ์ หรือไม่เคยฝึกฝนการสร้างภาพหรือจินตนาการภาพในใจมาก่อน ปัญหาที่พบ เช่น ในเรื่องอัตราสัมพัทธ์ เมื่อเกิดการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรสองตัวพร้อมกัน นิสิตมองไม่เห็นภาพความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรสองตัวเทียบกับเวลา ทำให้ไม่สามารถเขียนความสัมพันธ์เพื่อสร้างเป็นสมการได้ และในเรื่องโจทย์ปัญหาการหาค่าสูงสุดและต่ำสุด ซึ่งนิสิต

จะต้องหาคำตอบที่เป็นค่าที่เหมาะสม แต่นิสิตมองไม่เห็นลักษณะของการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร จึงไม่สามารถแก้โจทย์ปัญหาได้ ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของ อุบล กลองกระโทก (2550: 29-30) ว่า มีเนื้อหาทางด้านคณิตศาสตร์อีกมากมายที่เป็นเรื่องนามธรรมที่นักเรียน นักศึกษา มองไม่เห็นมโนทัศน์ ซึ่งน่าจะทำการศึกษา วิจัย ค้นคว้า เพื่อสร้างสื่อการเรียนการสอน ได้แก่ เรขาคณิตวิเคราะห์ ภาคตัดกรวย แคลคูลัส เช่น ฟังก์ชันและความต่อเนื่อง อนุพันธ์และการประยุกต์ อินทิเกรตและการประยุกต์ แม้กระทั่งเนื้อหาในระดับอุดมศึกษา เป็นต้น

จากปัญหาดังกล่าวนี้นักวิจัยคิดว่าแนวทางการแก้ไขปัญหาคือ การนำโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตเข้ามาประกอบการเรียนการสอนในรายวิชา คณ 111 (คณิตศาสตร์ 1) ซึ่งนักวิจัยเชื่อว่า จะช่วยให้นิสิตมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องการประยุกต์ของอนุพันธ์ ซึ่งเป็นเนื้อหาส่วนหนึ่งของ รายวิชา คณ 111 (คณิตศาสตร์ 1) ดีขึ้น เพราะว่าโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต เป็นโปรแกรมที่เกี่ยวข้องกับการสร้างรูปเรขาคณิต มีความสามารถในการสร้างรูปเรขาคณิตได้เสมือนกับการใช้ สันตรงและวงเวียน โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตถูกนำมาใช้ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะในด้านเรขาคณิต ไม่ว่าจะเป็นเรื่องการแปลงทางเรขาคณิต เรื่องความเท่ากันทุกประการ เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฯลฯ เนื่องจากโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตสามารถสร้างรูปเรขาคณิตและสร้างกราฟได้อย่างรวดเร็ว และเน้นให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการเรียนรู้ เช่น ผู้เรียนเคลื่อนที่จุดบนกราฟหรือเคลื่อนย้ายตำแหน่งของรูปเรขาคณิตด้วยการลากเมาส์ เพื่อสำรวจค่าต่าง ๆ ผู้เรียนได้สังเกตการเคลื่อนที่ของระดับน้ำในแท็งก์น้ำเมื่อเวลาเปลี่ยนไป จากการแสดงภาพเคลื่อนไหว (Animation) ของโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต เป็นต้น ซึ่งเป็นการส่งเสริมให้ผู้เรียนตั้งข้อคาดการณ์และนำไปสู่การค้นพบจากการได้ลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง ประกอบกับมีงานวิจัยที่เกี่ยวกับการนำโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตมาใช้ในการเรียนการสอน ซึ่งเมื่อทำการวิจัยแล้วพบว่าการนำโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตมาใช้ในการเรียนการสอนช่วยให้ประสบการณ์ที่เป็นรูปธรรมและช่วยพัฒนาการนิรนัยและการคิดจินตนาการของผู้เรียน ซึ่งส่งผลดีต่อการเรียนการสอน เช่น งานวิจัยของ นัยนา บุญสมร (2550: 96-97) ได้เปรียบเทียบความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างการสอนโดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตกับวิธีสอนตามปกติ พบว่านักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตมีคะแนนความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ จากแบบทดสอบด้วยรูปแบบซ้อนภาพสูงกว่านักเรียนที่เรียนด้วยวิธีสอนตามปกติ ทั้งนี้เป็นเพราะนักเรียนที่ได้ใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตในการเรียน ได้ฝึกการมองกราฟของฟังก์ชันที่ซ้อน ๆ กันในแกนระนาบเดียวกันได้อย่างสะดวกและรวดเร็วโดยไม่ต้องเสียเวลาในการสร้างกราฟของฟังก์ชันเองจากในกระดาษ ด้วยความสะดวกรวดเร็วนี้อาจส่งผลให้นักเรียนได้เห็นกราฟของฟังก์ชันต่าง ๆ ในระนาบเดียวกันได้หลายตัวอย่างมากยิ่งขึ้น ซึ่งเป็นการฝึกมองภาพซ้อนไปในขณะเรียน ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ บิซา และซาชาเรียเดส (Biza; & Zachariades. 2008: 89) ได้ออกแบบการสอนแคลคูลัสเรื่องอนุพันธ์โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตชื่อ EucliDraw โดยทดลองกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ผลการพัฒนาทำให้ได้กิจกรรมการเรียนการสอนซึ่งช่วยให้นักเรียน

เข้าใจแนวคิดของเส้นสัมผัสและอนุพันธ์ได้ดีขึ้น และจากการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตชื่อ C.a.R. (Compass and Ruler) พบว่าโปรแกรม C.a.R. มีสมบัติเบื้องต้นของโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตพอเพียง และเป็นโปรแกรม General Public License (GPL) คือเป็นโปรแกรมซึ่งอนุญาตให้ใช้และเผยแพร่ได้โดยไม่เสียค่าลิขสิทธิ์ จุดเด่นของโปรแกรม C.a.R. คือสามารถเตรียมแบบฝึกหัดให้ผู้เรียนสร้าง เช่น ให้ผู้เรียนสร้างเส้นสัมผัสของวงกลม หรือให้ผู้เรียนสร้างรังสีเพื่อแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้ ผู้เรียนแต่ละคนอาจสร้างด้วยวิธีการที่หลากหลายแตกต่างกัน โดยโปรแกรมจะแจ้งให้ทราบเมื่อสร้างได้คำตอบที่ถูกต้อง และจุดเด่นอีกประการหนึ่งของโปรแกรม C.a.R. คือ สามารถนำเสนอเป็นลักษณะแฟ้ม HTML ได้สะดวก ดังนั้นผู้วิจัยจึงคิดว่าเครื่องมือต่าง ๆ ที่มีอยู่ในโปรแกรม C.a.R. นั้นสามารถใช้ออกแบบกิจกรรมเพื่อช่วยแสดงให้เห็นนิสัยได้มองเห็นภาพของลักษณะการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร และภาพของการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรสองตัวเมื่อเทียบกับเวลาได้อย่างเป็นรูปธรรมมากขึ้นได้ และยังสามารถออกแบบกิจกรรมเพื่อให้ผู้เรียนได้สำรวจและเห็นแนวคิดที่สำคัญของเนื้อหาเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ ได้แก่ กิจกรรมสำรวจค่าความชันของเส้นสัมผัสของกราฟซึ่งเป็นแนวคิดของเรื่องอนุพันธ์ กิจกรรมสำรวจลักษณะของกราฟเพื่อศึกษาแนวคิดการทดสอบจุดวิกฤตโดยอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและอันดับที่สอง เป็นต้น

จากข้างต้นจะเห็นว่า การนำโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตเข้ามาประกอบการเรียนการสอน จะช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจแนวคิดต่าง ๆ ได้อย่างเป็นรูปธรรมมากขึ้น ซึ่งส่งผลดีต่อการเรียนการสอน แต่ความสามารถในเรื่องการคำนวณนั้น โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตยังมีประสิทธิภาพไม่มากนัก เพราะว่าโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตไม่ได้ถูกสร้างมาเพื่อการคำนวณ ผู้วิจัยมีความคิดเห็นว่า ควรนำโปรแกรมระบบพีชคณิตเข้ามาประกอบการเรียนการสอนร่วมด้วย เนื่องจากโปรแกรมระบบพีชคณิต (Computer Algebra System: CAS) เป็นโปรแกรมที่ถูกสร้างมาเพื่อการคำนวณโดยเฉพาะ ซึ่งธนูชัย ภูอุดม (2551: 2) ได้กล่าวว่า ลักษณะสำคัญของโปรแกรมระบบพีชคณิต คือ สามารถประมวลผลเชิงสัญลักษณ์ได้ กล่าวคือ สามารถหาคำตอบออกมาในลักษณะที่เป็นสัญลักษณ์ เช่น การหาลิมิตของฟังก์ชัน การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน เป็นต้น ผู้วิจัยมีความคิดเห็นว่า จากความสามารถในการคำนวณของโปรแกรมระบบพีชคณิต ทำให้ในกรณีที่ต้องมีการคำนวณที่ซับซ้อน โปรแกรมระบบพีชคณิตจะช่วยประหยัดเวลาในการคำนวณได้ อีกทั้งการนำโปรแกรมระบบพีชคณิตเข้ามาใช้ในการเรียนการสอน ยังทำให้มีเวลาเหลือมากพอในการทำความเข้าใจในเนื้อหามากขึ้น ส่งผลให้ผู้เรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ดี ประกอบกับมีงานวิจัยที่เกี่ยวกับการนำโปรแกรมระบบพีชคณิตมาใช้ในการเรียนการสอน ซึ่งผลการวิจัยพบว่าการนำโปรแกรมระบบพีชคณิตมาใช้ในการเรียนการสอนมีผลดีต่อการเรียนการสอน เช่น งานวิจัยของกมล เอกไทยเจริญ (2545: 53) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน คณิตศาสตร์ เจตคติของผู้เรียน และศึกษาสภาพการเรียนการสอนและสภาพสังคมในชั้นเรียนในการเรียนวิชาพีชคณิตเชิงเส้นโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ โดยทดลองกับนิสิตระดับปริญญาตรี สาขาคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาพีชคณิตเชิงเส้นโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟอยู่ในระดับดีได้ผลเป็นที่น่าสนใจ ผู้เรียนมีเจตคติที่ดีต่อการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ และ การเรียนวิชาพีชคณิตเชิงเส้น

โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟทำให้มีเวลาเหลือมากพอสำหรับการทำความเข้าใจในเนื้อหา ทำให้สามารถเรียนได้เนื้อหาที่มากและลึกซึ้ง สอดคล้องกับงานวิจัยของชาญชัย สุกใส (2546: บทคัดย่อ) ที่พบว่า การใช้โปรแกรมระบบพีชคณิตประกอบการเรียนการสอนวิชาแคลคูลัส โดยทดลองกับนักศึกษาโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์และสถิติประยุกต์นั้น ส่งผลให้นักศึกษาที่เรียนโดยใช้โปรแกรมระบบพีชคณิตประกอบมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักศึกษาที่เรียนปกติในชั้นเรียน และในด้านเจตคติต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์พบว่า นักศึกษาที่เรียนโดยใช้โปรแกรมระบบพีชคณิตประกอบมีเจตคติต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงขึ้น และจากการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมชื่อ Euler พบว่าในโปรแกรม Euler มีโปรแกรมระบบพีชคณิตแฝงอยู่ จึงทำให้โปรแกรม Euler สามารถประมวลผลเชิงสัญลักษณ์ได้ อีกทั้งโปรแกรม Euler ยังเป็นโปรแกรมแบบ GPL สามารถใช้และเผยแพร่ได้โดยไม่เสียค่าลิขสิทธิ์ การนำโปรแกรม Euler เข้ามาใช้ในการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์นั้น นอกจากจะนำมาช่วยในการคำนวณและตรวจคำตอบแล้ว ยังเป็นการช่วยฝึกทักษะหลายประการให้กับผู้เรียน ได้แก่ ทักษะด้านความรู้ความจำ ทักษะการแสดงวิธีทำอย่างเป็นขั้นตอน เป็นต้น เนื่องจากโปรแกรม Euler ช่วยประหยัดเวลาในการคำนวณ จึงทำให้ผู้เรียนสามารถฝึกทำแบบฝึกหัดได้หลายข้อ เมื่อผู้เรียนได้เห็นและได้ฝึกทำแบบฝึกหัดบ่อย ๆ เกิดกระบวนการทำซ้ำ ๆ ผู้เรียนจะสามารถจดจำขั้นตอนการทำแบบฝึกหัดได้ เกิดเป็นทักษะและความชำนาญพื้นฐานเพื่อใช้ในการเรียนระดับสูงต่อไป

เนื่องจากเฟย์ (Fey.1984: 53 – 59) ได้กล่าวว่า วิชาแคลคูลัสเป็นการสังเคราะห์ระหว่างพีชคณิตและเรขาคณิต ผู้วิจัยจึงเห็นถึงคุณค่าของการผสมผสานเนื้อหาทั้งสองสาขาวิชา จนเกิดเป็นสาขาวิชาใหม่ที่สามารถนำความรู้มาใช้ประโยชน์ได้ เช่น เรื่องโจทย์ปัญหาค่าสูงสุดและต่ำสุดที่สามารถใช้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน ดังนั้นจากเหตุผลและความสำคัญของโปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ที่ได้กล่าวในข้างต้น ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะนำโปรแกรมทั้งสองมาใช้ในการจัดการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตระดับปริญญาตรี ในการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler
2. เพื่อศึกษาความพึงพอใจของนิสิตระดับปริญญาตรี ที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

ความสำคัญของการวิจัย

เป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ซึ่งในงานวิจัยนี้เป็นการผสมผสานการใช้งานโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตและโปรแกรมระบบพีชคณิต เพื่อให้เกิดประโยชน์สูงสุดกับการเรียนการสอน โดยเลือกใช้โปรแกรมให้เหมาะสมกับลักษณะงาน กล่าวคือ นำโปรแกรม C.a.R. ซึ่งมีความสามารถในการสร้างรูปเรขาคณิตในลักษณะเส้นตรงและวงเวียน และสร้างสามารถแสดงการเคลื่อนที่ของรูปเรขาคณิตได้มาใช้นำเสนอแนวคิดและตัวอย่างให้ผู้เรียนได้มองเห็นอย่างเป็นรูปธรรมมากขึ้น และนำโปรแกรม Euler ซึ่งมีประสิทธิภาพในการคำนวณมาช่วยเสริมการเรียนรู้ของผู้เรียน ช่วยประหยัดเวลาในการคำนวณเพื่อใช้เวลาที่เหลือในการเรียนเนื้อหาเพิ่มเติมและฝึกทักษะพื้นฐานที่จำเป็นในการเรียนระดับสูงต่อไป

ขอบเขตของการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนิสิตระดับปริญญาตรี ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา คณ 111 (คณิตศาสตร์ 1) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ กรุงเทพมหานคร

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

ตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนิสิตระดับปริญญาตรี ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา คณ 111 (คณิตศาสตร์ 1) ประจำภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ กรุงเทพมหานคร จำนวน 16 คน

ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

ใช้เวลาทดลองสอน 16 คาบ คาบละ 50 นาที โดยใช้เวลาในคาบเรียนปกติ

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย เป็นกิจกรรมการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ 1 เรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ ประกอบด้วย

- | | |
|---|-------|
| 1. อนุพันธ์และอนุพันธ์อันดับสูง | 2 คาบ |
| 2. อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
และฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ | 2 คาบ |
| 3. อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย | 2 คาบ |
| 4. อนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม
และอนุพันธ์ในพิกัดเชิงขั้ว | 3 คาบ |
| 5. การเขียนกราฟของฟังก์ชัน | 3 คาบ |
| 6. โจทย์ปัญหาการหาค่าสูงสุดและต่ำสุด | 2 คาบ |

7. ความเร็วและความเร่ง อัตราสัมพัทธ์ และ ค่าเชิงอนุพันธ์และการประยุกต์

2 คาบ

ตัวแปรที่ศึกษา

ตัวแปรอิสระ คือ กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

ตัวแปรตาม คือ

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์
2. ความพึงพอใจต่อกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์

โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. โปรแกรม **C.a.R.** หมายถึง โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต ชื่อ C.a.R. ซึ่งย่อมาจาก Compass and Ruler ใช้ในการเสนอแนวคิดที่สำคัญของเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ และใช้ในการแสดงภาพการเปลี่ยนแปลง เพื่อให้ผู้เรียนได้สำรวจ สังเกต และเรียนรู้อย่างมีความหมาย

2. โปรแกรม **Euler** หมายถึง โปรแกรมที่สามารถประมวลผลเชิงสัญลักษณ์ได้ เนื่องจากในโปรแกรม Euler มีโปรแกรมระบบพีชคณิตแฝงอยู่คือ โปรแกรม Maxima ในงานวิจัยนี้ใช้โปรแกรม Euler เพื่อเสริมการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ โดยช่วยในการคำนวณ ตรวจสอบคำตอบ

3. กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม **C.a.R.** และโปรแกรม **Euler** หมายถึง กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ซึ่งในการเรียนแต่ละหัวข้อประกอบด้วยใบกิจกรรมและกิจกรรมภาคปฏิบัติบนคอมพิวเตอร์ที่สร้างขึ้นจากโปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ผู้เรียนจะได้เรียนรู้จากการสอนของครูควบคู่ไปกับการเรียนรู้จากการปฏิบัติด้วยตนเองภายใต้คำแนะนำของครู และได้ฝึกทักษะในการทำแบบฝึกหัดโดยมีโปรแกรม Euler เป็นเครื่องมือเสริมการเรียนรู้ เนื้อหาในกิจกรรมมี 7 หัวข้อประกอบด้วย

- 3.1 อนุพันธ์และอนุพันธ์อันดับสูง
- 3.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- 3.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย
- 3.4 อนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริมและอนุพันธ์ในพิกัดเชิงขั้ว
- 3.5 การเขียนกราฟของฟังก์ชัน
- 3.6 โจทย์ปัญหาการหาค่าสูงสุดและต่ำสุด
- 3.7 ความเร็วและความเร่ง อัตราสัมพัทธ์ และค่าเชิงอนุพันธ์และการประยุกต์

4. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ หมายถึง คะแนนรวมของนิสิตที่ได้จากการประเมินดังนี้

4.1 การประเมินผลระหว่างเรียน จากการทำใบกิจกรรม มีน้ำหนักคะแนนคิดเป็นร้อยละ 20 ของคะแนนรวม

4.2 การประเมินผลระหว่างเรียน จากการทำแบบทดสอบย่อย มีน้ำหนักคะแนนคิดเป็นร้อยละ 30 ของคะแนนรวม

4.3 การประเมินผลหลังเรียน จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ มีน้ำหนักคะแนนคิดเป็นร้อยละ 50 ของคะแนนรวม

5. เกณฑ์ หมายถึง ค่าร้อยละ 60 ของคะแนนรวม กล่าวคือ ถ้านิสิตได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนรวม ถือว่านิสิตผู้นั้นสอบผ่าน

6. ความพึงพอใจต่อกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ โดยใช้โปรแกรม **C.a.R.** และโปรแกรม **Euler** หมายถึง การแสดงออกของนิสิตถึงความรู้สึกชอบกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ซึ่งวัดจากแบบสอบถามวัดความพึงพอใจของนิสิตที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เป็นชนิดมาตราส่วนประมาณค่า (Rating Scale) 5 สเกล คือ 5, 4, 3, 2 และ 1 หมายถึง มากที่สุด มาก ปานกลาง น้อย และน้อยที่สุด ตามลำดับ และนำเสนอน้ำหนักความคิดเห็นโดยใช้การประเมินค่าความคิดเห็นของประคอง กรรณสูต (2538: 77) ดังนี้

คะแนนเฉลี่ย 4.50 – 5.00 หมายถึง นิสิตมีความพึงพอใจอยู่ในระดับมากที่สุด หลังจากเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

คะแนนเฉลี่ย 3.50 – 4.49 หมายถึง นิสิตมีความพึงพอใจอยู่ในระดับมาก หลังจากเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

คะแนนเฉลี่ย 2.50 – 3.49 หมายถึง นิสิตมีความพึงพอใจอยู่ในระดับปานกลาง หลังจากเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

คะแนนเฉลี่ย 1.50 – 2.49 หมายถึง นิสิตมีความพึงพอใจอยู่ในระดับน้อย หลังจากเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

คะแนนเฉลี่ย 1.00 – 1.49 หมายถึง นิสิตมีความพึงพอใจอยู่ในระดับน้อยที่สุด หลังจากเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

สมมติฐานของการวิจัย

นิสิตที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler สอบผ่านเกณฑ์ มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 70 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในงานวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องและได้นำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

1. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับสร้างกิจกรรมการเรียนการสอน

1.1 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต

1.1.1 เอกสารที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต

1.1.2 เอกสารที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรม C.a.R.

1.1.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต

1.2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมระบบพีชคณิต

1.2.1 เอกสารที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมระบบพีชคณิต

1.2.2 เอกสารที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรม Euler

1.2.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้โปรแกรมระบบพีชคณิต

1.3 ลักษณะของโปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

2. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์

2.1 เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์

1. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับสร้างกิจกรรมการเรียนการสอน

1.1 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต

1.1.1 เอกสารที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต

โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตเป็นโปรแกรมด้านเรขาคณิตซึ่งเน้นการสร้างรูปเรขาคณิตในลักษณะเดียวกับการใช้สันตรงและวงเวียน แต่มีลักษณะปฏิสัมพันธ์ ผู้ใช้สามารถสร้างรูปและเคลื่อนย้ายรูปได้ โดยการเคลื่อนย้ายจุดหรือย้ายเส้นนั้นสามารถทำได้โดยง่าย และการเคลื่อนย้ายจะยังคงรักษาสสมบัติที่ร่วมกันของรูปนั้นไว้เสมอ เช่น รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วจะเคลื่อนย้ายจุดมุมในลักษณะใดก็ตามจะเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเสมอ (สุรินทร์ บุญพัฒนาภรณ์. 2549: 18) หรือสมบัติของจุดที่อยู่บนส่วนของเส้นตรงเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงส่วนของเส้นตรง จุดนั้นจะยังคงสมบัติที่สัมพันธ์กับส่วนของเส้นตรงเสมอ เช่น ถ้าจุดเป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงนั้น เมื่อยืด-หดขนาดของส่วนของเส้นตรง จุดจะยังคงเป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงนั้นเสมอ หรือถ้า

จุดอยู่บนส่วนของเส้นตรงด้วยอัตราส่วน 1 : 3 เมื่อยืด-หดขนาดของส่วนของเส้นตรง จุดจะยังคงอยู่บนส่วนของเส้นตรงด้วยอัตราส่วนเดิม เป็นต้น ทำให้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตเหมาะสำหรับการเรียนรู้เรขาคณิต อูบล กลองกระโทก (2550: คำนำ) กล่าวว่า เรขาคณิตพลวัต เป็นโปรแกรมที่นับว่ามีประโยชน์ต่อการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เป็นอย่างยิ่ง เพราะว่าเป็นโปรแกรมที่สร้างมโนทัศน์ในการเรียนรู้ให้กับผู้เรียน ทำให้วิชาคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นวิชาที่มีความเป็นนามธรรมค่อนข้างสูงให้เป็นเรื่องที่ง่าย ผู้เรียนได้ฝึกทักษะการสำรวจและการแก้ปัญหาด้วยตนเอง โดยที่มีครูผู้สอนเป็นผู้ที่คอยแนะนำ นับเป็นการเปลี่ยนแปลงการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ สอดคล้องกับบรรพต สุวรรณประเสริฐ (2544: 144) ที่เสนอแนะเกี่ยวกับการนำสื่อการสอนคณิตศาสตร์มาประกอบการสอนว่า “ สื่อการสอนและอุปกรณ์โสตทัศนวัสดุทั้งหลายเป็นเครื่องมือที่ช่วยให้การสอนคณิตศาสตร์เข้าไปในความรู้สึกของผู้เรียนหลาย ๆ ทาง ดังนั้นอุปกรณ์การสอนไม่ควรมีแค่หนังสือแบบเรียน ซอล์กและกระดานดำเท่านั้น ยังมีอุปกรณ์การสอนคณิตศาสตร์อีกมากมาย ที่ทำให้การสอนมีประสิทธิภาพขึ้น ซึ่งผู้สอนควรนำมาใช้” นอกจากนี้ยังได้กล่าวถึงสมมุติฐานเกี่ยวกับเงื่อนไขสำหรับการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ซึ่งพอสรุปได้ดังนี้ คือ (1) ผู้เรียนแต่ละคนจะเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เป็นพฤติกรรมใหม่ได้จากสภาพแวดล้อมรอบตัวทั้งหมดของผู้เรียน (2) การเรียนรู้คณิตศาสตร์จะเกิดขึ้นเมื่อผู้เรียนเห็นว่าพฤติกรรมที่ต้องการรู้คณิตศาสตร์นั้นมีประโยชน์และมีบทบาทต่อความสนใจของผู้เรียน (3) การเรียนรู้คณิตศาสตร์จะเกิดขึ้นเมื่อผู้เรียนคิดว่าสิ่งที่เรียนนั้นมีความหมายต่อตัวผู้เรียน และสามารถนำไปใช้ได้ (4) การเรียนรู้คณิตศาสตร์จะเกิดขึ้นเมื่อผู้เรียนได้ลงมือกระทำด้วยตนเองมากกว่าการเรียนรู้โดยการฟังจากครูผู้สอนเท่านั้น”

โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตที่มีอยู่ในปัจจุบันมีสมบัติพื้นฐานของการสร้างและการเคลื่อนย้ายจุด เส้นตรง วงกลม มุม พร้อมทั้งเครื่องมืออำนวยความสะดวกเบื้องต้น เช่น ความยาว ขนาดของมุม ซึ่งสามารถจำแนกตามลักษณะการเผยแพร่ได้ 2 ลักษณะ (*Interactive Geometry Software*. 2009: Online) ดังนี้

1. โปรแกรมแบบ Commercial คือโปรแกรมที่ใช้ในเชิงธุรกิจ อาทิเช่น

- 1.1 Cabri (<http://www.chartwellyorke.com/cabri.html>)
- 1.2 Cinderella (<http://www.cinderella.de/tiki-index.php>)
- 1.3 GSP (<http://www.keypress.com/sketchpad/>)
- 1.4 GEUP (<http://www.geup.net/en/index.htm>)
- 1.5 Cabri 3D (<http://www.chartwellyorke.com/cabri3d/cabri3d.html>)
- 1.6 Geometry Expressions (<http://www.geometryexpressions.com>)
- 1.7 MathKit (<http://mathkit.sourceforge.net>)
- 1.8 Yenka 3D Shapes (http://www.crocodile-clips.com/en/Yenka_3D_Shapes)
- 1.9 EucliDraw (<http://www.euclidraw.com>)

2. โปรแกรมแบบ General Public License (GPL) คือโปรแกรมที่ใช้และเผยแพร่โดยไม่เสียค่าใช้จ่าย อาทิเช่น

- 2.1 C.a.R. (<http://www.z-u-l.de/>)
- 2.2 CaRMetal (http://db-maths.nuxit.net/CaRMetal/index_en.html)
- 2.3 Eukleides (<http://www.eukleides.org/>)
- 2.4 GeoGebra (<http://www.geogebra.at/>)
- 2.5 GeoProof (<http://home.gna.org/geoproof/>)
- 2.6 GeoView (<http://www-sop.inria.fr/lemme/geoview/geoview.html>)
- 2.7 KSEG (<http://www.mit.edu/~ibaran/kseg.html>)
- 2.8 XCas (<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac.html>)
- 2.9 GeoNext (<http://geonext.uni-bayreuth.de>)
- 2.10 OpenEuclide (<http://coulon.publi.free.fr/openeuclide>)

1.1.2 เอกสารที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรม C.a.R.

ผู้วิจัยเลือกใช้โปรแกรม C.a.R. (Compass and Ruler) เป็นเครื่องมือในการวิจัยครั้งนี้ เนื่องจากโปรแกรม C.a.R. มีสมบัติเบื้องต้นของโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตอย่างพอเพียง กล่าวคือ มีความสามารถในการสร้างรูปเรขาคณิตได้เสมือนกับการใช้สันตรงและวงเวียน สามารถสร้างและจัดกระทำกับวัตถุ (Object) ได้ เช่น สร้างรูปเรขาคณิต สร้างกราฟ จัดกระทำกับวัตถุโดยการเคลื่อนที่วัตถุ และแสดงภาพเคลื่อนไหว (Animation) เป็นต้น และโปรแกรม C.a.R. ยังเป็นโปรแกรม General Public License (GPL) คืออนุญาตให้ใช้และเผยแพร่ได้โดยไม่เสียค่าใช้จ่ายอีกด้วย โปรแกรม C.a.R. เป็นโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นโดย ศาสตราจารย์ ดร.เรอเน่ กรอธมันน์ (Prof. Dr. René Grothmann) ชาวเยอรมัน โดยมีวัตถุประสงค์สำหรับนักเรียนตั้งแต่ชั้นประถมศึกษาจนถึงระดับสูง รวมทั้งผู้ใหญ่ การใช้โปรแกรมสามารถใช้ได้ด้วยการคลิกเมาส์และลากเมาส์ หรือใช้คำสั่งโดยตรง สามารถนำเสนอเป็นลักษณะแฟ้ม HTML ได้สะดวก และเป็นโปรแกรมที่พัฒนาด้วยภาษา JAVA โปรแกรม C.a.R. สามารถรวมขั้นตอนการสร้างโดยการสร้างมาโคร (Macro) อีกทั้งยังสามารถออกแบบกิจกรรมส่งเสริมให้นักเรียนได้ทดสอบข้อคาดการณ์หรือตั้งข้อคาดการณ์ได้จากการทดลองสร้างซ้ำ ๆ หรือหลากหลายวิธี และผู้สอนยังสามารถเตรียมแบบฝึกหัดให้นักเรียนสร้างโดยโปรแกรมจะแจ้งให้ทราบเมื่อสร้างได้ถูกต้อง (*Interactive Geometry Software*. 2009: Online)

การใช้โปรแกรม C.a.R. สำหรับการเรียนการสอนแคลคูลัสเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ในงานวิจัยนี้ นอกเหนือจากการใช้โปรแกรม C.a.R. เป็นเครื่องมืออำนวยความสะดวกในการเรียนการสอนแล้ว จุดประสงค์หลักคือเพื่อให้หาค่าได้ รับประสบการณ์ที่เป็นรูปธรรมมากขึ้น เพื่อช่วยพัฒนาการนิรนัยและการคิดจินตนาการของผู้เรียน รวมถึงเพื่อให้หาค่าได้ เห็นแนวคิดที่สำคัญของเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ ซึ่งผู้วิจัยใช้เครื่องมือต่าง ๆ ที่มีอยู่ในโปรแกรม C.a.R. ออกแบบกิจกรรมสำรวจค่าความชันของเส้นสัมผัสของกราฟซึ่งเป็นแนวคิดของเรื่องอนุพันธ์ กิจกรรมสำรวจ

ลักษณะของกราฟเพื่อศึกษาแนวความคิดการทดสอบจุดวิกฤตโดยอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและอันดับสอง กิจกรรมให้ผู้เรียนได้สังเกตเห็นการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรสองตัวเมื่อเทียบกับเวลา กิจกรรมสำรวจแสดงแนวความคิดการประมาณค่าของฟังก์ชันโดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ กิจกรรมสังเกตลักษณะการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรในเรื่องโจทย์ปัญหาค่าสูงสุด-ต่ำสุด เป็นต้น โดยในกิจกรรมเหล่านี้ นิสิตสามารถทำกิจกรรมสำรวจ สังเกต และเปลี่ยนแปลงค่าของตัวแปรต่าง ๆ ได้

1.1.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต

งานวิจัยในประเทศ

อำนาจ เชื้อบ่อคา (2547: 28-31) ได้เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง พาราโบลา ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ก่อนและหลังการใช้โปรแกรม GSP กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2546 โรงเรียนนวมินทราชินูทิศ สตรีวิทยา 2 เขตคลองสามวา กรุงเทพมหานคร จำนวน 48 คน ดำเนินการทดลองโดยใช้แบบแผนการวิจัยแบบ One-Group Pretest-Posttest Design สถิติที่ใช้คือ t-test แบบ Dependent ผลการศึกษาพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง พาราโบลา หลังได้รับการสอนโดยใช้โปรแกรม GSP สูงกว่าก่อนได้รับการสอนด้วยโปรแกรม GSP อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

กรรณิกา ผาสุก (2549: 111-125) ได้พัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์และแผนการจัดการเรียนรู้ประกอบโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ให้มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 75/75 ศึกษาดัชนีประสิทธิผลของบทเรียนคอมพิวเตอร์และแผนการจัดการเรียนรู้ประกอบโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนความสามารถในการแก้ปัญหา เจตคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ ความพึงพอใจต่อการเรียน และความคงทนในการเรียนรู้ของนักเรียน กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 1/2549 โรงเรียนบ้านท่าเสา จังหวัดร้อยเอ็ด จำนวน 46 คน ได้มาโดยการเลือกแบบเจาะจง (Purposive Sampling) แล้วแบ่งนักเรียนเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มทดลอง 1 เรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ กลุ่มทดลอง 2 เรียนด้วยการเรียนประกอบโปรแกรม GSP ผลการวิจัยปรากฏดังนี้

1. บทเรียนคอมพิวเตอร์มีประสิทธิภาพ เท่ากับ 78.09/76.63 และแผนการจัดการเรียนรู้ประกอบโปรแกรม GSP มีประสิทธิภาพ เท่ากับ 79.13/76.41 ซึ่งเป็นไปตามเกณฑ์ที่คาดหวังไว้คือ 75/75
2. บทเรียนคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นมีดัชนีประสิทธิผล เท่ากับ 0.6133 และแผนการจัดการเรียนรู้ประกอบโปรแกรม GSP มีดัชนีประสิทธิผล เท่ากับ 0.6401
3. นักเรียนที่เรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์กับนักเรียนที่เรียนด้วยการเรียนประกอบโปรแกรม GSP มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนไม่แตกต่างกัน
4. นักเรียนที่เรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์กับนักเรียนที่เรียนด้วยการเรียนประกอบโปรแกรม GSP มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อน

เรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนไม่แตกต่างกัน

5. นักเรียนที่เรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์และนักเรียนที่เรียนด้วยการเรียนประกอบโปรแกรม GSP มีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

6. นักเรียนที่เรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์และนักเรียนที่เรียนด้วยการเรียนประกอบโปรแกรม GSP มีความพึงพอใจต่อการเรียน โดยรวมอยู่ในระดับมาก

7. นักเรียนที่เรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ และนักเรียนที่เรียนด้วยการเรียนประกอบโปรแกรม GSP มีความคงทนในการเรียนรู้หลังเรียนไปแล้วได้ร้อยละ 99.15 และ 98.98 ของคะแนนทดสอบหลังเรียน ตามลำดับ

นัยนา บุญสมร (2550: 95-100) ได้เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องฟังก์ชัน ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ และเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างกลุ่มที่เรียนด้วยการสอนโดยใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) กับกลุ่มที่เรียนด้วยวิธีสอนตามปกติ กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ได้แก่นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2549 โรงเรียนร่อนคำ อำเภอร่อนคำ จังหวัดกาฬสินธุ์ จำนวน 84 คน เป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมกลุ่มละ 42 คน ได้มาจากการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling) ผลการวิจัยปรากฏดังนี้

1. นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่เรียนโดยวิธีสอนตามปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2. นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) และนักเรียนที่เรียนด้วยวิธีสอนตามปกติ มีความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ มีคะแนนจากแบบทดสอบด้วยรูปแบบหาด้านตรงข้ามลูกบาศก์ และจากแบบทดสอบด้วยรูปแบบหมุนภาพ ไม่แตกต่างกันแต่นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้สื่อโปรแกรมเดอะจีโอมเตอร์สเก็ตแพด (The Geometer's Sketchpad : GSP) มีคะแนนความสามารถด้านมิติสัมพันธ์จากแบบทดสอบด้วยรูปแบบซ้อนภาพสูงกว่านักเรียนที่เรียนด้วยวิธีสอนตามปกติ

3. นักเรียนที่เรียนด้วยการสอนโดยใช้สื่อโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) มีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ดีกว่านักเรียนที่เรียนด้วยวิธีสอนตามปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

สันติ อธิธิพลนาวากุล (2550: 89-96) ได้พัฒนาชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวนโดยใช้โปรแกรม GSP เพื่อส่งเสริมความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ให้มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ และได้ศึกษาความคิดรวบยอดและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนก่อนและหลังการใช้ชุดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวนโดยใช้โปรแกรม GSP ผลการวิจัยพบว่า

1. ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน โดยใช้โปรแกรม GSP เรื่อง ภาควัดตรวย ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีประสิทธิภาพสูงกว่าเกณฑ์ 80/80 โดยมีค่าเฉลี่ย 85.94/86.64

2. ความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการสอนโดยใช้ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน โดยใช้โปรแกรม GSP เรื่อง ภาควัดตรวย สูงขึ้น อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

3. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการสอนโดยใช้ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน โดยใช้โปรแกรม GSP เรื่อง ภาควัดตรวย สูงขึ้น อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

4. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการสอนโดยใช้ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน โดยใช้โปรแกรม GSP เรื่อง ภาควัดตรวย ผ่านเกณฑ์ร้อยละ 65 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

อุบล กลองกระโทก (2550: 26-30) ได้สร้างสื่อการสำรวจเมทริกซ์ของการแปลงโดยใช้เรขาคณิตพลวัต (GSP) และสำรวจความคิดเห็นของนักศึกษาที่ใช้สื่อการสอนดังกล่าว กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาหลักสูตรครุศาสตร์ (ครู 5 ปี) สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 4 ประจำปี การศึกษา 2550 เครื่องที่ใช้ในการฝึกทักษะ คือ คู่มือการสร้างสื่อการสำรวจเมทริกซ์ของการแปลง โดยใช้เรขาคณิตพลวัตและแบบสอบถามความคิดเห็นเกี่ยวกับการใช้สื่อดังกล่าว ผลจากการสร้างสื่อ การสำรวจเมทริกซ์ของการแปลงโดยใช้เรขาคณิตพลวัต แบ่งเป็น 4 บทดังนี้ คือ เมทริกซ์และการ ดำเนินการ 3 แฟ้มเอกสาร การแปลง 4 แฟ้มเอกสาร เมทริกซ์ของการแปลงในระนาบ 5 แฟ้ม เอกสาร และเมทริกซ์ของการแปลงในปริภูมิ 3 มิติ 8 แฟ้มเอกสาร ผลการวิเคราะห์ความคิดเห็นของ การใช้คู่มือการสร้างสื่อดังกล่าว ปรากฏว่าคู่มือการสร้างสื่อมีความเหมาะสมอยู่ในระดับดี ซึ่งเป็ นการแสดงว่า คู่มือการสร้างสื่อการสำรวจเมทริกซ์ของการแปลงโดยใช้เรขาคณิตพลวัตที่ผู้วิจัยสร้าง ขึ้นน่าจะมีประสิทธิภาพในการนำไปสร้างเป็นสื่อการสำรวจเมทริกซ์ของการแปลงโดยใช้เรขาคณิต พลวัต หรือเป็นแนวทางในการสร้างสื่อการสำรวจเนื้อหาทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ ต่อไป

วรวรรณ กฤตยากรนุพงศ์ (2551: 52-57) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ในการเรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องความเท่ากันทุก ประการ โดยใช้การแปลงทางเรขาคณิตและโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต และศึกษาความพึงพอใจ ของนักเรียนหลังจากเรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องความเท่ากันทุกประการ โดยใช้การแปลง ทางเรขาคณิตและโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาค เรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2550 โรงเรียนวัดดอนมะเกลือ ตำบลดอนมะเกลือ อำเภอบัวทอง จังหวัด สุพรรณบุรี จำนวน 1 ห้องเรียน มีนักเรียน 31 คน ซึ่งได้มาจากการสุ่มตัวอย่างแบบเกาะกลุ่ม จาก ประชากรทั้งหมด 2 ห้องเรียน ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เรียนด้วยกิจกรรม การเรียนการสอนเรื่องความเท่ากันทุกประการ โดยใช้การแปลงทางเรขาคณิตและโปรแกรม เรขาคณิตแบบพลวัต สามารถสอบผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด ที่

ระดับนัยสำคัญ .01 และนักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีความพึงพอใจในการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการ โดยใช้การแปลงทางเรขาคณิตและโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตอยู่ในระดับมาก ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีความสามารถในการเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการ โดยใช้การแปลงทางเรขาคณิตและโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

งานวิจัยต่างประเทศ

จูลี (July. 2001: 2060-A) ได้ศึกษาผลของการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ที่มีต่อมโนทัศน์ทางเรขาคณิตในการสร้างรูป และวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ กับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง กระตุ้นให้นักเรียนสำรวจ อภิปราย และสร้างรูปด้วยตนเอง พบว่า นักเรียนที่เรียนโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad มีมโนทัศน์ทางเรขาคณิตหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ โดยเฉพาะอย่างยิ่งกับนักเรียนกลุ่มต่ำ

บาฮาวานด์ (Baharvand. 2002: 552-A) ได้เปรียบเทียบผลการสอนเรขาคณิตระหว่างสอนโดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตชื่อ GSP เทียบกับการสอนของครูแบบปกติโดยใช้กระดาษ ดินสอ และครูเป็นผู้บรรยาย โดยกลุ่มควบคุมเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 26 คน ให้ได้รับการสอนของครูแบบปกติ และอีกกลุ่มเป็นกลุ่มทดลองซึ่งนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 24 คน ให้เรียนด้วยเนื้อหาเดียวกับกลุ่มควบคุมแต่ใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตชื่อ GSP ในการเรียน ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนซึ่งเรียนโดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตชื่อ GSP มีคะแนนการทำแบบทดสอบหลังการเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นสูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมอย่าง มีนัยสำคัญที่ระดับนัยสำคัญ .05 นอกจากนี้ยังพบว่านักเรียนในกลุ่มทดลองมีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ต่อเรขาคณิตในทางบวก ซึ่งแสดงให้เห็นว่าโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตชื่อ GSP เป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพในการเรียนการสอนเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

โอลิเวโร และโรบัตติ (Olivero; & Robutti. 2007: 135) ได้ศึกษารูปแบบการใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตในบทบาทของเครื่องมือวัด (Measuring Tools) ในบริบทที่เกี่ยวข้องกับการตั้งข้อคาดการณ์และการพิสูจน์ปัญหาเรขาคณิต โดยใช้โปรแกรม Cabri จากการเก็บรวบรวมข้อมูลโดยการสังเกตและวิเคราะห์รูปแบบการวัดจากการตอบคำถามของนักเรียน พบว่า รูปแบบการวัดถูกแบ่งเป็น 5 ประเภท ได้แก่

1. Wandering Measuring: นักเรียนไม่มีแนวคิดในการสำรวจรูป การวัดจึงเป็นแบบสุ่ม (ไม่มีจุดหมาย)
2. Guided Measuring: นักเรียนมีแนวทางการสำรวจรูป การวัดถูกใช้เพื่อให้ได้รับข้อมูลจากรูป
3. Perceptual Measuring: นักเรียนสามารถรับรู้สมบัติของรูปหรือความสัมพันธ์ต่าง ๆ แต่ไม่มั่นใจในการรับรู้ การวัดถูกใช้เพื่อยืนยันการรับรู้ของตน

4. Validation Measuring: หลังจากนักเรียนตั้งข้อคาดการณ์ การวัดถูกใช้เพื่อตรวจสอบข้อคาดการณ์

5. Proof Measuring: หลังการพิสูจน์ การวัดถูกใช้เพื่อให้เข้าใจบทพิสูจน์ดีขึ้น

และรูปแบบการวัดมีความเกี่ยวข้องกับการถ่ายโยงระหว่างการวิเคราะห์รูปทั้งสองแบบของนักเรียน ได้แก่ การวิเคราะห์รูปแบบ Spatio-Graphical คือ นักเรียนวิเคราะห์เพียงลักษณะรูปร่างของรูป และการวิเคราะห์รูปแบบ theoretical คือ นักเรียนวิเคราะห์ไปถึงสมบัติต่าง ๆ ของรูป (มองในเชิงทฤษฎี) ผลการวิจัยนี้สามารถใช้เป็นเครื่องมือประเมินความสามารถของนักเรียนและทำให้ครูได้ตระหนักถึงการหยิบยื่นเครื่องมือการเรียนรู้ให้นักเรียนในการแก้ปัญหาโดยคำนึงถึงความสามารถของนักเรียน

จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตพบว่า โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตเป็นสิ่งที่เอื้อต่อการเรียนการสอน ทั้งยังช่วยในการตั้งข้อคาดการณ์ ตรวจสอบข้อคาดการณ์ และสรุปผลได้ รวมถึงสร้างเจตคติต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในทางบวกแก่ผู้เรียน ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะนำโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตมาใช้ในการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์

1.2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมระบบพีชคณิต

1.2.1 เอกสารที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมระบบพีชคณิต

โปรแกรมระบบพีชคณิต (Computer Algebra System: CAS) คือ โปรแกรมการคิดคำนวณ ที่มีลักษณะสำคัญ คือ สามารถประมวลผลเชิงสัญลักษณ์ได้ กล่าวคือ สามารถหาคำตอบออกมาในลักษณะที่เป็นสัญลักษณ์ได้ เช่น การหาลิมิตของฟังก์ชัน การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน เป็นต้น (ธนชัย ภูอุดม. 2551: 2)

โปรแกรมระบบพีชคณิตได้รับการพัฒนามาจากการค้นคว้าวิจัยสมองกล คอมพิวเตอร์หรือปัญญาประดิษฐ์ ซึ่ง มาร์ติน เวลแมน (Martin Veltman) เป็นผู้บุกเบิกโดยสร้างโปรแกรมที่สามารถจัดการสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์และประยุกต์ใช้เฉพาะทางฟิสิกส์ขั้นสูงเรื่องพลังงาน ชื่อ Schoonschip จนได้รับรางวัลโนเบลสาขาฟิสิกส์ในปี ค.ศ.1963 คาร์ล เอนเจลแมน (Carl Engelman) สร้างโปรแกรม MATHLAB ขึ้นในปี ค.ศ.1964 และต่อมาโปรแกรม MATHLAB ถูกพัฒนาขึ้นเพื่อใช้งานกับผู้ใช้ในระดับอุดมศึกษา โปรแกรม MATHLAB และโปรแกรม MATLAB เป็นโปรแกรมที่มีชื่อเรียกคล้ายกัน แต่แท้จริงแล้วเป็นโปรแกรมคนละโปรแกรม โปรแกรม MATHLAB ย่อมาจาก “Mathematical Laboratory” ในขณะที่โปรแกรม MATLAB ย่อมาจาก “Matrix Laboratory” โปรแกรม MATLAB สร้างขึ้นภายหลังการสร้างโปรแกรม MATHLAB เป็นเวลา 15 ปี ณ มหาวิทยาลัยนิวยอร์ก ปัจจุบันยังคงมีการใช้งานโปรแกรมทั้งสองอยู่ โปรแกรมระบบพีชคณิตที่ได้รับความนิยมในยุคแรก ๆ ได้แก่ โปรแกรม muMATH โปรแกรม Reduce และ

โปรแกรม Macsyma ในปี ค.ศ.1987 บริษัท Hewlett-Packard ได้ประดิษฐ์เครื่องคิดเลขรุ่น Hp-28 ซึ่งเป็นเครื่องคิดเลขแบบพกพาเครื่องแรกที่บรรจุโปรแกรมระบบพีชคณิตไว้ในเครื่อง โดยเครื่องคิดเลขรุ่นนี้มีความสามารถในการดำเนินการทางพีชคณิต หาลิขิต อนุพันธ์ และอินทิเกรต สร้างอนุกรมเทย์เลอร์ และแก้สมการหาคำตอบได้ ต่อมาในปี ค.ศ.1995 บริษัท Texas Instruments ได้ประดิษฐ์เครื่องคิดเลขรุ่น Ti-92 ซึ่งเป็นเครื่องคิดเลขแบบพกพาซึ่งบรรจุโปรแกรมระบบพีชคณิตชื่อ Derive และบริษัท Texas Instruments ได้พัฒนาเครื่องคิดเลขในลักษณะนี้อย่างต่อเนื่อง ได้แก่ รุ่น Ti-89 รุ่น Ti-92 Plus จนมาถึงรุ่น Ti-Nspire ซึ่งออกวางจำหน่ายในปี ค.ศ.2007 โปรแกรมระบบพีชคณิตที่เป็นผู้ครองตลาดในปัจจุบันคือ โปรแกรม Mathematica ซึ่งโปรแกรมนี้ถูกใช้อย่างแพร่หลายในงานวิจัยทางคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์ และยังมีโปรแกรมระบบพีชคณิตอื่น ๆ อีก ได้แก่ โปรแกรม Maxima (ซึ่งพัฒนามาจากโปรแกรม Macsyma) โปรแกรม Derive (ซึ่งพัฒนามาจากโปรแกรม muMATH) โปรแกรม Maple โปรแกรม MuPAD โปรแกรม MathCad โปรแกรม MATHLAB โปรแกรม MATLAB โปรแกรม IMSL/IDL ฯลฯ ซึ่งโปรแกรมเหล่านี้ส่วนใหญ่เป็นโปรแกรมเชิงธุรกิจที่มีลิขสิทธิ์ (Computer Algebra System. 2009: Online)

การประมวลผลเชิงสัญลักษณ์ของโปรแกรมระบบพีชคณิต มีดังนี้ (Computer Algebra System. 2009: Online)

1. จัดกระทำนิพจน์ (Expression) ให้อยู่ในรูปที่ง่ายขึ้น โดยทำให้เป็นนิพจน์ที่เล็กที่สุดเท่าที่จะทำได้ หรือจัดให้อยู่ในรูปทั่วไปในบางกรณี เช่น เมื่อใส่ $\frac{n!}{(n+2)!}$ แล้วป้อนคำสั่งให้จัดรูปให้เป็นนิพจน์อย่างง่าย โปรแกรมจะแสดงผลเป็น $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ เป็นต้น
2. ความสามารถในการแทนค่า (Substitution for Expression)
3. เปลี่ยนรูปนิพจน์ เช่น การกระจาย (Expanding) การแยกตัวประกอบ (Factorization) การเขียนในรูปเศษส่วนใหม่ ฯลฯ ตัวอย่างเช่น เมื่อใส่ $(x+1)^5$ แล้วป้อนคำสั่งให้กระจาย โปรแกรมจะแสดงผลเป็น $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$ หรือเมื่อใส่ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ แล้วป้อนคำสั่งให้เขียนในรูปเศษส่วนใหม่ โปรแกรมจะแสดงผลเป็น $\frac{y+x}{xy}$ เป็นต้น
4. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
5. การหาค่าเหมาะที่สุด (Optimization)
6. แก้มการเชิงเส้นและสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นในบางกรณี
7. แก้มการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equation) ได้บางกรณี
8. หาลิขิตของฟังก์ชัน
9. หาค่าอินทิกรัลจำกัดเขตและไม่จำกัดเขต
10. การแปลงเชิงปริพันธ์

11. ความเที่ยงตรงทางการคำนวณ
12. อนุกรมและการดำเนินการ
13. เมทริกซ์และการดำเนินการ
14. แสดงผล 2 ส่วนคือ บน/ล่าง ซ้าย/ขวา ปัจจุบันใช้ระบบแสดงผลเสมือน

จริง (Prettyprint)

15. เพิ่มฟังก์ชันการทำงานสำหรับใช้ในคณิตศาสตร์ประยุกต์ เช่น เพิ่มฟังก์ชันการทำงานด้านฟิสิกส์ เพื่อการคำนวณในวิชาฟิสิกส์
16. สามารถวาดกราฟสมการฟังก์ชัน กราฟสมการอิงตัวแปรเสริม กราฟสมการเชิงขั้ว กราฟสามมิติ และสร้างภาพเคลื่อนไหวได้
17. ติดต่อกับโปรแกรมภายนอกได้ และผู้ใช้สามารถเขียนโปรแกรมเพิ่มเติมให้กับโปรแกรมระบบพีชคณิตของตนด้วยโปรแกรมภาษา เช่น ภาษา Assembly ภาษา C ได้
18. วาดแผนภูมิ (Charts) และแผนภาพ (Diagrams)
19. จัดการอักขระ เช่น การจับคู่ การค้นหา เป็นต้น
20. การคำนวณทางสถิติ
21. พิสูจน์นิรนัยนทฤษฎีบท
22. สร้างภาพและแก้ไขภาพด้วย Computer Generate Imagery (CGI)
23. ความสามารถในการสังเคราะห์เสียง (Sound Synthesis)

ชนิดของนิพจน์ที่โปรแกรมระบบพีชคณิตสามารถจัดกระทำได้ มีดังนี้ (Computer Algebra System. 2009: Online)

1. พหุนามหลายตัวแปร
2. ฟังก์ชันมาตรฐาน เช่น ฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันเอกโปเนนเชียล เป็นต้น
3. ฟังก์ชันพิเศษ เช่น ฟังก์ชันเบสเซล ฟังก์ชันค่าคลาดเคลื่อน (Error Function) เป็นต้น
4. ฟังก์ชันเพิ่มเติมที่ผู้ใช้สร้างขึ้น (Arbitrary Functions of Expression)
5. ค่าเหมาะที่สุด (Optimization)
6. อนุพันธ์ อินทิกรัล การทำให้ง่าย ผลรวม และผลคูณของนิพจน์
7. อนุกรมปลายตัด-สัมประสิทธิ์ (Truncated Series with Expression as Coefficients)

8. นิพจน์ของเมทริกซ์

สำหรับโดเมนที่โปรแกรมระบบพีชคณิตสามารถรองรับได้ ได้แก่ จำนวนตรรกยะ จำนวนจริง จำนวนเชิงซ้อน รวมถึงสามารถรองรับช่วง (Interval) ได้

ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในโปรแกรมระบบพีชคณิต ได้แก่ (Computer Algebra System. 2009: Online)

1. อินทิเกรตเชิงสัญลักษณ์ (Symbolic Integration)

2. ฐานหลักแบบ Gröbner (Gröbner Basis)
3. การหารร่วมมาก (Greatest Common Division)
4. การแยกตัวประกอบของพหุนาม
5. ขั้นตอนวิธีแบบ Risch (Risch Algorithm)
6. การแยกเชิงพีชคณิตของทรงกระบอก (Cylindrical Algebraic

Decomposition)

7. ขั้นตอนวิธีแบบ Cantor-Zassenhaus (Cantor-Zassenhaus Algorithm)
8. Padé Approximant
9. บทตั้ง Schwartz-Zippel (Schwartz-Zippel Lemma) และการตรวจสอบ

เอกลักษณ์พหุนาม (Testing Polynomial Identities)

10. ทฤษฎีบทเศษเหลือของจีน
11. การลดค่าเกาส์เซียล
12. สมการไดโอแฟนไทน์

โปรแกรมระบบพีชคณิตสามารถจำแนกได้หลายวิธี ในที่นี้จะจำแนกตามลักษณะของโปรแกรมซึ่งจำแนกได้ 2 ลักษณะ ดังนี้

1. โปรแกรมระบบพีชคณิตกลุ่มที่เป็นฮาร์ดแวร์ (Hardware) กล่าวคือ เป็นโปรแกรมที่บรรจุอยู่ในตัวเครื่องเสร็จสรรพ โปรแกรมระบบพีชคณิตกลุ่มนี้อยู่ในรูปของเครื่องคำนวณเชิงกราฟทั้งหลาย ซึ่งในปัจจุบันมีชื่อทางการค้าแตกต่างกันไปเป็นจำนวนมาก เช่น Texas Instruments, CASIO, SHARP และ Hewlett-Packard เป็นต้น

2. โปรแกรมระบบพีชคณิตกลุ่มที่เป็นซอฟต์แวร์ (Software) โปรแกรมระบบพีชคณิตกลุ่มนี้ไม่ได้บรรจุอยู่ในตัวเครื่องเสร็จสรรพเหมือนอย่างโปรแกรมระบบพีชคณิตในกลุ่มที่ 1 แต่โปรแกรมระบบพีชคณิตกลุ่มนี้จะต้องใช้คู่กับเครื่องคอมพิวเตอร์ ซึ่งโปรแกรมในกลุ่มนี้มีข้อดีในการพัฒนาประสิทธิภาพของโปรแกรมหรืออัปเดต (Update) โปรแกรมให้ทันสมัยอยู่เสมอ ซึ่งปัจจุบันสามารถทำการอัปเดตได้ง่ายโดยผ่านเครือข่ายอินเทอร์เน็ต โปรแกรมในกลุ่มนี้ ได้แก่

- 2.1 โปรแกรม Euler
- 2.2 โปรแกรม Maxima
- 2.3 โปรแกรม Maple
- 2.4 โปรแกรม Mathematica
- 2.5 โปรแกรม Derive
- 2.6 โปรแกรม MATLAB
- 2.7 โปรแกรม MATHLAB
- 2.8 โปรแกรม MathCad
- 2.9 โปรแกรม MuPAD
- 2.10 โปรแกรม IMSL/IDL

เป็นต้น

เนื่องจากโปรแกรมระบบพีชคณิตมีความสามารถในการหาค่าเกี่ยวกับลิมิตอนุพันธ์ และอินทิเกรต ซึ่งเป็นเนื้อหาส่วนใหญ่ของวิชาแคลคูลัส โปรแกรมระบบพีชคณิตจึงถูกนำมาใช้ในการเรียนการสอนแคลคูลัส แต่มักจะถูกนำมาใช้เพียงเสริมการสอน ไม่ได้ใช้กับกระบวนการสอนทั้งหมด จุดประสงค์ของการสร้างโปรแกรมระบบพีชคณิตเพื่อต้องการลดเวลาในการคำนวณลงให้มีเวลาเหลือมากพอสำหรับผู้สอนที่จะนำเสนอโมเมนต์ ดังนั้นการคำนวณส่วนใหญ่จึงใช้โปรแกรมคำนวณ แต่ผู้สอนสามารถใช้โปรแกรมมาเสนอให้ผู้เรียนได้ตรวจสอบแนวคิดที่สำคัญในการเรียนวิชาแคลคูลัสและวิชาพื้นฐานสำหรับแคลคูลัส เช่น โปรแกรมมาสเตอร์กราฟเฟอร์ (Master Grapher) ผู้ใช้สามารถจัดจังหวะกระบวนการเขียนกราฟและเรียกดูลำดับของจุดได้ตามต้องการ (ธนชัย ภูอุดม. 2551: 2; อ้างอิงจาก Demana; & Waits. 1988. Proceedings of the Conference on Technology in Collegiate Mathematics. pp.1-8) โปรแกรม Mathematica พัฒนาโดย สตีเฟน วอลแฟรม (Stephen Wolfram) แด็น เกรย์สัน (Dan Grayson) และ โรมัน มีเดอร์ (Roman Maeder) แห่งมหาวิทยาลัยอิลลินอย ซึ่งทดลองใช้เป็นสื่อในการสอนวิชาแคลคูลัส เป็นโปรแกรมที่สามารถใช้เป็นเครื่องคำนวณได้กับโอเพอเรชั่นที่จำเป็นต้องใช้ในชั้นเรียนที่จำเป็นต้องใช้ในชั้นเรียน ทำกราฟได้ทั้งภาพ 2 มิติ และ 3 มิติ และมีส่วนประกอบที่ชื่อว่า "โน้ตบุ๊ค" (Notebook) เป็นส่วนที่เตรียมไว้ให้ใช้ได้ทั้งผู้สอนและผู้เรียนวิชาแคลคูลัส ซึ่งมีส่วนประกอบ 2 ส่วน คือ ส่วนแรกเป็นการแสดงเนื้อหาวิชาแคลคูลัสพร้อมอธิบาย แสดงตัวอย่างจำนวนมาก ใช้การนำเสนอในลักษณะที่เป็นไฮเพอร์เทค (Hypertext) ส่วนที่สองเป็นแบบฝึกหัดสำหรับผู้เรียน ที่สามารถทบทวนตรวจสอบแก้ไขงานได้เองจากโปรแกรม (ธนชัย ภูอุดม. 2551: 2; อ้างอิงจาก Porta; & Uhl. 1988. Proceedings of the Conference on Technology in Collegiate Mathematics. pp.71-82)

1.2.2 เอกสารที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรม Euler

ผู้วิจัยเลือกใช้โปรแกรม Euler (<http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/euler>) เป็นเครื่องมือในการวิจัยครั้งนี้ เนื่องจากโปรแกรม Euler มีโปรแกรมแบบ CAS (Computer Algebra System) แฝงอยู่ จึงทำให้โปรแกรม Euler มีสมบัติเบื้องต้นของโปรแกรมระบบพีชคณิตพอเพียง อีกทั้งโปรแกรม Euler ยังเป็นโปรแกรม General Public License (GPL) คืออนุญาตให้ใช้และเผยแพร่ได้โดยไม่เสียค่าใช้จ่าย ซึ่งโปรแกรม Euler เป็นโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นโดยศาสตราจารย์ ดร.เรอเน่ กรอธมันน์ (Prof. Dr. René Grothmann) ชาวเยอรมัน สำหรับโปรแกรมแบบ CAS ที่แฝงอยู่ในโปรแกรม Euler นั้น ได้แก่ โปรแกรม Maxima และโปรแกรม Yacas

การใช้โปรแกรม Euler สำหรับการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ในงานวิจัยนี้ มีจุดประสงค์หลักคือเพื่อให้ผู้เรียนได้ฝึกทักษะและความชำนาญพื้นฐานต่าง ๆ เนื่องจากความสามารถในการคำนวณของโปรแกรม Euler จะช่วยให้ประหยัดเวลาในการคำนวณ ผู้เรียนสามารถฝึกทำแบบฝึกหัดได้หลายข้อ เมื่อผู้เรียนได้เห็นและได้ฝึกทำแบบฝึกหัดบ่อย ๆ ย่อมส่งผลให้ผู้เรียนมีทักษะและความชำนาญหลายประการ ได้แก่ ทักษะด้านความรู้ความจำ ทักษะในการอ่าน

และทำความเข้าใจโจทย์ ทักษะการแสดงวิธีทำอย่างเป็นขั้นตอน เป็นต้น ซึ่งการที่ผู้เรียนมีทักษะทางการเรียนคณิตศาสตร์ดังกล่าวนั้น ย่อมส่งผลดีต่อการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับสูงต่อไป

1.2.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้โปรแกรมระบบพีชคณิต

งานวิจัยในประเทศ

กมล เอกไทยเจริญ (2545: 53) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน คณิตศาสตร์ของผู้เรียน และศึกษาสภาพการเรียนการสอนและสภาพสังคมในชั้นเรียนในการเรียนวิชาพีชคณิตเชิงเส้นโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย เป็นนิสิตระดับปริญญาตรี สาขาคณิตศาสตร์ จำนวน 28 คน ผู้เรียนแต่ละคนจะใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ รุ่น TI-92 ประกอบการเรียนและการสอบวิชาพีชคณิตเชิงเส้น ผลการวิจัยพบว่า การเรียนวิชาพีชคณิตเชิงเส้นโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ สามารถเรียนได้เนื้อหาที่มาก ละเอียดยิ่ง และลึกซึ้ง การใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟทำให้มีเวลาเหลือมากพอสำหรับการทำความเข้าใจในเนื้อหาและสามารถแก้ปัญหาได้หลากหลาย ผู้เรียนมีเจตคติที่ดีต่อการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ ผู้เรียนมีความเห็นว่าการเรียนด้วยวิธีนี้เป็นประสบการณ์ที่ดีสำหรับผู้เรียน ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาพีชคณิตเชิงเส้นโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ อยู่ในระดับที่ดีได้ผลเป็นที่น่าพอใจ นอกจากนี้ ยังพบว่าผลต่างของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน (ผลต่างของคะแนนวิชาหลักการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นบุรพวิชาของวิชาพีชคณิตเชิงเส้นกับคะแนนวิชาพีชคณิตเชิงเส้น) ของผู้เรียนในกลุ่มอ่อนและกลุ่มเก่งไม่มีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญ .05

ชาญชัย สุกใส (2546: บทคัดย่อ) ได้ศึกษาผลของการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ MAPLE V ประกอบการเรียนการสอน ต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 4092401 แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 2 และศึกษาเจตคติต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักศึกษาโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์และสถิติประยุกต์ สถาบันราชภัฏอุบลราชธานี ในปีการศึกษา 2546 พบว่า นักศึกษาที่เรียนโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ประกอบมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักศึกษาที่เรียนปกติในชั้นเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ในด้านเจตคติต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ พบว่า นักศึกษาที่เรียนโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ประกอบมีเจตคติต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

พัชรินทร์ สุวรรณ (2546: 26-31) ได้เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และทัศนคติของนักศึกษาระหว่างนักศึกษาที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ (Graphic Calculator) และนักศึกษาที่เรียนแบบปกติ กลุ่มตัวอย่างประกอบด้วยกลุ่มทดลองจำนวน 1 ห้องเรียนซึ่งมีจำนวนนักศึกษาทั้งหมด 20 คนและกลุ่มควบคุม 1 ห้องเรียนจำนวน 20 คน ซึ่งสุ่มจากนักศึกษาที่ลงทะเบียนเรียนวิชาแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1 สถาบันราชภัฏวไลยอลงกรณ์ฯ จากผลการวิจัยพบว่า

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1 เฉพาะเรื่องลิมิตและความต่อเนื่องก่อนการเรียนและหลังเรียนของนักศึกษาที่ใช้เครื่องคำนวณ Graphic Calculator และของนักศึกษาที่เรียนแบบปกติไม่มีความแตกต่างกันอย่างมีระดับนัยสำคัญ .05

2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1 เฉพาะเรื่องลิมิตและความต่อเนื่อง หลังการเรียนของนักศึกษาที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณ Graphic Calculator สูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก่อนการเรียนอย่างมีระดับนัยสำคัญ .05

3. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1 เฉพาะเรื่องลิมิตและความต่อเนื่อง หลังการเรียนของนักศึกษาที่เรียนแบบปกติสูงกว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก่อนการเรียนอย่างมีระดับนัยสำคัญ .05

4. เมื่อนักศึกษาผ่านการเรียนวิชาแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1 เฉพาะเรื่องลิมิตและความต่อเนื่องแล้วนักศึกษาที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณ Graphic Calculator รวมทั้งนักศึกษาที่เรียนแบบปกติมีความกระตือรือร้นและรู้สึกดีกับวิชาแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1 มากขึ้น

5. นักศึกษาที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณ Graphic Calculator ส่วนใหญ่มีความเห็นเกี่ยวกับบรรยากาศในการเรียนวิชาแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1 เฉพาะเรื่องลิมิตและความต่อเนื่องว่าอาจารย์เป็นกันเองสอนเข้าใจดีรองลงมาคือมีความสนุกสนานน่าเรียนมีนักศึกษาส่วนน้อยที่เห็นว่าบรรยากาศในห้องเรียนน่าเบื่อเนื่องจากวิชานี้มีแต่ตัวเลขและสูตร

6. นักศึกษาที่เรียนวิชาแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1 เฉพาะเรื่องลิมิตและความต่อเนื่องโดยการเรียนแบบปกติมีความเห็นเกี่ยวกับบรรยากาศในการเรียนว่ามีความสนุกสนานน่าเรียน

7. หลังจากที่นักศึกษาเรียนวิชาแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1 เฉพาะเรื่องลิมิตและความต่อเนื่องแล้วนักศึกษาที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณ Graphic Calculator ในการเรียนส่วนใหญ่มีคะแนนอยู่ในช่วง 36 – 40 คะแนน ส่วนนักศึกษาที่เรียนแบบปกตินั้นมีคะแนนอยู่ในช่วง 26 – 30 คะแนน

8. ความรู้สึกของนักศึกษาหลังจากใช้เครื่องคำนวณ Graphic Calculator ทำให้มองเห็นภาพรวมมากขึ้น รองลงมาคือมีความอยากรู้อยากเห็นและสนุกสนาน

9. ทศนคติของนักศึกษาหลังจากใช้เครื่องคำนวณ Graphic Calculator แล้วส่วนใหญ่มีความรู้สึกดีถึงดีมากกับการได้ใช้เป็นส่วนหนึ่งของการเรียน

จอห์น เมฆสว่าง (2548: 44-48) ได้พัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดียเรื่องเมทริกซ์และการประยุกต์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องเมทริกซ์และการประยุกต์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ระหว่างกลุ่มที่เรียนด้วยวิธีสอนโดยใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดียกับกลุ่มที่เรียนด้วยวิธีสอนปกติ ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องเมทริกซ์และการประยุกต์ของนักเรียนชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ 5 ของกลุ่มที่เรียนด้วยวิธีสอนโดยใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดียกับกลุ่มที่เรียนด้วยวิธีสอนปกติ ไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .01

อมฤทธิ์ บุพโต (2548: 68-73) ได้เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องกำหนดการเชิงเส้น นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ระหว่างกลุ่มที่เรียนด้วยวิธีสอนโดยใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดียที่ผู้วิจัยพัฒนากับกลุ่มที่เรียนด้วยวิธีสอนปกติ และเปรียบเทียบเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ของผู้เรียนก่อนและหลังจากการการเรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดียเรื่องกำหนดการเชิงเส้น ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 5 ผลการวิจัยพบว่า

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องกำหนดการเชิงเส้น นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ระหว่างกลุ่มทดลองที่เรียนโดยใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดียกับกลุ่มควบคุมที่เรียนด้วยวิธีสอนปกติ ไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05

2. ผู้เรียนมีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ภายหลังเรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดียดีกว่าก่อนเรียนที่ระดับนัยสำคัญ .01

วัชรภรณ์ ปรานีธรรม (2549: 95-98) ได้ศึกษาระดับความเข้าใจเกี่ยวกับฟังก์ชันกำลังสองของนักเรียนในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และศึกษาบทบาทของเครื่องคิดเลขกราฟิกที่เป็นเครื่องมือในการนำเสนอความเข้าใจในแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ รูปแบบของการวิจัยใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพ โดยใช้กรณีศึกษา ผู้ร่วมในการวิจัยประกอบด้วย ผู้วิจัยทำหน้าที่เป็นครูผู้วิจัย ผู้ช่วยวิจัยจำนวน 2 คน ซึ่งทำหน้าที่ในการบันทึกวีดิทัศน์ กลุ่มเป้าหมายเป็นนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง (ปวส.) ชั้นปีที่ 1 แผนกวิชาช่างยนต์ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2548 วิทยาลัยเทคนิคขอนแก่น อำเภอเมือง จังหวัดขอนแก่น จำนวน 3 คน ซึ่งเข้าร่วมการวิจัยด้วยความสมัครใจ ผลการวิจัยพบว่า

1. ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์นักเรียนมีความเข้าใจในระดับการกระทำ (Action) และระดับกระบวนการ (Process) เกี่ยวกับฟังก์ชันกำลังสอง มีกรณีที่นักเรียนสามารถเชื่อมโยงความเข้าใจในระดับกระบวนการและสมบัติที่เกี่ยวข้องในการแก้สถานการณ์ปัญหา แต่ไม่สามารถแก้สถานการณ์ปัญหาได้สำเร็จ ซึ่งแสดงให้เห็นว่า แม้ว่านักเรียนจะมีการเชื่อมโยงความเข้าใจในระดับกระบวนการที่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ปัญหา แต่การเชื่อมโยงนั้นไม่เหมาะสมซึ่งเป็นสาเหตุให้นักเรียนไม่สามารถแก้สถานการณ์ปัญหาได้

2. การใช้เครื่องคิดเลขในการแก้สถานการณ์ปัญหาของนักเรียน พบว่าเครื่องคิดเลขกราฟิกใช้เป็นเครื่องมือช่วยส่งเสริมการใช้ความเข้าใจในทั้ง 2 ระดับ กล่าวคือ บทบาทการเป็นเครื่องมือแสดงความเข้าใจโมโนมิติในระดับการกระทำ (CART) และระดับกระบวนการ (CPRT) ในการใช้เครื่องคิดเลขในกระบวนการแก้ปัญหาจะใช้ความสามารถและบทบาทของเครื่องคิดเลขในการเขียนกราฟและการหาค่าต่าง ๆ เกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง

งานวิจัยต่างประเทศ

โดว และซานกอ (Doerr; & Zangor. 2000: 143) ได้ศึกษาบทบาทและผลการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟของนักเรียนในการแก้ปัญหาเพื่อสร้างความหมายเชิงคณิตศาสตร์ให้กับตนเอง ผลการศึกษาวิจัยพบว่า บทบาทของเครื่องคำนวณเชิงกราฟมีอยู่ 5 บทบาท ได้แก่ บทบาทในการเป็นเครื่องมือช่วยคำนวณ บทบาทในการเป็นเครื่องมือช่วยในการแปลง บทบาทในการเป็นเครื่องมือเก็บรวบรวมข้อมูลและวิเคราะห์ข้อมูล บทบาทในการเป็นเครื่องมือแสดงกราฟ และบทบาทในการเป็นเครื่องมือช่วยตรวจสอบ และผลการศึกษาวิจัยพบว่า สถานการณ์ปัญหา และบทบาทความรู้และความเชื่อของครู มีส่วนช่วยสนับสนุนการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ ผลการวิจัยยังพบอีกว่า การใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ 1 เครื่องต่อนักเรียน 1 คน ช่วยขจัดปัญหาการจับกลุ่มคุยกันในห้องเรียน ในขณะที่การใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ 1 เครื่องต่อนักเรียนหลายคน ช่วยส่งเสริมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ชั้นเรียน

เพอเจซี (Perjési. 2003: 43) ได้นำโปรแกรมระบบพีชคณิต (Computer Algebra System: CAS) ชื่อ Maple เข้ามาช่วยสอนวิชาการวิเคราะห์เวกเตอร์ (Vector Analysis) ให้กับนักศึกษาคณะวิศวกรรมศาสตร์ เนื่องจากเนื้อหานี้เป็นเนื้อหาที่มีความซับซ้อนและเป็นการยากที่จะแสดงแนวคิดให้เข้าใจได้อย่างลึกซึ้งโดยใช้กระดานดำและชอล์ก ผลการวิจัยพบว่ามีความเป็นไปได้ที่จะนำโปรแกรมระบบพีชคณิตเข้ามาช่วยสอนวิเคราะห์เวกเตอร์ เพื่อแสดงแนวคิดเกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติและทฤษฎีบทของเกาส์และทฤษฎีบทของสโตคส์ ผลของการวิจัยแสดงให้เห็นว่าโปรแกรม Maple ช่วยให้นักศึกษาเข้าใจแนวคิดได้อย่างเป็นรูปธรรมมากขึ้น

อะบูนาจา (Abu-Naja. 2008: 183) ได้ศึกษาผลของการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟที่มีต่อการเรียนรู้เรื่องฟังก์ชัน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ประเทศอิสราเอล กลุ่มหนึ่งเรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ อีกกลุ่มหนึ่งเรียนแบบปกติ ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการวาดกราฟของทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน แต่นักเรียนที่เรียนด้วยเครื่องคำนวณเชิงกราฟมีความสามารถในการบอกลักษณะของกราฟที่วาด ความสามารถในการยกตัวอย่างฟังก์ชันที่มีสมบัติเดียวกับกราฟที่วาด และมีความสามารถในการค้นหารูปทั่วไปของฟังก์ชันทั้งหมดที่มีสมบัติเดียวกับกราฟที่วาดได้ดีกว่านักเรียนที่เรียนแบบปกติ

จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมระบบพีชคณิตพบว่า โปรแกรมระบบพีชคณิตเป็นเครื่องมือที่เอื้อต่อการเรียนการสอน ทั้งยังช่วยในการคำนวณ เก็บรวบรวมข้อมูลและวิเคราะห์ข้อมูล แสดงกราฟ ตรวจสอบคำตอบ และแสดงแนวคิดที่มีความซับซ้อนให้เข้าใจได้อย่างเป็นรูปธรรมมากขึ้น รวมถึงสร้างเจตคติต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในทางบวกแก่ผู้เรียน ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะนำโปรแกรมระบบพีชคณิตมาใช้ในการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์

1.3 ลักษณะของโปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

เนื่องจากโปรแกรม C.a.R. เป็นโปรแกรมหนึ่งในกลุ่มโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต และโปรแกรม Euler เป็นโปรแกรมหนึ่งในกลุ่มโปรแกรมระบบพีชคณิต ซึ่งโปรแกรมทั้งสองเป็นโปรแกรมคนละกลุ่มกัน จึงมีลักษณะการทำงานและจุดประสงค์ของการใช้งานที่แตกต่างกัน ลักษณะของโปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler พอสรุปโดยสังเขปได้ดังตาราง 1

ตาราง 1 ลักษณะของโปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

คุณสมบัติ	โปรแกรม C.a.R.	โปรแกรม Euler
1. กลุ่มของโปรแกรม	เป็นโปรแกรมในกลุ่มโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต	เป็นโปรแกรมหนึ่งในกลุ่มโปรแกรมระบบพีชคณิต
2. การใช้งาน	การใช้งานโดยส่วนใหญ่จะใช้เมาส์ มีการใช้คีย์บอร์ดบ้าง ในกรณีของการพิมพ์ฟังก์ชันเพื่อสร้างกราฟ การพิมพ์ข้อความ หรือการพิมพ์ค่าของพารามิเตอร์	การใช้งานโดยส่วนใหญ่จะใช้คีย์บอร์ดพิมพ์คำสั่ง
3. กระบวนการทำงานของโปรแกรม	โปรแกรม C.a.R. เกี่ยวข้องกับการสร้างและจัดกระทำกับวัตถุ เช่น การสร้างวงกลม การย้ายตำแหน่งของวงกลมรูปนั้น หรือการสร้างจุดบนวงกลมรูปนั้นแล้วสังเกตการเคลื่อนที่ของจุดบนวงกลม เป็นต้น โดยโปรแกรมมีลักษณะปฏิสัมพันธ์กับผู้ใช้ การคลิกเมาส์หรือการลากเมาส์ส่งผลต่อวัตถุ หากต้องการสร้างหรือแก้ไขวัตถุจะใช้เมาส์คลิกหรือใช้เมาส์ลากวัตถุเมื่อต้องการให้วัตถุเคลื่อนที่ไปทางใด ดังนั้นการลากเมาส์ไปทางขวาก็จะเหมือนกับการลากวัตถุไปทางขวาด้วย โปรแกรมกลุ่มนี้จึงถูกเรียกว่า Dynamic Geometry คือสามารถขยับหรือเคลื่อนที่รูปเรขาคณิตให้	เมื่อผู้ใช้พิมพ์คำสั่งเข้าไป โปรแกรมจะแสดงผลลัพธ์ออกมา กล่าวคือการทำงานมีลักษณะเป็นแบบข้อมูล – ประมวลผล – ผลลัพธ์

ตาราง 1 (ต่อ)

คุณสมบัติ	โปรแกรม C.a.R.	โปรแกรม Euler
3. กระบวนการทำงานของโปรแกรม (ต่อ)	เห็นได้จริง ซึ่งต่างกับการเรียนรู้แบบปกติซึ่งผู้เรียนต้องจินตนาการการเคลื่อนที่ของรูปเรขาคณิตเอง	
4. ความสามารถในการประมวลผลเชิงสัญลักษณ์	โปรแกรม C.a.R. มีความสามารถในการประมวลผลเชิงสัญลักษณ์ค่อนข้างน้อย กล่าวคือ จะมีการประมวลผลเชิงสัญลักษณ์ภายในของโปรแกรม แต่ไม่สามารถแสดงผลลัพธ์ออกมาให้ผู้ใช้นำไปใช้งานได้ จึงไม่จัดว่าโปรแกรม C.a.R. มีความสามารถในการประมวลผลเชิงสัญลักษณ์	โปรแกรม Euler มีความสามารถในการประมวลผลเชิงสัญลักษณ์ เพราะมีโปรแกรมแบบ CAS (โปรแกรมระบบพีชคณิต) แฝงอยู่
5. การสร้างภาพเคลื่อนไหว	โปรแกรม C.a.R. มีความสามารถในการสร้างภาพเคลื่อนไหว	โปรแกรม Euler ยังไม่มีความสามารถในการสร้างภาพเคลื่อนไหว
6. การสร้างแบบฝึก	โปรแกรม C.a.R. มีความสามารถในการสร้างงานที่มีลักษณะเป็นแบบทดสอบการสร้าง กล่าวคือ เมื่อผู้เรียนสร้างได้ถูกต้อง โปรแกรมจะแจ้งผลให้ทราบทันที	โปรแกรม Euler ยังไม่มีความสามารถในการสร้างแบบฝึก
7. จุดประสงค์ของการใช้งานโปรแกรม	ใช้เพื่อเป็นสื่อการเรียนรู้ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. เสนอแนวคิดที่สำคัญทางคณิตศาสตร์และแสดงภาพการเปลี่ยนแปลงได้อย่างเป็นรูปธรรมมากขึ้น เพื่อให้ผู้เรียนได้สำรวจ สังเกต และเรียนรู้ด้วยความหมาย	ใช้เพื่อเสริมการเรียนรู้ โดยโปรแกรม Euler ช่วยในการคำนวณหรือตรวจคำตอบ ในบางกรณีอาจใช้โปรแกรม Euler เป็นสื่อการเรียนรู้ เช่น การสำรวจกราฟ 3 มิติ

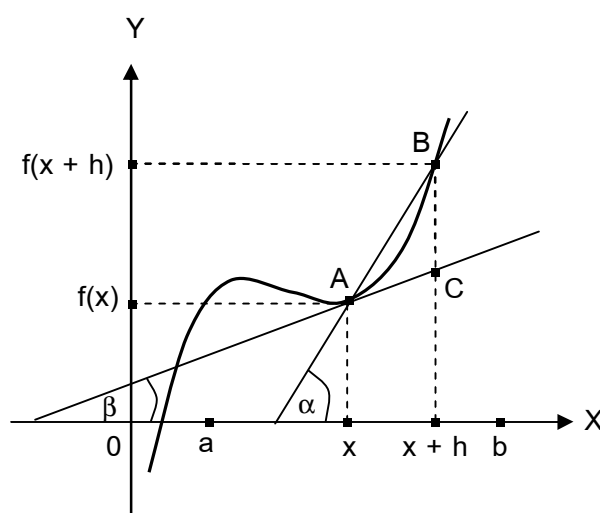
2. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์

2.1 เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์

แคลคูลัสเป็นคณิตศาสตร์แขนงหนึ่งซึ่งมีประโยชน์ต่อวิทยาการในสาขาต่าง ๆ มากมาย เช่น ฟิสิกส์ เคมี ชีววิทยา วิศวกรรมศาสตร์ ดาราศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ สังคมวิทยา และ พฤติกรรมทางจิตวิทยา ตลอดจนเป็นพื้นฐานของการศึกษาคณิตศาสตร์สาขาอื่น ๆ แทบทุกสาขา ผู้ให้กำเนิดวิชาแคลคูลัส คือ ไอแซก นิวตัน (Issac Newton, 1642 – 1727) นักคณิตศาสตร์ชาว อังกฤษ และ กอตต์ฟรีด วิลเฮล์ม ไลบ์นิทซ์ (Gottfried Wilhelm Leibnitz, 1646 – 1716) นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน (มหาวิทยาลัยรามคำแหง. 2546: 103)

อนุพันธ์ เป็นส่วนหนึ่งของวิชาแคลคูลัส ซึ่งกล่าวถึงอัตราการแปรค่าและอัตราการแปรค่าชั่วขณะ บทประยุกต์ของอนุพันธ์ มีประโยชน์อย่างกว้างขวางในการแก้ปัญหาต่าง ๆ เช่น การหาความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการเปลี่ยนแปลงของสิ่งสองสิ่งเมื่อเทียบกับเวลา ซึ่งมีประโยชน์ในชีวิตประจำวันมาก (กมล เอกไทยเจริญ. 2537: 351) การเขียนกราฟโดยใช้ความรู้เรื่องอนุพันธ์ ซึ่งจากสมบัติการเป็นฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด (Increasing-Decreasing) ความเว้า (Concave upward-Downward) ค่าสูงสุดและต่ำสุด (Maximum-Minimum) และจุดเปลี่ยนความเว้า (Point of Inflection) ของฟังก์ชันทำให้สามารถเขียนกราฟคร่าว ๆ ของฟังก์ชันได้โดยไม่ต้องเสียเวลามากนัก เพราะถ้าทราบว่าฟังก์ชันมีค่าสูงสุด/ต่ำสุดที่จุดใด มีค่าเท่ากับเท่าใดและกราฟเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดจากไหนถึงไหน เส้นของกราฟในช่วงนั้น ๆ หายขึ้นหรือคว่ำลง มีจุดเปลี่ยนลักษณะเส้นกราฟตรงไหน ย่อมสามารถที่จะเขียนกราฟได้ทันที (จินดา อจริยะกุล. 2537: 143)

อนุพันธ์ มีพื้นฐานความรู้มาจากเรื่องความชันของเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง ความหมายทางเรขาคณิตของอนุพันธ์ (Derivative) สามารถพิจารณาได้ดังภาพประกอบ 1



ภาพประกอบ 1 ความหมายทางเรขาคณิตของอนุพันธ์

ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งหาอนุพันธ์ได้ (Differentiable) ใน $[a, b]$

ให้ A เป็นจุดที่มีพิกัด $(x, f(x))$ ซึ่งเป็นจุดคงที่ใด ๆ บนกราฟ $f(x)$

ให้ B เป็นจุด $(x + h, f(x + h))$ ซึ่งเป็นจุดคงที่อีกจุดหนึ่งบนกราฟ $f(x)$

ลากเส้นตรง AB และลากเส้นสัมผัส AC สัมผัสกราฟ $f(x)$ ที่จุด A

ให้ α เป็นมุมที่เส้นตรง AB ทำกับแกน X ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

ให้ β เป็นมุมที่เส้นตรง AC ทำกับแกน X ในทิศทวนเข็มนาฬิกา

จากภาพประกอบ 1 จะได้ว่า

$$\tan \alpha = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

แต่ถ้า h มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ (คือระยะทางระหว่างจุด x และจุด $(x + h)$ สั้นมาก ๆ)

จุด B จะอยู่ใกล้จุด A มาก ๆ จน เกือบ จะเป็นจุดเดียวกัน

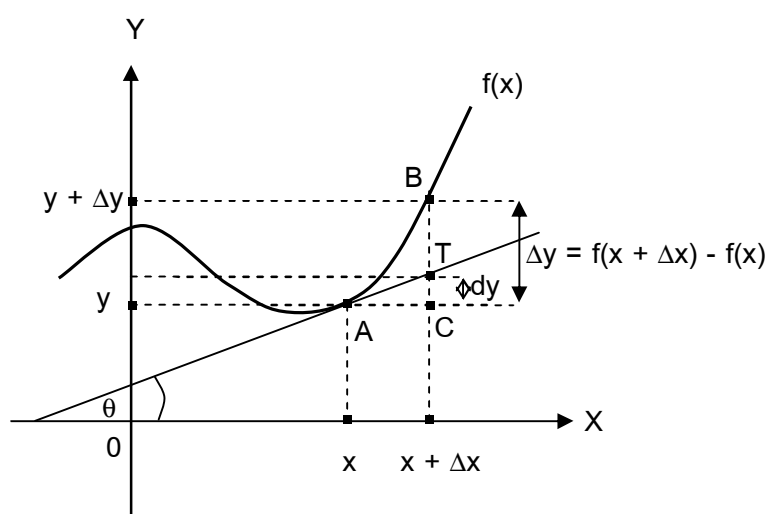
นั่นก็คือเมื่อ h เข้าใกล้ศูนย์ มุม α จะมีขนาดใกล้เคียงกับมุม β มาก ๆ

และเส้นตรง AB จะเบนเข้าใกล้เส้นสัมผัส AC

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \tan \beta &= \lim_{h \rightarrow 0} \tan \alpha \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \\ &= f'(x) \end{aligned}$$

คือ $f'(x)$ ความชันของเส้นสัมผัส ณ จุด $(x, f(x))$ บนกราฟ $f(x)$

เรื่องค่าเชิงอนุพันธ์ (Differential) ซึ่งเป็นบทประยุกต์ของอนุพันธ์นั้น นับว่ามีประโยชน์ในการแก้ปัญหาต่าง ๆ มาก ซึ่งความหมายทางเรขาคณิตของค่าเชิงอนุพันธ์ สามารถพิจารณาได้ดังภาพประกอบ 2



ภาพประกอบ 2 ความหมายทางเรขาคณิตของค่าเชิงอนุพันธ์

ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งหาอนุพันธ์ได้ (Differentiable) ที่จุด x
 ให้ A เป็นจุด (x, y) และ B เป็นจุด $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ ซึ่งเป็นจุดสองจุดใด ๆ บน

กราฟ $f(x)$

ลากเส้น AT สัมผัสกราฟ $f(x)$ ที่จุด A ทำมุม θ กับแกน X

เนื่องจาก $f(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งหาอนุพันธ์ได้ที่จุด x ดังนั้น $\theta \neq \frac{\pi}{2}$

พิจารณา $\triangle ACT$ จะเห็นว่า $\tan \theta = \frac{TC}{AC}$

จาก $AC = \Delta x$ และจากความหมายทางเรขาคณิตของอนุพันธ์ที่ว่า $\tan \theta = f'(x)$

$$\text{ดังนั้น } f'(x) = \frac{TC}{\Delta x}$$

$$\text{นั่นก็คือ } TC = f'(x) \cdot \Delta x$$

$$\text{หรือ } dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

$$\text{ให้ } \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

พบว่า $|\Delta y - dy|$ จะเข้าใกล้ศูนย์ เมื่อ Δx เข้าใกล้ศูนย์

นั่นก็คือ Δy มีค่าใกล้เคียงกับ dy มาก ถ้าหากว่า Δx มีค่าน้อยมาก ๆ

นิยมเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\Delta y \approx dy$

$$\text{ดังนั้น } f(x + \Delta x) - f(x) \approx dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

$$\text{หรือ } f(x + \Delta x) = f'(x) \cdot \Delta x + f(x) \quad (*)$$

ประโยชน์ของค่าเชิงอนุพันธ์ $(*)$ สามารถนำไปประมาณค่าต่าง ๆ ได้ ดังตัวอย่าง

ต่อไปนี้

กำหนดให้ $y = \sqrt{x^3}$ จงประมาณค่าที่เปลี่ยนแปลงของ y ถ้าค่าของ x เปลี่ยน

จาก $x = 9$ เป็น $x = 9.01$

ค่าที่เปลี่ยนโดยประมาณของ y ก็คือ Differential ของ y ซึ่งขึ้นอยู่กับ x และ

dx เท่านั้น

ค่าของ x เปลี่ยนจาก $x = 9$ เป็น $x = 9.01$

$$\text{ดังนั้น } dx = 9.01 - 9.00 = 0.01$$

$$\text{จาก } dy = f'(x) \cdot dx$$

$$= \frac{3\sqrt{x}}{2} \cdot dx$$

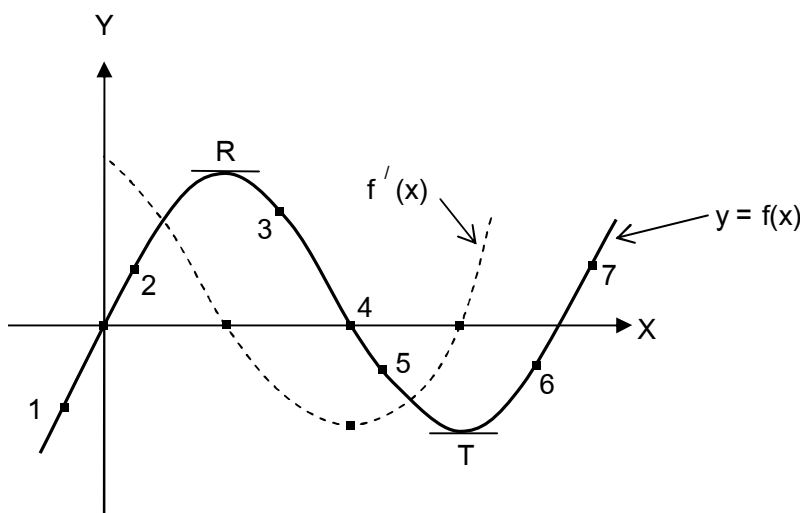
$\therefore$ เมื่อ $x = 9$, $dx = 0.01$ จะได้

$$dy = \frac{3\sqrt{9}}{2} \cdot (0.01)$$

$$= 0.045$$

หมายเหตุ ค่าเปลี่ยนแปลงที่แน่นอนของ y สามารถหาได้จาก $\sqrt{(9.01)^3} - \sqrt{(9)^3}$ แต่การคำนวณหาตัวเลขจำนวนนี้โดยไม่มีเครื่องคิดเลขช่วยนั้นเสียเวลามากเกินกว่าจะได้ผลคุ่มค่าเวลาในเมื่อได้คำตอบคือ 0.0444 ซึ่งเป็นค่าที่ใกล้เคียงกับการประมาณโดยใช้ Differential

หลายครั้งพบว่ากราฟจากข้อมูลที่เก็บรวบรวมมาไม่สามารถหาสมการคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมได้ แต่ต้องการทราบอัตราการเปลี่ยนแปลงของข้อมูลที่ทำการเก็บรวบรวมมาได้นี้ วิธีที่ง่ายในการสร้างกราฟอัตราการเปลี่ยนแปลงของข้อมูลหรือกราฟอนุพันธ์ของข้อมูล อาจใช้วิธีหาอัตราการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้น ณ เวลาสั้น ๆ (Instantaneous Rates) หรือความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่สร้างจากข้อมูลเพียงบางจุดเท่านั้น และวาดกราฟอนุพันธ์จากจุดบางจุดเหล่านั้น (Green. 1976: 128-130)



ภาพประกอบ 3 การสร้างกราฟอัตราการเปลี่ยนแปลงของข้อมูลจากการพิจารณาจุดบนกราฟข้อมูล

ในภาพประกอบ 3 จุดบางจุดบนกราฟ $y = f(x)$ จะถูกพิจารณาเพื่อมาสร้างกราฟ $f'(x)$ มีข้อสังเกตว่าจุดเปลี่ยนความเว้าบนกราฟ $y = f(x)$ จะให้ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดบนกราฟ $f'(x)$ จากภาพประกอบ 3 เราจะพิจารณาจุดบนกราฟ $y = f(x)$ สามจุดเพื่อมาวาดกราฟ $f'(x)$ ได้แก่ จุด R จุด T และจุด 4 พิจารณาจุด R พบว่าเป็นจุดระหว่างจุด 2 และจุด 3 และมีความชันของเส้นสัมผัสเท่ากับศูนย์ นั่นคือ ที่จุด R กราฟ $f'(x)$ จะตัดแกน X พิจารณาจุด T พบว่าเป็นจุดระหว่างจุด 5 และจุด 6 และมีความชันของเส้นสัมผัสเท่ากับศูนย์ นั่นคือ ที่จุด T กราฟ $f'(x)$ จะตัดแกน X เช่นเดียวกับที่จุด R สำหรับจุด 4 นั้นเป็นจุดเปลี่ยนความเว้าของกราฟ $y = f(x)$ เมื่อพิจารณาค่าความชันของเส้นสัมผัสกราฟ $y = f(x)$ ที่ด้านซ้ายของจุด 4 และด้านขวาของจุด 4 แล้วจะพบว่าจุดเปลี่ยนความเว้าจุด 4 นี้ให้ค่าต่ำสุดในกราฟ $f'(x)$ เป็นต้น

ดังนั้นแม้จะไม่สามารถหาสมการคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมกับข้อมูลที่เก็บรวบรวมมา แต่การเลือกพิจารณาจุดต่าง ๆ ดังที่กล่าวมาข้างต้นเพื่อสร้างกราฟอนุพันธ์ของข้อมูล จะทำให้ทราบถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของข้อมูลที่ทำให้การเก็บรวบรวมมาได้

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ งานวิจัยในประเทศ

สมบัติ แสงทองคำสุก (2545: 94-103) ได้พัฒนารูปแบบการสอนวิชาคณิตศาสตร์แบบบูรณาการเชิงเนื้อหาเพื่อส่งเสริมทักษะการเชื่อมโยง เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 6 และศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่ได้รับการสอนโดยใช้รูปแบบการสอนวิชาคณิตศาสตร์แบบบูรณาการเชิงเนื้อหา เพื่อส่งเสริมทักษะการเชื่อมโยง ผลการศึกษาพบว่า

1. รูปแบบการสอนวิชาคณิตศาสตร์แบบบูรณาการเชิงเนื้อหา เพื่อส่งเสริมทักษะการเชื่อมโยงเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 80/80 โดยมีค่าประสิทธิภาพ 89.84/82.32

2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนโดยใช้รูปแบบการสอนวิชาคณิตศาสตร์แบบบูรณาการเชิงเนื้อหา เพื่อส่งเสริมทักษะการเชื่อมโยง เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน หลังได้รับการสอนสูงกว่าก่อนได้รับการสอน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

ชนธิชา แสงแก้ว (2546: 31-34) ได้ศึกษาวิจัยโดยการพัฒนบทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดียเรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 6 และศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 6 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ของโรงเรียนไทรโยคพัฒนศึกษา จังหวัดกาญจนบุรี ซึ่งประกอบด้วยกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม กลุ่มละ 35 คน กลุ่มควบคุมเรียนโดยวิธีสอนปกติจากครูผู้สอน กลุ่มทดลองเรียนโดยใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดีย ใช้เวลาทดลองจำนวน 30 คาบ คาบละ 50 นาที ทั้งสองกลุ่ม ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2545 ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 6 ไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญ .05 ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานที่ตั้งไว้

จินดา สวัสดิ์ทวี (2547: 51-57) ได้ศึกษาประเมินประสิทธิภาพของบทเรียน เรื่อง อนุพันธ์และการประยุกต์ ที่นำเสนอบนเครือข่ายอินเทอร์เน็ต โดยเกณฑ์ 70/70 และศึกษา ความสนใจของผู้เรียนที่มีต่อบทเรียน เรื่อง อนุพันธ์และการประยุกต์ ที่นำเสนอบนเครือข่ายอินเทอร์เน็ต กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาระดับปริญญาตรีวิชาเอกคณิตศาสตร์ที่ลงทะเบียนเรียนวิชาแคลคูลัส ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2546 ของสถาบันราชภัฏยะลา จำนวน 30 คน ผลการวิจัยพบว่า ประสิทธิภาพของบทเรียนที่นำเสนอบนเครือข่ายอินเทอร์เน็ต เรื่อง อนุพันธ์และการประยุกต์ ที่สร้าง

ชั้นมีประสิทธิภาพ 74/93.33 สูงกว่าเกณฑ์ที่กำหนด และผู้เรียนมีความสนใจต่อบทเรียนที่นำเสนอบนเครือข่ายอินเทอร์เน็ต เรื่อง อนุพันธ์และการประยุกต์ อยู่ในระดับมาก ($\bar{x} = 4.07$)

สมบุรณ์ สุคันธรส (2547: 106-114) ได้พัฒนาการจัดการเรียนรู้อัตนศาสตร์ เรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ใน 5 ประเด็น คือ

1. ผลการเรียนรู้ของนักศึกษาจากคะแนนทดสอบย่อยท้ายวงจรปฏิบัติการที่ 1 – 5
2. ผลการเรียนรู้ของนักศึกษาจากคะแนนแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
3. ผลของกระบวนการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดผู้เรียนสร้างความรู้เองโดยหาค่าดัชนีประสิทธิผล
4. ผลการประเมินการจัดกิจกรรมการจัดการเรียนรู้ และ
5. ผลจากการประเมินการทำงานกลุ่มของนักศึกษาแผนกวิชาช่างก่อสร้างระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขตภาคตะวันออกเฉียงเหนือ นครราชสีมา ที่ศึกษาอยู่ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2546 จำนวน 28 คน

ผลการศึกษาค้นคว้า

ประเด็นที่ 1 พบว่า คะแนนจากแบบทดสอบย่อยท้ายวงจรปฏิบัติการที่ 1 – 5 คิดเป็นร้อยละ 76.43, 61.07, 67.50, 68.92 และ 83.92 ตามลำดับ

ประเด็นที่ 2 พบว่า คะแนนจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเต็ม 30 คะแนน ค่าเฉลี่ยเป็น 21.82 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 72.74

ประเด็นที่ 3 ดัชนีประสิทธิผลของกระบวนการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดผู้เรียนสร้างความรู้เอง คิดเป็นร้อยละ 65.72

ประเด็นที่ 4 พบว่า ผลจากการประเมินการจัดกิจกรรมการจัดการเรียนรู้ตามแนวคิดผู้เรียนสร้างความรู้เอง นักศึกษาทุกคนมีส่วนร่วมในการทำงาน นักศึกษาที่เรียนเก่งช่วยเหลือนักศึกษาที่เรียนปานกลางและอ่อน นักศึกษาที่เรียนอ่อนและปานกลางมีความภูมิใจที่สามารถร่วมกิจกรรมกับนักศึกษาที่เรียนเก่งจนทำให้กลุ่มประสบความสำเร็จ

ประเด็นที่ 5 พบว่า ผลการประเมินการทำงานกลุ่ม นักศึกษาที่เรียนเก่งให้ความสนใจกับเพื่อนที่เรียนอ่อนกว่าในกลุ่มและช่วยกันอธิบายให้ฟัง ทำให้เกิดคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ได้แก่ การสร้างองค์ความรู้และตรวจสอบความรู้ได้ด้วยตนเอง มีความเชื่อมั่นในตนเอง กล้าแสดงความคิดเห็น มีทักษะการทำงานกลุ่ม และมีความรับผิดชอบ

โดยสรุป การพัฒนาการจัดการเรียนรู้ เรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตามแนวคิดผู้เรียนสร้างความรู้เอง ในครั้งนี้ บรรลุความมุ่งหมายตามที่ตั้งไว้ทุกประการ

อริศรา ตั้งวารี (2548: 80-86) ได้สร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนวิชาแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1 เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน สำหรับนักศึกษาโปรแกรมวิทยาการ

คอมพิวเตอร์ ชั้นปีที่ 1 และศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาโปรแกรมวิทยาการคอมพิวเตอร์ ที่เรียนโดยใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนวิชาแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1 เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ผลการศึกษาพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1 ของนักศึกษาโปรแกรมวิทยาการคอมพิวเตอร์ ภายหลังได้รับการสอนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันเมื่อเทียบกับเกณฑ์ (ร้อยละ 60 ขึ้นไป) ได้คะแนนผ่านเกณฑ์ที่กำหนดไว้อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1 ของนักศึกษาโปรแกรมวิทยาการคอมพิวเตอร์ ภายหลังได้รับการสอนสูงกว่าก่อนเรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

เบญจพร สว่างศรี (2549: 17-20) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาแคลคูลัส เรื่อง “อนุพันธ์และการประยุกต์” ของนักศึกษาระดับปริญญาตรี ที่ได้รับการสอนโดยใช้เทคนิคการสอนแบบค้นพบ ซึ่งเป็นการจัดการเรียนการสอน ด้วยการฝึกทักษะ การสังเกต การสืบค้น การให้เหตุผลหรือการสร้างสมมุติฐาน ซึ่งพัฒนาไปจากข้อมูลที่มีอยู่เดิม กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษา ชั้นปีที่ 1 คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิวิทยาเขตสุพรรณบุรี ที่ลงทะเบียนเรียนวิชาแคลคูลัส 1 ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2549 ผลการวิจัยได้ข้อค้นพบดังนี้

1. นักศึกษาที่ได้รับการสอนโดยใช้เทคนิคการสอนแบบค้นพบ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05
2. นักศึกษาร้อยละ 70 ของนักศึกษาทั้งหมดมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนผ่านเกณฑ์ร้อยละ 65 หรือมากกว่า อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

งานวิจัยต่างประเทศ

เฟาล์เลอร์ (Fowler. 2004: 791) สอนฟิสิกส์เรื่องการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มนาฬิกา โดยใช้ Spreadsheet ในโปรแกรม Excel กับนักศึกษาระดับวิทยาลัยใน Virginia พบว่า เมื่อนักศึกษาสร้าง Spreadsheet เพื่อทำนายตำแหน่งตามฟังก์ชันของเวลาที่ครูกำหนดให้ นักศึกษารู้สึกสนุกเมื่อได้เห็น Spreadsheet กำลังทำงานประมวลผล และนักศึกษามีความสนใจที่จะเพิ่มแถวข้อมูลลงในตารางให้มากขึ้น เมื่อนักศึกษาใส่ข้อมูลลงตาราง โปรแกรมจะสร้างกราฟซึ่งนักศึกษาจะได้สำรวจกราฟเพื่อสร้างความเข้าใจในเรื่องที่ตนเรียน นักศึกษามีเจตคติที่ดีในการแก้ปัญหาฟิสิกส์โดยใช้ Spreadsheet ในโปรแกรม Excel และนักศึกษากล่าวว่านักศึกษามีความเข้าใจแคลคูลัสและเรื่องความเร่งซึ่งเป็นบทประยุกต์ของอนุพันธ์มากขึ้นอีกด้วย

บิซา คริสทัวและซาชาเรียเดส (Biza; Christou; & Zachariades. 2008: 53) ได้ศึกษารูปแบบความเข้าใจเกี่ยวกับเส้นสัมผัสกราฟของนักเรียนมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 196 คน ประเทศกรีซ ผลการวิจัยทำให้ได้รูปแบบความเข้าใจ 3 กลุ่ม โดยใช้ปัจจัยในการพิจารณาความเข้าใจ 7 ข้อดังนี้

1. เส้นสัมผัสเส้นโค้งมีเพียงจุดเดียวเท่านั้นที่สัมผัสโค้ง
 2. ในแต่ละย่านใกล้เคียง (Neighbourhood) มีจุดสัมผัสโค้งเพียงจุดเดียวเท่านั้น

3. ในบางย่านใกล้เคียงมีจุดสัมผัสโค้งเป็นจำนวนอนันต์
4. มีเส้นสัมผัสโค้งที่จุดเปลี่ยนความเว้า
5. ไม่มีเส้นสัมผัสโค้งที่จุดปลายของช่วง
6. การใช้สัญลักษณ์เกี่ยวกับเส้นสัมผัส
7. เส้นสัมผัสของภาคตัดกรวย

โดยกลุ่ม A เป็นกลุ่มที่เรียกว่า Analytical Local กลุ่มนี้มีความเข้าใจทั้ง 7 ปัจจัยที่กล่าวมาข้างต้น มีนักเรียนจำนวน 78 คน กลุ่ม B เป็นกลุ่มที่เรียกว่า Intermediate Local กลุ่มนี้ขาดความเข้าใจว่าในบางย่านใกล้เคียงสามารถมีจุดสัมผัสโค้งเป็นจำนวนอนันต์ได้ และขาดความเข้าใจว่าสามารถมีเส้นสัมผัสโค้งที่จุดเปลี่ยนความเว้าได้ กลุ่มนี้มีนักเรียนจำนวน 60 คน และกลุ่ม C เป็นกลุ่มที่เรียกว่า Geometrical Local กลุ่มนี้มีความเข้าใจว่าเส้นสัมผัสเส้นโค้งมีเพียงจุดเดียวเท่านั้นที่สัมผัสโค้ง และสามารถเขียนเส้นสัมผัสได้เฉพาะกับภาคตัดกรวย เท่านั้น มีนักเรียนจำนวน 58 คน

บิซา และซาซาเรียเดส (Biza; & Zachariades. 2008: 89) ได้ออกแบบการสอนแคลคูลัสเรื่องอนุพันธ์โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตชื่อ EucliDraw โดยทดลองกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 17 คน ประเทศกรีซ งานวิจัยนี้เป็นส่วนหนึ่งของโครงการส่งเสริมการสอนแคลคูลัสโดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต (CalGeo: Teaching Calculus Using Dynamic Geometric Tools) ผลการพัฒนาทำให้ได้กิจกรรมการเรียนการสอนซึ่งช่วยให้นักเรียนเข้าใจแนวคิดเกี่ยวกับเส้นสัมผัสและอนุพันธ์ได้ดีขึ้น และยังมีกิจกรรมการอภิปรายในชั้นเรียนเกี่ยวกับฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้และฟังก์ชันที่ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ทั้งในด้านเรขาคณิตและในทางสัญลักษณ์ ผลการวิจัยนี้มีส่วนช่วยในการพัฒนาเครื่องมือให้กับโครงการส่งเสริมการสอนแคลคูลัสโดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต โปรแกรมระบบพีชคณิต และอนุพันธ์และการประยุกต์ข้างต้น พบว่ามีงานวิจัยทั้งในประเทศและต่างประเทศที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับการสอนแคลคูลัสโดยใช้โปรแกรมระบบพีชคณิต และงานวิจัยเกี่ยวกับการสอนเรื่องอนุพันธ์โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต และจากการศึกษาเอกสารเกี่ยวโปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler พบว่าโปรแกรมทั้งสองมีประสิทธิภาพที่ดีเหมาะแก่การนำมาใช้ในการเรียนการสอน ผู้วิจัยจึงสนใจนำโปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler มาสร้างกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี เพื่อเป็นแนวทางหนึ่งสำหรับการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. การกำหนดประชากรและเลือกกลุ่มตัวอย่าง
2. การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
3. การเก็บรวบรวมข้อมูล
4. การจัดกระทำข้อมูลและการวิเคราะห์ข้อมูล

การกำหนดประชากรและเลือกกลุ่มตัวอย่าง

ประชากร

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนิสิตระดับปริญญาตรี ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา คณ 111 (คณิตศาสตร์ 1) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ กรุงเทพมหานคร

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

ตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนิสิตระดับปริญญาตรี ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา คณ 111 (คณิตศาสตร์ 1) ประจำภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ กรุงเทพมหานคร จำนวน 16 คน

การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler พร้อมทั้งคู่มือการใช้กิจกรรมการเรียนการสอน แบบทดสอบย่อย แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ และแบบวัดความพึงพอใจต่อกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ซึ่งมีรายละเอียดการดำเนินการ ดังนี้

กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler และคู่มือการใช้กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นที่ 1 การเตรียมการงานด้านวิชาการ

1. ศึกษาคู่มือการศึกษาระดับปริญญาตรี ปีการศึกษา 2545 คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
2. ศึกษาคู่มือการศึกษาระดับปริญญาตรี ปีการศึกษา 2552 คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

3. ศึกษาเนื้อหาเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์จากหนังสือต่อไปนี้

3.1 เอกสาร MA 111: คณิตศาสตร์ 1 (มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. 2546)

3.2 แคลคูลัส 1 และเทคนิคการใช้ Graphing Calculator (กมล เอกไทย
เจริญ. 2537)

3.3 อนุพันธ์และการประยุกต์ (จินดา อาจริยะกุล. 2537)

3.4 แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1. (มหาวิทยาลัยรามคำแหง. 2546)

3.5 Calculus of One Variable. (Seeley, Robert T. 1972)

3.6 Calculus with Analytic Geometry. (Green, John R. 1976)

3.7 Calculus and Analytic Geometry. (Thomas, George B., Jr. (George
Brinton). 1979)

3.8 A First Course in Calculus. (Lang, Serge. 1980)

3.9 Technical Mathematics with Calculus. (Calter, Paul. 1993)

3.10 The Green Book of Calculus. (Chover, Joshua. 1972)

3.11 Calculus the Easy Way. (Downing, Douglas. 1982)

3.12 The Power of Calculus. (Kenneth L. Whipkey; & Mary Nell
Whipkey. 1979)

4. ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสร้างกิจกรรมการเรียนการสอน
โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตและโปรแกรมระบบพีชคณิต

5. กำหนดเนื้อหา ความคิดรวบยอด และจุดประสงค์การเรียนรู้ เรื่องอนุพันธ์และ
การประยุกต์ สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี โดยผู้วิจัยได้กำหนดเนื้อหาขึ้น 7 หัวข้อ ใช้เวลาในการ
สอนทั้งหมด 16 คาบ ได้แก่

หัวข้อที่ 1 อนุพันธ์และอนุพันธ์อันดับสูง 2 คาบ

หัวข้อที่ 2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
และฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ 2 คาบ

หัวข้อที่ 3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย 2 คาบ

หัวข้อที่ 4 อนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม
และอนุพันธ์ในพิกัดเชิงขั้ว 3 คาบ

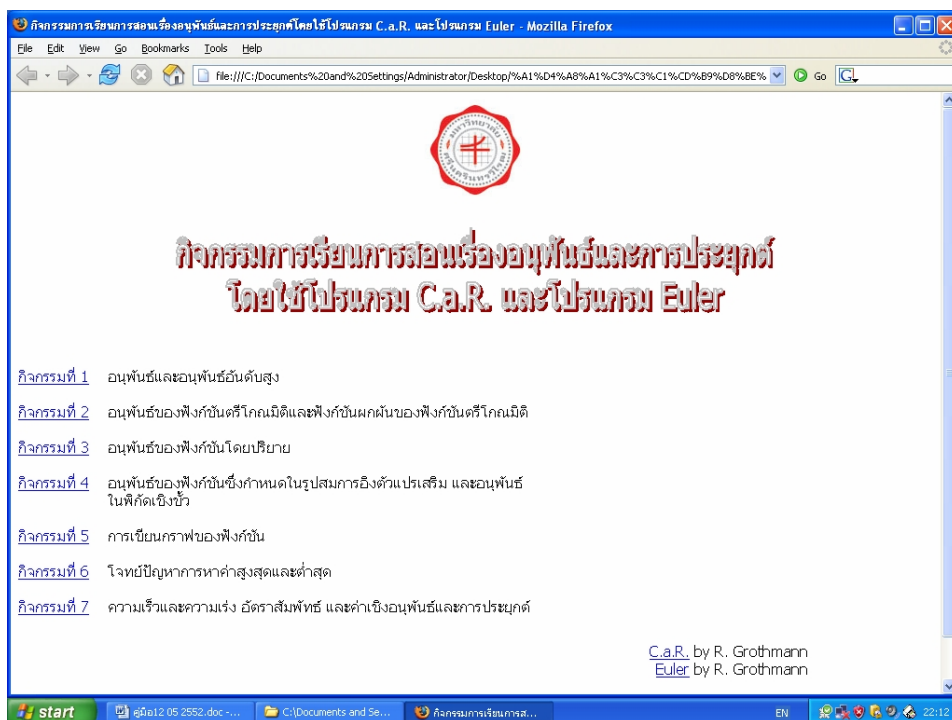
หัวข้อที่ 5 การเขียนกราฟของฟังก์ชัน 3 คาบ

หัวข้อที่ 6 โจทย์ปัญหาการหาค่าสูงสุดและต่ำสุด 2 คาบ

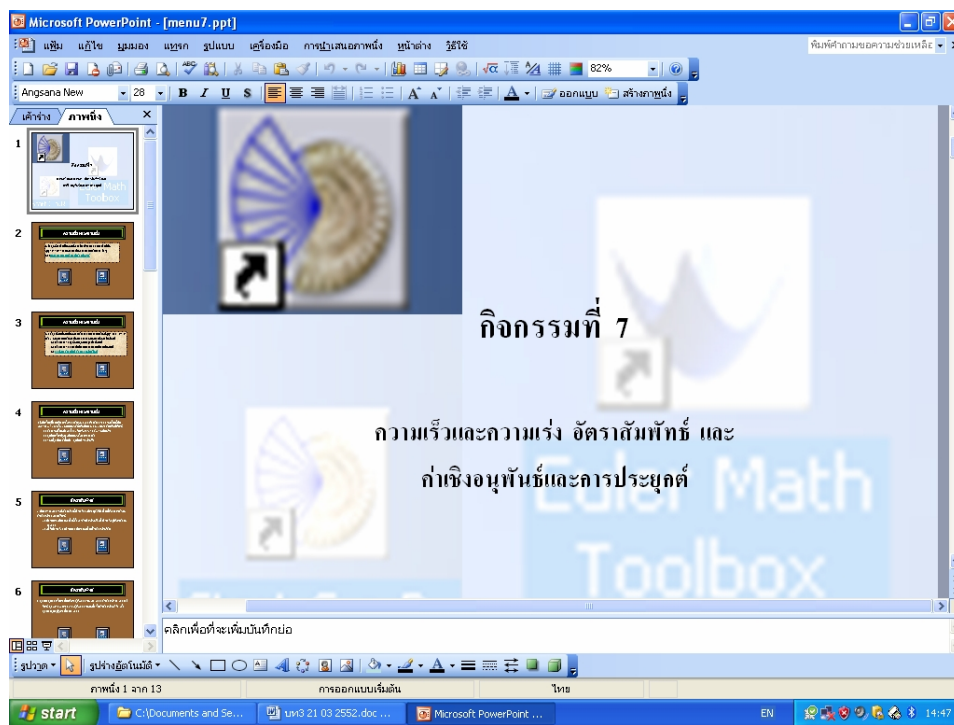
หัวข้อที่ 7 ความเร็วและความเร่ง อัตราสัมพัทธ์
และค่าเชิงอนุพันธ์และการประยุกต์ 2 คาบ

ขั้นที่ 2 สร้างกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม
C.a.R. และโปรแกรม Euler และคู่มือการใช้กิจกรรมการเรียนการสอน

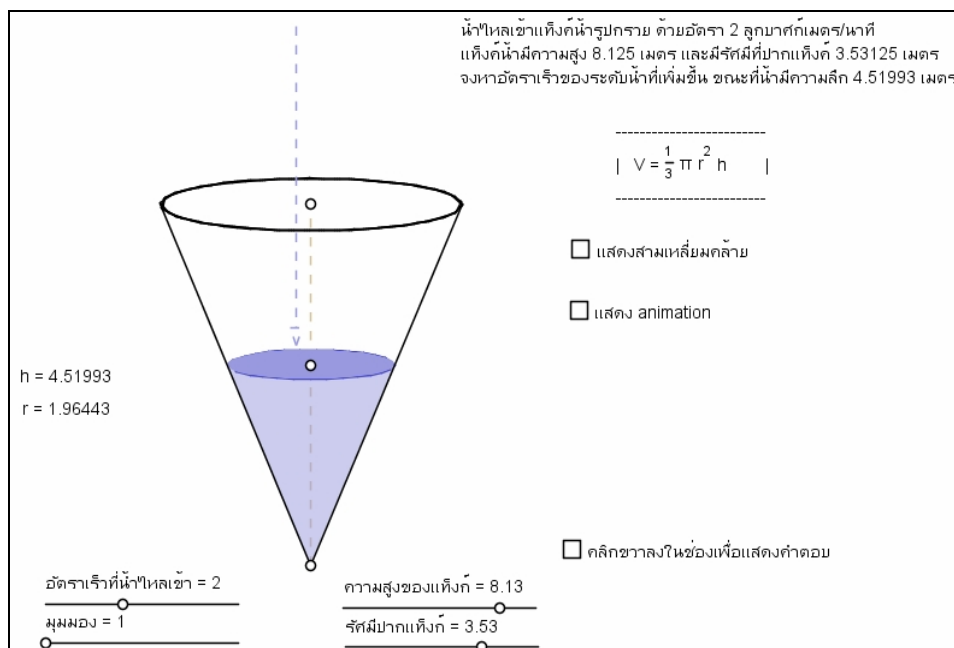
1. กำหนดกรอบเนื้อหาและรูปแบบกิจกรรมการเรียนการสอน โดยแบ่งเนื้อหาออกเป็น 7 หัวข้อ จำนวน 16 คาบ
 2. จัดทำแผนการจัดการเรียนรู้ เรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ประกอบด้วย
 - 2.1 ชื่อเรื่อง / สำคัญ / จุดประสงค์การเรียนรู้ / สำคัญการเรียนรู้
 - 2.2 กิจกรรมการเรียนการสอน มีขั้นตอนดังนี้
 - 2.2.1 ครูแนะนำเข้าบทเรียน
 - 2.2.2 นิสิตปฏิบัติตามไปกิจกรรมโดยนิสิต 1 คนต่อคอมพิวเตอร์ 1 เครื่อง
 - 2.2.3 อภิปรายและสรุปผลการเรียนรู้
 - 2.3 สื่อการเรียนรู้ ประกอบด้วย
 - 2.3.1 แฟ้มคำสั่งกิจกรรมภาคปฏิบัติบนคอมพิวเตอร์
 - 2.3.2 ไปกิจกรรม
 - 2.4 การวัดและประเมินผล
- โครงสร้างของกิจกรรมภาคปฏิบัติบนคอมพิวเตอร์ในแต่ละคาบมีลักษณะดังนี้
1. สารบัญหลัก: ประกอบด้วยเนื้อหา 7 หัวข้อ
 2. หน้าหลักของกิจกรรม: ผู้วิจัยนำเสนอกิจกรรมแต่ละหัวข้อโดยใช้เพาเวอร์พอยต์ เพื่อให้สะดวกในการเรียกใช้.
3. กิจกรรม: เพาเวอร์พอยต์แต่ละหัวข้อ จะแทรกการเชื่อมโยงหลายมิติไปสู่โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler เพื่อให้นิสิตคลิกไปทำกิจกรรม (ดังภาพประกอบ)



ภาพประกอบ 4 สารบัญหลัก



ภาพประกอบ 5 ตัวอย่างหน้าหลักของกิจกรรม



ภาพประกอบ 6 ตัวอย่างกิจกรรม

3. กำหนดการประเมินผลของนิสิต โดยแบ่งการประเมินผลของนิสิตออกเป็นดังนี้

3.1 การประเมินผลระหว่างเรียน ครูประเมินจากการแสดงแนวคิดและคำตอบของนิสิตโดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ในการปฏิบัติกิจกรรมจากใบกิจกรรม มีน้ำหนักคะแนนคิดเป็นร้อยละ 20 ของคะแนนทั้งหมด

3.2 การประเมินผลระหว่างเรียน ครูประเมินจากการทำแบบทดสอบย่อย มีน้ำหนักคะแนนคิดเป็นร้อยละ 30 ของคะแนนทั้งหมด

3.3 การประเมินผลหลังเรียน ครูประเมินจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น มีน้ำหนักของคะแนนคิดเป็นร้อยละ 50 ของคะแนนทั้งหมด

4. สร้างคู่มือการใช้กิจกรรมการเรียนการสอนสำหรับครูและนิสิตเพื่อเป็นแนวทางในการใช้กิจกรรมการเรียนการสอนที่ถูกต้องและมีประสิทธิภาพ

ขั้นที่ 3 นำกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler และคู่มือการใช้กิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญญาโทและวิชาชีพ 3 ท่าน ตรวจสอบปรับปรุง เพื่อพิจารณาความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา ความเหมาะสมของภาษา และชี้แนะข้อบกพร่องรวมทั้งข้อเสนอแนะในการปรับปรุงแก้ไข

ขั้นที่ 4 นำกิจกรรมการเรียนการสอนและคู่มือการใช้กิจกรรมการเรียนการสอนที่ได้รับการปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของคณะกรรมการควบคุมปริญญาโทและวิชาชีพแล้ว ไปทดลองสอนกับนิสิตระดับปริญญาตรี ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา คณ 111 (คณิตศาสตร์ 1) ประจำภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2552 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ กรุงเทพมหานคร ซึ่งเป็นนิสิตกลุ่มนาร่อง ในเวลาเรียนปกติ จำนวน 19 คน โดยนิสิตใช้คอมพิวเตอร์ 1 คนต่อ 1 เครื่อง

ขั้นที่ 5 นำกิจกรรมการเรียนการสอนและคู่มือการใช้กิจกรรมการเรียนการสอนจากขั้นที่ 4 มาปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่อง และนำไปเสนอต่อคณะกรรมการควบคุมปริญญาโทและวิชาชีพตรวจสอบ แล้วนำกิจกรรมการเรียนการสอนและคู่มือการใช้กิจกรรมการเรียนการสอนไปใช้ในการทดลองกับกลุ่มตัวอย่างต่อไป ทั้งนี้ก่อนการทดลองจะฝึกการใช้งานโปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler นอกเวลาเรียนปกติ 1 คาบ

แบบทดสอบย่อย

แบบทดสอบย่อยมีทั้งหมด 2 ฉบับ ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

ฉบับที่ 1 เป็นแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 3 ข้อ ใช้วัดหลังจากเสร็จสิ้นการปฏิบัติกิจกรรมหัวข้อที่ 4 เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งกำหนดให้รูปสมการอิงตัวแปรเสริม และอนุพันธ์ในพิกัดเชิงขั้ว เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจในเรื่องต่อไป

1. อนุพันธ์และอนุพันธ์อันดับสูง
2. อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
3. อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย

ฉบับที่ 2 เป็นแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 4 ข้อ ใช้วัดหลังจากเสร็จสิ้นการปฏิบัติกิจกรรมหัวข้อที่ 7 เรื่องความเร็วและความเร่ง อัตราสัมพัทธ์ และค่าเชิงอนุพันธ์และการประยุกต์ เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจในเรื่องต่อไปนี้

1. การเขียนกราฟของฟังก์ชัน
2. โจทย์ปัญหาการหาค่าสูงสุดและต่ำสุด
3. อัตราสัมพัทธ์ และค่าเชิงอนุพันธ์และการประยุกต์ซึ่งผู้วิจัยดำเนินการสร้างแบบทดสอบย่อยตามขั้นตอน ต่อไปนี้

1. ศึกษาทฤษฎีและหลักการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน จากหนังสือเทคนิคการเขียนข้อสอบของชาวล แพร่ตกุล (2520: 1-40) การวัด การวิเคราะห์ และการประเมินผลทางการศึกษาเบื้องต้นของกั้วล เทียนกันท์เทศน์ (2540: 92-112) และเทคนิค การวัดผลการเรียนรู้ของลั้วล สายยศ และอังคณา สายยศ (2543: 196-198)

2. วิเคราะห์เนื้อหา สาระสำคัญ และจุดประสงค์การเรียนรู้ของเนื้อหาที่ใช้ใน การทดลอง เพื่อใช้ในการสร้างแบบทดสอบย่อยแต่ละฉบับ

3. สร้างแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 1 จำนวน 12 ข้อ และสร้างแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 2 จำนวน 10 ข้อ ให้ครอบคลุมเนื้อหา และจุดประสงค์การเรียนรู้ตามที่กำหนด

4. นำแบบทดสอบย่อยแต่ละฉบับที่สร้างขึ้นเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบความเที่ยงตรงของเนื้อหา โดยพิจารณาว่าแบบทดสอบที่สร้างขึ้นสอดคล้องกับเนื้อหา และจุดประสงค์การเรียนรู้หรือไม่ โดยใช้หลักเกณฑ์ การพิจารณาดังนี้

- คะแนน +1 สำหรับข้อสอบที่สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้
- คะแนน 0 สำหรับข้อสอบที่ไม่แน่ใจว่าสอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้
- คะแนน -1 สำหรับข้อสอบที่ไม่สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้

5. นำแบบทดสอบย่อยแต่ละฉบับที่ได้รับการตรวจสอบจากผู้เชี่ยวชาญมาคำนวณหาค่า IOC แล้วคัดเลือกข้อสอบที่มีค่า IOC ตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป โดยเลือกแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 1 จำนวน 9 ข้อ และเลือกแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 2 จำนวน 7 ข้อ

6. นำแบบทดสอบย่อยจากข้อ 5 ไปทดสอบกับนิสิตกลุ่มนำร่อง ซึ่งเป็นนิสิตกลุ่มเดียวกับที่ใช้ในการทดลองกิจกรรมการเรียนการสอนและคู่มือการใช้กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

7. วิเคราะห์แบบทดสอบ โดยนำแบบทดสอบที่ได้จากการสอบในข้อ 6 มาตรวจให้คะแนน ซึ่งใช้เกณฑ์การให้คะแนนของกรมวิชาการ (2546: 121-123) และสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2546: 72-74) โดยผู้วิจัยปรับให้เหมาะสมกับแบบทดสอบ มีเกณฑ์ในการให้คะแนนในแต่ละข้อดังตาราง 2

ตาราง 2 เกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบย่อย

ระดับคะแนน	ผลการทำแบบทดสอบที่ปรากฏให้เห็น
4	- คำตอบถูกต้อง และแสดงวิธีทำถูกต้องสมบูรณ์
3	- คำตอบถูกต้อง การแสดงวิธีทำไม่ชัดเจน แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง
2	- คำตอบถูกต้อง การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจน หรือไม่แสดงวิธีทำ
1	- คำตอบไม่ถูกต้อง การแสดงวิธีทำไม่ชัดเจน แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง
0	- ไม่เขียนคำตอบ และไม่แสดงวิธีทำ

8. นำคะแนนที่ได้จากข้อ 7 มาวิเคราะห์หาความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) แล้วคัดเลือกข้อที่มีความยากง่ายตั้งแต่ .20 ถึง .80 และมีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ .20 ขึ้นไปเพื่อใช้เป็นแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 1 จำนวน 3 ข้อ และแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 2 จำนวน 4 ข้อ

9. นำแบบทดสอบย่อยที่ผ่านการคัดเลือกจากข้อ 8 มาคำนวณเพื่อหาค่าความเชื่อมั่นโดยใช้สูตรสัมประสิทธิ์แอลฟา (α -Coefficient) ของครอนบัค (Cronbach)

10. นำแบบทดสอบย่อยไปใช้กับกลุ่มตัวอย่าง

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler เป็นแบบทดสอบที่ใช้หลังจากเสร็จสิ้นการเรียนการสอนทั้ง 7 หัวข้อ เป็นแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 10 ข้อ ซึ่งผู้วิจัยดำเนินการตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. ศึกษาทฤษฎีและหลักการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน จากหนังสือเทคนิคการเขียนข้อสอบของชาวล แพร์ตกุล (2520: 1-40) การวัด การวิเคราะห์ และการประเมินผลทางการศึกษาเบื้องต้นของกังวล เทียนกันท์เทศน์ (2540: 92-112) และเทคนิค การวัดผลการเรียนรู้ของล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ (2543: 196-198)

2. วิเคราะห์เนื้อหา สาระสำคัญ และจุดประสงค์การเรียนรู้ของเนื้อหาที่ใช้ใน การทดลอง เพื่อใช้ในการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์

3. สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ตามจุดประสงค์การเรียนรู้ เป็นแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 22 ข้อ ให้ครอบคลุมเนื้อหา และจุดประสงค์ตามที่กำหนด

4. นำแบบทดสอบที่สร้างขึ้นเสนอต่อผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่าน เพื่อตรวจสอบความเที่ยงตรงของเนื้อหา โดยพิจารณาว่าแบบทดสอบที่สร้างขึ้นสอดคล้องกับเนื้อหา และจุดประสงค์การเรียนรู้หรือไม่ โดยใช้หลักเกณฑ์ การพิจารณาดังนี้

คะแนน +1 สำหรับข้อสอบที่สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้

คะแนน 0 สำหรับข้อสอบที่ไม่แน่ใจว่าสอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้

คะแนน -1 สำหรับข้อสอบที่ไม่สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้

5. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ที่ได้รับการตรวจสอบจากผู้เชี่ยวชาญมาคำนวณหาค่า IOC แล้วคัดเลือกข้อสอบที่มีค่า IOC ตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป จำนวน 14 ข้อ

6. นำแบบทดสอบจากข้อ 5 ไปทดสอบกับนิสิตกลุ่มนำร่อง ซึ่งเป็นนิสิตกลุ่มเดียวกับที่ใช้ในการทดลองกิจกรรมการเรียนการสอนและคู่มือการใช้กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

7. วิเคราะห์แบบทดสอบ โดยนำแบบทดสอบที่ได้จากการสอบในข้อ 6 มาตรวจให้คะแนน ซึ่งใช้เกณฑ์การให้คะแนนของกรมวิชาการ (2546: 121-123) และสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2546: 72-74) โดยผู้วิจัยปรับให้เหมาะสมกับแบบทดสอบ มีเกณฑ์ในการให้คะแนนในแต่ละข้อดังตาราง 3

ตาราง 3 เกณฑ์การตรวจให้คะแนนของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์

ระดับคะแนน	ผลการทำงานแบบทดสอบที่ปรากฏให้เห็น
4	- คำตอบถูกต้อง และแสดงวิธีทำถูกต้องสมบูรณ์
3	- คำตอบถูกต้อง การแสดงวิธีทำไม่ชัดเจน แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง
2	- คำตอบถูกต้อง การแสดงวิธีทำยังไม่ชัดเจน หรือไม่แสดงวิธีทำ
1	- คำตอบไม่ถูกต้อง การแสดงวิธีทำไม่ชัดเจน แต่อยู่ในแนวทางที่ถูกต้อง
0	- ไม่เขียนคำตอบ และไม่แสดงวิธีทำ

8. นำคะแนนที่ได้จากข้อ 7 มาวิเคราะห์หาความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) แล้วคัดเลือกข้อที่มีความยากง่ายตั้งแต่ .20 ถึง .80 และมีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ .20 ขึ้นไป จำนวน 10 ข้อ

9. นำแบบทดสอบที่ผ่านการคัดเลือกจากข้อ 8 มาคำนวณเพื่อหาค่าความเชื่อมั่น โดยใช้สูตรสัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) ของครอนบัค (Cronbach)
10. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ไปใช้กับกลุ่มตัวอย่าง

แบบวัดความพึงพอใจต่อกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

แบบวัดความพึงพอใจต่อกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler จำนวน 20 ข้อ ซึ่งผู้วิจัยดำเนินการสร้างตามขั้นตอนดังนี้

1. ศึกษาวิธีการสร้างแบบวัดความพึงพอใจจากเอกสาร ตำราที่เกี่ยวข้องกับวิธีการและหลักการสร้างแบบวัดความพึงพอใจ แล้วกำหนดแนวทางในการออกแบบวัดความพึงพอใจตามวิธีการของลิเคิร์ต (Likert)
2. สร้างแบบวัดความพึงพอใจของนิสิตต่อกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler จำนวน 20 ข้อ โดยปรับปรุงจากแบบสอบถามความพึงพอใจของนักเรียนของวิภาวดี วงศ์เลิศ (2544: 135-136) สุรินทร์ บุญพัฒนาภรณ์ (2549: 155-157) และวรรณ กฤตยากรนุพงศ์. (2551: 274-276) ลักษณะของแบบวัดความพึงพอใจเป็นแบบมาตราส่วนประมาณค่า (Rating Scale) ซึ่งมี 5 ระดับ ข้อความเป็นข้อความทางบวก ซึ่งมีเกณฑ์การตรวจ ให้คะแนนในแต่ละความพึงพอใจ ดังนี้

มากที่สุด	ให้คะแนน	5	คะแนน
มาก	ให้คะแนน	4	คะแนน
ปานกลาง	ให้คะแนน	3	คะแนน
น้อย	ให้คะแนน	2	คะแนน
น้อยที่สุด	ให้คะแนน	1	คะแนน

3. นำแบบวัดความพึงพอใจที่สร้างขึ้นจำนวน 20 ข้อ ไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญาบัตรและผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่าน พิจารณาและให้ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการใช้ภาษาในแต่ละข้อ ให้มีความชัดเจน และเหมาะสมขึ้นอีก
4. นำแบบวัดความพึงพอใจที่ได้ปรับปรุงแก้ไขแล้วจากข้อ 3 ไปทดลองกับนิสิตกลุ่มนำร่อง ซึ่งเป็นนิสิตกลุ่มเดียวกับที่ใช้ในการทดลองกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler
5. นำผลที่ได้จากข้อ 4 มาหาค่าความเชื่อมั่นของแบบวัดความพึงพอใจ โดยใช้วิธีหาสัมประสิทธิ์แอลฟา (α - Coefficient) ของครอนบัค (Cronbach)
6. นำแบบวัดความพึงพอใจของนิสิตในการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างต่อไป

การเก็บรวบรวมข้อมูล

1. ผู้วิจัยทำการสอนนิสิตกลุ่มตัวอย่าง ด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยใช้เวลาสอนตามตารางสอนปกติ จำนวน 4 สัปดาห์ สัปดาห์ละ 4 คาบ รวมเป็น 16 คาบ
2. เมื่อนิสิตปฏิบัติกิจกรรมหัวข้อ 4 เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม และอนุพันธ์ในพิกัดเชิงขั้ว เสร็จเรียบร้อยแล้ว ผู้วิจัยทำการทดสอบนิสิตด้วยแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 1 ใช้เวลาทดสอบ 25 นาที นอกเวลาเรียนปกติ
3. เมื่อนิสิตปฏิบัติกิจกรรมหัวข้อ 7 เรื่องความเร็วและความเร่ง อัตราสัมพัทธ์ และค่าเชิงอนุพันธ์และการประยุกต์ เสร็จเรียบร้อยแล้ว ผู้วิจัยทำการทดสอบนิสิตด้วยแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 2 ใช้เวลาทดสอบ 25 นาที นอกเวลาเรียนปกติ
4. เมื่อสิ้นสุดการสอนทั้ง 7 หัวข้อ ให้นิสิตกลุ่มตัวอย่างทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ ซึ่งเป็นแบบทดสอบอัตนัยจำนวน 10 ข้อ ใช้เวลาทดสอบ 2 คาบ นอกเวลาเรียนปกติ
5. เมื่อสิ้นสุดการเรียนการสอนให้นิสิตที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ตอบแบบวัดความพึงพอใจต่อกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler โดยใช้เวลา 20 นาที
6. ผู้วิจัยนำคะแนนที่ได้ทั้งหมดมาวิเคราะห์โดยใช้วิธีการทางสถิติ เพื่อทดสอบสมมติฐานที่ตั้งไว้

การจัดกระทำข้อมูลและการวิเคราะห์ข้อมูล

1. หาค่าสถิติพื้นฐาน ได้แก่ ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
2. ทดสอบสมมติฐานของการวิจัยที่ว่า นิสิตที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler สอบผ่านเกณฑ์มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 70 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด โดยใช้การทดสอบทวินาม (Binomial test) ทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนของประชากร
3. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล
 - 3.1 สถิติที่ใช้ในการทดสอบคุณภาพเครื่องมือที่ใช้ในการทดลองดังนี้
 - 3.1.1 หาค่าดัชนีความสอดคล้องจากความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญที่มีต่อความสอดคล้องระหว่างแบบทดสอบกับจุดประสงค์การเรียนรู้โดยใช้สูตร IOC
 - 3.1.2 หาค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบ
 - 3.1.3 หาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบย่อยและแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยใช้สูตรสัมประสิทธิ์แอลฟา (α -Coefficient) ของครอนบัค (Cronbach)

3.1.4 วิเคราะห์แบบวัดความพึงพอใจต่อกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์ และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ของนิสิตโดยใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และนำเสนอให้นักความคิดโดยใช้การประเมินค่าความคิดเห็นของ ประคอง กรณสูต (2538: 77) ดังนี้

คะแนนเฉลี่ย 4.50 – 5.00 หมายถึง นิสิตมีความพึงพอใจอยู่ในระดับมากที่สุด หลังจากเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

คะแนนเฉลี่ย 3.50 – 4.49 หมายถึง นิสิตมีความพึงพอใจอยู่ในระดับมาก หลังจากเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

คะแนนเฉลี่ย 2.50 – 3.49 หมายถึง นิสิตมีความพึงพอใจอยู่ในระดับปานกลาง หลังจากเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

คะแนนเฉลี่ย 1.50 – 2.49 หมายถึง นิสิตมีความพึงพอใจอยู่ในระดับน้อย หลังจากเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

คะแนนเฉลี่ย 1.00 – 1.49 หมายถึง นิสิตมีความพึงพอใจอยู่ในระดับน้อย ที่สุดหลังจากเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

3.2 สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

3.2.1 สถิติพื้นฐาน

3.2.1.1 ค่าร้อยละ

3.2.1.2 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

3.2.1.3 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

3.2.2 สถิติสำหรับการทดสอบสมมติฐาน ได้แก่ การทดสอบทวินาม (Binomial test)

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยครั้งนี้ มีจุดมุ่งหมาย (1) เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตระดับปริญญาตรี ในการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler (2) เพื่อศึกษาความพึงพอใจของนิสิตระดับปริญญาตรี ที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ผู้วิจัยนำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลการวิจัยโดยแบ่งเป็นตอนตามจุดมุ่งหมายเป็นลำดับดังนี้

ตอนที่ 1 ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตระดับปริญญาตรี ในการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

1. ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำใบกิจกรรมรายบุคคลของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง
2. ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบย่อยของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง
3. ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง
4. ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตกลุ่มตัวอย่างในการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler
5. ค่าร้อยละของจำนวนนิสิตกลุ่มตัวอย่างที่ได้คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม
6. การทดสอบจำนวนนิสิตที่สอบผ่านเกณฑ์ เรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 70 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด

ตอนที่ 2 ศึกษาความพึงพอใจของนิสิตระดับปริญญาตรี ที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

การประเมินความพึงพอใจที่มีต่อการเรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler และประเมินความพึงพอใจต่อการร่วมกิจกรรมการเรียนการสอนของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ ข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์ ได้แก่ คะแนนที่ได้จากการทดสอบนิสิตกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งเป็นนิสิตระดับปริญญาตรี ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา คณ 111 (คณิตศาสตร์ 1) ประจำภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ กรุงเทพมหานคร จำนวน 16 คน ด้วยคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนซึ่งประกอบด้วย คะแนนจากการทำใบกิจกรรม คะแนนจากแบบทดสอบย่อย และคะแนนจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler และคะแนนความพึงพอใจของนิสิตกลุ่มที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

ตอนที่ 1 ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตระดับปริญญาตรี ในการเรียนเรื่องอนุพันธ์ และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

1. ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำใบกิจกรรมรายบุคคลของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง ปรากฏผลดังตาราง 4

ตาราง 4 ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำใบกิจกรรมรายบุคคลของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นิสิต (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ย เลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คิดเป็นร้อยละของ คะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน (S.D)
นิสิต ระดับปริญญาตรี	16	20	16.25	81.25	2.24

จากตาราง 4 พบว่าคะแนนจากการทำใบกิจกรรมแบบรายบุคคลของนิสิตกลุ่มตัวอย่างจำนวน 16 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 16.25 คิดเป็นร้อยละ 81.25 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 2.24

2. ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบย่อยของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง ปรากฏผลดังตาราง 5

ตาราง 5 ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบย่อยของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นิสิต (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ย เลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คิดเป็นร้อยละของ คะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน (S.D)
นิสิต ระดับปริญญาตรี	16	30	21.90	73.00	3.77

จากตาราง 5 พบว่าคะแนนจากการทำแบบทดสอบย่อยของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 16 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 21.90 คิดเป็นร้อยละ 73.00 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 3.77

3. ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง ปรากฏผลดังตาราง 6

ตาราง 6 ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นิสิต (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ย เลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คิดเป็นร้อยละของ คะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน (S.D)
นิสิต ระดับปริญญาตรี	16	50	34.38	68.76	6.80

จากตาราง 6 พบว่าคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 16 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 34.38 คิดเป็นร้อยละ 68.76 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 6.80

4. ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตกลุ่มตัวอย่างในการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ปรากฏผลดังตาราง 7

ตาราง 7 ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตกลุ่มตัวอย่างในการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นิสิต (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ย เลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คิดเป็นร้อยละของ คะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน (S.D)
นิสิต ระดับปริญญาตรี	16	100	72.52	72.52	11.18

จากตาราง 7 พบว่าคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตกลุ่มตัวอย่างในการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler จำนวน 16 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 72.52 คิดเป็นร้อยละ 72.52 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 11.18

หมายเหตุ คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตกลุ่มตัวอย่างในการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ได้มาจากคะแนนดังนี้

1. คะแนนจากการทำใบกิจกรรม ร้อยละ 20 ของคะแนนเต็มทั้งหมด
2. คะแนนจากการทำแบบทดสอบย่อย ร้อยละ 30 ของคะแนนเต็มทั้งหมด
3. คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ ร้อยละ 50 ของคะแนนเต็มทั้งหมด

5. ค่าร้อยละของจำนวนนิสิตกลุ่มตัวอย่างที่ได้คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง อนุพันธ์ และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของ คะแนนเต็ม ปรากฏผลดังตาราง 8

ตาราง 8 ค่าร้อยละของจำนวนนิสิตกลุ่มตัวอย่างที่ได้คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่อง อนุพันธ์ และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของ คะแนนเต็ม

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นิสิต (คน)	จำนวนนิสิตที่ได้คะแนน ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไป ของคะแนนเต็ม (คน)	ค่าร้อยละของจำนวนนิสิต ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม
นิสิตระดับปริญญาตรี	16	13	81.25

จากตาราง 8 พบว่า นิสิตกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 16 คน ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไป ของคะแนนเต็ม มีจำนวน 13 คน คิดเป็นร้อยละ 81.25 ของจำนวนนิสิตกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด

6. การทดสอบจำนวนนิสิตที่สอบผ่านเกณฑ์ เรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 70 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด ปรากฏผลดังตาราง 9

ตาราง 9 การทดสอบจำนวนนิสิตที่สอบผ่านเกณฑ์ เรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 70 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวนนิสิต (คน)	จำนวนนิสิตที่ได้คะแนนตั้งแต่ ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม (คน)	p – Value
นิสิต ระดับปริญญาตรี	16	13	0.000*

$p^* < .01$

จากตาราง 9 พบว่า นิสิตที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้ โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 70 ของจำนวนนิสิตทั้งหมดที่ระดับ นัยสำคัญทางสถิติ .01

ตอนที่ 2 ศึกษาความพึงพอใจของนิสิตระดับปริญญาตรี ที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

การประเมินความพึงพอใจที่มีต่อการเรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler และประเมินความพึงพอใจต่อการร่วมกิจกรรมการเรียนการสอนของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง

ผู้วิจัยได้ศึกษาและปรับปรุงแนวทางการสร้างแบบสอบถามวัดความพึงพอใจที่มีต่อวิชา คณิตศาสตร์ของวิภาวดี วงศ์เลิศ (2544: 135-136) สุรินทร์ บัญพัฒนาภรณ์ (2549: 155-157) และวรวรรณ กฤตยากรนุพงศ์. (2551: 274-276) ลักษณะของแบบวัดความพึงพอใจเป็นแบบมาตราส่วนประมาณค่า (Rating Scale) ซึ่งมี 5 ระดับ ข้อความในแบบสอบถามเป็นข้อความทางบวก ซึ่งมี เกณฑ์การตรวจให้คะแนนในแต่ละความพึงพอใจ ดังนี้

เห็นด้วยมากที่สุด	ให้คะแนน	5	คะแนน
เห็นด้วยมาก	ให้คะแนน	4	คะแนน
เห็นด้วยปานกลาง	ให้คะแนน	3	คะแนน
เห็นด้วยน้อย	ให้คะแนน	2	คะแนน
เห็นด้วยน้อยที่สุด	ให้คะแนน	1	คะแนน

การแปลความหมายของคะแนนเฉลี่ยรวม ซึ่งเป็นผลของการวัดความพึงพอใจของนิสิตที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ทั้งฉบับใช้เกณฑ์การประเมินของประคอง กรรณสูตร (2538: 77) ดังนี้

คะแนนเฉลี่ย 4.50 – 5.00	หมายถึง เห็นด้วยมากที่สุด
คะแนนเฉลี่ย 3.50 – 4.49	หมายถึง เห็นด้วยมาก
คะแนนเฉลี่ย 2.50 – 3.49	หมายถึง เห็นด้วยปานกลาง
คะแนนเฉลี่ย 1.50 – 2.49	หมายถึง เห็นด้วยน้อย
คะแนนเฉลี่ย 1.00 – 1.49	หมายถึง เห็นด้วยน้อยที่สุด

ซึ่งการประเมินความพึงพอใจที่มีต่อการเรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R.และโปรแกรม Euler และความพึงพอใจต่อการร่วมกิจกรรมการเรียนการสอนของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง ปรากฏผลดังตาราง 10

ตาราง 10 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานและระดับความพึงพอใจของนิสิตที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

ข้อความ	ค่าเฉลี่ย $\bar{x}$	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน (S.D.)	ระดับ ความ พึงพอใจ
ตอนที่ 1 เป็นแบบวัดความพึงพอใจต่อการเรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอน			
1. จากการทำใบกิจกรรมในแต่ละคาบ ทำให้ข้าพเจ้าเข้าใจเนื้อหาเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์มากขึ้น	4.13	0.50	มาก
2. การจัดลำดับเนื้อหาในใบกิจกรรม มีความต่อเนื่องและชัดเจน	4.19	0.54	มาก
3. เนื้อหาในใบกิจกรรม มีความยากง่ายเหมาะสม	4.13	0.62	มาก
4. เนื้อหาในใบกิจกรรม มีความเหมาะสมกับเวลาเรียน	4.00	0.52	มาก
5. เครื่องมือในการทำกิจกรรม ใช้ได้สะดวกตามความต้องการของข้าพเจ้า	3.88	0.81	มาก
6. เครื่องมือในการทำกิจกรรม มีประโยชน์ต่อการเรียนการสอนมาก	4.31	0.61	มาก
7. การใช้ภาพเคลื่อนไหวทำให้กิจกรรมมีความน่าสนใจ	4.44	0.81	มาก
8. การใช้ภาพเคลื่อนไหวทำให้ข้าพเจ้าเข้าใจแนวคิดของอนุพันธ์และการประยุกต์มากขึ้น	4.56	0.51	มากที่สุด
9. กิจกรรมการเรียนการสอน ทำให้ข้าพเจ้ามองเห็นมโนภาพของอัตราการเปลี่ยนแปลงต่าง ๆ ได้ดีขึ้น	4.44	0.51	มาก
10. กิจกรรมการเรียนการสอนทำให้ข้าพเจ้ามีความกระตือรือร้น และสนุกกับการเรียนมากขึ้น	4.25	0.78	มาก
ตอนที่ 2 เป็นแบบวัดความพึงพอใจต่อการร่วมกิจกรรมการเรียนการสอน			
11. กิจกรรมการเรียนการสอน ทำให้ข้าพเจ้าได้มีโอกาสแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับเพื่อนมากขึ้น	4.06	0.77	มาก
12. กิจกรรมการเรียนการสอน ทำให้ข้าพเจ้ามีอิสระในการคิดมากขึ้น	3.94	0.44	มาก
13. กิจกรรมการเรียนการสอน ทำให้ข้าพเจ้าเกิดการค้นพบด้วยตนเอง	3.81	0.66	มาก
14. กิจกรรมการเรียนการสอน ช่วยพัฒนาความคิดของข้าพเจ้า	4.00	0.82	มาก

ตาราง 10 (ต่อ)

ข้อความ	ค่าเฉลี่ย $\bar{x}$	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน (S.D.)	ระดับ ความ พึงพอใจ
15. กิจกรรมการเรียนการสอน ทำให้ข้าพเจ้าสามารถจดจำ แนวคิดของอนุพันธ์และการประยุกต์ได้นานขึ้น	3.81	0.98	มาก
16. กิจกรรมการเรียนการสอน ทำให้ข้าพเจ้ามีความมั่นใจ ในตัวเองมากขึ้น	3.88	0.72	มาก
17. ข้าพเจ้ารู้สึกสนุกกับการทำไปกิจกรรมระหว่างเรียน	4.06	0.44	มาก
18. กิจกรรมการเรียนการสอน ทำให้ข้าพเจ้ามีกำลังใจใน การเรียนมากขึ้น	4.25	0.58	มาก
19. กิจกรรมการเรียนการสอน ทำให้ข้าพเจ้ามีความตั้งใจ มากขึ้น	4.31	0.60	มาก
20. กิจกรรมการเรียนการสอน ทำให้ข้าพเจ้ามีเจตคติที่ดีต่อ การเรียนแคลคูลัส	4.06	0.77	มาก
รวมทั้งฉบับ	4.13	0.65	มาก

จากตาราง 10 แสดงให้เห็นว่าคะแนนระดับความพึงพอใจของนิสิตกลุ่มตัวอย่างต่อข้อ
คำถามทั้งหมด นิสิตมีความคิดเห็นอยู่ในระดับมาก และเมื่อพิจารณาคะแนนเฉลี่ยของความพึงพอใจ
ของนิสิตที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และ
โปรแกรม Euler ทั้งฉบับซึ่งมีค่าเท่ากับ 4.31 แสดงว่านิสิตมีความพึงพอใจต่อกิจกรรมการเรียน
การสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler อยู่ในระดับมาก

บทที่ 5

สรุปผล อภิปราย และข้อเสนอแนะ

ความมุ่งหมายของการวิจัย สมมติฐานของการวิจัย และวิธีดำเนินการวิจัย

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตระดับปริญญาตรี ในการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler
2. เพื่อศึกษาความพึงพอใจของนิสิตระดับปริญญาตรี ที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

สมมติฐานของการวิจัย

นิสิตที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler สอบผ่านเกณฑ์ มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 70 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด

วิธีดำเนินการวิจัย

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

ตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนิสิตระดับปริญญาตรี ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา คณ 111 (คณิตศาสตร์ 1) ประจำภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ กรุงเทพมหานคร จำนวน 16 คน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ประกอบด้วย

1. กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ซึ่งผ่านการตรวจสอบจากผู้เชี่ยวชาญ และผ่านการทดลองใช้เครื่องมือกับกลุ่มนำร่อง ประกอบด้วย
 - 1.1 คู่มือการใช้กิจกรรมการเรียนการสอน
 - 1.2 กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler จำนวน 7 หัวข้อ ซึ่งแต่ละหัวข้อประกอบด้วย ใบกิจกรรม และกิจกรรมภาคปฏิบัติบนคอมพิวเตอร์
 - 1.3 แผนการจัดการเรียนการสอน จำนวน 7 แผน
2. แบบทดสอบย่อย ซึ่งผ่านการตรวจสอบจากผู้เชี่ยวชาญ และผ่านการทดลองใช้เครื่องมือกับกลุ่มนำร่อง ประกอบด้วย

2.1 แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 1

2.2 แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 2

3. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ ซึ่งผ่านการตรวจสอบจากผู้เชี่ยวชาญ และผ่านการทดลองใช้เครื่องมือกับกลุ่มนาร่อง

4. แบบวัดความพึงพอใจต่อกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ซึ่งผ่านการตรวจสอบจากผู้เชี่ยวชาญ และผ่านการทดลองใช้เครื่องมือกับกลุ่มนาร่อง

การเก็บรวบรวมข้อมูล

1. ผู้วิจัยสอนนิสิตกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 16 คน โดยใช้กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี โดยใช้เวลาสอนตามตารางสอนปกติจำนวน 4 สัปดาห์ สัปดาห์ละ 4 คาบ ซึ่งแบ่งเนื้อหาตามเอกสารการเรียนทั้งหมด 7 หัวข้อ ใช้เวลา 16 คาบ และทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน 2 คาบ ดังนี้

หัวข้อที่ 1 อนุพันธ์และอนุพันธ์อันดับสูง	เวลา 2 คาบ
หัวข้อที่ 2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	เวลา 2 คาบ
หัวข้อที่ 3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย	เวลา 2 คาบ
หัวข้อที่ 4 อนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม และอนุพันธ์ในพิกัดเชิงขั้ว	เวลา 3 คาบ
หัวข้อที่ 5 การเขียนกราฟของฟังก์ชัน	เวลา 3 คาบ
หัวข้อที่ 6 โจทย์ปัญหาการหาค่าสูงสุดและต่ำสุด	เวลา 2 คาบ
หัวข้อที่ 8 ความเร็วและความเร่ง อัตราสัมพัทธ์ และค่าเชิงอนุพันธ์และการประยุกต์	เวลา 2 คาบ
ทดสอบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	เวลา 2 คาบ

ในส่วนของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ จะมีใบกิจกรรมให้นิสิตปฏิบัติเป็นแบบรายบุคคล ผู้วิจัยจะนำใบกิจกรรมไปตรวจให้คะแนนทุกครั้ง เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการประเมินผลการเรียนรู้

2. เมื่อนิสิตปฏิบัติกิจกรรมหัวข้อ 4 เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม และอนุพันธ์ในพิกัดเชิงขั้ว เสร็จเรียบร้อยแล้ว ผู้วิจัยทำการทดสอบนิสิตด้วยแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 1 ใช้เวลาทดสอบ 25 นาที นอกเวลาเรียนปกติ

3. เมื่อนิสิตปฏิบัติกิจกรรมหัวข้อ 7 เรื่องความเร็วและความเร่ง อัตราสัมพัทธ์ และค่าเชิงอนุพันธ์และการประยุกต์ เสร็จเรียบร้อยแล้ว ผู้วิจัยทำการทดสอบนิสิตด้วยแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 2 ใช้เวลาทดสอบ 25 นาที นอกเวลาเรียนปกติ

4. เมื่อสิ้นสุดการสอนทั้ง 7 หัวข้อ ให้นิสิตกลุ่มตัวอย่างทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ ซึ่งเป็นแบบทดสอบอัตนัยจำนวน 10 ข้อ ใช้เวลาทดสอบ 2 คาบ นอกเวลาเรียนปกติ และให้นิสิตตอบแบบวัดความพึงพอใจต่อกิจกรรม การเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler โดยใช้เวลา 20 นาที

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำใบกิจกรรมรายบุคคลของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง
2. ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบย่อยของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง
3. ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง
4. ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตกลุ่มตัวอย่างในการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler
5. ค่าร้อยละของจำนวนนิสิตกลุ่มตัวอย่างที่ได้คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม
6. การทดสอบจำนวนนิสิตที่สอบผ่านเกณฑ์ เรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 70 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด
7. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานและระดับความพึงพอใจของนิสิตที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

สรุปผลการวิจัย

1. คะแนนจากการทำใบกิจกรรมแบบรายบุคคลของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 16 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 16.25 คิดเป็นร้อยละ 81.25 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 2.24
2. คะแนนจากการทำแบบทดสอบย่อยของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 16 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 20.44 คิดเป็นร้อยละ 68.13 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 3.52

3. คะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 16 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 34.38 คิดเป็นร้อยละ 68.76 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 6.80

4. คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตกลุ่มตัวอย่างในการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler จำนวน 16 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 71.06 คิดเป็นร้อยละ 71.06 ของคะแนนเต็ม และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 10.94

5. นิสิตกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 16 คน ที่ได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม มีจำนวน 13 คน คิดเป็นร้อยละ 81.25 ของจำนวนนิสิตกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด

6. นิสิตระดับปริญญาตรี ที่สอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler มีจำนวนมากกว่าร้อยละ 70 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ .01 ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า นิสิตระดับปริญญาตรี มีความสามารถในการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ โดยใช้กิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

7. ความพึงพอใจของนิสิตที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ทั้งฉบับซึ่งประเมินจากคะแนนเฉลี่ยทั้งฉบับของแบบวัดความพึงพอใจ พบว่านิสิตที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler อยู่ในระดับมาก

อภิปรายผล

1. จากผลการวิจัยพบว่า นิสิตระดับปริญญาตรีที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler สามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ได้มากกว่าร้อยละ 70 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01 ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของชาญชัย สุขใส (2546: บทคัดย่อ) ที่ได้ศึกษาผลของการใช้โปรแกรมระบบพีชคณิตชื่อ MAPLE V ประกอบการเรียนการสอน ต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 2 ของนักศึกษาโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์และสถิติประยุกต์ ผลการวิจัยปรากฏว่า นักศึกษาที่เรียนโดยใช้โปรแกรม MAPLE V ประกอบการเรียนการสอน มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่น่าพึงพอใจและสูงกว่านักศึกษาที่เรียนปกติในชั้นเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และบิซา และซาซาเรียเดส (Biza; & Zachariades. 2008: 89) ได้ออกแบบการสอนแคลคูลัสเรื่องอนุพันธ์โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตชื่อ EucliDraw โดยทดลองกับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ผลการวิจัยพบว่า ความเข้าใจแนวคิดเกี่ยวกับเส้นสัมผัสและอนุพันธ์ ของนักเรียนสามารถพัฒนาให้ดีขึ้นได้ โดยใช้กิจกรรมการเรียนการสอนที่สร้างจากโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต

2. ผู้วิจัยทดลองสอนนิสิตกลุ่มตัวอย่างซึ่งลงทะเบียนเรียนรายวิชา คณ 111 (คณิตศาสตร์ 1) ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ จำนวน 16 คน

ซึ่งทั้งหมดเป็นนิสิตที่เคยได้รับการประเมินผลการศึกษาในระดับชั้นตก (E) หรือ งดเรียนโดยได้รับ อนุมัติ (W) ในรายวิชา คณ 111 มาก่อน จึงจัดเป็นนิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนค่อนข้างอ่อน จากผลการวิจัยพบว่า นิสิตสามารถสอบผ่านเกณฑ์การเรียนมากกว่าร้อยละ 70 ของจำนวนนิสิต ทั้งหมด ทั้งนี้อาจเป็นเพราะสาเหตุดังต่อไปนี้

2.1 กิจกรรมการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นนั้น ใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ประกอบการเรียนการสอน โดยในส่วนของกิจกรรมภาคปฏิบัติบนคอมพิวเตอร์จากโปรแกรม C.a.R. นี้ จากที่เนื้อหาเรื่องอัตราสัมพัทธ์ค่อนข้างเป็นนามธรรม กิจกรรมจากโปรแกรม C.a.R. ทำให้นิสิต สามารถมองเห็นภาพการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรอย่างเป็นรูปธรรมมากขึ้น ส่งผลให้นิสิตเกิดความ สนใจอยากเรียนรู้ นิสิตได้เห็นภาพความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรสองตัวเทียบกับ เวลา ทำให้นิสิตสามารถเขียนความสัมพันธ์เพื่อสร้างเป็นสมการได้ และในเรื่องโจทย์ปัญหาการหา ค่าสูงสุดและต่ำสุด ซึ่งนิสิตจะต้องหาคำตอบที่เป็นค่าที่เหมาะสม นิสิตสามารถเห็นลักษณะของการ เปลี่ยนแปลงของตัวแปรได้เป็นรูปธรรมมากขึ้นด้วยโปรแกรม C.a.R. จึงสามารถสร้างความสัมพันธ์ เพื่อแก้โจทย์ปัญหาได้ อีกทั้งนิสิตได้ลงมือสร้างกราฟของฟังก์ชันและสำรวจค่าความชันของเส้น สัมผัสกราฟ ณ จุดที่กำหนดให้ด้วยตนเอง ได้สังเกตการเคลื่อนที่ของจุดบนกราฟของฟังก์ชันเพื่อ สำรวจแนวคิดเรื่องการทดสอบการเป็นจุดสุดขีดสัมพันธ์โดยอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสอง รวมถึงสำรวจแนวคิดการประมาณค่าของฟังก์ชันโดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ เป็นต้น กิจกรรมต่าง ๆ เน้น ทำให้นิสิตได้ลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง ซึ่งสอดคล้องข้อเสนอแนะของ บรรพต สุวรรณประเสริฐ (2544: 144) ที่ว่า “การเรียนรู้คณิตศาสตร์จะเกิดขึ้นเมื่อผู้เรียนเห็นว่าพฤติกรรมที่ต้องการรู้คณิตศาสตร์นั้น มีประโยชน์และมีบทบาทต่อความสนใจของผู้เรียน การเรียนรู้คณิตศาสตร์จะเกิดขึ้นเมื่อผู้เรียนคิดว่า สิ่งที่เรียนนั้นมีความหมายต่อตัวผู้เรียนและสามารถนำไปใช้ได้ และการเรียนรู้คณิตศาสตร์จะเกิดขึ้น เมื่อผู้เรียนได้ลงมือกระทำด้วยตนเองมากกว่าการเรียนรู้โดยการฟังจากครูผู้สอนเท่านั้น” นอกจากนี้ ผู้วิจัยยังได้ออกแบบกิจกรรมในรูปแบบการบ้านให้นิสิตสร้าง ได้แก่ แฟ้มงานแบบฝึกเรื่องจุดสูงสุด-ต่ำสุดสมบูรณ์ แฟ้มงานแบบฝึกเรื่องจุดวิกฤต เป็นต้น ซึ่งเมื่อนิสิตสร้างจุดวิกฤตถูกต้องโปรแกรม จะแจ้งให้ทราบทันทีว่าสร้างได้ถูกต้องแล้ว จึงทำให้นิสิตทราบผลได้ทันที นับว่าโปรแกรม C.a.R. สามารถออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ได้หลากหลาย ทำให้นิสิตมีความรู้สึกสนุกในการเรียน ซึ่งส่งผล ดีต่อการเรียนรู้ของตัวนิสิตเอง

2.2 สำหรับกิจกรรมการเรียนรู้ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นในส่วนของโปรแกรม Euler นั้น พบว่า โปรแกรม Euler ช่วยอำนวยความสะดวกในการเรียนรู้ของนิสิตได้ค่อนข้างมาก โปรแกรม Euler สามารถลดปัญหาจากการใช้เวลาในการคำนวณที่ค่อนข้างมากให้น้อยลงได้ ทั้งช่วยตรวจสอบ คำตอบในการอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีความซับซ้อน รวมถึงช่วยลดปัญหาการหารากของสมการที่ไม่ เป็นเชิงเส้นและไม่คุ้นเคย เช่น ในเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันในระบบพิกัดเชิงขั้ว นิสิตต้องหาค่าความ ชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันซึ่งสามารถหาได้โดยใช้สูตรจากทฤษฎีบท 4.2 และทฤษฎีบท 4.3 ซึ่งนิสิตคิดว่าสูตรจากทฤษฎีบท 4.2 ต้องจำสูตรที่ยาวกว่า ในขณะที่สูตรจากทฤษฎีบท 4.3 นั้น

สั้นกว่ามาก แต่นิสิตต้องใช้ความรู้หามุม θ เมื่อทราบค่าของ $\tan \theta$ ซึ่งโดยส่วนใหญ่ นิสิตจะทราบเฉพาะมุม θ ที่สำคัญ ๆ เท่านั้น เช่น $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$ เป็นต้น แต่ถ้าค่าของ $\tan \theta$ เป็นค่าที่ นิสิตไม่คุ้นเคย นิสิตจะหามุม θ ไม่ได้หรือต้องใช้เวลาในการเปิดตารางและคำนวณหาอย่างมาก เมื่อผู้วิจัยนำโปรแกรม Euler เข้ามาช่วยนิสิตในการแก้ปัญหาเรื่องการหาค่ามุม θ พบว่านิสิตสามารถคำนวณหาค่าความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันด้วยสูตรจากทฤษฎีบท 4.3 ได้เร็วขึ้น ซึ่งนิสิตรู้สึกพึงพอใจและสนุกกับการเรียนรู้ และมีความสนใจอยากทำแบบฝึกหัดมากขึ้น เป็นต้น สอดคล้องกับคำกล่าวในงานวิจัยของ กมล เอกไทยเจริญ (2545: 53) เกี่ยวกับเจตคติของผู้เรียนที่ เรียนด้วยโปรแกรมระบบพีชคณิต คือ ผู้เรียนมีความเห็นว่าการนำโปรแกรมระบบพีชคณิตเข้ามาใช้ในการเรียนการสอน ช่วยประหยัดเวลาในการคำนวณ และทำให้ผู้เรียนมีความเชื่อมั่นในการแก้ปัญหา ผู้เรียนมีความเห็นว่าการเรียนด้วยวิธีนี้เป็นประสบการณ์ที่ดีสำหรับผู้เรียน นอกจากนี้การนำโปรแกรมระบบพีชคณิตเข้ามาใช้ในการเรียนการสอนยังมีส่วนช่วยให้ผู้เรียนได้ฝึกทักษะและความชำนาญพื้นฐานต่าง ๆ เนื่องจากความสามารถในการคำนวณของโปรแกรม Euler มีส่วนช่วยให้ประหยัดเวลาในกระบวนการเรียนรู้ ผู้เรียนจึงสามารถฝึกทำแบบฝึกหัดได้หลายข้อ ส่งผลให้ผู้เรียนได้พัฒนาทักษะและความชำนาญหลายอย่าง ได้แก่ ทักษะด้านความรู้ความจำ ทักษะในการอ่านและทำความเข้าใจโจทย์ ทักษะการแสดงวิธีทำอย่างเป็นขั้นตอน เป็นต้น เมื่อผู้เรียนได้เห็นและได้ฝึกทำแบบฝึกหัดบ่อย ๆ ผู้เรียนจะสามารถจดจำขั้นตอนการทำแบบฝึกหัดได้ เกิดเป็นทักษะและความชำนาญพื้นฐานเพื่อใช้ในการเรียนระดับสูงต่อไป

3. ผลการศึกษาความพึงพอใจของนิสิตที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ซึ่งประเมินผลจากคะแนนเฉลี่ยทั้งฉบับของแบบวัดความพึงพอใจ พบว่า นิสิตกลุ่มตัวอย่างมีความพึงพอใจต่อกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler อยู่ในระดับมาก ทั้งนี้ อาจมีสาเหตุเนื่องมาจากนิสิตสามารถเรียนรู้ได้ด้วยตนเองโดยการปฏิบัติตามกิจกรรมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น และนิสิตได้สำรวจ สังเกตและได้เห็นแนวคิดที่สำคัญของวิชาแคลคูลัส รวมถึงนิสิตได้เห็นภาพของลักษณะการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร และภาพของการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรสองตัวเมื่อเทียบกับเวลาได้อย่างเป็นรูปธรรมมากขึ้น จึงเข้าใจและเรียนรู้อย่างมีความหมาย ส่งผลให้นิสิตรู้สึกสนุกในการเรียน อีกทั้งมีโปรแกรมช่วยอำนวยความสะดวกในการคิดคำนวณ นิสิตจึงสามารถฝึกทักษะ ฝึกทำโจทย์หรือฝึกสร้างกราฟได้บ่อยตามที่ต้องการ ทำให้นิสิตได้ฝึกทักษะต่าง ๆ อย่างอิสระ ไม่เครียดและไม่หนักใจในการเรียนรู้

ข้อเสนอแนะ

1. ข้อเสนอแนะทั่วไป

1.1 กิจกรรมการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นนี้ สามารถนำไปปรับใช้ประกอบการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ทั้งในระดับชั้นเตรียมอุดมศึกษาและระดับอุดมศึกษาได้ เพื่อให้เป็นประโยชน์ต่อการเรียนรู้ของผู้เรียน และแผนการสอนชุดนี้ ผู้วิจัยใช้เวลาในการทำกิจกรรมเต็มที่ทุกขั้นตอนเพื่อให้การวิจัยได้ผลสมบูรณ์ที่สุด สำหรับผู้ที่นำไปใช้สอนอาจจะต้องมีการศึกษารายละเอียดการสอน อาจต้องมีการปรับเวลาในการทำกิจกรรม

1.2 ควรให้ผู้เรียนได้รับชื่อกิจกรรมการเรียนการสอนทุกคน เพื่อให้ผู้เรียนได้มีการเตรียมความพร้อมในการใช้กิจกรรมการเรียนการสอน และสามารถทำการศึกษานอกเวลาได้

1.3 ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ครูควรมีผู้ช่วยในการสอน เพื่อจะได้ให้คำแนะนำนักเรียนได้อย่างรวดเร็วและทั่วถึงมากขึ้น

2. ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัย

2.1 ควรมีการวิจัยเกี่ยวกับการนำโปรแกรม C.a.R. ไปใช้เป็นสื่อการเรียนการสอน คณิตเรื่องอื่น ๆ เช่น ลิมิตและความต่อเนื่อง อินทิเกรตและการประยุกต์ การสำรวจรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ ภาคตัดกรวย เวกเตอร์ กำหนดการเชิงเส้น เป็นต้น

2.2 ควรมีการวิจัยเกี่ยวกับการนำโปรแกรม Euler ไปประกอบการเรียนการสอน คณิตศาสตร์เรื่องอื่น ๆ เช่น เมทริกซ์และการดำเนินการ อนุกรมฟูริเยร์และการประยุกต์ (Fourier series and Applications) เรื่องการสำรวจการเขียนกราฟ 3 มิติ การสำรวจพื้นที่ผิวโค้งของสมการกำลังสอง เป็นต้น

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

กมล เอกไทยเจริญ. (2537). แคลคูลัส 1 และเทคนิคการใช้ Graphing Calculator. กรุงเทพฯ:

ไฮเอ็ดพับลิชชิง.

----- (2545). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติของผู้เรียนระดับปริญญาตรีสาขา
คณิตศาสตร์ที่มีต่อการเรียนวิชาพีชคณิตเชิงเส้นโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ. วารสาร
วิทยาศาสตร์ มศว. 18(2): 53.

กรมวิชาการ. (2546). การจัดสาระการเรียนรู้ กลุ่มวิชาคณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์องค์การ
รับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์.

กรรณิกา ผาสุก. (2549). การเปรียบเทียบผลการเรียนรู้กลุ่มสาระคณิตศาสตร์เรื่องการแปลงทาง
เรขาคณิต ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ระหว่างการเรียนรู้ด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์กับการเรียน
ประกอบโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP). วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (เทคโนโลยี
การศึกษา). มหาสารคาม: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยมหาสารคาม. ถ่ายเอกสาร.

กั้วล เทียนกัณฑ์เทศน์. (2540). การวัด การวิเคราะห์ การประเมินทางการศึกษาเบื้องต้น.
กรุงเทพฯ: ศูนย์สื่อเสริมกรุงเทพฯ.

จอณ เมฆสว่าง. (2548). การพัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดียเรื่องเมทริกซ์และการประยุกต์
สำหรับนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ:
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

จินดา สวัสดิ์ทวี. (2547). การประเมินประสิทธิภาพของบทเรียน เรื่อง อนุพันธ์และการประยุกต์ที่
นำเสนอบนเครือข่ายอินเทอร์เน็ต. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). สงขลา: บัณฑิต
วิทยาลัย มหาวิทยาลัยทักษิณ. ถ่ายเอกสาร.

จินดา อาจริยะกุล. (2537). อนุพันธ์และการประยุกต์. กรุงเทพฯ: ภาควิชาฟิสิกส์-คณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล.

ชนธิชา แสงแก้ว. (2546). การพัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดียเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิต
วิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

ชวาล แพรัตกุล. (2520). เทคนิคการเขียนข้อสอบ. กรุงเทพฯ: อรุณการพิมพ์.

ชาญชัย สุกใส. (2546). การทดลองใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยงานคณิตศาสตร์ ประกอบการ
เรียนการสอนวิชาแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 2. อุบลราชธานี: มหาวิทยาลัยราชภัฏ
อุบลราชธานี. ถ่ายเอกสาร.

- ธนุชัย ภูอุดม. (2551). การนำคอมพิวเตอร์มาใช้ในการสอนคณิตศาสตร์. (เอกสารประกอบคำสอน). กรุงเทพฯ: คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. อัดสำเนา.
- นัยนา บุญสมร. (2550). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ความสามารถด้านมิติสัมพันธ์และเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างการสอนโดยใช้สื่อโปรแกรม *The Geometer's Sketchpad (GSP)* กับวิธีสอนตามปกติ. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (การวิจัยการศึกษา). มหาสารคาม: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยมหาสารคาม. ถ่ายเอกสาร.
- บรรพต สุวรรณประเสริฐ. (2544). การพัฒนาหลักสูตร โดยเน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ. กรุงเทพฯ: เชียงใหม่โรงพิมพ์แสงศิลป์.
- เบญจพร สว่างศรี. (2549). รายงานวิจัยเรื่องการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาแคลคูลัส เรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรี ที่สอนโดยใช้เทคนิคการสอนแบบค้นพบ. สุพรรณบุรี: มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ วิทยาเขตสุพรรณบุรี.
- ประคอง วรรณสุต. (2538). สถิติเพื่อการวิจัยทางพฤติกรรมศาสตร์. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- พัชรินทร์ สุวรรณ. (2546). การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและทัศนคติของนักศึกษาที่เรียนวิชาแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ I เฉพาะเรื่องลิมิต และความต่อเนื่องระหว่างการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ (*Graphic calculator*) และการเรียนแบบปกติ. ปทุมธานี: คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์.
- มหาวิทยาลัยรามคำแหง. คณะวิทยาศาสตร์. (2546). แคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ 1. กรุงเทพฯ: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยฯ.
- มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. คณะวิทยาศาสตร์. (2546). เอกสาร MA 111: คณิตศาสตร์ 1. กรุงเทพฯ: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยฯ.
- . (2545). คู่มือการศึกษาระดับปริญญาตรี ปีการศึกษา 2545 คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. กรุงเทพฯ: คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยฯ.
- . (2552). คู่มือการศึกษาระดับปริญญาตรี ปีการศึกษา 2552 คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. กรุงเทพฯ: คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยฯ.
- ล้วน สายยศ; และ อังคณา สายยศ. (2543). เทคนิคการวัดผลการเรียนรู้. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: สุวีริยาสาส์น.

- วรวรรณ กฤตยากรนพวงศ์. (2551). *กิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้การแปลงทางเรขาคณิตและซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2*. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- วัชรภรณ์ ปราณีธรรม. (2549). *การศึกษาความเข้าใจเกี่ยวกับฟังก์ชันกำลังสองของนักเรียนในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้เครื่องคิดเลขกราฟิก*. วิทยานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์ศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น. ถ่ายเอกสาร.
- วิภาวดี วงศ์เลิศ. (2544). *การพัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนแบบมัลติมีเดีย เรื่อง “เซต” ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยใช้เทคนิคการเรียนรู้แบบคู่คิดอภิปราย*. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2546). *คู่มือวัดผลประเมินผลคณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: สถาบันฯ.
- สมบัติ แสงทองคำสุก. (2545). *การพัฒนารูปแบบการสอนวิชาคณิตศาสตร์ แบบบูรณาการเชิงเนื้อหา เพื่อส่งเสริมทักษะการเชื่อมโยง เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6*. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- สมบุรณ์ สุคันธรส. (2547). *การพัฒนาการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตามแนวคิดผู้เรียนสร้างความรู้เอง (Constructivism) สำหรับนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูงของสถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขตภาคตะวันออกเฉียงเหนือ นครราชสีมา*. การศึกษาค้นคว้าอิสระ กศ.ม. (หลักสูตรและการสอน). มหาสารคาม: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยมหาสารคาม. ถ่ายเอกสาร.
- สันติ อธิพิณนาวากุล. (2550). *การพัฒนาชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวนโดยใช้โปรแกรม GSP (The geometer's sketchpad) เพื่อส่งเสริมความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวยระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4*. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- สุรินทร์ บุญพัฒนาภรณ์. (2549). *กิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องการแปลงทางเรขาคณิตโดยใช้ซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัต สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2*. ปรินูญานิพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.

- อมฤทธิ์ บุพโฑ. (2548). การพัฒนาบทเรียนคอมพิวเตอร์มัลติมีเดียเรื่องกำหนดการเชิงเส้นระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5. ปรินญาณินพนธ์ กศ.ม. (คณิตศาสตร์). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- อริศรา ตั้งวารี. (2548). การสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน สำหรับนักศึกษา โปรแกรมวิทยาการคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏราชชนครินทร์. สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- อุบล กลองกระโทก. (2550). รายงานการวิจัย เรื่อง การสำรวจเมตริกซ์ของการแปลงโดยใช้เรขาคณิตพลวัต. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา.
- อำนาจ เชื้อบ่อคา. (2547). ผลของการใช้โปรแกรม GSP ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องพาราโบลาชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3. สารนิพนธ์ กศ.ม. (การมัธยมศึกษา). กรุงเทพฯ: บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. ถ่ายเอกสาร.
- Abu-Naja, Muhammad. (2008, September). The Effect of Graphic Calculators on Negev Arab Pupils' Learning of the Concept of Families of Functions. *Research in Mathematics Education*. 10(2): 183-202.
- Baharvand, Mohsen. (2002, June). A Comparison of the Effectiveness of Computer-Assisted Instruction Versus Traditional Approach to Teaching Geometry. *Dissertation Abstracts International*. 40(3): 552-A.
- Baker, B.; Cooley, L.; & Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. *Journal for Research in Mathematics Education*. 31(5): 557 – 578.
- (2007). Schema Thematization : A Framework and an Example. *Journal for Research in Mathematics Education*. 38(4): 370 – 392.
- Biza, Irene; Christou, Constantinos; & Zachariades, Theodossios. (2008, March). Student Perspectives on the Relationship between a Curve and Its Tangent in the Transition from Euclidean Geometry to Analysis. *Research in Mathematics Education*. 10(1): 53-70.
- Biza, Irene; & Zachariades, Theodossios. (2008, March). Using Dynamic Geometry to Introduce Calculus Concepts: CalGeo And The Case Of Derivative. *Research in Mathematics Education*. 10(1): 89-90.

- Calter, Paul. (1993). *Technical Mathematics with Calculus*. New York: Prentice Hall.
- Chover, Joshua. (1972). *The Green Book of Calculus*. Menlo Park, Calif. : Benjamin.
- Computer Algebra System*. (2009). Retrieved January 18, 2009, from
http://en.wikipedia.org/wiki/Computer_algebra_system
- Doerr, Helen M.; & Zangor, Roxana. (2000). Creating Meaning for and with the Graphing Calculator. *Educational Studies in Mathematics*. (41): 143-163.
- Downing, Douglas. (1982). *Calculus the Easy Way*. Woodbury, N.Y.: Barron's Educational Series.
- Ferrini-Mundy, J; & Lauten, D. (1993). Teaching and Learning Calculus. In *High school mathematics*. pp. 155 –176. New York: Macmillan.
- Fey, James T.; & others. (1984). *Computing & Mathematics*. 2nd Ed. University of Maryland.
- Fowler, Michael. (2004). Using Excel to Simulate Pendulum Motion and Maybe Understand Calculus a Little Better. *Science & Education*. 13: 791-796.
- Green, John R. (1976). *Calculus with Analytic Geometry*. New York: McGraw-Hill.
- Interactive Geometry Software*. (2009). Retrieved January 18, 2009, from
http://en.wikipedia.org/wiki/Interactive_geometry_software
- July, Raquel Andrea. (2001, December). Thinking in Three Dimensions : Exploring Students' Geometry Thinking And Spatial Ability With Geometer's Sketchpad. *Dissertation Abstracts International*. 62(6): 2060-A.
- Kenneth L. Whipkey; & Mary Nell Whipkey. (1979). *The Power of Calculus*. New York: John Wiley.
- Lang, Serge. (1980). *A First Course in Calculus*. Reading, Mass. : Addison-Wesley.
- Olivero, Federica; & Robutti, Ornella. (2007). Measuring in Dynamic Geometry Environments as a Tool for Conjecturing and Proving. *Int J Comput Math Learning*. 12:135–156.
- Perjési, Ildikó Hámori. (2003). Application of CAS for Teaching of Integral-Transforming Theorems. *ZDM*. 35(2): 43-47.

Seeley, Robert T. (1972). *Calculus of One Variable*. Illinois: Scott, Foresman.

Thomas, George B., Jr. (George Brinton). (1979). *Calculus and Analytic Geometry*.
Massachusetts: Addison-Wesley.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
รายนามผู้เชี่ยวชาญ

รายนามผู้เชี่ยวชาญ

รายนามผู้เชี่ยวชาญการสอนคณิตศาสตร์ ที่ได้รับความอนุเคราะห์ตรวจสอบความถูกต้องด้านเนื้อหาและความเหมาะสมของกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ความเที่ยงตรงของเนื้อหา ความเหมาะสมของแผนการจัดการเรียนการสอน ความเหมาะสมของแบบทดสอบย่อยและแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ และการใช้ภาษาในแบบสอบถามวัดความพึงพอใจของนิสิตที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler มีดังนี้

1. อาจารย์ธัญชัย ภูอุดม
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
2. อาจารย์เมตต์ แยมวงษ์
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
3. อาจารย์สุวรรณา คล้ายกระแสน
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ภาคผนวก ข
การวิเคราะห์ข้อมูล

ตาราง 11 แสดงค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 1

แบบทดสอบข้อที่	ผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ			IOC	แปลผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3		
1	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
2	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
3	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
4	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
5	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
6	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
7	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
8	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
9	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
10	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
11	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
12	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้

ตาราง 12 แสดงค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 2

แบบทดสอบข้อที่	ผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ			IOC	แปลผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3		
1	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
2	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
3	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
4	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
5	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
6	+1	0	+1	0.67	ใช้ได้
7	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
8	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
9	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
10	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้

ตาราง 13 แสดงค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

แบบทดสอบข้อที่	ผลการพิจารณาของผู้เชี่ยวชาญ			IOC	แปลผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3		
1	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
2	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
3	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
4	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
5	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
6	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
7	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
8	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
9	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
10	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
11	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
12	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
13	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
14	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
15	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
16	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
17	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
18	+1	0	+1	0.67	ใช้ได้
19	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
20	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
21	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้
22	+1	+1	+1	1.00	ใช้ได้

หมายเหตุ คะแนน +1 สำหรับข้อสอบที่สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้
 คะแนน 0 สำหรับข้อสอบที่ไม่แน่ใจว่าสอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้
 คะแนน -1 สำหรับข้อสอบที่ไม่สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้

ตาราง 14 แสดงค่าความยากง่าย (p), ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ
ย่อยฉบับที่ 1 เรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ สำหรับนิสิตที่เป็นกลุ่มนาร่อง

แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 1	p	r
ข้อที่ 1	0.75	0.30
ข้อที่ 2	0.60	0.80
ข้อที่ 3	0.60	0.60

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 1 เท่ากับ 0.36

ตาราง 15 แสดงค่าความยากง่าย (p), ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ
ย่อยฉบับที่ 2 เรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ สำหรับนิสิตที่เป็นกลุ่มนาร่อง

ข้อที่	p	r
1	0.50	0.60
2	0.67	0.27
3	0.80	0.40
4	0.70	0.60

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 2 เท่ากับ 0.17

ตาราง 16 แสดงค่าความยากง่าย (p), ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ
วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ สำหรับนิสิตที่เป็นกลุ่มนำร่อง

ข้อที่	p	r
1	0.70	0.60
2	0.70	0.60
3	0.40	0.40
4	0.70	0.60
5	0.77	0.33
6	0.80	0.40
7	0.70	0.60
8	0.63	0.33
9	0.80	0.26
10	0.50	0.60

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และ
การประยุกต์ เท่ากับ 0.66

ตาราง 17 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบวัดความพึงพอใจของนิสิตที่เรียนเรื่อง
อนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler และค่าความเชื่อมั่นของ
แบบวัดความพึงพอใจของนิสิตกลุ่มนําร่อง

ข้อที่	ระดับความคิดเห็น					$\bar{x}$	S.D.	แปลผล
	5	4	3	2	1			
1	42.10% (8 คน)	57.90% (11 คน)	-	-	-	4.42	0.51	มาก
2	42.10% (8 คน)	57.90% (11 คน)	-	-	-	4.42	0.51	มาก
3	31.60% (6 คน)	68.40% (13 คน)	-	-	-	4.32	0.48	มาก
4	26.30% (5 คน)	63.20% (12 คน)	10.50% (2 คน)	-	-	4.16	0.60	มาก
5	68.40% (13 คน)	26.30% (5 คน)	-	-	-	4.72	0.46	มากที่สุด
6	52.60% (10 คน)	47.40% (9 คน)	-	-	-	4.53	0.51	มากที่สุด
7	52.60% (10 คน)	47.40% (9 คน)	-	-	-	4.53	0.51	มากที่สุด
8	31.60% (6 คน)	52.60% (10 คน)	15.80% (3 คน)	-	-	4.16	0.69	มาก
9	36.80% (7 คน)	63.20% (12 คน)	-	-	-	4.37	0.50	มาก
10	52.60% (10 คน)	47.40% (9 คน)	-	-	-	4.47	0.51	มาก
11	21.10% (4 คน)	52.60% (10 คน)	15.80% (3 คน)	-	-	4.06	0.66	มาก
12	36.80% (7 คน)	52.60% (10 คน)	-	-	-	4.41	0.51	มาก
13	36.80% (7 คน)	31.60% (6 คน)	21.10% (4 คน)	-	-	4.18	0.81	มาก

ตาราง 17 (ต่อ)

ข้อที่	ระดับความคิดเห็น					$\bar{x}$	S.D.	แปลผล
	5	4	3	2	1			
14	52.60% (10 คน)	36.80% (7 คน)	-	-	-	4.59	0.51	มากที่สุด
15	36.80% (7 คน)	47.40% (9 คน)	5.30% (1 คน)	-	-	4.35	0.61	มาก
16	31.60% (6 คน)	47.40% (9 คน)	10.50% (2 คน)	-	-	4.24	0.66	มาก
17	52.60% (10 คน)	26.30% (5 คน)	10.50% (2 คน)	-	-	4.47	0.72	มาก
18	52.60% (10 คน)	31.60% (6 คน)	5.30% (1 คน)	-	-	4.53	0.62	มากที่สุด
19	57.90% (11 คน)	31.60% (6 คน)	-	-	-	4.65	0.50	มากที่สุด
20	31.60% (6 คน)	57.90% (11 คน)	-	-	-	4.35	0.50	มาก

ค่าความเชื่อมั่นของแบบวัดความพึงพอใจของนิสิตกลุ่มนาร่องทั้งฉบับ (α) เท่ากับ 0.94

ตาราง 18 การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้ระหว่างเรียนจาก
ใบกิจกรรมเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ของ
นิสิตกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นิสิต (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ย เลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คิดเป็นร้อยละ ของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน (S.D)
นิสิตระดับปริญญาตรี	16	20	16.25	81.25	2.24

ตาราง 19 การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้ระหว่างเรียนจาก
การทำแบบทดสอบย่อยเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และ
โปรแกรม Euler ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นิสิต (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ย เลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คิดเป็นร้อยละ ของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน (S.D)
นิสิตระดับปริญญาตรี	16	30	21.90	73.00	3.77

ตาราง 20 การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้จากการทำ
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R.
และโปรแกรม Euler ของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นิสิต (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ย เลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คิดเป็นร้อยละ ของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน (S.D)
นิสิตระดับปริญญาตรี	16	50	34.38	68.76	6.80

ตาราง 21 ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนผลสัมฤทธิ์ทาง
การเรียนของนิสิตกลุ่มตัวอย่าง ในการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม
C.a.R. และโปรแกรม Euler คะแนนเต็ม 100 คะแนน

กลุ่มตัวอย่าง	จำนวน นิสิต (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ย เลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คิดเป็นร้อยละ ของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน (S.D)
นิสิตระดับปริญญาตรี	16	100	72.52	72.52	11.18

ตาราง 22 ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนที่ได้จากใบกิจกรรม แบบทดสอบย่อย แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของ นิสิตกลุ่มตัวอย่าง จำนวน 16 คน

ผลการวิเคราะห์	คะแนน เต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ย เลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คิดเป็นร้อยละ ของคะแนนเต็ม	ส่วนเบี่ยงเบน มาตรฐาน (S.D)
ใบกิจกรรม	20	16.25	81.25	2.24
แบบทดสอบย่อย	30	21.90	73.00	3.77
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	50	34.38	68.76	6.80
ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	100	72.52	72.52	11.18

การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับจำนวนนิสิตระดับปริญญาตรีที่เรียนเรื่องเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ซึ่งใช้การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับค่าสัดส่วนประชากร โดยใช้การทดสอบทวินาม (Binomial test)

สมมติฐานของการทดสอบคือ

$$H_0 : p \leq 0.7$$

$$H_1 : p > 0.7$$

ทดสอบสมมติฐานที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.01$

จากการทดสอบด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป SPSS for Windows Version 13.0 จะได้ค่าพี (p – Value) เท่ากับ 0.000

Binomial Test

	Category	N	Observed Prop.	Test Prop.	Exact Sig. (1-tailed)
SCORE Group 1	<= 60	3	.2	.7	.000 ^a
Group 2	> 60	13	.8		
Total		16	1.0		

a. Alternative hypothesis states that the proportion of cases in the first group < .7.

จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $p - \text{Value} < \alpha$

เพราะว่า $0.000 < 0.01$ ซึ่งตกอยู่ในบริเวณวิกฤต

เพราะฉะนั้น ปฏิเสธ H_0 ยอมรับ H_1 นั่นคือ นิสิตระดับปริญญาตรีที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler สามารถสอบผ่านเกณฑ์ได้มากกว่าร้อยละ 70 ของจำนวนนิสิตทั้งหมด ที่ระดับนัยสำคัญ .01

ตาราง 23 คะแนนแบบวัดความพึงพอใจของนิสิตกลุ่มตัวอย่างที่เรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์
โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

ข้อที่ คนที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	5	5	5	5	5	5	5	5	5	4	5	4	4	5	5	4	5	5	5	5
2	4	4	4	4	3	4	4	4	4	4	5	4	4	4	3	4	4	4	4	4
3	4	4	4	4	4	4	5	4	4	5	3	4	3	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	4	5	4	4	4	4	4	4	4
5	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	3
6	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	4	4	3	3	4	3	3	4	4	3
7	5	5	5	5	4	4	4	4	5	5	5	4	4	4	3	3	4	4	5	5
8	4	4	4	3	3	4	5	4	4	3	3	3	3	4	3	4	4	4	4	4
9	4	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	4	4	4	3	4	4	4	4
10	4	4	3	4	2	3	2	5	4	4	4	4	3	2	2	3	4	3	3	3
11	5	5	5	4	5	5	5	5	5	4	3	4	3	4	2	3	4	4	5	4
12	4	4	4	4	3	5	5	5	4	4	4	5	4	3	4	4	4	4	4	3
13	4	5	4	4	5	5	5	5	4	5	4	4	5	5	5	5	4	5	4	5
14	3	4	4	4	4	5	5	5	5	3	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5
15	4	4	3	3	4	5	5	5	5	5	4	4	4	5	5	5	5	5	5	4
16	4	4	5	4	4	4	4	4	4	5	5	4	4	5	5	5	4	5	5	5

ตาราง 24 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของแบบวัดความพึงพอใจของนิสิตกลุ่ม
ที่มีต่อกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R.
และโปรแกรม Euler

ข้อที่	ระดับความคิดเห็น					$\bar{x}$	S.D.	แปลผล
	5	4	3	2	1			
1	18.80% (5 คน)	75.00% (12 คน)	6.30% (1 คน)	-	-	4.13	0.50	มาก
2	25.00% (4 คน)	68.80% (11 คน)	6.30% (1 คน)	-	-	4.19	0.54	มาก
3	25.00% (4 คน)	62.50% (10 คน)	12.50% (2 คน)	-	-	4.13	0.62	มาก
4	12.50% (2 คน)	75.00% (18 คน)	12.50% (2 คน)	-	-	4.00	0.52	มาก
5	18.80% (3 คน)	56.30% (9 คน)	18.80% (3 คน)	6.30% (1 คน)	-	3.88	0.81	มาก
6	37.50% (6 คน)	56.30% (9 คน)	6.30% (1 คน)	-	-	4.31	0.61	มาก
7	56.30% (9 คน)	37.50% (6 คน)	6.30% (1 คน)	-	-	4.44	0.81	มาก
8	56.30% (9 คน)	43.80% (7 คน)	-	-	-	4.56	0.51	มากที่สุด
9	43.80% (7 คน)	56.30% (9 คน)	-	-	-	4.44	0.51	มาก
10	43.80% (7 คน)	37.50% (6 คน)	18.80% (3 คน)	-	-	4.25	0.78	มาก
11	31.30% (5 คน)	43.80% (7 คน)	25.00% (4 คน)	-	-	4.06	0.77	มาก
12	6.30% (1 คน)	81.30% (13 คน)	12.50% (2 คน)	-	-	3.94	0.44	มาก
13	12.50% (2 คน)	56.30% (9 คน)	31.30% (5 คน)	-	-	3.81	0.66	มาก

ตาราง 24 (ต่อ)

ข้อที่	ระดับความคิดเห็น					$\bar{x}$	S.D.	แปลผล $\bar{x}$
	5	4	3	2	1			
14	25.00% (4 คน)	56.30% (9 คน)	12.50% (2 คน)	6.30% (1 คน)	-	4.00	0.82	มาก
15	25.00% (4 คน)	43.80% (7 คน)	18.80% (3 คน)	12.50% (2 คน)	-	3.81	0.98	มาก
16	18.80% (3 คน)	50.00% (8 คน)	31.30% (5 คน)	-	-	3.88	0.72	มาก
17	12.50% (2 คน)	81.30% (13 คน)	6.30% (1 คน)	-	-	4.06	0.44	มาก
18	31.30% (5 คน)	62.50% (10 คน)	6.30% (1 คน)	-	-	4.25	0.58	มาก
19	37.50% (6 คน)	56.30% (9 คน)	6.30% (1 คน)	-	-	4.31	0.60	มาก
20	31.30% (5 คน)	43.80% (7 คน)	25.00% (4 คน)	-	-	4.06	0.77	มาก
	ค่าเฉลี่ย					4.13	0.65	มาก

ภาคผนวก ค
คู่มือการใช้กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

คำชี้แจงการใช้กิจกรรมการเรียนการสอน

กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler สำหรับระดับปริญญาตรี

หลักการและเหตุผล

แคลคูลัสเป็นวิชาที่สำคัญในสาขาคณิตศาสตร์ และเป็นพื้นฐานของวิทยาการในหลายสาขา เช่น ฟิสิกส์ เคมี ชีววิทยา วิศวกรรมศาสตร์ ภูมิศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ เป็นต้น สถาบันอุดมศึกษาต่าง ๆ เห็นความสำคัญดังกล่าวจึงจัดให้มีการเรียนการสอนแคลคูลัสสำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี แต่จากการสำรวจ พบว่า นิสิตยังมีปัญหาในการเรียนแคลคูลัสในหลายเรื่อง เช่น เรื่องการประยุกต์ของอนุพันธ์ หัวย่ออัตราสัมพันธ์ เมื่อเกิดการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรสองตัวพร้อมกัน นิสิตมองไม่เห็นภาพความสัมพันธ์ของการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรสองตัวเทียบกับเวลา ทำให้ไม่สามารถเขียนความสัมพันธ์เพื่อสร้างเป็นสมการได้ เป็นต้น จากปัญหาดังกล่าวนี้นักวิจัยคิดว่าแนวทางการแก้ไขปัญหาคือ การนำโปรแกรม C.a.R. ซึ่งเป็นโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัต (Dynamic Geometry) เข้ามาประกอบการเรียนการสอน เพราะว่าโปรแกรม C.a.R. เป็นโปรแกรมที่เกี่ยวข้องกับการสร้างรูปเรขาคณิต มีความสามารถในการสร้างรูปเรขาคณิตได้เสมือนกับการใช้สันตรงและวงเวียน โปรแกรม C.a.R. มีความสามารถในการเรื่องของการสร้างและจัดกระทำกับวัตถุ (Object) เช่น สร้างรูปเรขาคณิต สร้างกราฟ เคลื่อนที่วัตถุ และสร้างภาพเคลื่อนไหว (Animation) เป็นต้น เครื่องมือต่าง ๆ ที่มีอยู่ในโปรแกรม C.a.R. นั้นสามารถใช้ออกแบบกิจกรรมที่แสดงให้นิสิตได้มองเห็นภาพของลักษณะการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร และภาพของการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรสองตัวเมื่อเทียบกับเวลาได้อย่างเป็นรูปธรรมมากขึ้นได้ จากข้างต้นจะเห็นว่า การนำโปรแกรม C.a.R. เข้ามาประกอบการเรียนการสอน จะช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจแนวคิดต่าง ๆ ได้อย่างเป็นรูปธรรมมากขึ้น แต่ความสามารถในเรื่องการคำนวณนั้นโปรแกรม C.a.R. ยังมีประสิทธิภาพไม่มากนัก เพราะว่าโปรแกรม C.a.R. ไม่ได้ถูกสร้างมาเพื่อการคำนวณ นักวิจัยมีความคิดเห็นว่า ควรนำโปรแกรม Euler เข้ามาประกอบการเรียนการสอนร่วมด้วย โปรแกรม Euler มีโปรแกรมแบบ CAS (Computer Algebra System) แฝงอยู่ ลักษณะสำคัญของโปรแกรมแบบ CAS คือ สามารถประมวลผลเชิงสัญลักษณ์ได้ กล่าวคือ สามารถหาคำตอบออกมาในลักษณะที่เป็นสัญลักษณ์ เช่น การหาลิมิตของฟังก์ชัน การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน เป็นต้น การใช้โปรแกรม Euler สำหรับการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ในงานวิจัยนี้ มีจุดประสงค์หลักคือเพื่อให้ผู้เรียนได้ฝึกทักษะและความชำนาญพื้นฐานต่าง ๆ เนื่องจากความสามารถในการคำนวณของโปรแกรม Euler จะช่วยให้ประหยัดเวลาในการคำนวณ ผู้เรียนสามารถฝึกทำแบบฝึกหัดได้หลายข้อ ส่งผลให้ผู้เรียนมีทักษะและความชำนาญหลายอย่าง ได้แก่ ทักษะด้านความรู้ความจำ ทักษะในการอ่านและทำความเข้าใจ โจทย์ ทักษะการแสดงวิธีทำอย่างเป็นขั้นตอน เป็นต้น ซึ่งเป็นทักษะและความชำนาญพื้นฐานเพื่อใช้ในการเรียนระดับสูงต่อไป

วัตถุประสงค์

เพื่อให้ครูใช้เป็นเครื่องมือในการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี

เนื้อหา

กิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี ประกอบด้วยเนื้อหา 7 หัวข้อ ดังนี้

หัวข้อที่ 1 อนุพันธ์และอนุพันธ์อันดับสูง	2 คาบ
หัวข้อที่ 2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	2 คาบ
หัวข้อที่ 3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย	2 คาบ
หัวข้อที่ 4 อนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม และอนุพันธ์ในพิกัดเชิงขั้ว	3 คาบ
หัวข้อที่ 5 การเขียนกราฟของฟังก์ชัน	3 คาบ
หัวข้อที่ 6 โจทย์ปัญหาการหาค่าสูงสุดและต่ำสุด	2 คาบ
หัวข้อที่ 7 ความเร็วและความเร่ง อัตราสัมพัทธ์ และค่าเชิงอนุพันธ์และการประยุกต์	2 คาบ

แนวทางการใช้กิจกรรม

กิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler ประกอบด้วย

1. คำชี้แจงการใช้กิจกรรมการเรียนรู้การสอน
2. คู่มือการใช้กิจกรรมการเรียนรู้การสอน
3. แผนการจัดการเรียนรู้
4. สื่อการเรียนรู้การสอน ซึ่งประกอบด้วย
 - 4.1 แฟ้มคำสั่งกิจกรรมภาคปฏิบัติบนคอมพิวเตอร์
 - 4.2 ใบกิจกรรม
5. แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 1 และฉบับที่ 2
6. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์
7. แบบวัดความพึงพอใจต่อกิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้

โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

ในการใช้กิจกรรมต่าง ๆ ให้ปฏิบัติตามแผนการจัดการเรียนรู้ และฝึกทักษะตามใบกิจกรรม โดยแต่ละกิจกรรมจะใช้แฟ้มคำสั่งกิจกรรมภาคปฏิบัติบนคอมพิวเตอร์ร่วมกับใบกิจกรรมที่สร้างขึ้น เมื่อเสร็จสิ้นการเรียนรู้การสอนให้นิสิตทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ และทำแบบวัดความพึงพอใจต่อกิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

แผนการสอน

แผนการจัด การเรียนรู้ที่	เรื่อง	จำนวนคาบ (คาบ)	ใบกิจกรรมที่
1	อนุพันธ์และอนุพันธ์อันดับสูง	2	1
2	อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันผกผันของ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	2	2
3	อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย	2	3
4	อนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิมพลีไซต์ เสริม และอนุพันธ์ในพิกัดเชิงขั้ว	3	4
5	การเขียนกราฟของฟังก์ชัน	3	5
6	โจทย์ปัญหาการหาค่าสูงสุดและต่ำสุด	2	6
7	ความเร็วและความเร่ง อัตราสัมพัทธ์ และค่าเชิงอนุพันธ์ และการประยุกต์	2	7
	ทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์ และการประยุกต์	2	
	แบบวัดความพึงพอใจต่อกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่อง อนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R.และ โปรแกรม Euler	20 นาที	

จุดประสงค์การเรียนรู้
เรื่อง อนุพันธ์และการประยุกต์

แผนการจัด การเรียนรู้ที่	เรื่อง	จุดประสงค์การเรียนรู้
1	อนุพันธ์และอนุพันธ์อันดับสูง (จำนวน 2 คาบ)	1. หาความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันที่จุดที่กำหนดให้ได้ 2. หาสมการของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันที่จุดที่กำหนดให้ได้ 3. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ 4. พิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนด มีอนุพันธ์ที่จุดที่กำหนดให้หรือไม่ 5. เขียนบทกลับและยกตัวอย่างค้านของทฤษฎีบทที่ว่า “ถ้าฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้ที่ $x = c$ แล้ว f จะต่อเนื่องที่ $x = c$” ได้ 6. ใช้สมบัติต่าง ๆ ของอนุพันธ์ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ 7. เลือกใช้สมบัติของอนุพันธ์ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ 8. สร้างฟังก์ชันประกอบของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ 9. ใช้กฎลูกโซ่ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้ 10. ตรวจสอบการเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ 11. หาฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ 12. สามารถหาอนุพันธ์ ณ จุดที่กำหนดให้ของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันที่กำหนด 13. หาอนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
2	อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (จำนวน 2 คาบ)	1. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้ 2. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

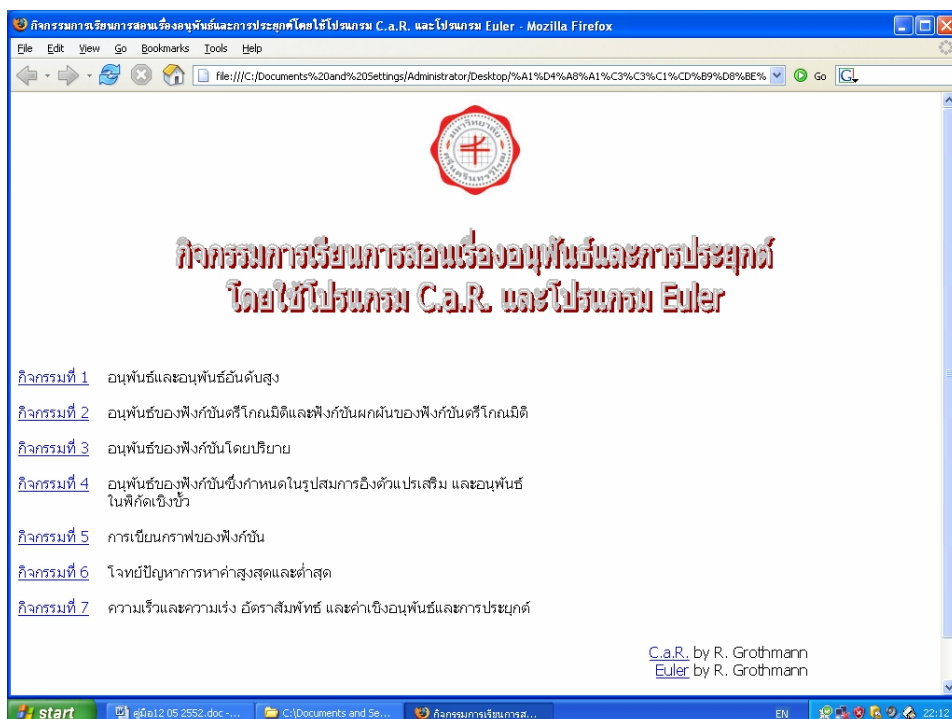
แผนการจัด การเรียนรู้ที่	เรื่อง	จุดประสงค์การเรียนรู้
3	อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดย ปริยาย (จำนวน 2 คาบ)	1. สามารถจำแนกได้ว่าฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันโดย ชัดแจ้ง และฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชัน โดยปริยาย 2. เลือกใช้วิธีการต่าง ๆ ในการหาอนุพันธ์ฟังก์ชัน โดยปริยายได้
4	อนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่ง กำหนดในรูปสมการอิมพลี ไซต์ และอนุพันธ์ในพิกัด เชิงขั้ว (จำนวน 3 คาบ)	1. อธิบายลักษณะของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูป สมการอิมพลีไซต์ได้ 2. หาอนุพันธ์ของสมการอิมพลีไซต์ได้ 3. หาความชันและสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ของสมการอิมพลีไซต์ได้ 4. หาค่าและบอกพิกัดอื่น ๆ ของจุดที่ กำหนดให้ได้ 5. หาพิกัดของจุดในระบบพิกัดฉากได้เมื่อกำหนด พิกัดของจุดในระบบพิกัดเชิงขั้วมาให้ และหาพิกัด ของจุดในระบบพิกัดเชิงขั้วได้เมื่อกำหนดพิกัดของ จุดในระบบพิกัดฉากมาให้ 6. อธิบายลักษณะของกราฟที่สำคัญในระบบพิกัด เชิงขั้ว และอธิบายลักษณะสำคัญของ ภาคตัดกรวยในระบบพิกัดเชิงขั้วได้ 7. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันในระบบพิกัดเชิงขั้วได้ 8. หาความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันใน ระบบพิกัดเชิงขั้วได้
5	การเขียนกราฟของฟังก์ชัน (จำนวน 3 คาบ)	1. บอกช่วงที่ทำให้เป็นฟังก์ชันเพิ่ม/ฟังก์ชันลดของ ฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ 2. หาจุดสูงสุด/ต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันที่กำหนด 3. อธิบายทฤษฎีบทค่าสุดขีดด้วยกราฟ และให้ เหตุผลประกอบได้ 4. หาจุดสูงสุด/ต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่กำหนด 5. หาจุดวิกฤตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ 6. อธิบายทฤษฎีบทของรอลและทฤษฎีบทค่า มัธยิมด้วยกราฟได้

แผนการจัด การเรียนรู้ที่	เรื่อง	จุดประสงค์การเรียนรู้
5 (ต่อ)	การเขียนกราฟของฟังก์ชัน (จำนวน 3 คาบ)	7. หาจุดสูงสุด/ต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันด้วยการทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งได้ 8. หาจุดสูงสุด/ต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันด้วยการทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับที่สองได้ 9. บอกช่วงที่ทำให้กราฟเว้าขึ้นและช่วงที่ทำให้กราฟเว้าลงของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้ 10. เขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
6	โจทย์ปัญหาการหาค่าสูงสุดและต่ำสุด (จำนวน 2 คาบ)	1. นิสิตสามารถสร้างฟังก์ชันของปริมาณที่ต้องการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด พร้อมกำหนดตัวแปรและกำหนดขอบเขตจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้ 2. นิสิตสามารถหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดที่โจทย์ต้องการได้
7	ความเร็วและความเร่ง อัตราสัมพัทธ์ และค่าเชิงอนุพันธ์และการประยุกต์ (จำนวน 2 คาบ)	1. อธิบายลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุได้ 2. เมื่อกำหนดสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุมาให้สามารถหาความเร็วและความเร่งเมื่อเวลา t ใด ๆ 3. อธิบายลักษณะการเปลี่ยนแปลงที่โจทย์ต้องการ 4. หาอัตราการเปลี่ยนแปลงที่โจทย์ต้องการทราบ 5. ใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ในการประมาณค่าของฟังก์ชัน 6. หาค่าคลาดเคลื่อนในการประมาณค่าของฟังก์ชันด้วยค่าเชิงอนุพันธ์ได้

คู่มือการใช้กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

เรื่อง

อนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler
สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี



จัดทำโดย

นางสาวพรรณศนีย์ รัตนวิจิตร

คู่มือการใช้กิจกรรมการเรียนรู้การสอน เรื่อง อนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี

บทนำ

กิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี เป็นรูปแบบการจัดการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์รูปแบบหนึ่ง ซึ่งผู้วิจัยได้นำโปรแกรม Euler และโปรแกรม C.a.R. เข้ามาประกอบประกอบการเรียนการสอน ผู้วิจัยแบ่งเนื้อหาออกเป็น 7 หัวข้อดังที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น โดยแต่ละหัวข้อจะนำเสนอกิจกรรมโดยใช้เฟาเวอร์พ้อยต์

ผู้วิจัยใช้โปรแกรม C.a.R. สร้างกิจกรรมเพื่อแสดงให้ผู้เรียนเข้าใจแนวคิดต่าง ๆ ได้อย่างเป็นรูปธรรมมากขึ้น แต่ความสามารถในเรื่องการคำนวณนั้น โปรแกรม C.a.R. ยังมีประสิทธิภาพไม่มากนัก เพราะว่าโปรแกรม C.a.R. ไม่ได้ถูกสร้างมาเพื่อการคำนวณ ผู้วิจัยจึงนำโปรแกรม Euler เข้ามาประกอบประกอบการเรียนการสอนร่วมด้วย เนื่องจากโปรแกรม Euler เป็นโปรแกรมที่ถูกสร้างมาเพื่อการคำนวณโดยเฉพาะ นั่นคือในระหว่างทำกิจกรรมภาคปฏิบัติบนคอมพิวเตอร์ ผู้เรียนจึงต้องมีการเรียกใช้งานโปรแกรม Euler ดังนั้นก่อนการใช้กิจกรรมภาคปฏิบัติบนคอมพิวเตอร์ จึงต้องมีการติดตั้งโปรแกรม Euler เสียก่อน ในขณะที่โปรแกรม C.a.R. สามารถแปลงไฟล์เป็น HTML ได้ ซึ่งไฟล์ HTML สามารถเปิดผ่านบราวเซอร์ Internet Explorer ที่มีอยู่ในเครื่องคอมพิวเตอร์ทุกเครื่องอยู่แล้ว ผู้เรียนจึงสามารถคลิกเพื่อเชื่อมโยงไปได้เลย จึงไม่จำเป็นต้องติดตั้งโปรแกรม C.a.R. ซึ่งถือเป็นข้อดีอีกประการของโปรแกรม C.a.R.

โปรแกรม C.a.R.

โปรแกรม C.a.R. (Compass and Ruler) เป็นโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตกล่าวคือเป็นโปรแกรมด้านเรขาคณิตซึ่งเน้นการสร้างรูปเรขาคณิตได้เสมือนกับการใช้สันตรงและวงเวียน มีลักษณะปฏิสัมพันธ์ ผู้ใช้สามารถสร้างและจัดการกระทำกับวัตถุ (Object) ได้ เช่น สร้างรูปเรขาคณิต สร้างกราฟ เคลื่อนที่วัตถุ และสร้างภาพเคลื่อนไหว (Animation) เป็นต้น โปรแกรม C.a.R. เป็นโปรแกรม General Public License (GPL) คืออนุญาตให้ใช้และเผยแพร่ได้โดยไม่เสียค่าใช้จ่าย ผู้ที่พัฒนาโปรแกรม C.a.R. คือ ศาสตราจารย์ ดร.เรอเน่ กรอธมันน์ (Prof. Dr. René Grothmann) ชาวเยอรมัน โดยมีวัตถุประสงค์สำหรับนักเรียนตั้งแต่ชั้นประถมศึกษาจนถึงระดับสูง รวมทั้งผู้ใหญ่ การใช้โปรแกรมสามารถใช้ได้ด้วยการคลิกเมาส์และลากเมาส์ หรือใช้คำสั่งโดยตรง สามารถนำเสนอเป็นลักษณะแฟ้ม HTML ได้สะดวก อีกทั้งยังสามารถออกแบบกิจกรรมส่งเสริมให้นักเรียนได้ทดสอบข้อคาดการณ์หรือตั้งข้อคาดการณ์ได้จากการทดลองสร้างซ้ำ ๆ หรือหลากหลายวิธี และผู้สอนยังสามารถเตรียมแบบฝึกหัดให้นักเรียนสร้าง โดยโปรแกรมจะแจ้งให้ทราบเมื่อสร้างได้ถูกต้อง

การใช้โปรแกรม C.a.R. สำหรับการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ในงานวิจัยนี้มีจุดประสงค์หลักคือเพื่อให้นิสิตได้รับประสบการณ์ที่เป็นรูปธรรมมากขึ้น เพื่อให้นิสิตได้เห็นแนวคิดที่สำคัญของเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ ซึ่งผู้วิจัยได้ใช้เครื่องมือต่าง ๆ ที่มีอยู่ในโปรแกรม C.a.R. ออกแบบแฟ้มงานการสร้างกราฟของฟังก์ชันและสำรวจค่าความชันของเส้นสัมผัสกราฟ ณ จุดที่กำหนดให้ แฟ้มงานการสำรวจและสังเกตการเคลื่อนที่ของจุด (Animation of Point) บนกราฟของฟังก์ชันเพื่อแสดงแนวคิดเรื่องการทดสอบการเป็นจุดสุดขีดสัมพัทธ์โดยอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสอง แฟ้มงานแบบฝึกเรื่องจุดวิกฤตซึ่งเมื่อนักเรียนสร้างจุดวิกฤตถูกต้องโปรแกรมจะแจ้งให้ทราบทันทีว่าสร้างได้ถูกต้องแล้ว แฟ้มงานแสดงลักษณะการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรในเรื่องโจทย์ปัญหาค่าสูงสุด-ต่ำสุด แฟ้มงานแสดงการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรสองตัวเมื่อเทียบกับเวลา แฟ้มงานแสดงแนวคิดการประมาณค่าของฟังก์ชันโดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ เป็นต้น โดยในแฟ้มงานเหล่านี้ นิสิตสามารถทำกิจกรรมสำรวจ สังเกต และเปลี่ยนแปลงค่าของตัวแปรต่าง ๆ ได้

เนื่องจากโปรแกรม C.a.R. สามารถแปลงไฟล์เป็นไฟล์ HTML ได้ ซึ่งไฟล์ HTML นั้นสามารถเปิดผ่านบราวเซอร์ Internet Explorer ที่มีอยู่ในเครื่องคอมพิวเตอร์ทุกเครื่องอยู่แล้ว ผู้เรียนจึงสามารถคลิกเพื่อเชื่อมโยงไปได้เลย ไม่จำเป็นต้องทำการติดตั้งโปรแกรม C.a.R. ลงในเครื่องคอมพิวเตอร์ ซึ่งถือเป็นข้อดีอีกประการของโปรแกรม C.a.R.

การใช้งานโปรแกรม C.a.R.

คำอธิบายเกี่ยวกับ Icon bar เครื่องมือพื้นฐาน	
	ใช้สำหรับเลื่อน/เคลื่อนย้ายวัตถุ (object)
	ใช้สำหรับเคลื่อนไหวจุด (Animation of a point)
	ใช้แสดงแกน X และแกน Y
	สร้างจุด
	สร้างเส้นขนาน
	สร้างเส้นตั้งฉาก
	สร้างส่วนของเส้นตรง
	สร้างเส้นตรง
	สร้างวงกลมกำหนดค่ารัศมี
	สร้างพาราเมเตอร์
	ใช้เขียนกราฟของฟังก์ชัน

โปรแกรม Euler

โปรแกรม Euler มีโปรแกรมแบบ CAS (Computer Algebra System) แฝงอยู่ ลักษณะสำคัญของโปรแกรมแบบ CAS คือ สามารถประมวลผลเชิงสัญลักษณ์ได้ กล่าวคือ สามารถหาคำตอบออกมาในลักษณะที่เป็นสัญลักษณ์ เช่น การหาลิมิตของฟังก์ชัน การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน การจัดกระทำนิพจน์ (Expression) เช่น ให้โปรแกรมจัดรูป $\frac{n!}{(n+2)!}$ ให้เป็นนิพจน์อย่างง่าย

โปรแกรมจะแสดงผลเป็น $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ หรือหากต้องการให้โปรแกรมกระจาย $(x+1)^5$ โปรแกรมจะ

แสดงผลเป็น $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$ หรือเมื่อใส่ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ แล้วป้อนคำสั่งให้เขียนในรูป

เศษส่วนใหม่ โปรแกรมจะแสดงผลเป็น $\frac{y+x}{xy}$ เป็นต้น ซึ่งโปรแกรมแบบ CAS ที่แฝงอยู่ใน

โปรแกรม Euler ได้แก่ โปรแกรม Maxima และโปรแกรม Yacas

โปรแกรม Euler เป็นโปรแกรม General Public License (GPL) คืออนุญาตให้ใช้และเผยแพร่ได้โดยไม่เสียค่าใช้จ่าย ผู้ที่พัฒนาโปรแกรม Euler คือ ศาสตราจารย์ ดร.เรอเน่ กรอธมันน์ (Prof. Dr. René Grothmann) ชาวเยอรมัน การใช้โปรแกรม Euler สำหรับการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ในงานวิจัยนี้ มีจุดประสงค์หลักคือเพื่อให้ผู้เรียนได้ฝึกทักษะและความชำนาญพื้นฐานต่าง ๆ เนื่องจากความสามารถในการคำนวณของโปรแกรม Euler จะช่วยให้ประหยัดเวลาในการคำนวณ ผู้เรียนสามารถฝึกทำแบบฝึกหัดได้หลายข้อ ส่งผลให้ผู้เรียนมีทักษะและความชำนาญหลายอย่าง ได้แก่ ทักษะด้านความรู้ความจำ ทักษะในการอ่านและทำความเข้าใจ โจทย์ ทักษะการแสดงวิธีทำอย่างเป็นขั้นตอน เป็นต้น เมื่อผู้เรียนได้เห็นและได้ฝึกทำแบบฝึกหัดบ่อย ๆ ผู้เรียนจะสามารถจดจำขั้นตอนการทำแบบฝึกหัดได้ เกิดเป็นทักษะและความชำนาญพื้นฐานเพื่อใช้ในการเรียนระดับสูงต่อไป

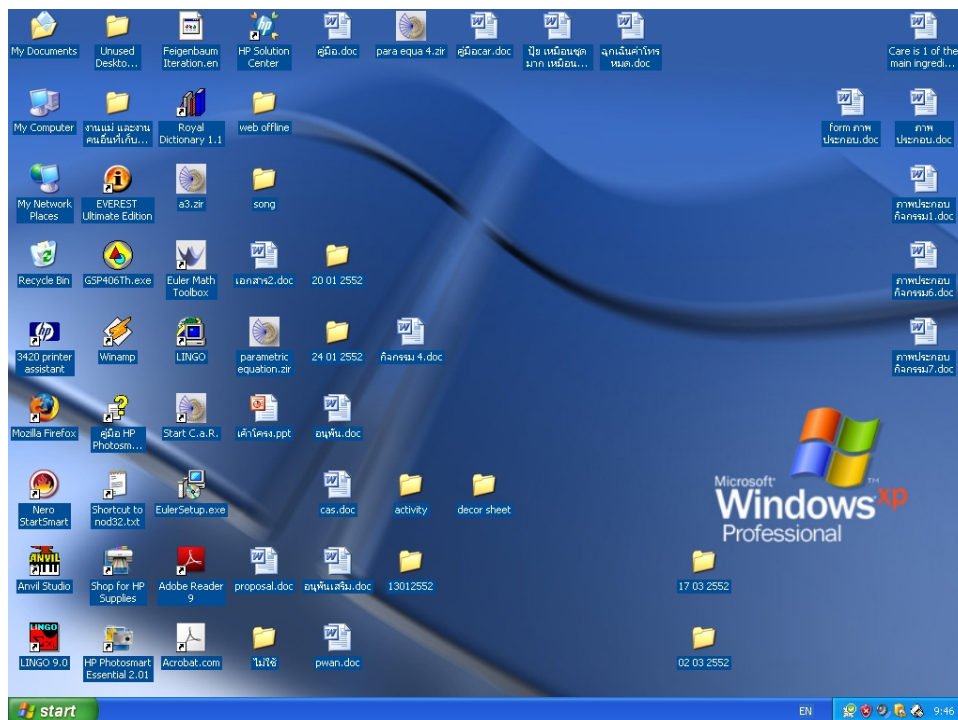
อุปกรณ์ที่จำเป็นสำหรับการใช้โปรแกรม Euler ประกอบการเรียนตามบทเรียน มีดังนี้

1. เครื่องไมโครคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล พร้อมทั้งคีย์บอร์ด เมาส์ และจอภาพสี
2. หน่วยขับเคลื่อนบันทึก 3.5 นิ้ว (3.5 " Floppy Disk Drive) หรือหน่วยขับเคลื่อน CD
3. ฮาร์ดดิสก์ (Hard Disk)
4. แผ่นบันทึก 3.5 นิ้ว หรือ แผ่น CD ที่มีไฟล์ที่ใช้ตามที่ระบุในใบกิจกรรม
5. ระบบปฏิบัติการ Microsoft Window XP หรือรุ่นใหม่กว่า

การเตรียมงานเบื้องต้น

การเตรียมงานโปรแกรม Euler มีขั้นตอนการติดตั้งและการเรียกใช้โปรแกรมตามลำดับ ดังนี้

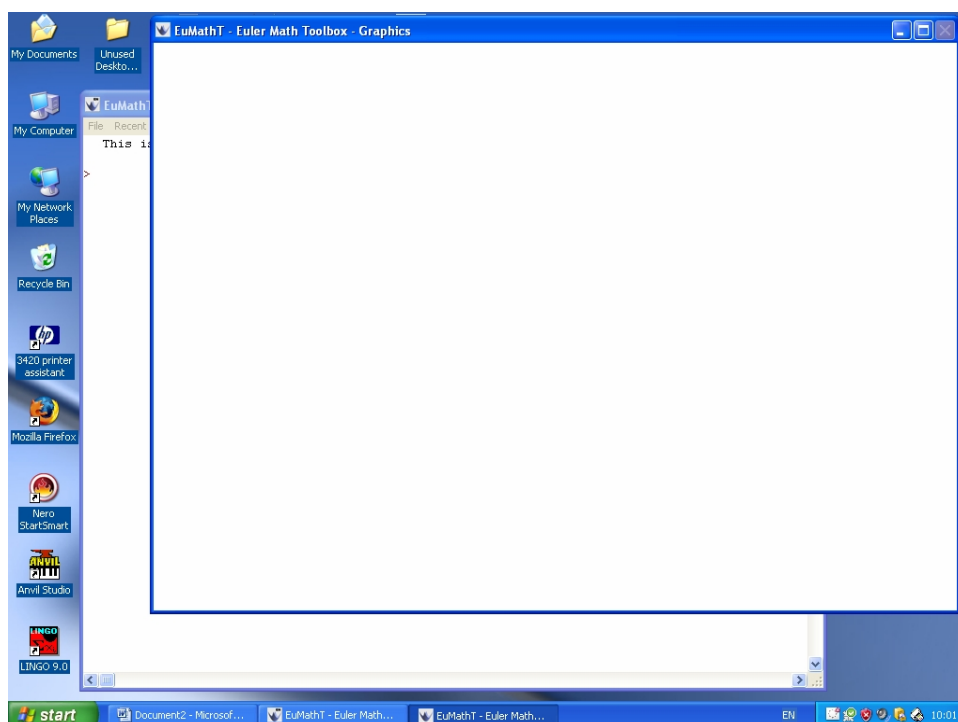
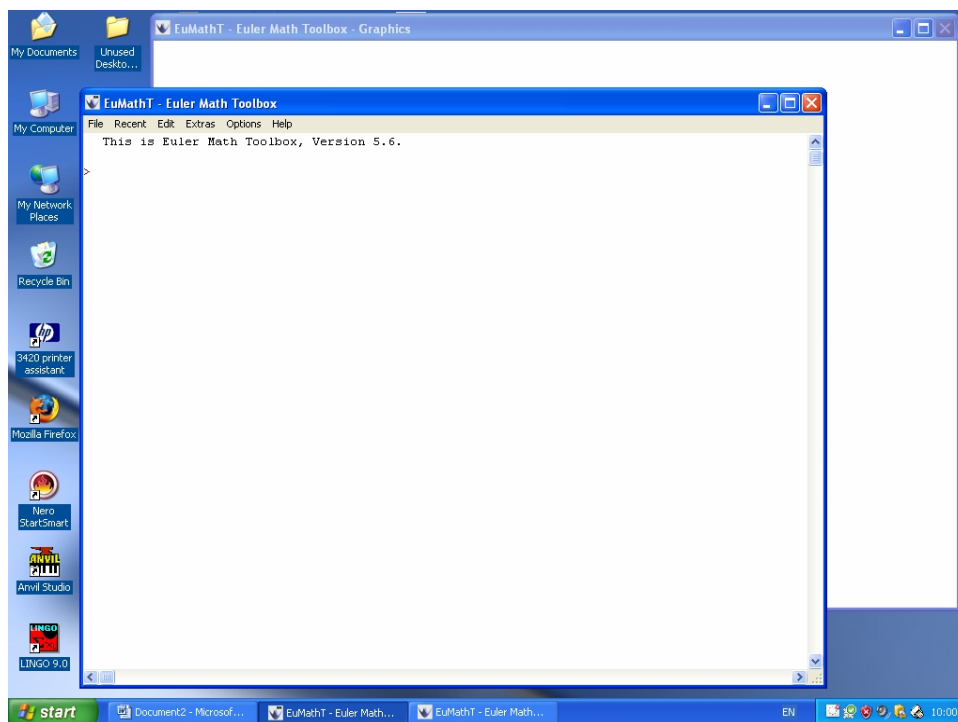
1. เปิดเครื่องคอมพิวเตอร์พีซีสำหรับระบบปฏิบัติการ Microsoft Window XP จะปรากฏจอภาพเป็นวินโดวส์ ดังตัวอย่างหน้าจอ ดังรูป



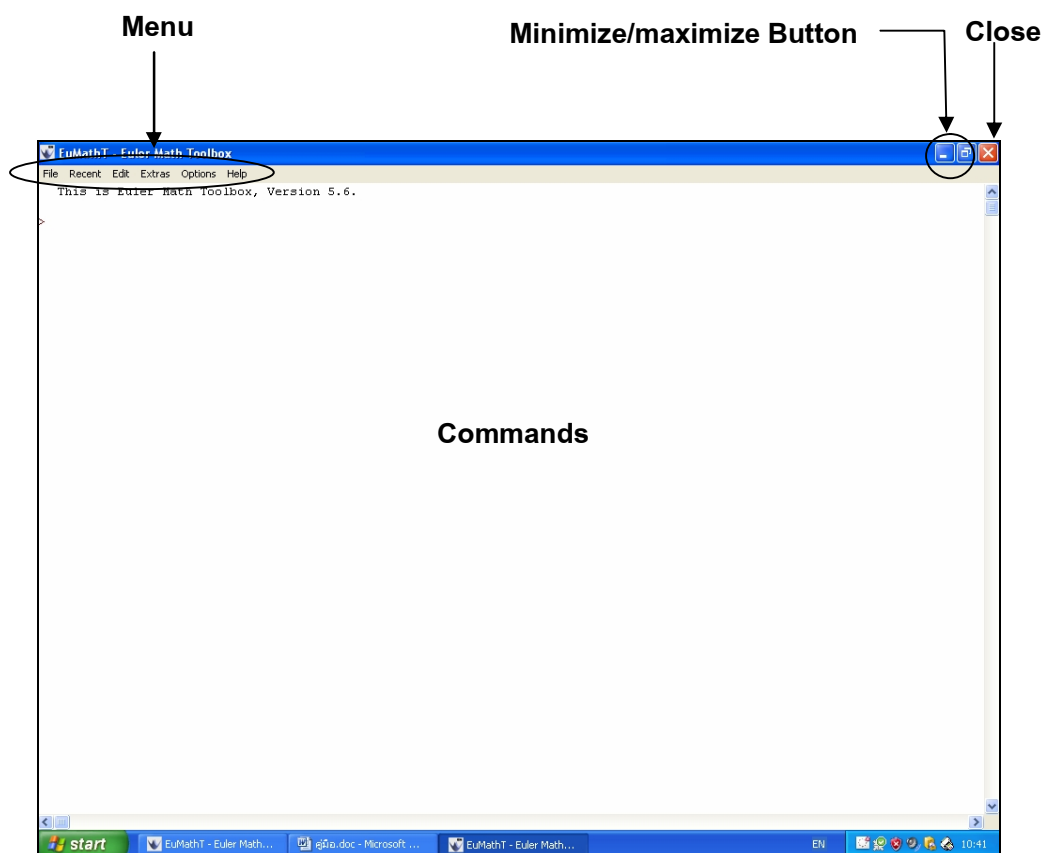
2. ใส่แผ่น CD ที่มีโปรแกรมติดตั้งชื่อ EulerSetup.exe
3. ดับเบิลคลิกที่ My Computer
4. ดับเบิลคลิกที่หน่วยขับแผ่น CD
5. คัดลอกไฟล์เดอร์  EulerSetup.exe ไว้บน Desktop
6. ดับเบิลคลิกที่  EulerSetup.exe บน Desktop เพื่อติดตั้งโปรแกรม Euler ในเครื่อง คลิกจนกระทั่งติดตั้งเสร็จเรียบร้อย
7. เรียกใช้โปรแกรม Euler โดยดับเบิลคลิกที่  จะปรากฏหน้าต่างการทำงานของโปรแกรม

วิธีการใช้โปรแกรม Euler

โปรแกรม Euler มีหน้าต่างการทำงาน 2 หน้าต่าง ได้แก่ หน้าต่างคำสั่ง (EuMathT- Euler Math Toolbox) และ หน้าต่างกราฟิก (EuMathT- Euler Math Toolbox - Graphics) ดังภาพประกอบ



โดยหน้าต่างคำสั่งจะมีโครงสร้างดังนี้



นิสิตสามารถเปิดสลับหน้าต่างทั้งสองด้วยการคลิกเมาส์เลือก หรือการกด Tab ที่คีย์บอร์ด

คำอธิบายเกี่ยวกับการใช้คำสั่งพื้นฐาน

คำสั่ง	การใช้งาน
3/sqrt(5)	คำนวณค่า $\frac{3}{\sqrt{5}}$
plot2d("x^3-2*x^2+9*x-4",a=-3,b=4,c=-5,d=5,xmin=0,xmax=2)	สร้างกราฟของฟังก์ชัน $x^3 - 2x^2 + 9x - 4$ โดยที่ค่า a, b, c และ d คือกรอบด้านซ้าย, ขวา, ล่าง และด้านบนของภาพ ตามลำดับ ขอบเขตของกราฟคือ ค่าของ xmin และ xmax ซึ่งกราฟจะไปปรากฏที่หน้าต่างกราฟิก
insimg(15)	เป็นคำสั่งการนำกราฟที่สร้างในหน้าต่างกราฟิกเข้ามาแทรกในหน้าต่างคำสั่ง ค่าในวงเล็บคือขนาดของกราฟที่นำมาแทรก ในหน้าต่างคำสั่งซึ่งมีค่า default อยู่ที่ 25
plot2d("abs(x-1)","x+2",r=8), insimg(10)	สร้างกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม $a(x) = x - 1 $ และ $b(x) = x + 2$ โดยที่กรอบของภาพคือค่าของ r
fcontour("x^5+y^5-2",niveau=0,xmin=-5,xmax=5,ymin=-5,ymax=5), insimg(25)	สร้างกราฟของฟังก์ชันโดยปริยาย $x^5 + y^5 = 2$
::sqrt(7^2-5^2)	คำนวณค่า $\sqrt{7^2 - 5^2}$
::factor(x^2-a^2)	แยกตัวประกอบของ $(x^2 - a^2)$
::function f(x):=x^2-x-1	นิยามฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - x - 1$
::f(0)	หาค่าของ f(0)
::diff(x^3-2*x,x)	หาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $x^3 - 2x$
::diff(x^3-2*x,x,3)	หาอนุพันธ์อันดับที่ 3 ของฟังก์ชัน $x^3 - 2x$
::ratsimp(1/x-1/y)	จัดรูปใหม่ของ $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ จะได้ผลลัพธ์คือ $\frac{y-x}{xy}$
::minfactorial(n!/(n+2)!)	จัดรูป $\frac{n!}{(n+2)!}$ ได้ผลลัพธ์คือ $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$
::bfloat(2/3)	ใช้ประมาณค่า โดยแสดงผลในรูปทศนิยม
::bfloat(%pi)	ประมาณค่า π หมายเหตุ จะใช้ %pi แทน π
::solve(x^2-1=0,x)	แก้สมการ $x^2 - 1 = 0$
::plot2d(x^3-2*x^2+9*x-4,[x,-5,5],[y,-5,5])	สร้างกราฟของฟังก์ชัน $x^3 - 2x^2 + 9x - 4$ โดยต้องกำหนดขอบเขตของ x และ y ตามรูปแบบ

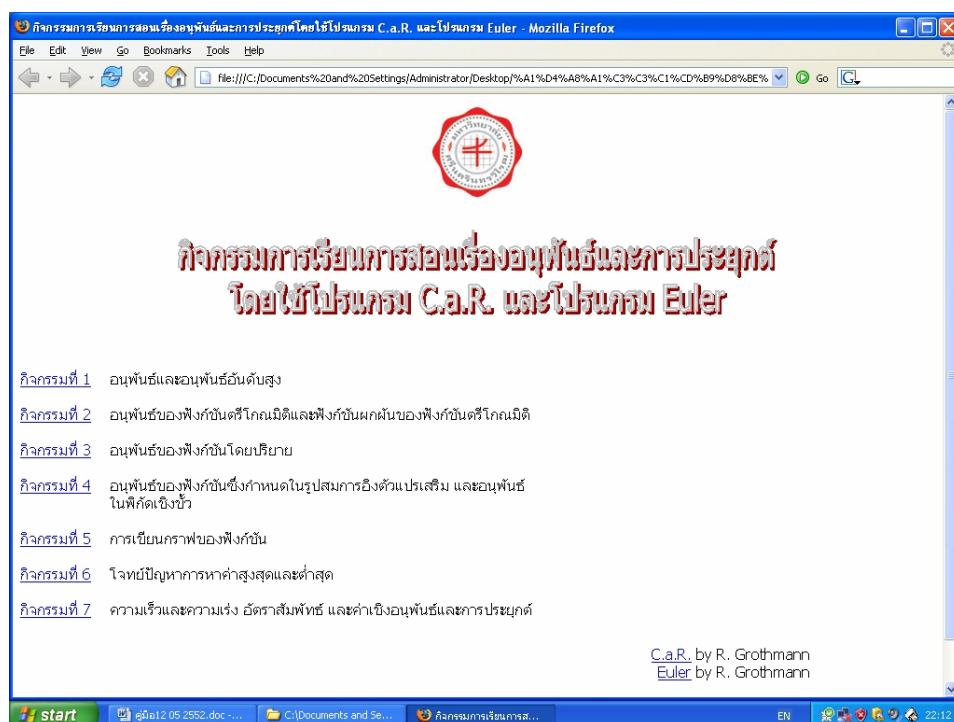
คำสั่ง	การใช้งาน
<code>::limit(x^2,x,inf)</code>	คำสั่งหา $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2$
<code>::function h(x):=f(g(x))</code>	การนิยามฟังก์ชันประกอบ
<code>::function g(x):=diff(f(x),x,2)</code> <code>::g(x);at(%,x=0)</code>	บรรทัดแรกเป็นการนิยามฟังก์ชัน $g(x)$ คืออนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน $f(x)$ บรรทัดที่สองคือการหาค่าของ $g(0)$ <u>หมายเหตุ</u> คำสั่ง <code>::g(0)</code> จะไม่แสดงผลลัพธ์ เนื่องจากเรานิยามฟังก์ชันในอีกรูปแบบหนึ่งซึ่งต่างจากการนิยามฟังก์ชันรูปแบบทั่วไป ดังนั้นการหาค่าของฟังก์ชันจึงต้องใช้รูปแบบในบรรทัดที่ 2 ดังกล่าว
<code>::expand((x+a)^3)</code>	กระจายรูปของ $(x + a)^3$
<code>::trigexpand(sin(2*A))</code>	กระจายรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
<code>::depends ([x,y,z],t)</code> <code>::diff (x^2+y^2-z^2,t)</code>	บรรทัดแรกเป็นการประกาศให้โปรแกรมทราบว่า x, y, z เป็นตัวแปรของ t บรรทัดที่สองคือการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $x^2 + y^2 - z^2$
<code>::load(implicit_plot)</code> <code>::implicit_plot(x^5+y^5=2,[x,-4,4],[y,-4,4])</code>	บรรทัดแรกเป็นการประกาศให้โปรแกรมทราบว่ากำลังจะใช้งานโหมดการสร้างกราฟของฟังก์ชันโดยปริยาย บรรทัดที่สองคือคำสั่งสร้างกราฟของฟังก์ชันโดยปริยาย $x^5 + y^5 = 2$

หมายเหตุ คำสั่งที่มี `::` อยู่ข้างหน้าคือคำสั่งที่ประมวลผลจากโปรแกรม Maxima ซึ่งเป็นโปรแกรมแบบ CAS ที่แฝงอยู่ในโปรแกรม Euler

การเข้าสู่บทเรียน

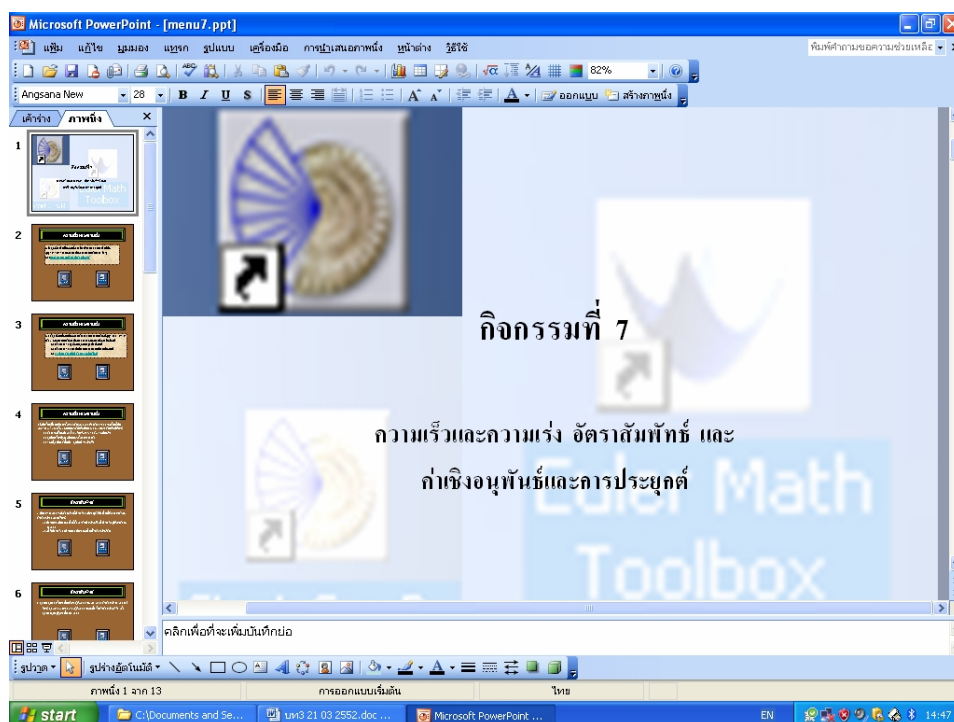
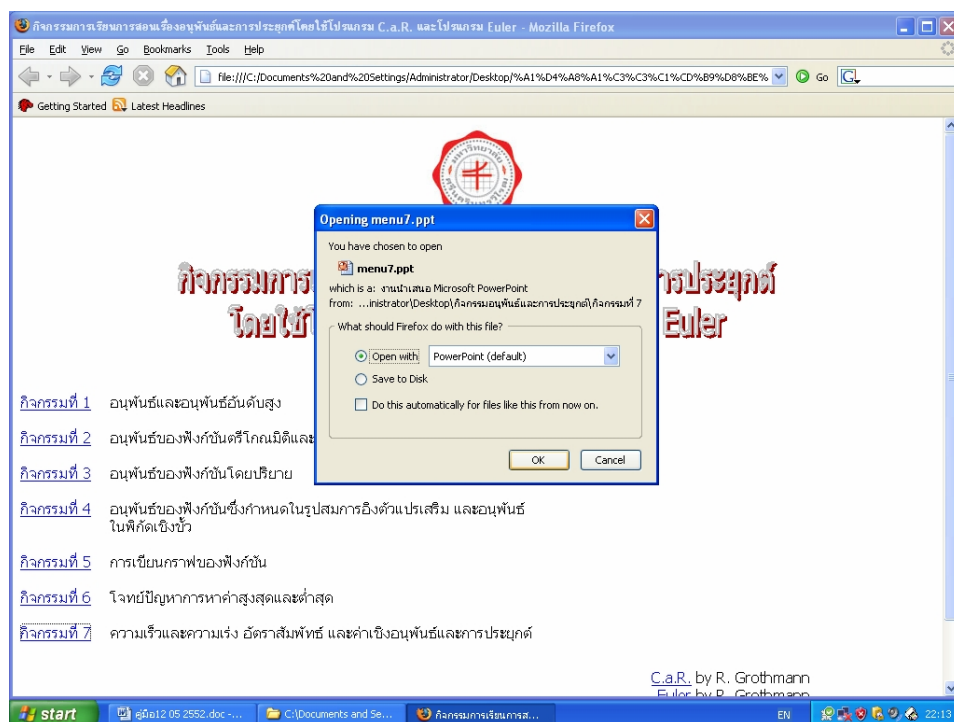
การเข้าสู่บทเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ มีขั้นตอนดังนี้

1. ใส่แผ่น CD ที่มีแฟ้มคำสั่งเกี่ยวกับกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์
2. ดับเบิลคลิกที่ My Computer
3. ดับเบิลคลิกที่หน่วยขับแผ่น CD
4. ทำการติดตั้งระบบ JAVA 1.4 หรือรุ่นใหม่กว่า เพื่อให้โปรแกรม C.a.R. แสดงผลได้สมบูรณ์
โดยการคัดลอกไฟล์  jre-1_5_0_11-windows-i586-p... ไว้ที่ Desktop และคลิกเพื่อติดตั้ง
5. คัดลอกโฟลเดอร์  กิจกรรมอนุพันธ์และการประยุกต์ ไว้ที่ Desktop
6. ดับเบิลคลิกที่  กิจกรรมอนุพันธ์และการประยุกต์ บน Desktop
7. ดับเบิลคลิกที่  menu.html จะปรากฏ



หากเครื่องคอมพิวเตอร์กำลังเชื่อมต่ออินเทอร์เน็ต นิสิตสามารถเชื่อมโยง (link) ไปที่เว็บไซต์ของโปรแกรม C.a.R. หรือเว็บไซต์ของโปรแกรม Euler ได้โดยคลิกที่ [C.a.R.](#) by R. Grothmann หรือ [Euler](#) by R. Grothmann ซึ่งอยู่ทางด้านล่าง

8. เลือกเรื่องที่ต้องการทำกิจกรรมการเรียนรู้การสอน เช่น ความเร็วและความเร่ง อัตราสัมพัทธ์ และค่าเชิงอนุพันธ์และการประยุกต์ เมื่อคลิกเลือกเรื่องแล้ว จะมีหน้าต่างขึ้นมาถามเพื่อยืนยันการเปิดโปรแกรม ให้คลิกตกลง (OK) จากนั้นกิจกรรมนี้จะถูกเปิดขึ้นมา ดังภาพประกอบ



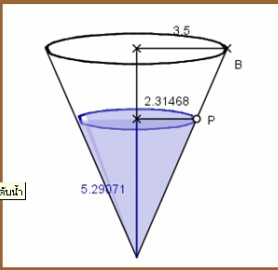
9. เมื่อกิจกรรมถูกเปิดขึ้นให้นิสิตกดนำเสนอภาพนิ่ง และทำกิจกรรมไปตามแต่ละสไลด์ ในแต่ละสไลด์จะมีการแทรกการเชื่อมโยงหลายมิติ (Hyperlink) ไปสู่โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler เมื่อนิสิตนำเมาส์ไปชี้จะมีคำอธิบายแสดงขึ้น เช่น เมื่อนำเมาส์ไปชี้ที่ จะมีข้อความขึ้นว่า “แสดงการเปลี่ยนแปลงของระดับน้ำ” ดังภาพประกอบ นิสิตสามารถคลิกไปทำกิจกรรมได้

อัตราสัมพัทธ์

8. น้ำไหลเข้าแท็งก์น้ำรูปกรวย ด้วยอัตรา 2 ลูกบาศก์เมตร/นาที แท็งก์น้ำมีความสูง 10 เมตร และมีรัศมีที่ปากแท็งก์ 5 เมตร จงหาอัตราเร็วของระดับน้ำที่เพิ่มขึ้น ขณะที่น้ำมีความลึก 6 เมตร

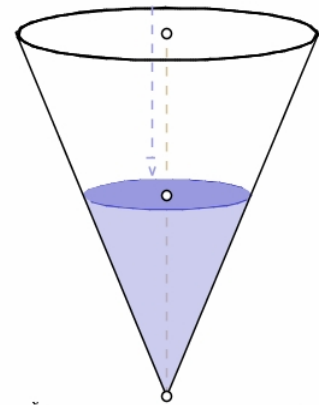


Start C





Euler Math Toolbox



h = 4.51993
r = 1.96443

อัตราเร็วที่น้ำไหลเข้า = 2
มุมมอง = 1

น้ำไหลเข้าแท็งก์น้ำรูปกรวย ด้วยอัตรา 2 ลูกบาศก์เมตร/นาที แท็งก์น้ำมีความสูง 8.125 เมตร และมีรัศมีที่ปากแท็งก์ 3.53125 เมตร จงหาอัตราเร็วของระดับน้ำที่เพิ่มขึ้น ขณะที่น้ำมีความลึก 4.51993 เมตร

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

☐ แสดงสามเหลี่ยมคล้าย

☐ แสดง animation

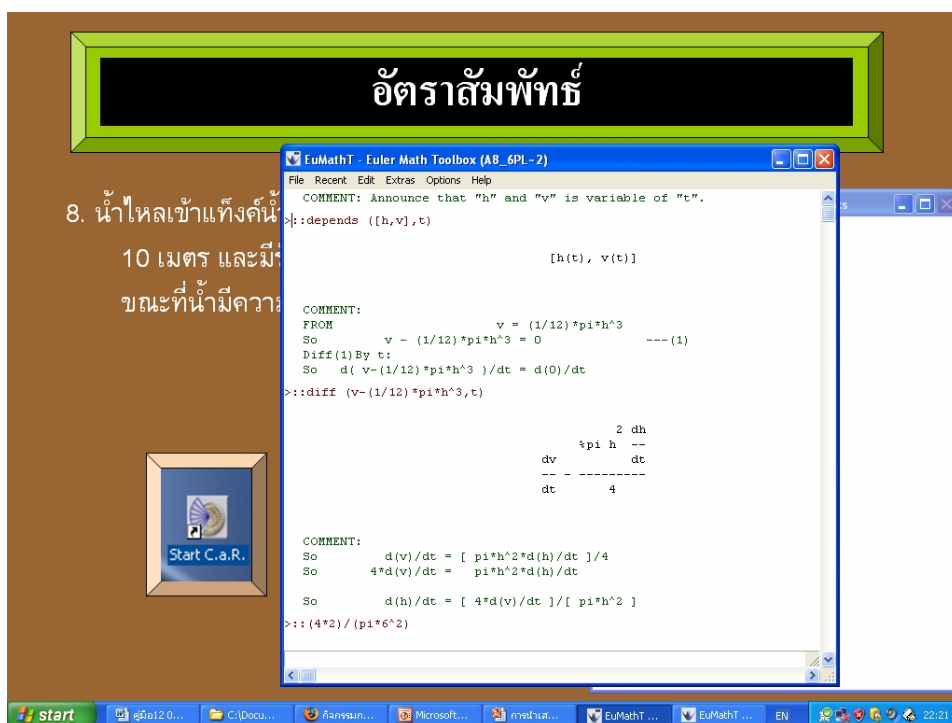
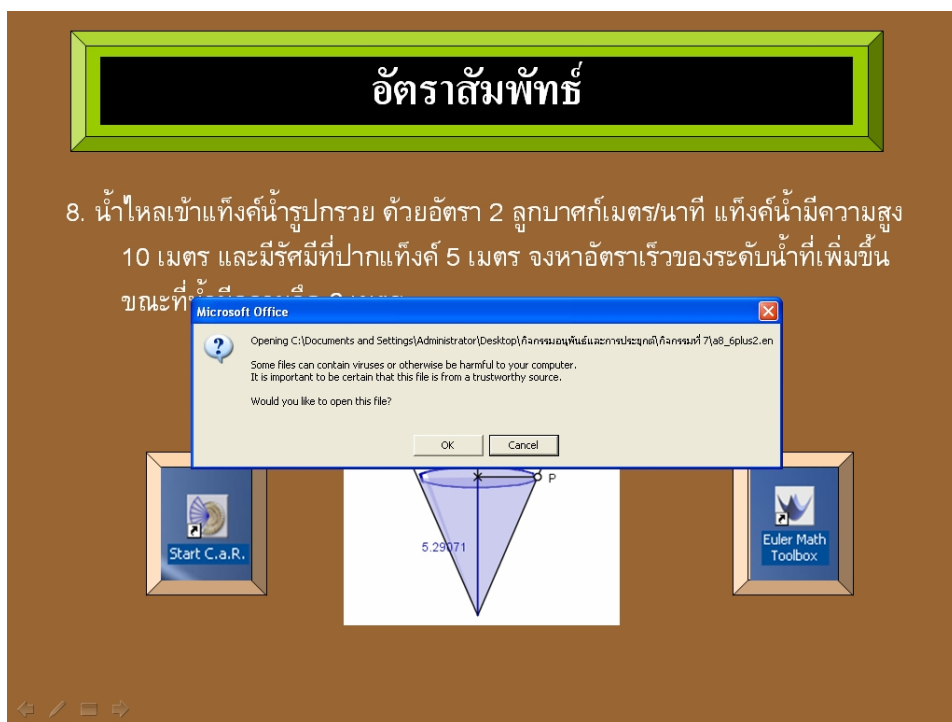
☐ คลิกขวาลงในช่องเพื่อแสดงคำตอบ

ความสูงของแท็งก์ = 8.13
รัศมีปากแท็งก์ = 3.53

และเมื่อนิสิตต้องการใช้งานแฟ้มคำสั่งที่สร้างจากโปรแกรม Euler ให้คลิกสัญลักษณ์ต่อไปนี้



เมื่อคลิกแล้วจะมีหน้าต่างขึ้นมาถามเพื่อยืนยันการเปิดโปรแกรม ให้นิสิตคลิกตกลง (OK) จากนั้นแฟ้มคำสั่งนี้จะถูกเปิดขึ้นมา นิสิตสามารถใช้งานโปรแกรม Euler ได้ทันที ดังภาพประกอบ



ภาคผนวก ง
แผนการจัดการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์
โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

แผนการสอนที่ 1

รายวิชา : คณ111 (คณิตศาสตร์ 1)

เรื่อง : อนุพันธ์

หัวข้อ : อนุพันธ์และอนุพันธ์อันดับสูง

คาบที่ 1 - 2

1. สารสำคัญ / ความคิดรวบยอด

ความรู้เรื่องลิมิตสามารถนำไปนิยามความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ กล่าวคือ กำหนดให้ฟังก์ชัน $y = f(x)$ เส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันที่จุด $P(c, f(c))$ คือ เส้นตรงที่ผ่านจุด P และมีความชันเท่ากับ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ เมื่อลิมิตหาค่าได้

และจากความรู้เรื่องการหาความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน เราจะนำมานิยามคำว่า อนุพันธ์ ดังนี้ กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ บนช่วง (a, b) และ $c \in (a, b)$ จะกล่าวว่า f มีอนุพันธ์ที่ c หรือ f หาอนุพันธ์ได้ที่ c เมื่อ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ หาค่าได้ และเรียกค่าลิมิตนี้ว่า อนุพันธ์ของ f ที่ c ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $f'(c)$ หรือ $y'|_{x=c}$ หรือ $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=c}$

เมื่อมีการนิยามคำว่า อนุพันธ์ ขึ้นในวิชาคณิตศาสตร์แล้ว แนนอนว่าการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น จะต้องหาโดยใช้บทนิยาม ซึ่งก็คือการหาค่าของลิมิตนั่นเอง ต่อมานักคณิตศาสตร์ได้คิดค้นพัฒนาความรู้ต่าง ๆ จนสรุปเป็นทฤษฎีบทของอนุพันธ์ไว้ ซึ่งการหาอนุพันธ์โดยใช้สมบัติของอนุพันธ์นี้มีข้อดีคือ เป็นวิธีการที่ง่าย สามารถหาอนุพันธ์ได้สะดวก และช่วยให้ประหยัดเวลาในการคำนวณ

นอกจากทฤษฎีบทที่ถูกเรียกว่า สมบัติของอนุพันธ์ ซึ่งได้แก่ ทฤษฎีบทอนุพันธ์ของฟังก์ชันคงที่ ทฤษฎีบทอนุพันธ์ของฟังก์ชันกำลัง ทฤษฎีบทอนุพันธ์ของผลบวกและผลต่างของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของผลคูณของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของผลคูณฟังก์ชันด้วยค่าคงที่ และอนุพันธ์ของผลหารของฟังก์ชันแล้ว ยังมีทฤษฎีบทอีก 2 ทฤษฎีบทที่ช่วยในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ทฤษฎีบทแรกได้แก่ ทฤษฎีบทที่ถูกเรียกว่า กฎลูกโซ่ ซึ่งกฎลูกโซ่เป็นทฤษฎีบทที่ช่วยในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ ทฤษฎีบทต่อไปคือทฤษฎีบทที่ช่วยในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผัน ซึ่งทฤษฎีบทนี้ช่วยลดขั้นตอนในการหาอนุพันธ์ คือ ไม่จำเป็นต้องหาฟังก์ชันผกผันก่อน แล้วจึงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันที่ได้ เพราะเมื่อโจทย์กำหนดฟังก์ชันมาให้ สามารถใช้ทฤษฎีบทนี้หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันได้เลย และถ้าฟังก์ชันที่โจทย์กำหนดให้ เป็นฟังก์ชันที่หาฟังก์ชันผกผันได้ยาก ทฤษฎีบทนี้จะช่วยลดปัญหาที่เกิดขึ้นได้

การหาอนุพันธ์ที่กล่าวมานั้น เป็นการหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ถ้านำอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งไปหาอนุพันธ์ต่อไปอีก จะได้อนุพันธ์อันดับที่สอง และถ้านำอนุพันธ์อันดับที่สองไปหาอนุพันธ์อีกก็จะได้อนุพันธ์อันดับที่สาม ซึ่งสามารถทำเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ จนถึงอันดับที่ n ซึ่งอนุพันธ์อันดับที่สี่

เป็นต้นไปให้ตัวเลข เขียนแทนด้วย $f^{(n)}(x)$ หรือ $\frac{d^n y}{dx^n}$ โดยที่อนุพันธ์ที่มากกว่าอันดับที่หนึ่งขึ้นไป

เรียกว่า อนุพันธ์อันดับสูง

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. หาความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันที่จุดที่กำหนดให้ได้
2. หาสมการของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันที่จุดที่กำหนดให้ได้
3. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
4. พิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนด มีอนุพันธ์ที่จุดที่กำหนดให้หรือไม่
5. เขียนบทกลับและยกตัวอย่างค้านของทฤษฎีบทที่ว่า “ถ้าฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้ที่ $x = c$ แล้ว f จะต่อเนื่องที่ $x = c$ ” ได้
6. ใช้สมบัติต่าง ๆ ของอนุพันธ์ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
7. เลือกใช้สมบัติของอนุพันธ์ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
8. สร้างฟังก์ชันประกอบของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
9. ใช้กฎลูกโซ่ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้
10. ตรวจสอบการเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
11. หาฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
12. สามารถหาอนุพันธ์ ณ จุดที่กำหนดให้ของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันที่กำหนด
13. หาอนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

3. สารการเรียนรู้

1. แนวคิดเกี่ยวกับอนุพันธ์

บทนิยาม 1.1 กำหนดให้ฟังก์ชัน $y = f(x)$ เส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันที่จุด

$P(c, f(c))$ คือ เส้นตรงที่ผ่านจุด P และมีความชัน

เท่ากับ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ เมื่อลิมิตหาค่าได้ แต่ถ้าลิมิตเป็น ∞

เส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันจะเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด P และตั้งฉากกับแกน x

หมายเหตุ ในบทนิยาม ถ้าแทน Δx ด้วย $x - c$ จะได้ว่าถ้า $\Delta x \rightarrow 0$

แล้ว $x - c \rightarrow 0$ และ $x \rightarrow c$ ดังนั้นเขียนบทนิยามได้อีกแบบหนึ่งคือ

เส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่จุด $P(c, f(c))$ คือ เส้นตรงที่ผ่านจุด

P และมีความชันเท่ากับ $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ เมื่อลิมิตหาค่าได้

บทนิยาม 1.2 กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ บนช่วง (a, b) และ $c \in (a, b)$ จะกล่าวว่า

f มีอนุพันธ์ที่ c หรือ f หาอนุพันธ์ได้ที่ c เมื่อ

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ หาค่าได้ และเรียกค่าลิมิตนี้ว่าอนุพันธ์ของ f ที่ c ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $f'(c)$ หรือ $y'|_{x=c}$

หรือ $\frac{dy}{dx}|_{x=c}$

หมายเหตุ ในบทนิยาม a อาจเป็น $-\infty$ หรือ b อาจเป็น ∞ ก็ได้

2. การหาอนุพันธ์ได้และความต่อเนื่อง

ทฤษฎีบท 1.1 ถ้าฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้ที่ $x = c$ แล้ว f จะต่อเนื่องที่ $x = c$

3. สมบัติของอนุพันธ์

ทฤษฎีบท 1.2 ฟังก์ชันคงที่ $f(x) = a$ มีอนุพันธ์ที่จำนวนจริง x และ $f'(x) = \frac{da}{dx} = 0$

ทฤษฎีบท 1.3 ฟังก์ชัน $f(x) = x^n$ มีอนุพันธ์ และ $f'(x) = \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
เมื่อ x^{n-1} นิยาม

ทฤษฎีบท 1.4 กำหนดให้ฟังก์ชัน f และ g มีอนุพันธ์ที่ x และ $c \in \mathbb{R}$

ฟังก์ชัน $f + g$, fg , cf , $\frac{f}{g}$ จะมีอนุพันธ์ที่ x ด้วย โดยที่

$$(1) \quad \frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

$$(2) \quad \frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f(x) \frac{d}{dx}g(x) + g(x) \frac{d}{dx}f(x)$$

$$(3) \quad \frac{d}{dx}(cf(x)) = c \frac{d}{dx}f(x)$$

$$(4) \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x) \frac{d}{dx}f(x) - f(x) \frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}, \quad g(x) \neq 0$$

4. กฎลูกโซ่ (Chain rule)

บทนิยาม 1.3 บทนิยามฟังก์ชันประกอบ (Composite Function)

กำหนดฟังก์ชัน f และ g

ฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f \circ g$ ซึ่งเป็น

ฟังก์ชันที่นิยามว่า $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ สำหรับทุก ๆ $x \in D(g)$ ซึ่งทำให้

$$g(x) \in D(f)$$

ทฤษฎีบท 1.5 กฎลูกโซ่ (Chain rule)

กำหนดให้ฟังก์ชัน $y = f(u)$ และ $u = g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ u

และ x ตามลำดับ ฟังก์ชันประกอบ $y = f(g(x))$ จะมีอนุพันธ์ที่ x

$$\text{และ } \frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{หรือ} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

5. อนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผัน

บทนิยาม 1.4 บทนิยามฟังก์ชันผกผัน (Inverse Function)

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งที่มีโดเมนเป็น A และมีเรนจ์เป็น B ฟังก์ชันผกผันของ f เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ f^{-1} ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น B และมีเรนจ์เป็น A ซึ่งนิยามว่า

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad f(x) = y \quad \text{สำหรับทุก } y \in B$$

บทนิยาม 1.5 ฟังก์ชัน f ที่มีโดเมนเป็น A จะเรียกว่าเป็น ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $x_1, x_2 \in A$ ถ้า $x_1 \neq x_2$ แล้ว $f(x_1) \neq f(x_2)$

ทฤษฎีบท 1.6 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บนช่วง (a, b) โดยที่ $f'(x) \neq 0$

และ g เป็นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชัน f ซึ่งต่อเนื่องใน $D_g \subset \mathbb{R}_g$

$$\text{แล้ว } g \text{ จะมีอนุพันธ์ที่ } x \text{ และ } g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

6. อนุพันธ์อันดับสูง

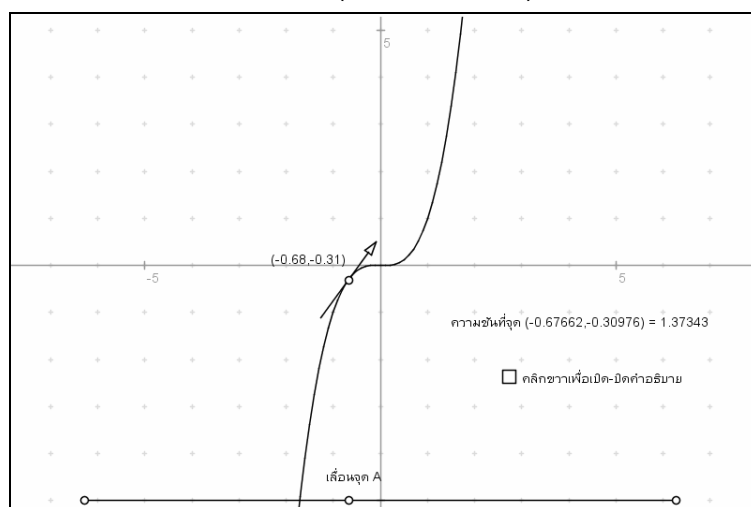
บทนิยาม 1.6 อนุพันธ์อันดับที่ n ของฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วย $f^n(x)$

เป็นการหาอนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่ $n - 1$ เทียบกับ x

$$\text{นั่นคือ } f^n(x) = \frac{d}{dx} [f^{n-1}(x)]$$

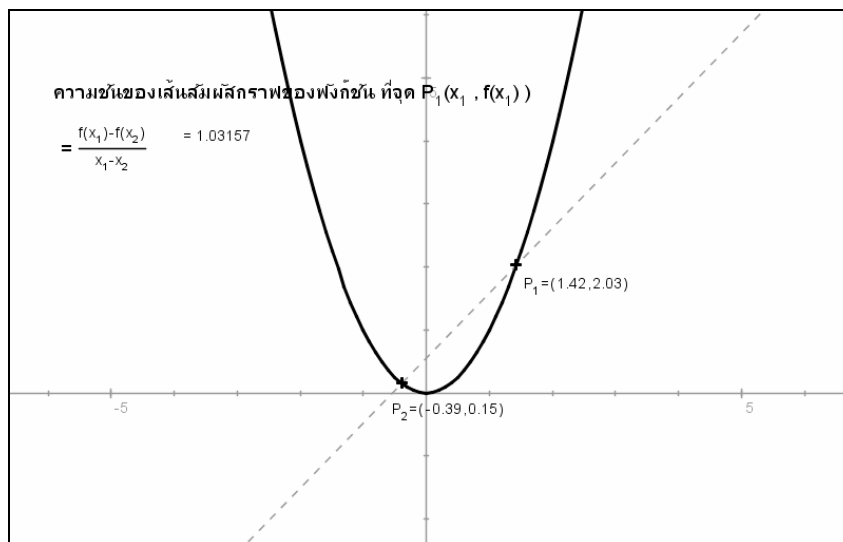
4. กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูเริ่มด้วยปัญหาเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันคืออะไร นิสิตร่วมกันอภิปราย จากนั้นครูอธิบายบทนิยามเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน พร้อมให้นิสิตดูตัวอย่างจากโปรแกรม C.a.R. เพื่อให้ นิสิตเห็นลักษณะเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน (ภาพประกอบ 1)

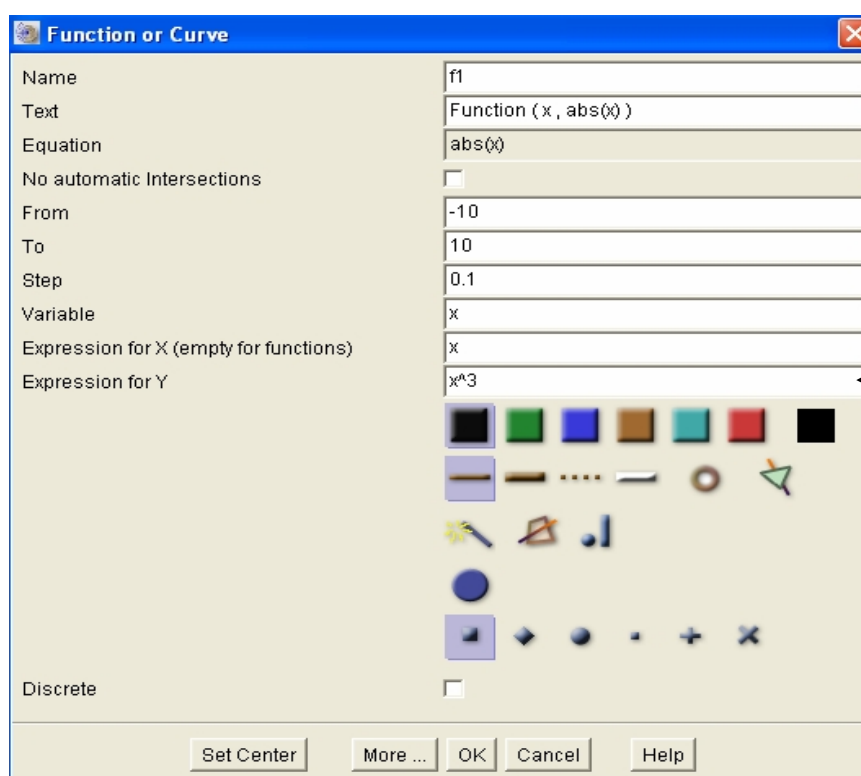


ภาพประกอบ 1

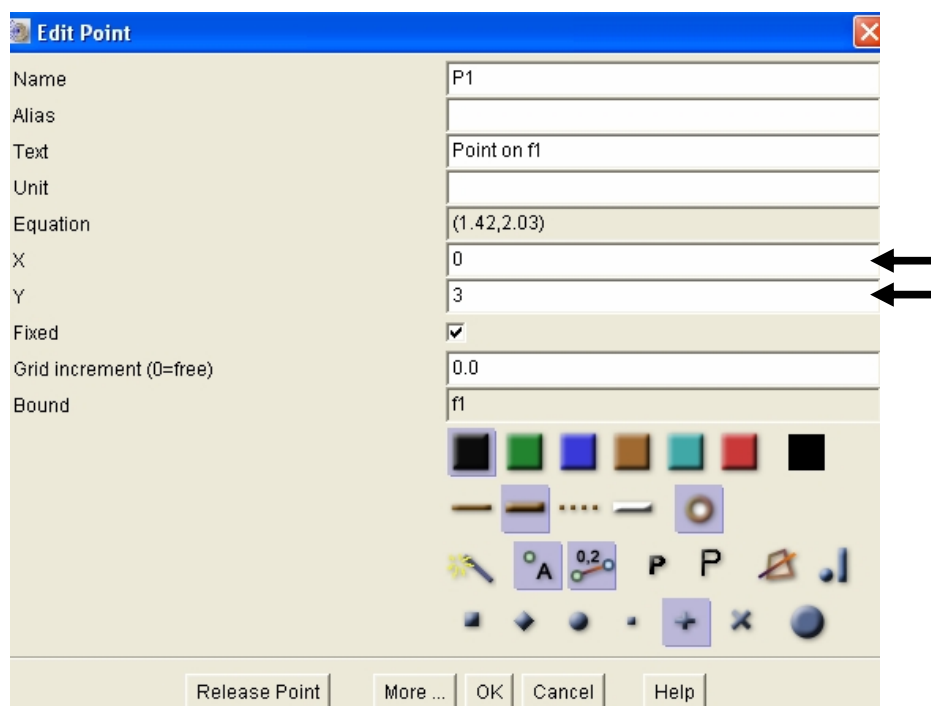
2. จากนั้นให้หาค่าความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน ณ จุดที่กำหนดให้ จากโปรแกรม C.a.R. (ภาพประกอบ 2) โดยคลิกขวาที่เส้นกราฟเพื่อกำหนดฟังก์ชันใหม่ (ภาพประกอบ 3) และคลิกขวาที่จุด P_1 เพื่อกำหนดพิกัดใหม่ (ภาพประกอบ 4)



ภาพประกอบ 2



ภาพประกอบ 3



ภาพประกอบ 4

3. ให้นิสิตทำกิจกรรมการหาสมการของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน จากนั้นนิสิตศึกษาบทนิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชัน และทำกิจกรรมซึ่งมีทั้งกิจกรรมที่ให้นิสิตพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ มีอนุพันธ์ ณ จุดที่กำหนดให้หรือไม่ กิจกรรมที่ให้นิสิตหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ณ จุดที่กำหนดให้ และกิจกรรมที่ให้นิสิตหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ณ จุดใด ๆ

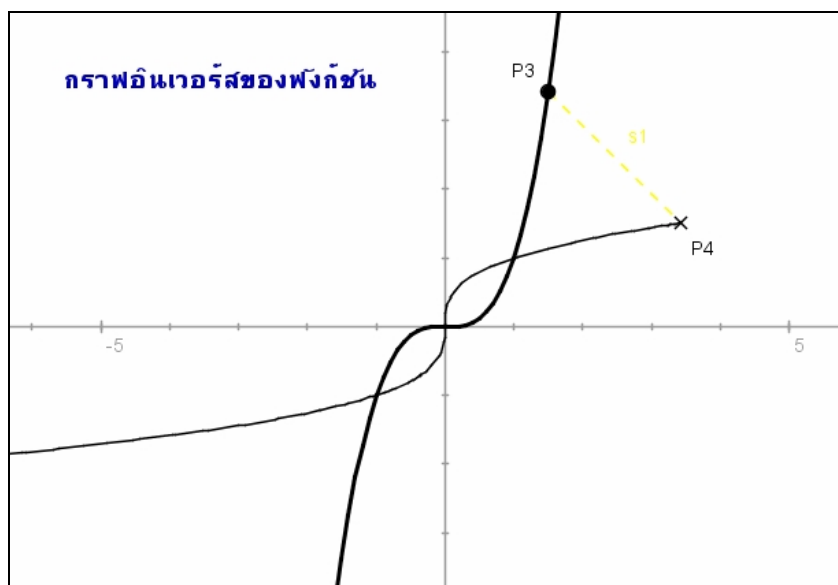
4. ครูให้นิสิตทำกิจกรรม “จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f(x) = |x|$ มีอนุพันธ์ทุก $x \neq 0$ ” เพื่อนำเข้าสู่ทฤษฎีบท “ถ้าฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้ที่ $x = c$ แล้ว f จะต่อเนื่องที่ $x = c$ ” จากนั้นให้นิสิตเขียนบทกลับของของทฤษฎีบทและร่วมกันอภิปรายว่าบทกลับของทฤษฎีบทเป็นจริงหรือไม่ อย่างไร

5. ครูให้นิสิตทำกิจกรรมหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันคงที่เพื่อนำเข้าสู่ทฤษฎีบทอนุพันธ์ของฟังก์ชันคงที่เท่ากับศูนย์ และทฤษฎีบทอนุพันธ์ของฟังก์ชันกำลัง ซึ่งก่อนที่จะเข้าสู่ทฤษฎีบทครูและนิสิตจะอภิปรายร่วมกันในคำถามที่ว่า “ถ้า $f(x) = x^4$ แล้วอนุพันธ์ของ f ที่ x ใด ๆ จะเท่ากับ $4x^3$ หรือไม่”

6. ครูอธิบายทฤษฎีบทอนุพันธ์ของผลบวกและผลต่างของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของผลคูณของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของผลคูณฟังก์ชันด้วยค่าคงที่ และอนุพันธ์ของผลหารของฟังก์ชัน จากนั้นครูและนิสิตร่วมกันทำกิจกรรมการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้โดยใช้ทฤษฎีบทที่กล่าวมาข้างต้น กิจกรรมท้ายสุดให้นิสิตหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชันซึ่งมีความคล้ายคลึงกัน นิสิตต้องหาความแตกต่างทางโครงสร้างของสองฟังก์ชันที่กำหนดให้และเลือกใช้ทฤษฎีบทที่เหมาะสมในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันดังกล่าว

7. ครูอธิบายบทนิยามของฟังก์ชันประกอบ พร้อมตัวอย่าง และให้นิสิตทำกิจกรรมการหาฟังก์ชันประกอบจากฟังก์ชันที่กำหนดให้ จากนั้นเข้าสู่กิจกรรมทฤษฎีบทกฎลูกโซ่ โดยพูดคุยเกี่ยวกับทฤษฎีบทพร้อมกับการทำกิจกรรม

8. ครูนำเข้าสู่การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันด้วยกิจกรรมสำรวจกราฟของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันที่กำหนดให้ จากโปรแกรม C.a.R โดยนิสิตคลิกเลือกเครื่องมือสร้างรอยเดิน จากนั้นคลิกที่จุด P4 แล้วจึงใช้เมาส์ลากจุด P3 ไปตามกราฟของฟังก์ชันที่กำหนด (กราฟเส้นหนา) รอยเดินของจุด P4 นั่นคือกราฟของฟังก์ชันผกผันนั่นเองดังภาพประกอบ 5 นิสิตสามารถกำหนดฟังก์ชันใหม่โดยคลิกขวาที่กราฟของฟังก์ชัน (กราฟเส้นหนา) ครูอธิบายบทนิยามของฟังก์ชันผกผันควบคู่ไปด้วย จากนั้นครูจะกล่าวถึงบทนิยามของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งให้นิสิตได้รู้จักก่อนและให้นิสิตตรวจสอบว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่ หลังจากทำกิจกรรม ครูเปิดโอกาสให้อภิปรายในชั้นเรียนร่วมกัน และครูเพิ่มเติมถึงการตรวจสอบการเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งด้วยวิธีทางเรขาคณิต



ภาพประกอบ 5

9. ครูอธิบายขั้นตอนการหาฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันที่กำหนดให้ ครูให้นิสิตวาดกราฟของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันที่กำหนดให้ จากนั้นอภิปรายร่วมกันถึงลักษณะกราฟของฟังก์ชันและกราฟของฟังก์ชันผกผัน ครูเพิ่มเติมว่ากราฟทั้งสองสมมาตรกันตามเส้นตรง $y = x$

10. ให้นิสิตหาฟังก์ชันผกผันและอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันที่ $x = c$ จากนั้นเรียนรู้ทฤษฎีบทอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันที่ $x = c$ และทำกิจกรรมการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันที่ $x = c$ ข้อเดิมแต่ให้ใช้ทฤษฎีบทดังกล่าวช่วย ครูและนิสิตพูดคุยถึงประโยชน์ของทฤษฎีบทว่า ฟังก์ชันบางฟังก์ชันอาจหาฟังก์ชันผกผันได้ค่อนข้างยาก ส่งผลให้การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันที่ $x = c$ ทำได้ยากเช่นกัน ดังนั้นการใช้ทฤษฎีบทนี้จึงเป็นวิธีที่ช่วยได้อีกวิธีหนึ่ง

11. ครูอธิบายนิยามอนุพันธ์อันดับสูงและให้นิสิตทำกิจกรรม

12. ครูและนิสิตพูดคุยสรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้ในวันนี้ ครูมอบหมายให้นิสิตทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนในหนังสือเรียน

5. สื่อการเรียนรู้

1. ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่องอนุพันธ์ : อนุพันธ์และอนุพันธ์อันดับสูง
2. แฟ้มคำสั่งกิจกรรมภาคปฏิบัติบนคอมพิวเตอร์ : กิจกรรมที่ 1
3. เอกสาร MA 111: คณิตศาสตร์ 1 (หนังสือประกอบการเรียนของภาควิชา)

6. การวัดและประเมินผล

1. ตรวจใบกิจกรรม
2. สังเกตความร่วมมือ ความสนใจในการทำกิจกรรม

บันทึกหลังการสอน

.....

.....

.....

.....

แผนการสอนที่ 2

รายวิชา: คณ111 (คณิตศาสตร์ 1)

เรื่อง : อนุพันธ์

คาบที่ 3 - 4

หัวข้อ : อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. สาระสำคัญ / ความคิดรวบยอด

ความรู้เรื่องค่าของลิมิตที่ว่า $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ และ $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} = 0$ และความรู้เรื่องกฎลูกโซ่ช่วยในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และเนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งใน $\mathbb{R}$ จึงต้องกำหนดโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติขึ้นใหม่ เพื่อให้ฟังก์ชันตรีโกณมิติมีอินเวอร์สเป็นฟังก์ชัน การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติใช้ความรู้เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผัน ฟังก์ชันประกอบ และสมบัติของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้
2. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ได้

3. สาระการเรียนรู้

1. ทฤษฎีบทอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ทฤษฎีบท 2.1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ และ

- (1) $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$
- (2) $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$
- (3) $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$, $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{I}$
- (4) $\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$, $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{I}$
- (5) $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$, $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{I}$
- (6) $\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$, $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{I}$

2. บทนิยามฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

บทนิยาม 2.1

- (1) ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันไซน์ นิยามว่า $y = \arcsin x$
ก็ต่อเมื่อ $x = \sin y$ โดยที่ $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

- (2) ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคไซน์ นิยามว่า $y = \arccos x$
ก็ต่อเมื่อ $x = \cos y$ โดยที่ $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$
- (3) ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์ นิยามว่า $y = \arctan x$
ก็ต่อเมื่อ $x = \tan y$ โดยที่ $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- (4) ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคแทนเจนต์ นิยามว่า $y = \operatorname{arccot} x$
ก็ต่อเมื่อ $x = \cot y$ โดยที่ $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$
- (5) ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเซแคนต์ นิยามว่า $y = \operatorname{arcsec} x$
ก็ต่อเมื่อ $x = \sec y$
โดยที่ $\operatorname{arcsec} : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \rightarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
- (6) ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคเซแคนต์ นิยามว่า $y = \operatorname{arccsc} x$
ก็ต่อเมื่อ $x = \csc y$
โดยที่ $\operatorname{arccsc} : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

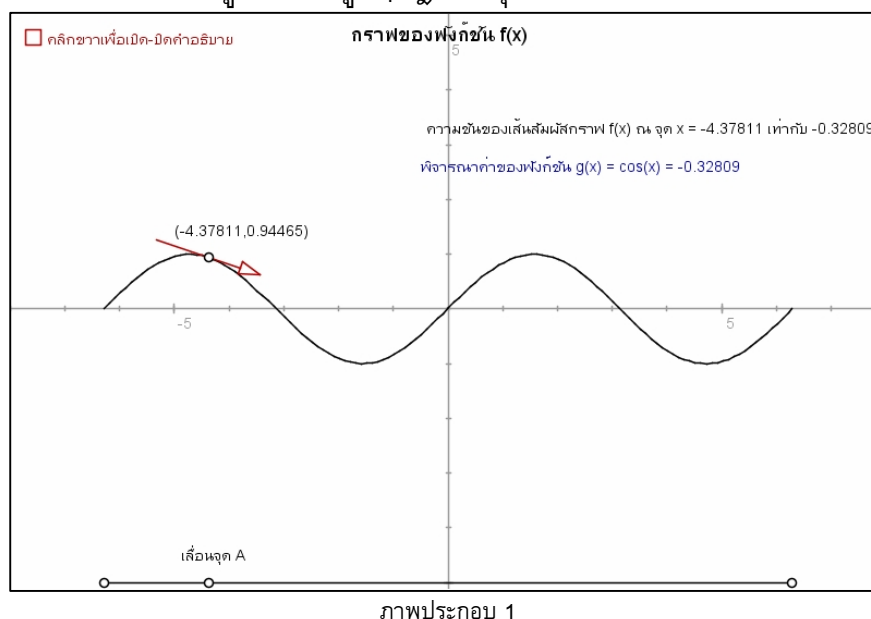
3. ทฤษฎีบทอนุพันธ์ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ทฤษฎีบท 2.2

- (1) ฟังก์ชัน $y = \arcsin x$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกค่าของ x ซึ่ง $|x| < 1$
และ $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- (2) ฟังก์ชัน $y = \arccos x$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกค่าของ x ซึ่ง $|x| < 1$
และ $\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- (3) ฟังก์ชัน $y = \arctan x$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกค่าของ $x \in \mathbb{R}$
และ $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
- (4) ฟังก์ชัน $y = \operatorname{arccot} x$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกค่าของ $x \in \mathbb{R}$
และ $\frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$
- (5) ฟังก์ชัน $y = \operatorname{arcsec} x$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกค่าของ x ซึ่ง $|x| > 1$
และ $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
- (6) ฟังก์ชัน $y = \operatorname{arccsc} x$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกค่าของ x ซึ่ง $|x| > 1$
และ $\frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

4. กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูใช้คำถามถามว่า “นิสิตรู้หรือไม่ว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันไซน์จะได้อะไร” ซึ่งนิสิตได้เรียนเรื่องแคลคูลัสเบื้องต้นมาบ้างแล้วในระดับมัธยมก็อาจจะตอบคำถามได้ว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันไซน์จะได้ฟังก์ชันโคไซน์ ครูใช้คำถามถามต่อว่า “นิสิตแน่ใจหรือว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันไซน์จะได้ฟังก์ชันโคไซน์ เราต้องพิสูจน์ให้เห็นจริง” ครูให้นิสิตทำกิจกรรมสังเกตค่าความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันจากแฟ้มคำสั่งที่สร้างจากโปรแกรม C.a.R. โดยที่นิสิตสามารถกำหนดฟังก์ชันได้เอง (ดังภาพประกอบ 1) จากนั้นให้นิสิตใช้โปรแกรม Euler ทำกิจกรรมสร้างกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เพื่อเป็นการนำเข้าสู่การเรียนรู้ทฤษฎีบทอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ



2. ครูนำเข้าสู่เรื่องฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติด้วยการให้อธิบายว่า “ฟังก์ชันที่มีอินเวอร์สเป็นฟังก์ชันจะต้องเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แต่เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งใน $\mathbb{R}$ ดังนั้นจึงต้องมีการกำหนดโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เพื่อให้ฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งใน $\mathbb{R}$ ซึ่งส่งผลให้มีอินเวอร์สเป็นฟังก์ชัน” และให้นิสิตทำกิจกรรมกำหนดโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เพื่อให้ฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งใน $\mathbb{R}$ จากนั้นนิสิตศึกษาบทนิยามของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

3. ครูอธิบายทฤษฎีบทอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ พร้อมให้นิสิตทำกิจกรรมการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้

4. ครูและนิสิตพูดคุยสรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้ในวันนี้ ครูมอบหมายให้นิสิตทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนในหนังสือเรียน

5. สื่อการเรียนรู้

1. ใบกิจกรรมที่ 2 เรื่องอนุพันธ์ : อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
2. แฟ้มคำสั่งกิจกรรมภาคปฏิบัติบนคอมพิวเตอร์ : กิจกรรมที่ 2
3. เอกสาร MA 111: คณิตศาสตร์ 1 (หนังสือประกอบการเรียนของภาควิชา)

6. การวัดและประเมินผล

1. ตรวจใบกิจกรรม
2. สังเกตความร่วมมือ ความสนใจในการทำกิจกรรม

บันทึกหลังการสอน

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการสอนที่ 3

รายวิชา : คณ111 (คณิตศาสตร์ 1)

เรื่อง : อนุพันธ์

หัวข้อ : อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย

คาบที่ 5 - 6

1. สาระสำคัญ / ความคิดรวบยอด

ฟังก์ชันโดยปริยาย คือ ฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปความสัมพันธ์ $F(x, y) = 0$ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายสามารถทำได้หลายวิธี แต่ฟังก์ชันโดยปริยายบางฟังก์ชันเขียนในรูปฟังก์ชันโดยชัดแจ้ง ($y = f(x)$) ได้ยาก จำเป็นต้องหาอนุพันธ์โดยการหาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการเทียบกับ x แล้วจัดเทอม $\frac{dy}{dx}$ ให้อยู่ข้างเดียวกันของสมการ เพื่อแก้สมการหา $\frac{dy}{dx}$

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. สามารถจำแนกได้ว่าฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันโดยชัดแจ้ง และฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันโดยปริยาย
2. เลือกใช้วิธีการต่าง ๆ ในการหาอนุพันธ์ฟังก์ชันโดยปริยายได้

3. สาระการเรียนรู้

1. ฟังก์ชันโดยปริยาย

ฟังก์ชันโดยปริยาย (Implicit Function) เป็นฟังก์ชันที่ไม่ได้กำหนดโดยชัดแจ้งในรูป $y = f(x)$ แต่จะกำหนดในรูปความสัมพันธ์ $F(x, y) = 0$

ฟังก์ชันโดยปริยายบางฟังก์ชันสามารถเขียนในรูปฟังก์ชันโดยชัดแจ้งได้ง่าย

เช่น $xy = 3$ และ $x^3y + xy - 1 = 0$ สามารถเขียนในรูปฟังก์ชันโดยชัดแจ้งได้เป็น $y = \frac{3}{x}$ และ

$$y = \frac{1}{x^3 + x} \quad \text{ตามลำดับ}$$

ฟังก์ชันโดยปริยายบางฟังก์ชันสามารถเขียนในรูปฟังก์ชันโดยชัดแจ้งได้มากกว่าหนึ่งฟังก์ชัน เช่น $y^2 - x + 3 = 0$ สามารถเขียนในรูปฟังก์ชันโดยชัดแจ้งได้เป็น $f(x) = \sqrt{x-3}$ หรือ $g(x) = -\sqrt{x-3}$

ในขณะที่ฟังก์ชันโดยปริยายบางฟังก์ชันเขียนในรูปฟังก์ชันโดยชัดแจ้งได้ยากมาก เช่น $x^3y + xy^3 + x^2y^2 + xy - 2 = 0$

2. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย

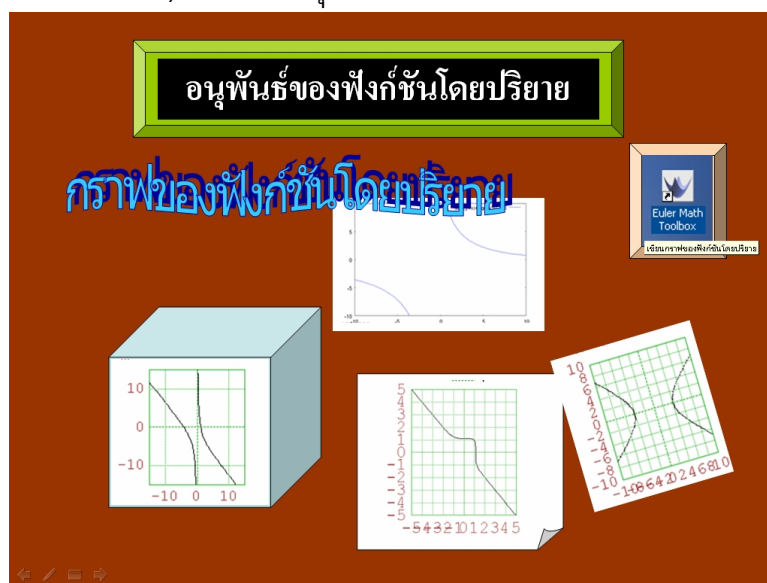
การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย อาจทำได้โดยจัดรูปของฟังก์ชันโดยปริยาย นั้นให้อยู่ในรูปฟังก์ชันโดยชัดแจ้งแล้วจึงทำการอนุพันธ์ แต่ถ้าฟังก์ชันโดยปริยายนั้นยากมากที่จะ เขียนในรูปฟังก์ชันโดยชัดแจ้ง จำเป็นต้องใช้ความรู้ในเรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบเข้ามาช่วยในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย ซึ่งมีขั้นตอน ดังนี้

1. หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการเทียบกับ x
2. จัดเทอม $\frac{dy}{dx}$ ให้อยู่ข้างเดียวกันของสมการ
3. ดึงตัวประกอบร่วมของ $\frac{dy}{dx}$ ออก
4. แก่สมการหา $\frac{dy}{dx}$

4. กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูอธิบายลักษณะของฟังก์ชันโดยชัดแจ้ง และฟังก์ชันโดยปริยาย พร้อมอภิปรายถึง ลักษณะของกราฟของฟังก์ชันโดยปริยายร่วมกันกับนิสิต จากนั้นครูอธิบายวิธีการหาอนุพันธ์ของ ฟังก์ชันโดยปริยาย

2. นิสิตใช้โปรแกรม Euler ทำกิจกรรมสร้างกราฟของฟังก์ชันโดยปริยายต่าง ๆ ที่ กำหนดให้ (ดังภาพประกอบ 1) พร้อมหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายเหล่านั้น



ภาพประกอบ 6

3. ครูและนิสิตพูดคุยสรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้ในวันนี้ ครูมอบหมายให้นิสิตทำแบบฝึกหัดท้าย บทเรียนในหนังสือเรียน

5. สื่อการเรียนรู้

1. ใบกิจกรรมที่ 3 เรื่องอนุพันธ์ : อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย
2. แฟ้มคำสั่งกิจกรรมภาคปฏิบัติบนคอมพิวเตอร์ : กิจกรรมที่ 3
3. เอกสาร MA 111: คณิตศาสตร์ 1 (หนังสือประกอบการเรียนของภาควิชา)

6. การวัดและประเมินผล

1. ตรวจใบกิจกรรม
2. สังเกตความร่วมมือ ความสนใจในการทำกิจกรรม

บันทึกหลังการสอน

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการสอนที่ 4

รายวิชา : คณ111 (คณิตศาสตร์ 1)

เรื่อง : อนุพันธ์

หัวข้อ : อนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม
และอนุพันธ์ในพิกัดเชิงขั้ว

คาบที่ 7 - 9

1. สาระสำคัญ / ความคิดรวบยอด

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริมนั้น หากสามารถจัดตัวแปร t เพื่อเขียนสมการให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์ $F(x, y) = 0$ ได้ง่าย จะใช้วิธีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายเข้ามาช่วย แต่ถ้าจัดตัวแปร t ได้ยากหรือไม่สามารถจัดตัวแปร t ได้ จะต้องใช้ความรู้ในเรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันและกฎลูกโซ่ช่วยในการหาค่าอนุพันธ์

ระบบพิกัดที่เราศึกษาและกล่าวไปแล้วแต่ตอนต้น เป็นระบบพิกัดที่เรียกว่า พิกัดฉาก (Rectangular Coordinates) นอกเหนือจากระบบพิกัดฉาก ยังมีระบบพิกัดอีกชนิดหนึ่งที่เรียกว่า พิกัดเชิงขั้ว (Polar Coordinates) ซึ่งการกำหนดพิกัดของจุดในพิกัดเชิงขั้วให้อยู่ในรูปพิกัดฉาก นั่นคือ $x = r \cos \theta$ และ $y = r \sin \theta$ นั้น ใช้แนวคิดเรื่องสมการอิงตัวแปรเสริมนั่นเอง

บทนิยามของอนุพันธ์ในพิกัดเชิงขั้วเหมือนกันกับบทนิยามของอนุพันธ์ในพิกัดฉาก แต่ความหมายในเชิงเรขาคณิตไม่เหมือนกัน กล่าวคือ ในพิกัดเชิงขั้วที่ได้ ไม่ได้หมายถึง ความชันของเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง แต่เราสามารถหาความชันของเส้นสัมผัสของเส้นโค้งได้ โดยที่การหาความชันของเส้นสัมผัสของเส้นโค้งนั้นต้องใช้ความรู้เรื่องอนุพันธ์ในพิกัดเชิงขั้วนี้ด้วย

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. อธิบายลักษณะของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริมได้
2. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริมได้
3. หาความชันและสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริมได้
4. หาค่าแห่งและบอกพิกัดอื่น ๆ ของจุดที่กำหนดให้ได้
5. หาพิกัดของจุดในระบบพิกัดฉากได้เมื่อกำหนดพิกัดของจุดในระบบพิกัดเชิงขั้วมาให้ และหาพิกัดของจุดในระบบพิกัดเชิงขั้วได้เมื่อกำหนดพิกัดของจุดในระบบพิกัดฉากมาให้
6. อธิบายลักษณะของกราฟที่สำคัญในระบบพิกัดเชิงขั้ว และอธิบายลักษณะสำคัญของภาคตัดกรวยในระบบพิกัดเชิงขั้วได้
7. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันในระบบพิกัดเชิงขั้วได้
8. หาความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันในระบบพิกัดเชิงขั้วได้

3. สารการเรียนรู้

1. ฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม

ให้ t เป็นตัวแปรอิสระ และทั้ง $x = f(t)$ และ $y = g(t)$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$

สมการ $x = f(t)$, $y = g(t)$ ---- (1) มีชื่อเรียกว่า **สมการอิงตัวแปรเสริม (Parametric equations)** และเรียกตัวแปร t ว่า **ตัวแปรเสริม (Parameter)** โดยแต่ละค่า t จะให้ $(f(t), g(t))$ แทนจุดบนเส้นโค้งที่สอดคล้องกับสมการ (1)

2. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม

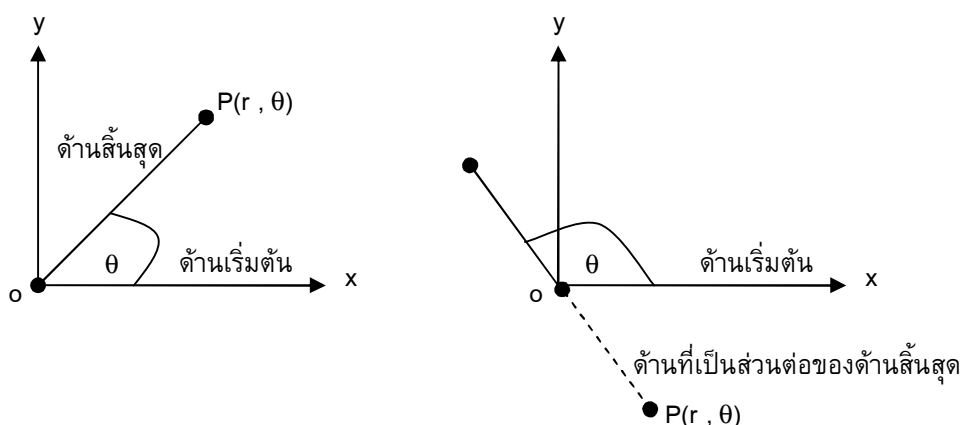
ถ้าสมการอิงตัวแปรเสริมนั้นสามารถจัดตัวแปร t เพื่อเขียนสมการ (1) ให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์ $F(x, y) = 0$ ได้ง่าย จะใช้วิธีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย $F(x, y) = 0$

แต่ถ้าไม่สามารถจัดตัวแปร t ได้ จำเป็นต้องใช้ความรู้ในเรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ผกผันและกฎลูกโซ่หาค่าอนุพันธ์ โดย $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ ถ้า $\frac{dx}{dt} \neq 0$

3. แนะนำพิกัดเชิงขั้ว

ในระบบพิกัดเชิงขั้ว เราจะเริ่มต้นโดยการเลือกจุด ๆ หนึ่งในระบบ เรียกว่า **ขั้ว (Pole)** หรือ **จุดกำเนิด (origin)** ซึ่งต่อไปนี้จะแทนด้วย o จากจุดนี้ลากเส้นตรง 2 เส้น โดยที่เส้นหนึ่งอยู่ในแนวอนไปทางขวามือ เราเรียกเส้นนี้ว่า **แกนเชิงขั้ว (Polar axis)** ซึ่งต่อไปจะแทนด้วยแกน x ส่วนอีกเส้นหนึ่ง ลากจากขั้วไปตามแนวตั้ง เราเรียกเส้นนี้ว่า **แกนแนวฉาก (normal axis)** ซึ่งต่อไปจะแทนด้วยแกน y



ถ้า P เป็นจุด ๆ หนึ่งบนระนาบ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนการบอกตำแหน่งของจุด P คือ คู่อันดับ (r, θ) โดยที่

(1) θ แทนมุมที่ขั้ว โดยมีด้านเริ่มต้นของมุมทับแกนเชิงขั้ว และด้านสิ้นสุดของมุมหรือส่วนต่อของด้านสิ้นสุดของมุมผ่านจุด P โดยที่

$\theta > 0$ เมื่อหมุนด้านสิ้นสุดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจากด้านเริ่มต้น

$\theta < 0$ เมื่อหมุนด้านสิ้นสุดในทิศทางตามเข็มนาฬิกาจากด้านเริ่มต้น

(2) r แทนระยะทางที่ระบุทิศทาง จากขั้วไปถึงจุด P โดยที่

$r > 0$ เมื่อ P อยู่บนด้านสิ้นสุดของ θ มีระยะห่างจากขั้วเท่ากับ r หน่วย

$r < 0$ เมื่อ P อยู่บนด้านที่เป็นส่วนต่อของด้านสิ้นสุดของ θ มีระยะห่างจากขั้ว

เท่ากับ $|r|$ หน่วย

หมายเหตุ 1. พิกัดของจุด ๆ หนึ่งมีได้หลายพิกัด

2. ถ้า (r, θ) เป็นพิกัดของจุด P แล้ว $(r, \theta + 2n\pi)$ สำหรับทุก $n = 0, 1, 2, \dots$ จะเป็นพิกัดของจุด P ด้วย

4. ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดเชิงขั้วและพิกัดฉาก

ให้ P เป็นจุดบนระนาบ

(x, y) แทนพิกัดของ P ในระนาบพิกัดฉาก

(r, θ) แทนพิกัดของ P ในระนาบพิกัดเชิงขั้ว

เมื่อกำหนดพิกัดของจุดในระบบพิกัดเชิงขั้วมาให้ เราสามารถหาพิกัดของจุดนั้นในระบบพิกัดฉากได้ด้วยความสัมพันธ์ ดังนี้

$$x = r \cos \theta \text{ และ } y = r \sin \theta$$

เมื่อกำหนดพิกัดของจุดในระบบพิกัดฉากมาให้ เราสามารถหาพิกัดของจุดนั้นในระบบพิกัดเชิงขั้วได้ ดังนี้

$$x^2 = r^2 \cos^2 \theta \text{ และ } y^2 = r^2 \sin^2 \theta$$

เพราะฉะนั้น

$$x^2 + y^2 = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

ดังนั้น

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$

นอกจากนั้น จะได้ว่า

$$\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \frac{y}{x}$$

นั่นคือ

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

5. กราฟที่สำคัญในระบบพิกัดเชิงขั้ว

1. เส้นตรง

1.1 สมการ: $r \cos \theta = a$

1.2 สมการ: $r \sin \theta = a$

1.3 สมการ: $r (A \cos \theta + B \sin \theta) + C = 0$ เมื่อ A, B และ C เป็นค่าคงตัวและ

A, B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

2. วงกลม

2.1 สมการ: $r = a$ เมื่อ $a \neq 0$

2.2 สมการ: $r = 2a \cos \theta$ เมื่อ $a \neq 0$

2.3 สมการ: $r = 2a \sin \theta$ เมื่อ $a \neq 0$

2.4 สมการ: $r = a \cos \theta + b \sin \theta$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

3. เส้นโค้งรูปหัวใจ (Cardioids)

3.1 สมการ: $r = a(1 + \sin \theta)$ เมื่อ $a \neq 0$

3.2 สมการ: $r = a(1 - \sin \theta)$ เมื่อ $a \neq 0$

3.3 สมการ: $r = a(1 + \cos \theta)$ เมื่อ $a \neq 0$

3.4 สมการ: $r = a(1 - \cos \theta)$ เมื่อ $a \neq 0$

4. เส้นโค้งลิมาซง (Limacons)

4.1 สมการ: $r = a + b \sin \theta$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

4.2 สมการ: $r = a - b \sin \theta$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

4.3 สมการ: $r = a + b \cos \theta$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

4.4 สมการ: $r = a - b \cos \theta$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

5. เส้นโค้งกลีบกุหลาบ (Rose Curve)

5.1 สมการ: $r = a \sin n\theta$ เมื่อ $a \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

5.2 สมการ: $r = a \cos n\theta$ เมื่อ $a \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

6. บทนิยาม 4.1 ความเยื้องศูนย์กลางของภาคตัดกรวย

กำหนดให้ e เป็นความเยื้องศูนย์กลาง (eccentricity) ซึ่ง

$$e = \frac{\text{ระยะทางระหว่างจุด P และโฟกัส O}}{\text{ระยะทางระหว่างจุด P และเส้นบังคับ}}$$

7. ทฤษฎีบท 4.1 การหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง

ถ้ากำหนดเส้นโค้ง $r = f(\theta)$ และ $P(r_1, \theta_1)$ เป็นจุดบนเส้นโค้ง และ m เป็นความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P แล้ว

$$m = \frac{f(\theta_1)\cos\theta_1 + f'(\theta_1)\sin\theta_1}{f'(\theta_1)\cos\theta_1 - f(\theta_1)\sin\theta_1}$$

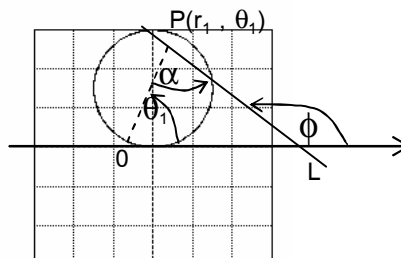
เมื่อ $f'(\theta_1)\cos\theta_1 - f(\theta_1)\sin\theta_1 \neq 0$

8. ทฤษฎีบท 4.2 การหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง

กำหนดเส้นโค้ง $r = f(\theta)$ และ $P(r_1, \theta_1)$ เป็นจุดบนเส้นโค้งให้ L เป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้ง f ที่จุด P และมีมุมเอียงเท่ากับ ϕ ถ้า α เป็นมุมบวกที่วัดจากด้าน OP ไปยัง เส้นตรง L แล้ว

$$\tan \alpha = \frac{f(\theta_1)}{f'(\theta_1)}$$

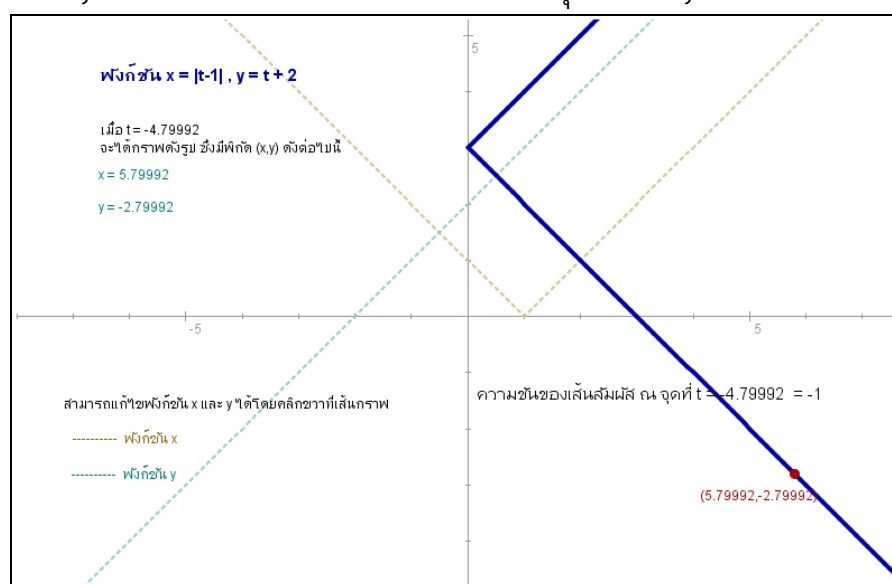
เมื่อ $f'(\theta) \neq 0$ และ $r_1 \neq 0$



4. กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูอธิบายลักษณะและให้นิสิตดูตัวอย่างกราฟของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม พร้อมทั้งอธิบายวิธีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม จากนั้นครูให้นิสิตหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม โดยนิสิตใช้โปรแกรม Euler ช่วยสร้างกราฟของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม และใช้โปรแกรม Euler ช่วยในการคำนวณและตรวจคำตอบ

2. จากนั้นครูให้นิสิตหาสมการของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม โดยนิสิตทำการสำรวจเส้นสัมผัสเส้นโค้งจากโปรแกรม C.a.R. (ดังภาพประกอบ 1) นิสิตสามารถกำหนดฟังก์ชันได้เองโดยการคลิกขวาที่เมาส์แล้วแก้ไขเป็นฟังก์ชันที่ต้องการ แฟ้มคำสั่งนี้จะแสดงการเคลื่อนที่ของจุดไปบนกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริมแสดงพิกัด (x, y) เมื่อ t เป็นค่าใด ๆ และแสดงค่าความชันของเส้นสัมผัส ณ จุด t นั้น ๆ

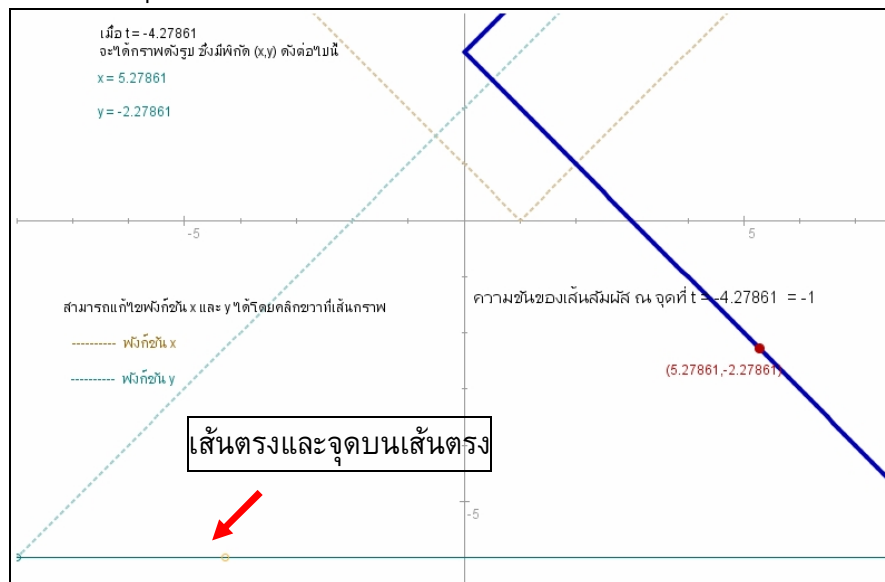


ภาพประกอบ 7

แล้วให้นิสิตสังเกตการเคลื่อนที่ของจุดบนกราฟ การให้โปรแกรมแสดงการเคลื่อนที่ของจุดทำได้โดยการเลื่อนหน้าจอลงไปด้านล่าง เมื่อพบเส้นตรงและจุดบนเส้นตรงนั้น ให้เลือกเครื่องมือ Animation

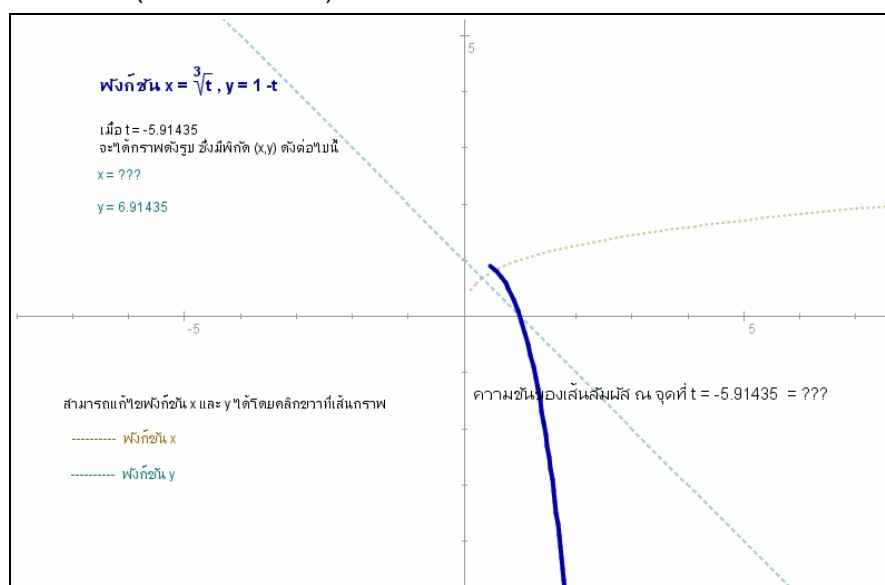


of a point และคลิกที่จุดบนเส้นตรงหนึ่งครั้ง ตามด้วยดับเบิลคลิกที่เส้นตรง โปรแกรมจะแสดงการเคลื่อนที่ของจุดให้ จากนั้นนิสิตสามารถเลื่อนหน้าจอขึ้นไปด้านบนได้ดังเดิม

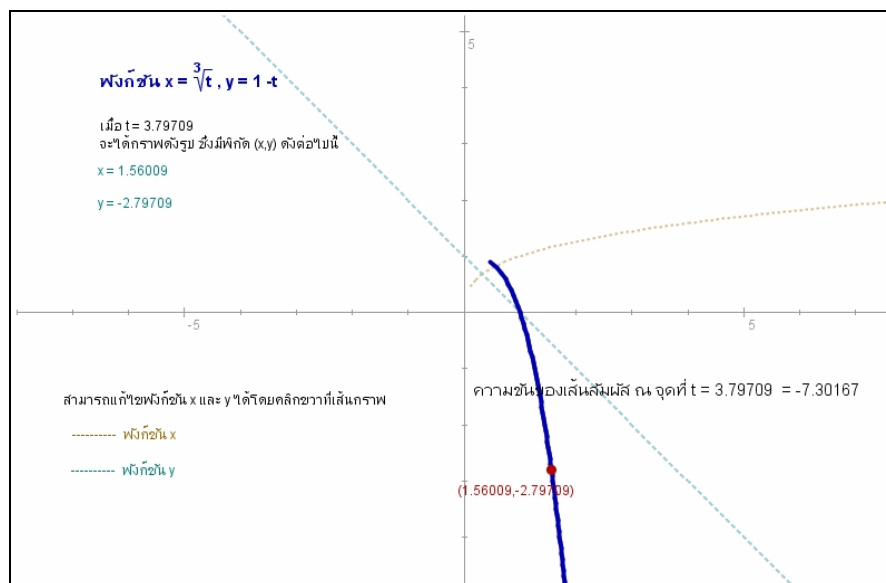


ภาพประกอบ 8

หมายเหตุ โปรแกรม C.a.R. ยังมีข้อจำกัดเรื่องโดเมนของฟังก์ชันบางฟังก์ชัน เช่น ฟังก์ชันรากที่ n เมื่อ $n \geq 2$ ดังนั้นโปรแกรมจะแสดงกราฟของฟังก์ชันเหล่านี้ ตั้งแต่ $x = 0$ เป็นต้นไป เช่น ตัวอย่างที่นำมาแสดงคือกราฟของฟังก์ชัน $x = \sqrt[3]{t}$, $y = 1 - t$ จะพบว่า เมื่อ $t = -5.91435$ (ค่า t เป็นลบ) ซึ่งส่งผลให้ค่า $x = \sqrt[3]{-5.91435}$ (ค่า x เป็นลบ) แต่เนื่องจากโปรแกรม C.a.R. มีข้อจำกัดในเรื่องโดเมนดังกล่าว จึงไม่แสดงค่า x จะแสดงผลเป็น ??? (ภาพประกอบ 3) ตั้งแต่เมื่อ $t = 3.79709$ (ค่า t เป็นบวก) ซึ่งส่งผลให้ $x = \sqrt[3]{3.79709}$ (ค่า x เป็นบวก) โปรแกรม C.a.R. จึงแสดงค่า x (ภาพประกอบ 4)



ภาพประกอบ 9

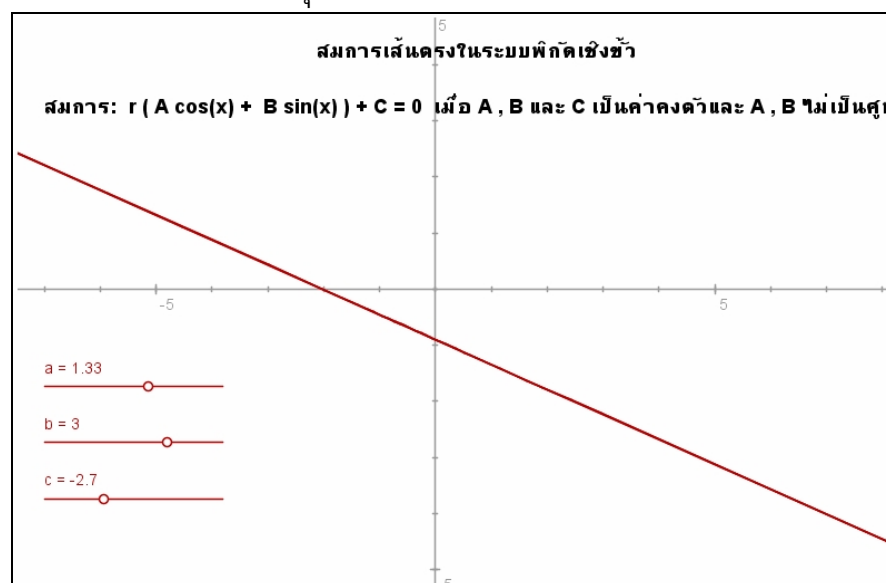


ภาพประกอบ 10

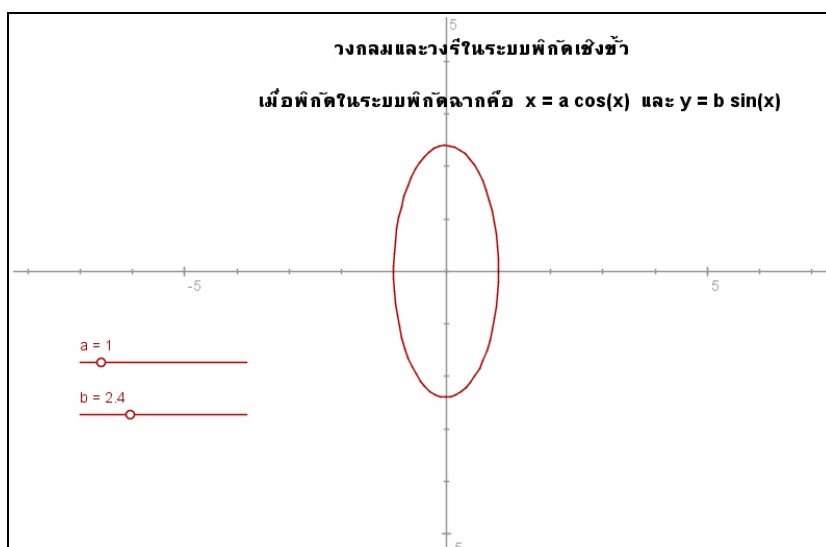
3. ครุณาเข้าสู่บทเรียนโดยการใช้คำถามถามว่า “นิสิตรู้จักระบบพิกัดเชิงขั้วหรือไม่” , “ระบบพิกัดเชิงขั้วคืออะไร” จากนั้นครูอธิบายลักษณะของระบบพิกัดเชิงขั้ว การกำหนดพิกัดของจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว และให้นิสิตทำกิจกรรมหาพิกัดอื่น ๆ ของจุดที่กำหนดให้

4. ครูอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดเชิงขั้วและพิกัดฉาก และให้นิสิตทำกิจกรรมหาพิกัดในระบบพิกัดเชิงขั้วของจุดที่กำหนดพิกัดในระบบพิกัดฉากมาให้

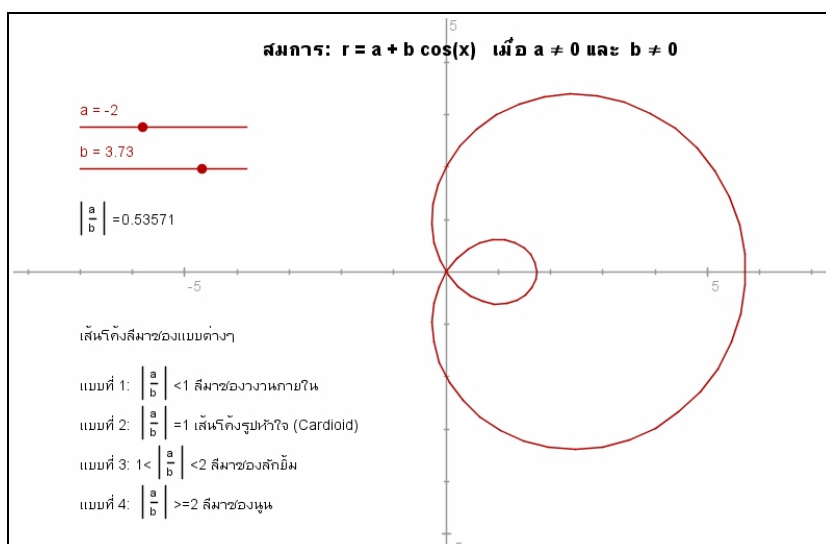
5. นิสิตศึกษาสมการของกราฟที่สำคัญในระบบพิกัดเชิงขั้วจากใบกิจกรรม ครูให้นิสิตศึกษาลักษณะของกราฟเหล่านั้นด้วยกิจกรรมภาคปฏิบัติบนคอมพิวเตอร์ซึ่งเป็นแฟ้มคำสั่งที่สร้างจากโปรแกรม (C.a.R.) เพื่อให้ นิสิตได้สำรวจกราฟเส้นตรงของแต่ละสมการ กราฟวงกลม ความแตกต่างของกราฟวงกลมและวงรี เส้นโค้งรูปหัวใจ ความเหมือนและความต่างของเส้นโค้งรูปหัวใจและเส้นโค้งลิมาซง และสังเกตเส้นโค้งกลีบกุหลาบในแต่ละสมการ



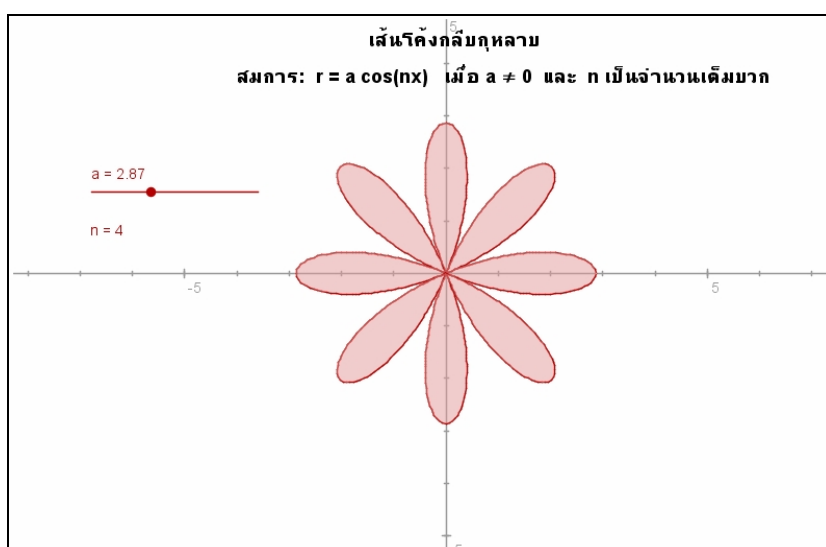
ภาพประกอบ 11



ภาพประกอบ 12

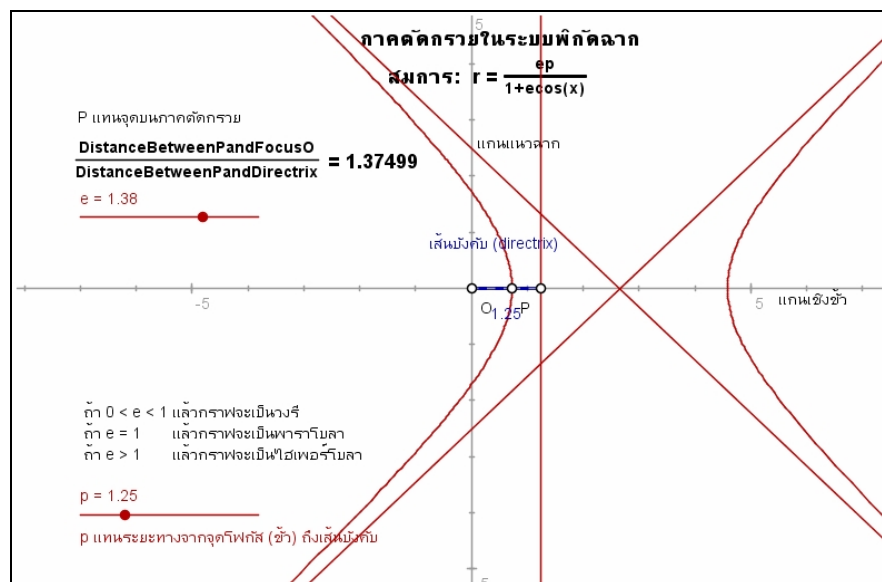


ภาพประกอบ 13



ภาพประกอบ 14

6. ครูทบทวนความรู้เรื่องภาคตัดกรวย จากนั้นให้นิสิตศึกษาบทนิยามของความเยื้องศูนย์กลาง (e : eccentricity) จากแฟ้มคำสั่งที่สร้างจากโปรแกรม (C.a.R.) และสังเกตช่วงของ ค่า e ที่ทำให้เกิดกราฟพาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา พร้อมตอบคำถามในใบกิจกรรม



ภาพประกอบ 15

7. ครูอธิบายการหาอนุพันธ์ในระบบพิกัดเชิงขั้ว และการหาความชันของเส้นสัมผัสกราฟในระบบพิกัดเชิงขั้วและให้นิสิตทำกิจกรรมหาความชันของเส้นสัมผัสกราฟในระบบพิกัดเชิงขั้ว ณ จุดที่กำหนดให้ โดยใช้สูตรจากทฤษฎีบท 4.1 และทฤษฎีบท 4.2 โดยในทฤษฎีบท 4.2 นิสิตต้องใช้ความรู้หามุม θ เมื่อทราบค่าของ $\tan \theta$ ซึ่งนิสิตจะทราบเฉพาะมุม θ ที่สำคัญ ๆ เท่านั้น เช่น $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$ เป็นต้น แต่ถ้าค่าของ $\tan \theta$ เป็นค่าที่นิสิตไม่คุ้นเคย นิสิตจะหามุม θ ไม่ได้หรือต้องใช้เวลาในการเปิดตารางและคำนวณหาอย่างมาก ครูแก้ปัญหาโดยให้นิสิตใช้โปรแกรม Euler ในการหามุม θ

8. ครูและนิสิตพูดคุยสรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้ในวันนี้ ครูมอบหมายให้นิสิตทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนในหนังสือเรียน

5. สื่อการเรียนรู้

1. ใบกิจกรรมที่ 4 เรื่องอนุพันธ์ : อนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม และอนุพันธ์ในพิกัดเชิงขั้ว
2. แฟ้มคำสั่งกิจกรรมภาคปฏิบัติบนคอมพิวเตอร์ : กิจกรรมที่ 4
3. เอกสาร MA 111: คณิตศาสตร์ 1 (หนังสือประกอบการเรียนของภาควิชา)

6. การวัดและประเมินผล

1. ตรวจใบกิจกรรม
2. สังเกตความร่วมมือ ความสนใจในการทำกิจกรรม

บันทึกหลังการสอน

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการสอนที่ 5

รายวิชา : คณ111 (คณิตศาสตร์ 1)

เรื่อง : การประยุกต์ของอนุพันธ์

หัวข้อ : การเขียนกราฟของฟังก์ชัน

คาบที่ 10 - 12

1. สาระสำคัญ / ความคิดรวบยอด

อนุพันธ์ของฟังก์ชันมีความสำคัญต่อการเขียนกราฟของฟังก์ชัน กล่าวคือ อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของฟังก์ชันใด ๆ เกี่ยวข้องกับการเป็นฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลดของฟังก์ชันนั้น โดยพิจารณาว่า ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in (a, b)$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มบน (a, b)

และถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก $x \in (a, b)$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันลดบน (a, b)

โดยที่ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บน (a, b)

และอนุพันธ์อันดับที่สองของฟังก์ชันเกี่ยวข้องกับความเว้าของกราฟของฟังก์ชัน ดังนี้

ถ้า $f''(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in (a, b)$ แล้วกราฟของ f จะเว้าบน บน (a, b)

ถ้า $f''(x) < 0$ สำหรับทุก $x \in (a, b)$ แล้วกราฟของ f จะเว้าล่าง บน (a, b)

โดยที่ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกช่วงที่ทำให้เป็นฟังก์ชันเพิ่ม/ฟังก์ชันลดของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
2. หาจุดสูงสุด/ต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
3. อธิบายทฤษฎีบทค่าสุดขีดด้วยกราฟ และให้เหตุผลประกอบได้
4. หาจุดสูงสุด/ต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
5. หาจุดวิกฤตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
6. อธิบายทฤษฎีบทของรอลและทฤษฎีบทค่ามัธมิตด้วยกราฟได้
7. หาจุดสูงสุด/ต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันด้วยการทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งได้
8. หาจุดสูงสุด/ต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันด้วยการทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับที่สองได้
9. บอกช่วงที่ทำให้กราฟเว้าบนและช่วงที่ทำให้กราฟเว้าล่างของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
10. เขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

3. สาระการเรียนรู้

1. ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

บทนิยาม 5.1 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันบนโดเมน D ที่มี A เป็นสับเซตของ D และ A ไม่เป็นเซตว่าง

1. f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน A ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ สำหรับทุก ๆ ค่า $x_1 < x_2$ บน A
2. f เป็นฟังก์ชันลดบน A ถ้า $f(x_1) > f(x_2)$ สำหรับทุก ๆ ค่า $x_1 < x_2$ บน A

2. ค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์

บทนิยาม 5.2 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันบนโดเมน D และ $x_0 \in D$

1. f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ที่ $x = x_0$ เมื่อ $f(x_0) \geq f(x)$ สำหรับทุกค่า x บน D
และเรียก $(x_0, f(x_0))$ ว่า จุดสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บน D
เรียก $f(x_0)$ ว่า ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บน D
2. f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ ที่ $x = x_0$ เมื่อ $f(x_0) \leq f(x)$ สำหรับทุกค่า x บน D
และเรียก $(x_0, f(x_0))$ ว่า จุดต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บน D
เรียก $f(x_0)$ ว่า ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บน D

3. ทฤษฎีบทค่าสุดขีด

ทฤษฎีบท 5.1 ทฤษฎีบทค่าสุดขีด : ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่นิยามบนช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว f จะมีค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

4. ค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมพัทธ์

บทนิยาม 5.3 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันบนโดเมน D และ $x_0 \in D$

1. f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ที่ $x = x_0$ เมื่อมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ที่ทำให้ $f(x_0) \geq f(x)$ สำหรับทุกค่า $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$
และเรียก $(x_0, f(x_0))$ ว่า จุดสูงสุดสัมพัทธ์ของ f บน D
เรียก $f(x_0)$ ว่า ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f บน D
2. f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ที่ $x = x_0$ เมื่อมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ที่ทำให้ $f(x_0) \leq f(x)$ สำหรับทุกค่า $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$
และเรียก $(x_0, f(x_0))$ ว่า จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f บน D
เรียก $f(x_0)$ ว่า ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f บน D

5. จุดวิกฤต

บทนิยาม 5.4 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงเปิด (a, b)

จุดวิกฤตของ f คือจุด $x = x_0 \in (a, b)$ ซึ่ง (1) $f'(x_0) = 0$ หรือ (2) $f'(x_0)$ หาค่าไม่ได้

6. ทฤษฎีบทของแฟร์มา : Fermat's Theorem

ทฤษฎีบท 5.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงปิด $[a, b]$

ถ้า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = x_0$ เมื่อ $x_0 \in (a, b)$
แล้ว $f'(x_0) = 0$ หรือ f หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ x_0

7. ทฤษฎีบทของรอลทฤษฎีบทค่ามัธยฐาน และทฤษฎีบทอื่น ๆ ที่ช่วยในการเขียนกราฟ

ทฤษฎีบท 5.3 : ทฤษฎีบทของรอล (Rolle's Theorem)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a, b)
ถ้า $f(a) = f(b) = 0$ แล้วจะมีจุดอย่างน้อยหนึ่งจุดที่ทำให้ $f'(x_0) = 0$

ทฤษฎีบท 5.4 : ทฤษฎีบทค่ามัธยฐาน (Mean – Value Theorem)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a, b) แล้วจะมี x_0 ที่ซึ่ง $a < x_0 < b$ และทำให้ $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

ทฤษฎีบท 5.5 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a, b)

ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงเปิด (a, b)

บทแทรก 5.6 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a, b)

ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วงเปิด (a, b)

ทฤษฎีบท 5.7 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a, b)

ถ้า $f'(x) \neq 0$ สำหรับทุก $x \in (a, b)$ แล้ว $f'(x) > 0$ หรือ $f'(x) < 0$ สำหรับทุก $x \in (a, b)$

8. ความเว้าและจุดเปลี่ยนความเว้า

บทนิยาม 5.5 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I

1. ถ้ากราฟของ f อยู่เหนือเส้นสัมผัสของกราฟ ณ จุดใด ๆ บน I
แล้ว กราฟของ f เป็นกราฟเว้าบน บนช่วง I
2. ถ้ากราฟของ f อยู่ใต้เส้นสัมผัสของกราฟ ณ จุดใด ๆ บน I
แล้ว กราฟของ f เป็นกราฟเว้าล่าง บนช่วง I

บทนิยาม 5.6 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I และ $x_0 \in I$

เรียกจุด $x = x_0$ ว่า **จุดเปลี่ยนความเว้า** ถ้ากราฟของ f เปลี่ยนจากเว้าบน เป็นเว้าล่าง หรือกลับกัน ณ จุด $x = x_0$ นี้ โดยที่ (1) $f''(x_0) = 0$ หรือ (2) $f''(x_0)$ หาค่าไม่ได้

9. การทดสอบจุดวิกฤตโดยอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและอนุพันธ์อันดับที่สอง

วิธีทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

ให้ฟังก์ชัน f มีจุดวิกฤตที่ $x = x_0$ และต่อเนื่องที่ $x = x_0$ บนช่วง I

1. ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in (x_1, x_0) \subset I$
และ $f'(x) < 0$ สำหรับทุก $x \in (x_0, x_2) \subset I$ แล้ว f มีจุดสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = x_0$

2. ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก $x \in (x_1, x_0) \subset I$
และ $f'(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in (x_0, x_2) \subset I$ แล้ว f มีจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = x_0$

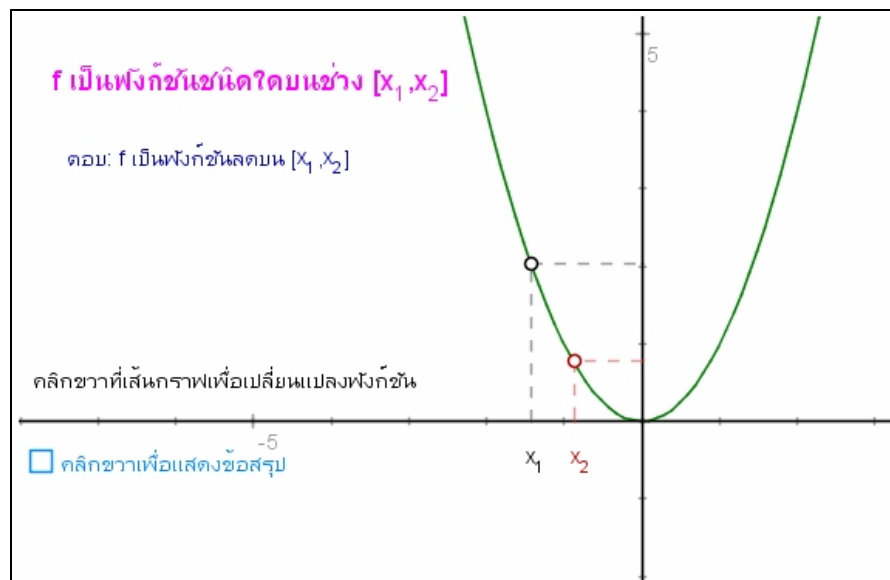
วิธีทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับสอง

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I และมีอนุพันธ์อันดับสองซึ่งต่อเนื่องบนช่วง I และ $x = x_0$ เป็นจุดวิกฤตของฟังก์ชัน f บนช่วง I

1. ถ้า $f''(x_0) > 0$ แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด $x = x_0$
2. ถ้า $f''(x_0) < 0$ แล้ว f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด $x = x_0$
3. ถ้า $f''(x_0) = 0$ ทดสอบด้วยวิธีนี้ไม่ได้

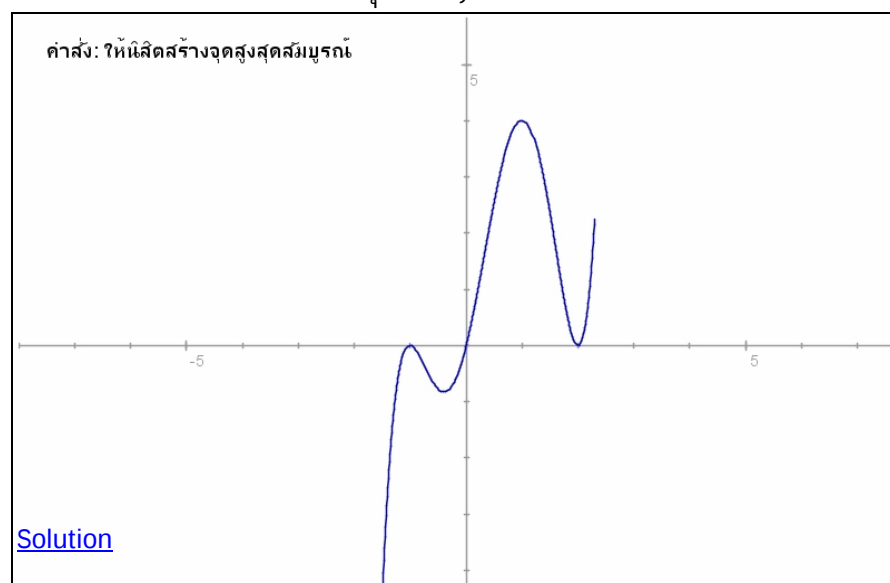
4. กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมนำเข้าสู่บทนิยามของฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด โดยให้นักเรียนใช้โปรแกรม C.a.R. สืบหาการเป็นฟังก์ชันเพิ่ม-ฟังก์ชันลด (ดังภาพประกอบ 1) จากนั้นครูอธิบายบทนิยามของฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลดเพิ่มเติม และให้นักเรียนพิจารณาหาช่วงที่ทำให้ฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

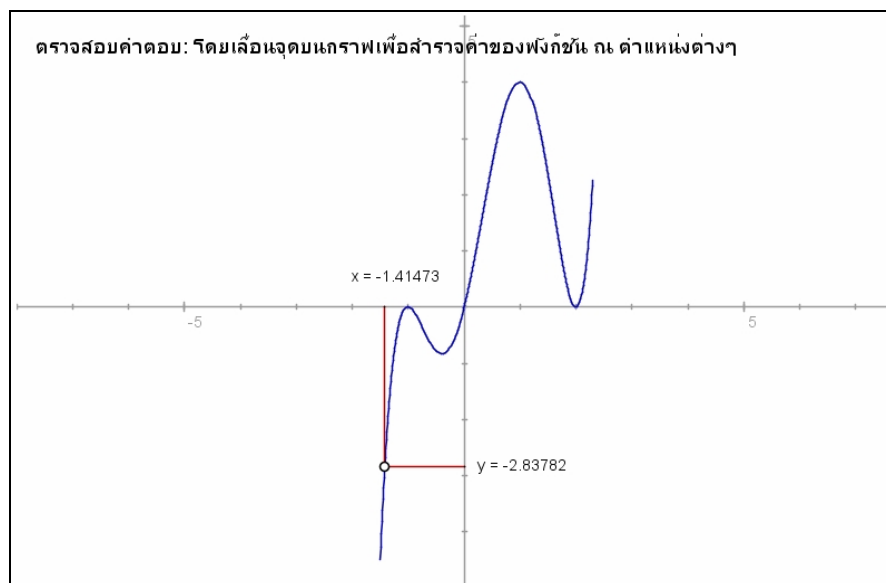


ภาพประกอบ 16

2. ครูอธิบายบทนิยามค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์ และให้นักเรียนทำกิจกรรมหาจุดสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์จากโปรแกรม C.a.R. เมื่อนักเรียนหาจุดสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์ได้ถูกต้องโปรแกรมจะแจ้งให้ทราบว่าถูกต้อง จากนั้นให้นักเรียนคลิกที่ Solution เพื่อตรวจสอบคำตอบตามแนวคิดของบทนิยามโดยการสำรวจค่าของฟังก์ชัน ณ จุดต่าง ๆ และตอบคำถามลงในใบกิจกรรม

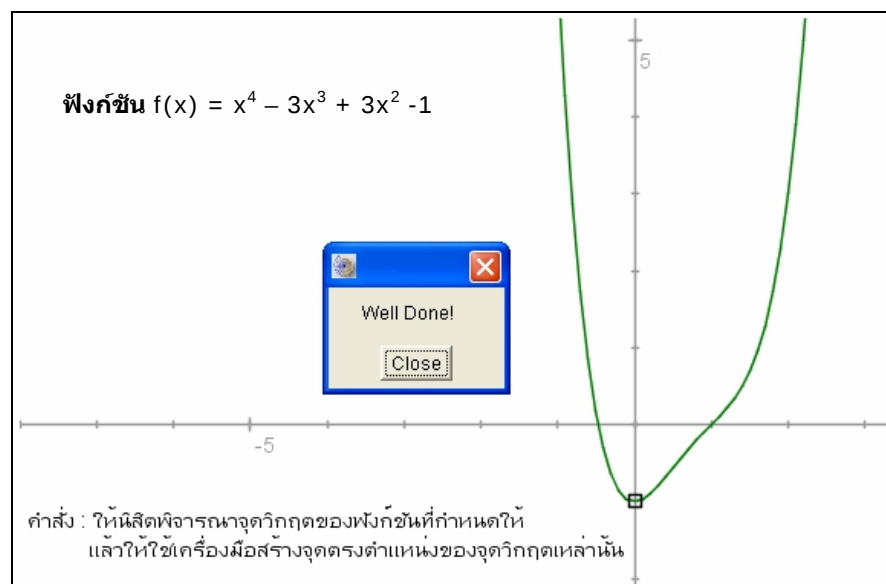


ภาพประกอบ 17



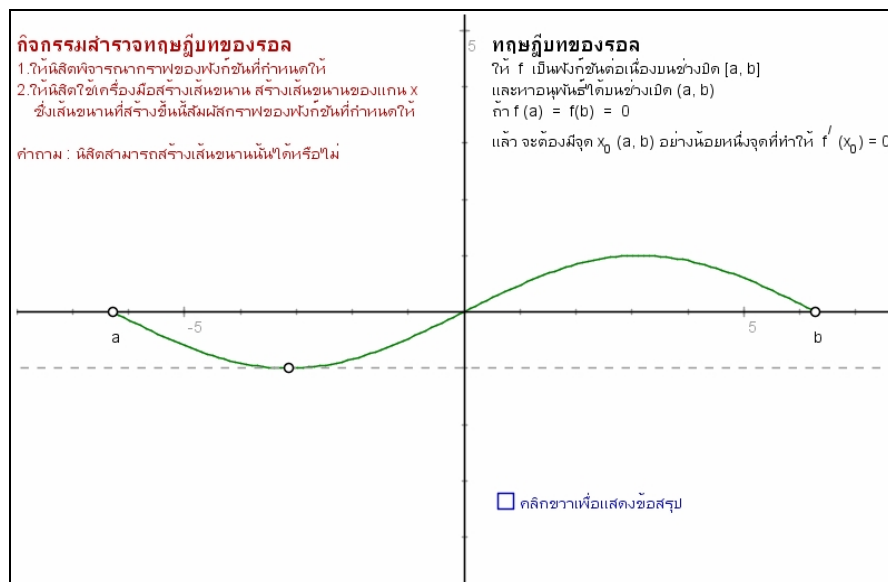
ภาพประกอบ 18

3. ครูอธิบายบทนิยามค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมพัทธ์เพิ่มเติม จากนั้นครูให้นิสิตศึกษาบทนิยามจุดวิกฤต และให้นิสิตทำกิจกรรมหาจุดวิกฤตจากโปรแกรม C.a.R. นิสิตช่วยกันพิจารณาหาจุดวิกฤตของแต่ละกราฟที่กำหนดให้ โดยเมื่อนิสิตหาจุดวิกฤตได้ถูกต้องโปรแกรมจะแจ้งให้ทราบว่าถูกต้อง (ดังภาพประกอบ 4) และให้นิสิตตอบลงในใบกิจกรรม

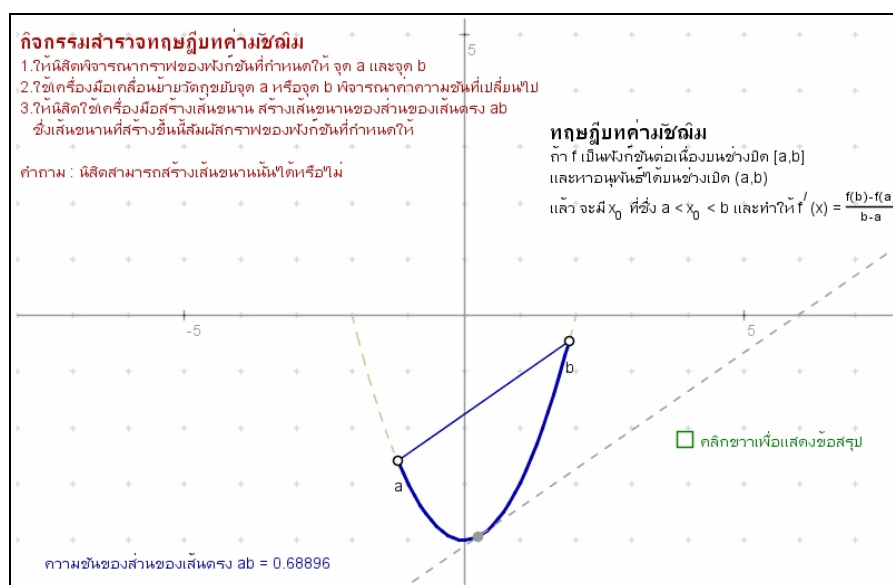


ภาพประกอบ 19

4. ครูให้นักเรียนทำกิจกรรมทฤษฎีบทของรอลและทฤษฎีบทค่ามัธยฐานจากโปรแกรม C.a.R.
(ดังภาพประกอบ 5 - 6) ในขั้นตอนแรกของกิจกรรมจะเปิดโอกาสให้นักเรียนปฏิบัติและคิดหาคำตอบด้วยตนเอง จากนั้นให้จึงอภิปรายคำตอบเป็นหมู่คณะ

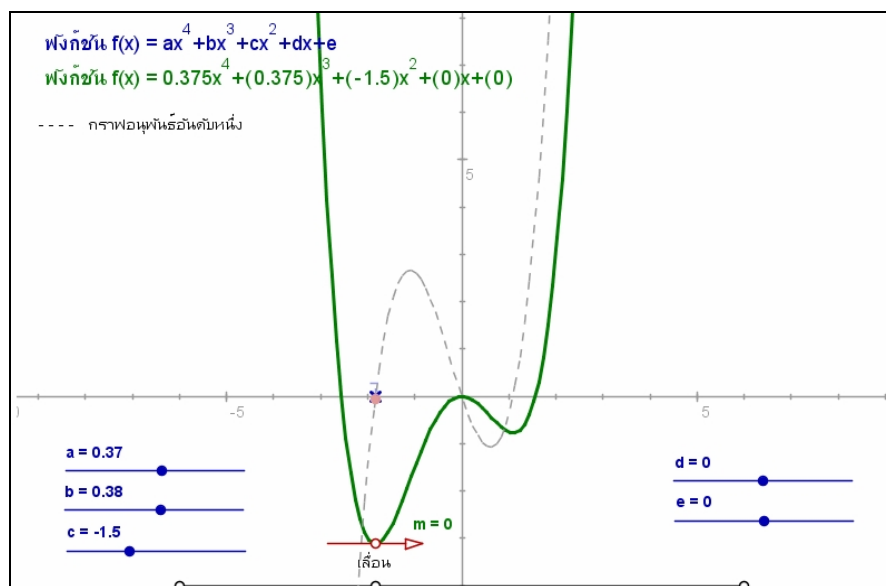


ภาพประกอบ 20

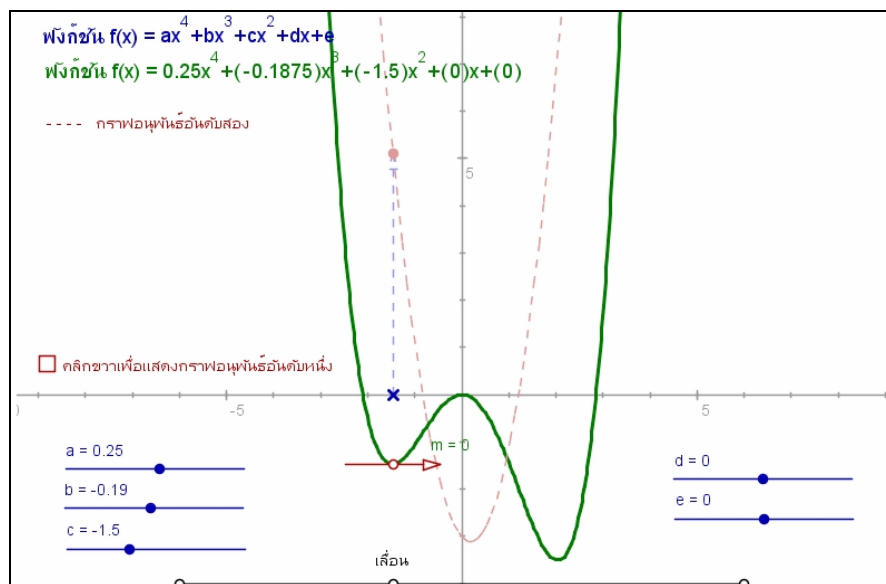


ภาพประกอบ 21

5. ครูนำเข้าสู่เรื่องการทดสอบการเป็นจุดสุดขีดสัมพัทธ์โดยอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและอนุพันธ์อันดับที่สอง ด้วยบทสนทนาของตัวละครซึ่งมีอยู่ในใบกิจกรรม และครูให้นิสิตทำกิจกรรมสำรวจกราฟของ $f(x)$ และ $f'(x)$ จากโปรแกรม C.a.R. นิสิตจะได้เห็นการเคลื่อนที่ของจุดบนกราฟทั้งสองพร้อมสังเกตค่าความชัน เพื่อให้เข้าใจแนวคิดของการทดสอบจุดวิกฤตโดยอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง (ดังภาพประกอบ 7) จากนั้นครูอธิบายนิยามความเว้า นิยามจุดเปลี่ยนความเว้า และให้นิสิตทำกิจกรรมสำรวจแนวคิดการทดสอบจุดวิกฤตโดยอนุพันธ์อันดับที่สองจากโปรแกรม C.a.R. (ดังภาพประกอบ 8)



ภาพประกอบ 22



ภาพประกอบ 23

7. ครูให้นิสิตประมวลความรู้ต่าง ๆ ที่ได้เรียนมาในวันนี้ ทำกิจกรรมสร้างกราฟของฟังก์ชันต่าง ๆ ที่ครูกำหนดให้เพื่อเป็นการฝึกทักษะการสร้างกราฟโดยใช้ความรู้เรื่องอนุพันธ์

8. ครูและนิสิตพูดคุยสรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้ในวันนี้ ครูมอบหมายให้นิสิตทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนในหนังสือเรียน

5. สื่อการเรียนรู้

1. ใบกิจกรรมที่ 5 เรื่องการประยุกต์ของอนุพันธ์ : การเขียนกราฟของฟังก์ชัน
2. แฟ้มคำสั่งกิจกรรมภาคปฏิบัติบนคอมพิวเตอร์ : กิจกรรมที่ 5
3. เอกสาร MA 111: คณิตศาสตร์ 1 (หนังสือประกอบการเรียนของภาควิชา)

6. การวัดและประเมินผล

1. ตรวจใบกิจกรรม
2. สังเกตความร่วมมือ ความสนใจในการทำกิจกรรม

บันทึกหลังการสอน

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการสอนที่ 6

รายวิชา : คณ111 (คณิตศาสตร์ 1)

เรื่อง : การประยุกต์ของอนุพันธ์

หัวข้อ : โจทย์ปัญหาการหาค่าสูงสุดและต่ำสุด

คาบที่ 13 - 14

1. สาระสำคัญ / ความคิดรวบยอด

ปัญหามากมายในชีวิตประจำวันเกี่ยวข้องกับการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน ความรู้ในเรื่องการทดสอบการเป็นจุดสุดขีดสัมพันธ์โดยอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและอนุพันธ์อันดับที่สอง สามารถช่วยแก้ปัญหาเหล่านี้ได้

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นิสิตสามารถสร้างฟังก์ชันของปริมาณที่ต้องการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด พร้อมกำหนดตัวแปร และกำหนดขอบเขตจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้
2. นิสิตสามารถหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดที่โจทย์ต้องการได้

3. สาระการเรียนรู้

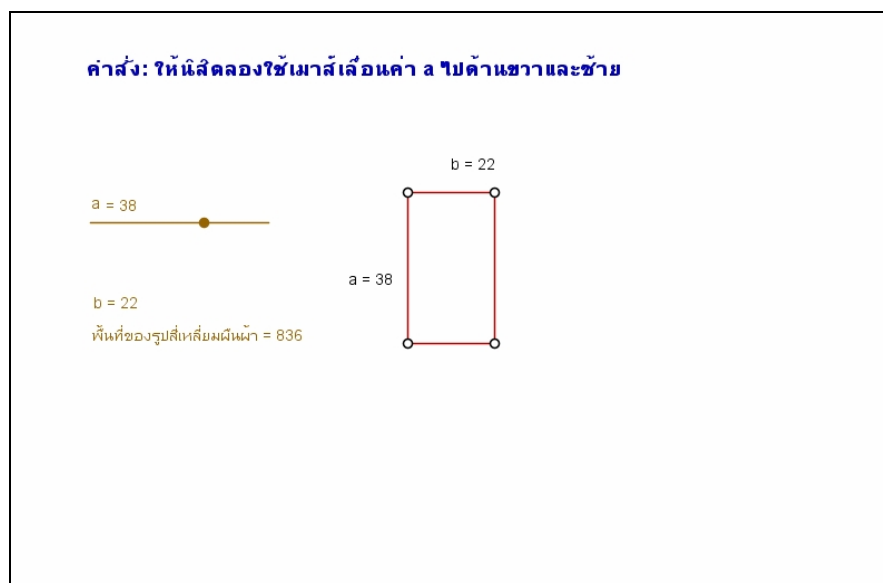
โจทย์ปัญหาการหาค่าสูงสุดและต่ำสุด

ในชีวิตประจำวัน มีปัญหามากมายที่ต้องการคำตอบเป็นค่าที่เหมาะสม (Optimization Problem) ซึ่งเกี่ยวข้องกับการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน เช่น ถ้าต้องการใช้ลวดหนาม ล้อมรั้วเพื่อสร้างเป็นสวนมะม่วงรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า จะต้องสร้างรั้วขนาดเท่าใด จึงจะได้พื้นที่มากที่สุด หรือจะผลิตสินค้ากี่ชิ้น เพื่อให้กำไรมากที่สุด โดยที่สินค้ามีต้นทุนและราคาขายที่กำหนดไว้ เป็นต้น ขั้นตอนวิธีการเปลี่ยนรูปปัญหาในชีวิตจริงให้อยู่ในรูปฟังก์ชัน

1. เขียนรูปประกอบ หรือพิจารณารายละเอียดของสิ่งที่โจทย์กำหนดให้
2. กำหนดตัวแปรแทนปริมาณต่าง ๆ ที่มีในโจทย์
3. สร้างฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด ซึ่งปัญหาส่วนใหญ่จะเป็นการหาพื้นที่ การหาปริมาตร หรือบางปัญหาอาจกำหนดฟังก์ชันมาให้แล้ว
4. ถ้าฟังก์ชันมีหลายตัวแปร ต้องทำให้เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียว โดยใช้ความสัมพันธ์ของตัวแปรที่เกี่ยวข้อง
5. กำหนดขอบเขตของตัวแปรตามเงื่อนไขของโจทย์
6. หาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน เพื่อได้เป็นคำตอบของปัญหา

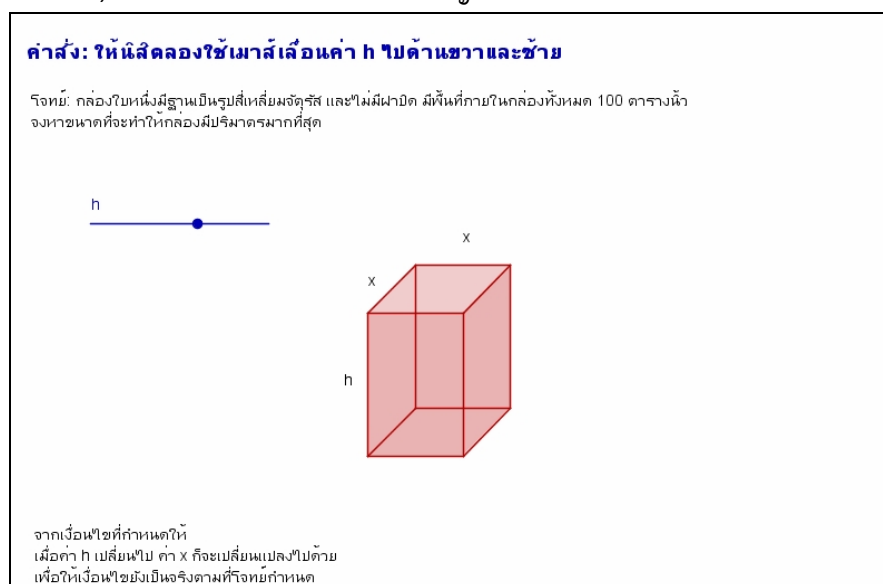
4. กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูนำเข้าสู่บทเรียนโดยกล่าวถึงประโยชน์ของการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดเพื่อใช้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน พร้อมอธิบายขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด
2. ครูให้นิสิตทำกิจกรรมแก้โจทย์ปัญหาค่าสูงสุดข้อที่ 1 เป็นเรื่องเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กำหนดความยาวรอบรูปมาให้ และให้หาความยาวและความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าดังกล่าว ซึ่งทำให้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปนี้มีพื้นที่มากที่สุด จากโปรแกรม C.a.R. (ดังภาพประกอบ 1) ซึ่งแสดงภาพการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร เพื่อให้ นิสิตเข้าใจลักษณะการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรมากขึ้น



ภาพประกอบ 24

3. นิสิตทำกิจกรรมปัญหาค่าสูงสุดข้อที่ 2 เป็นเรื่องเกี่ยวกับกล่องใบหนึ่งซึ่งกำหนดพื้นที่ภายในกล่องมาให้และให้หาขนาดของกล่องที่ทำให้กล่องมีปริมาตรมากที่สุด จากโปรแกรม C.a.R. (ดังภาพประกอบ 2) จากนั้นดำเนินการแก้โจทย์ปัญหาตามปกติ



ภาพประกอบ 25

4. นิสิตทำกิจกรรมแก้โจทย์ปัญหาค่าสูงสุดข้อที่ 3 เป็นเรื่องเกี่ยวกับการหาจำนวนต่าง ๆ ซึ่งกำหนดความสัมพันธ์ของจำนวนเหล่านั้นมาให้ โดยที่ผลคูณของจำนวนเหล่านั้นมีค่ามากที่สุด โดยครูและนิสิตอภิปรายวิธีการแก้โจทย์ปัญหาในข้อนี้ร่วมกัน

5. นิสิตแก้โจทย์ปัญหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดที่เหลือ โดยที่นิสิตได้ทำกิจกรรมภาคปฏิบัติบนคอมพิวเตอร์ ในลักษณะเดียวกับโจทย์ปัญหาข้อต่าง ๆ ที่ผ่านมา รวมถึงอภิปรายซักถามข้อสงสัยต่าง ๆ ร่วมกันในชั้นเรียน

6. ครูและนิสิตพูดคุยสรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้ในวันนี้ ครูมอบหมายให้นิสิตทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนในหนังสือเรียน

5. สื่อการเรียนรู้

1. ใบกิจกรรมที่ 6 เรื่องการประยุกต์ของอนุพันธ์ : โจทย์ปัญหาการหาค่าสูงสุดและต่ำสุด
2. แฟ้มคำสั่งกิจกรรมภาคปฏิบัติบนคอมพิวเตอร์ : กิจกรรมที่ 6
3. เอกสาร MA 111: คณิตศาสตร์ 1 (หนังสือประกอบการเรียนของภาควิชา)

6. การวัดและประเมินผล

1. ตรวจใบกิจกรรม
2. สังเกตความร่วมมือ ความสนใจในการทำกิจกรรม

บันทึกหลังการสอน

.....

.....

.....

.....

.....

แผนการสอนที่ 7

รายวิชา : คณ111 (คณิตศาสตร์ 1)

เรื่อง : การประยุกต์ของอนุพันธ์

คาบที่ 15 - 16

หัวข้อ : ความเร็วและความเร่ง อัตราสัมพัทธ์ และค่าเชิงอนุพันธ์และการประยุกต์

1. สาระสำคัญ / ความคิดรวบยอด

การหาความเร็วและความเร่ง ใช้ความรู้เรื่องการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและการหาอนุพันธ์อันดับสอง และเรื่องจุดวิกฤต

การหาอัตราสัมพัทธ์ ใช้ความรู้เรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย

ความหมายทางเรขาคณิตของค่าเชิงอนุพันธ์ สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในประมาณค่า Δy ด้วย dy และจะสามารถประมาณค่า Δy ด้วย dy ได้ถูกต้องมากขึ้น เมื่อค่าของ Δx น้อยลงเรื่อย ๆ

2. จุดประสงค์การเรียนรู้

1. อธิบายลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุได้
2. เมื่อกำหนดสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุมาให้ สามารถหาความเร็วและความเร่งเมื่อเวลา t ใด ๆ ได้
3. อธิบายลักษณะการเปลี่ยนแปลงที่โจทย์ต้องการทราบได้
4. หาอัตราการเปลี่ยนแปลงที่โจทย์ต้องการทราบได้
5. ใช้ค่าเชิงอนุพันธ์ในการประมาณค่าของฟังก์ชันได้
6. หาค่าคลาดเคลื่อนในการประมาณค่าของฟังก์ชันด้วยค่าเชิงอนุพันธ์ได้

3. สาระการเรียนรู้

1. ความเร็วและความเร่ง

เหตุผลที่สมการของความเร็วหาได้จากการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่

วัตถุเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง วัดระยะทางที่วัตถุนั้นเคลื่อนที่ไปในช่วงเวลาหนึ่ง

ถ้าให้ s = ระยะทางมีหน่วยตามที่กำหนด

t = เวลา มีหน่วยตามที่กำหนด

เราจะได้ $s = f(t)$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ

จากความรู้ทางคณิตศาสตร์เบื้องต้น เราทราบว่า

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \text{ความเร็วเฉลี่ยของวัตถุซึ่งเคลื่อนที่ไปในเวลา } t_2 - t_1 \text{ หน่วย}$$

ถ้าเราเปลี่ยนสัญลักษณ์ โดยให้ $t_2 - t_1 = \Delta t$ จะได้

$$\frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t} = \text{ความเร็วเฉลี่ยของวัตถุซึ่งเคลื่อนที่ไปในเวลา } \Delta t \text{ หน่วย}$$

โดยไม่เสียสภาพทั่วไปเราจะให้ t_1 แทนเวลา t ใดๆ และ

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t} = \text{ความเร็วชั่วขณะของวัตถุเมื่อเวลา } t \text{ ใด ๆ}$$

ซึ่งเราทราบว่านี่คืออนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน f

นี่คือเหตุผลว่าทำไมสมการของความเร็วจึงหาได้จากการหาอนุพันธ์ของ

ฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่นั่นเอง

(และเช่นเดียวกันกับเมื่อหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับความเร็ว จะได้

สมการของความเร่ง)

การกำหนดค่าบวกหรือค่าลบของระยะทาง s , ความเร็ว v , ความเร่ง a

ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับความเร็ว ความเร่ง เราต้องกำหนดทิศทางของการเคลื่อนที่ให้อยู่โดยกำหนดค่าบวกหรือค่าลบให้แก่ตัวแปร s, v, a ดังนี้

ข้อตกลง $A \longrightarrow B$

ถ้ากำหนดให้วัตถุเคลื่อนที่จากจุด A ไปยังจุด B จะได้

1. ระยะทาง s จากจุด A ไป B มีค่าเป็นบวก และถ้ากลับกัน s จะมีค่าเป็นลบ
2. ความเร็ว v ของวัตถุที่เคลื่อนที่จาก A ไป B มีค่าเป็นบวก
และถ้ากลับกัน v จะมีค่าเป็นลบ
3. ความเร่ง a มีค่าแปรตามการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว v ดังนี้
 - 3.1 ถ้าความเร็วเพิ่มขึ้น a มีค่าเป็นบวก
 - 3.2 ถ้าความเร็วลดลง a มีค่าเป็นลบ

2. อัตราสัมพัทธ์

จากเรื่องความเร็วและความเร่งที่ผ่านมาเป็นการพิจารณาอัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะทาง (ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา) เทียบกับเวลา ความเร็วและความเร่งจึงเป็นตัวอย่างหนึ่งของอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรเพียงตัวเดียว (Rate of Change) เท่านั้น

ในขณะที่อัตราสัมพัทธ์ (Related Rate) เป็นการพิจารณาอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรหลายตัว (ซึ่งต่างก็เป็นฟังก์ชันของ x) เทียบกับ x ประโยชน์ของการศึกษาเรื่องอัตราสัมพัทธ์ คือ หากเราทราบอัตราการเปลี่ยนแปลงเพียงบางตัวเทียบกับ x เราก็จะสามารถหาอัตราการเปลี่ยนแปลงตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องได้ เรียกอัตราการเปลี่ยนแปลงที่เกี่ยวข้องนี้ว่า “อัตราสัมพัทธ์”

ขั้นตอนในการแก้ปัญหาโจทย์เกี่ยวกับอัตราสัมพัทธ์

1. เขียนรูป หรือพิจารณารายละเอียดของสิ่งที่โจทย์กำหนดให้
2. สร้างสมการแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรที่ทราบอัตราการเปลี่ยนแปลงกับตัวแปรที่ไม่ทราบค่า
3. หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการในข้อ 2 เทียบกับเวลา (t)
4. แทนค่าตัวแปรและอัตราการเปลี่ยนแปลงที่ทราบลงในสมการจากข้อ 3

5. หาอัตราการเปลี่ยนแปลงที่ต้องการ โดยการแก้สมการจากข้อ 4

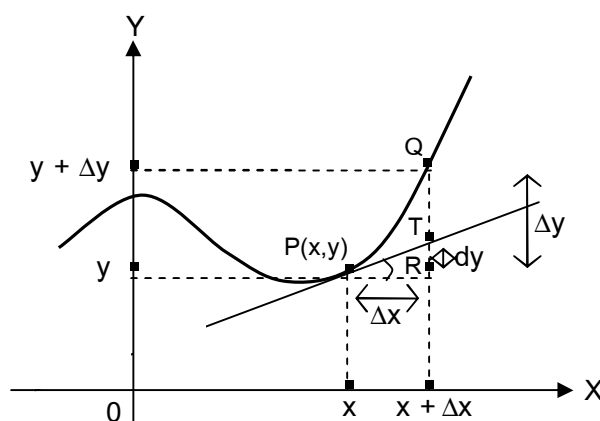
3. ค่าเชิงอนุพันธ์และการประยุกต์

เหตุผลที่ทำให้ dy จึงใช้ประมาณค่า Dy ได้

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ในช่วง I

ให้ $P(x, y)$ และ $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ เป็นจุดสองจุดบนกราฟของ $y = f(x)$

ในช่วง I ดังรูป



ลากเส้นสัมผัส PT ทำมุม θ กับแกน x นั่นคือ $\angle TPR = \theta$ และ f มีอนุพันธ์
ที่จุด $x \in I$ ดังนั้น $\theta \neq \frac{\pi}{2}$

$$\text{เราจะได้ความชันของเส้นสัมผัส } PT = \frac{dy}{dx} = \tan \theta = \frac{RT}{PR}$$

$$\text{เพราะว่า } PR = \Delta x = dx \text{ ทำให้ } RT = dy = f'(x)\Delta x$$

$$\text{ดังนั้น } |\Delta y - dy| = |QR - TR|$$

จากรูปเราจะเห็นว่าเมื่อ Q เคลื่อนที่มาตามกราฟของ $y = f(x)$ ยิ่งเข้าใกล้จุด P เข้ามาเท่าไร ความแตกต่างระหว่าง Δy และ dy จะยิ่งน้อยลง ๆ นั่นคือเมื่อ Δx น้อยลงมาก ๆ dy จะประมาณค่า Δy ได้ใกล้เคียงมากขึ้น และเราจะเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\Delta y \approx dy = f'(x)\Delta x \quad \text{เมื่อ } dx = \Delta x \text{ และ } \Delta x \text{ มีค่าน้อยมาก ๆ}$$

เรียก dy ว่า ค่าเชิงอนุพันธ์ (Differential) ของตัวแปรตาม y

4. บทนิยามค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ และบทนิยามค่าคลาดเคลื่อนร้อยละ

ให้ ΔA เป็นค่าคลาดเคลื่อนของปริมาณ A

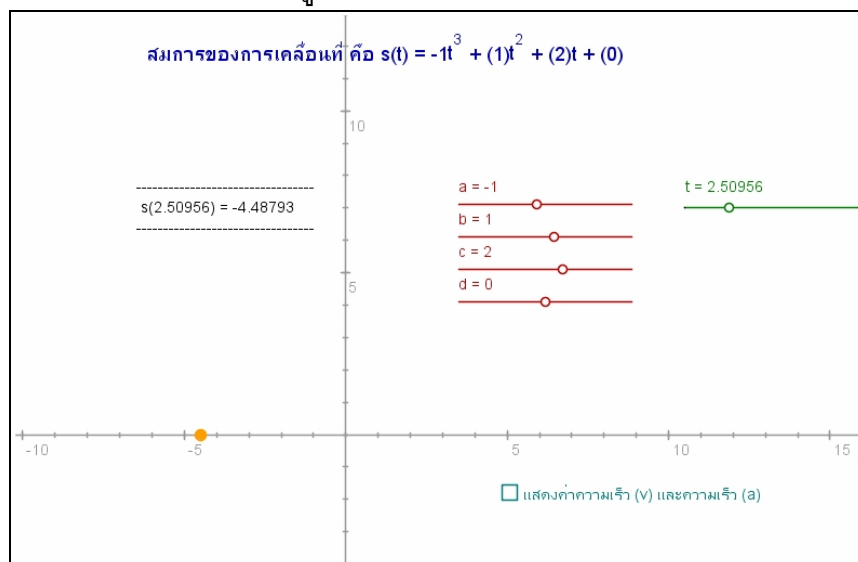
$$1. \frac{\Delta A}{A} \text{ เรียกว่า ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (Relative Error)}$$

$$2. \frac{\Delta A}{A} \times 100 \text{ เรียกว่า ค่าคลาดเคลื่อนร้อยละ (Percentage Error)}$$

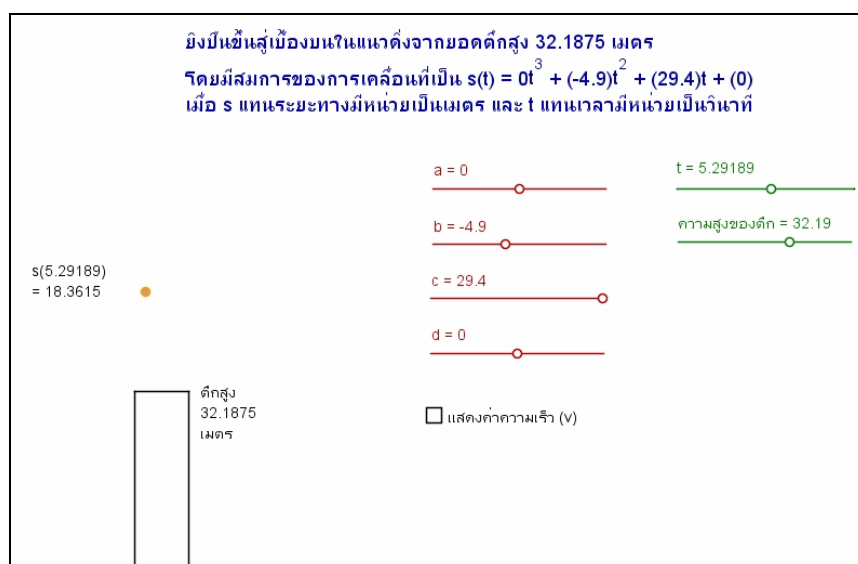
4. กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูถามคำถาม “นิสิตคิดว่าทำไมสมการของความเร็วจึงหาได้จากการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่” นิสิตศึกษาใบกิจกรรมพร้อมอภิปรายร่วมกันในชั้นเรียน จากนั้นครูอธิบายการกำหนดค่าบวกหรือค่าลบของระยะทาง (s) ความเร็ว (v) ความเร่ง (a)

2. นิสิตทำกิจกรรมเรื่องความเร็วความเร่งจากโปรแกรม C.a.R. (ดังภาพประกอบ 1-2) แล้วตอบคำถามลงในใบกิจกรรม จากนั้นครูและนิสิตอภิปรายร่วมกันถึงลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุ

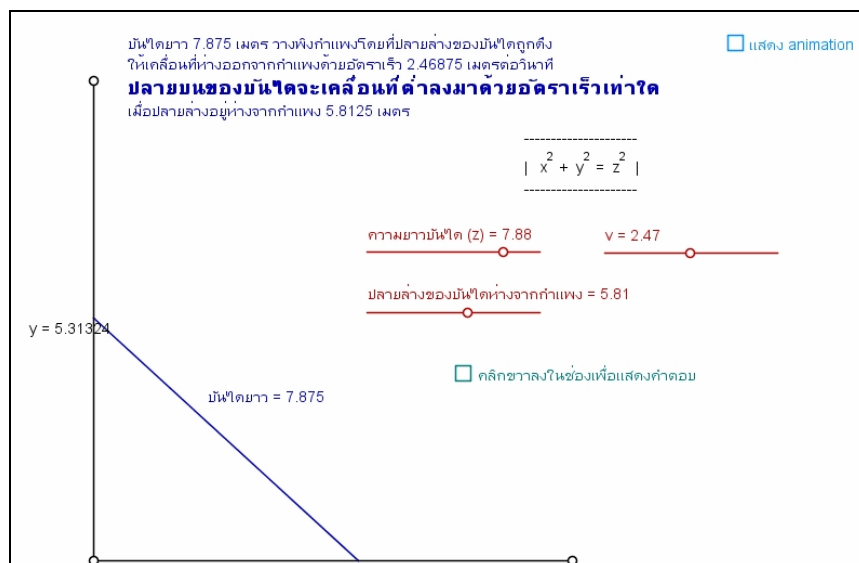


ภาพประกอบ 26

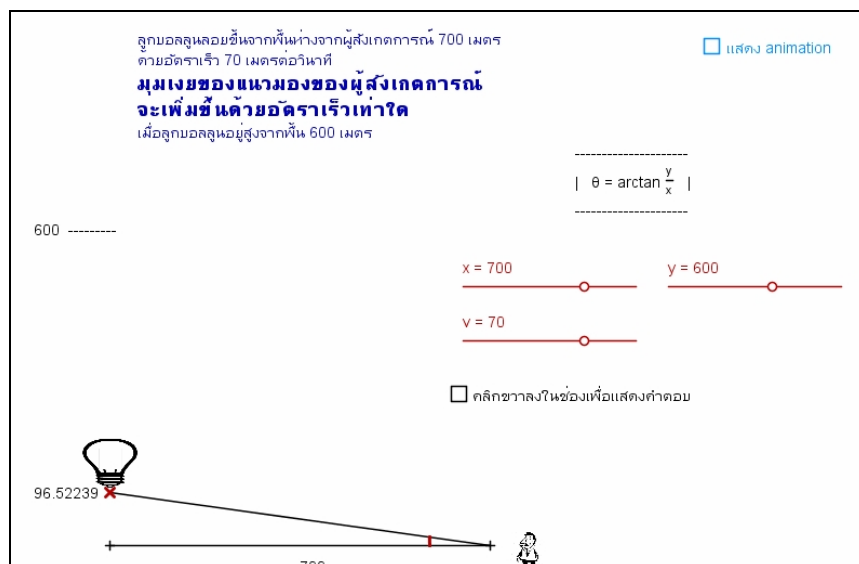


ภาพประกอบ 27

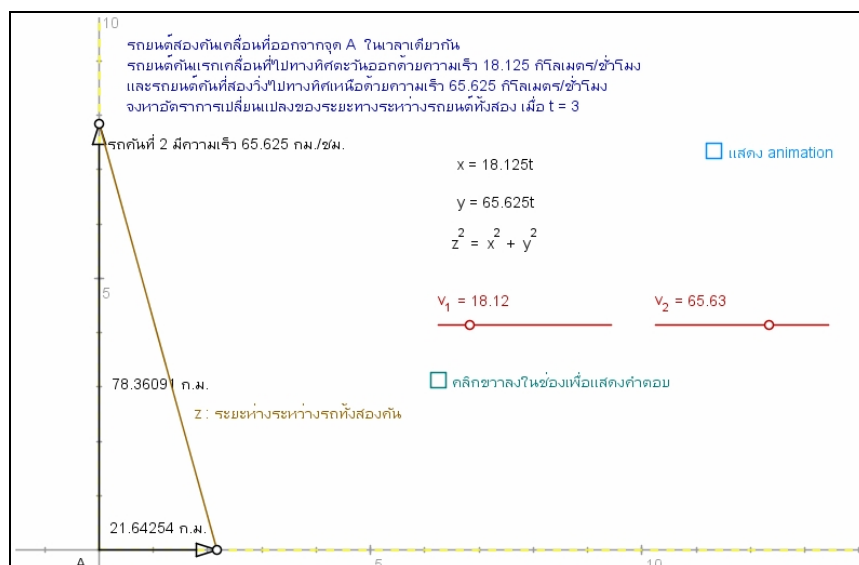
3. ครูอธิบายเรื่องอัตราสัมพัทธ์และขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหาเรื่องอัตราสัมพัทธ์ ครูและนิสิตอภิปรายถึงลักษณะการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรต่าง ๆ ที่โจทย์ต้องการทราบ นิสิตทำกิจกรรมจากโปรแกรม C.a.R. (ดังภาพประกอบ 3 – 7) ซึ่งแสดงภาพการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรประกอบการอภิปราย จากนั้นนิสิตหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรต่าง ๆ ดังกล่าว



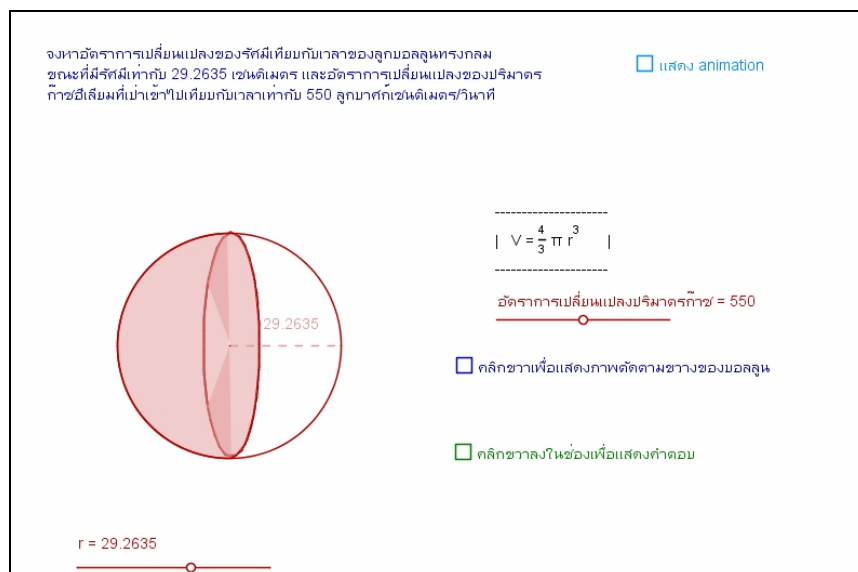
ภาพประกอบ 28



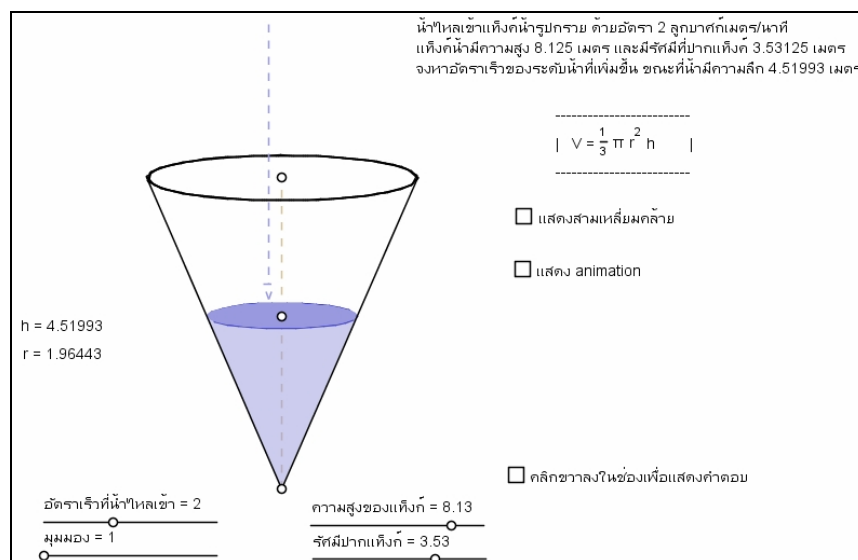
ภาพประกอบ 29



ภาพประกอบ 30



ภาพประกอบ 31

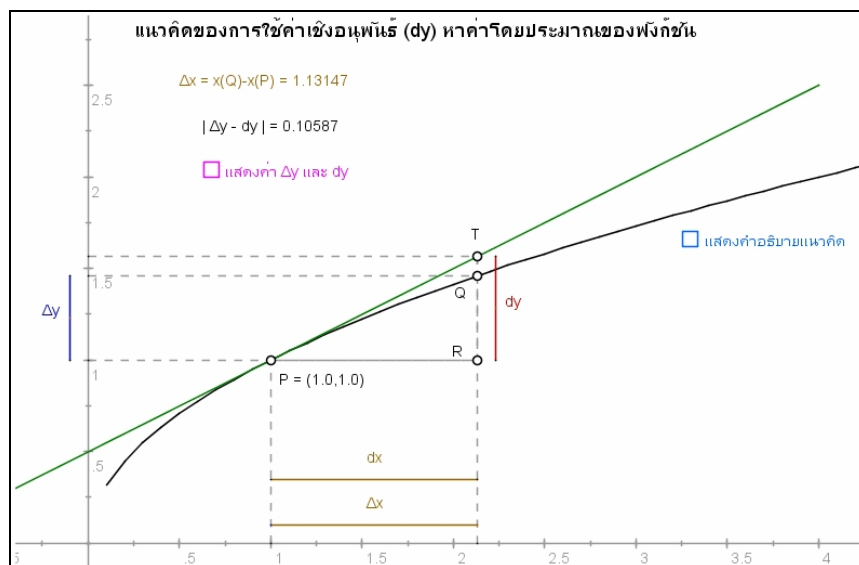


ภาพประกอบ 32

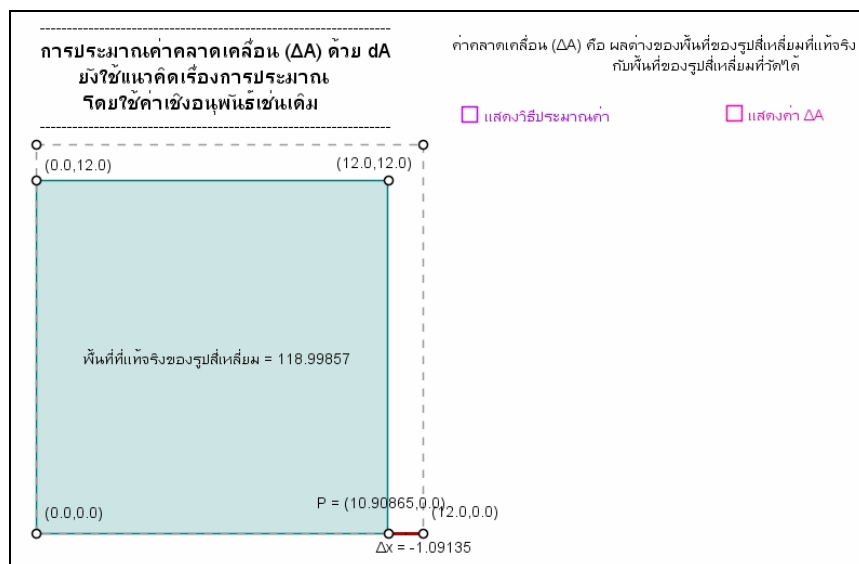
4. ครูถามคำถาม “นิสิตคิดว่าทำไมจึงใช้ dy ประมาณค่า Δy ได้” ครูให้นิสิตทำกิจกรรมเพื่อเหตุผลโดยใช้ความหมายทางเรขาคณิตของค่าเชิงอนุพันธ์จากโปรแกรม C.a.R.

(ดังภาพประกอบ 8) จากนั้นครูให้นิสิตทำกิจกรรมการประมาณค่าของฟังก์ชันที่กำหนดให้

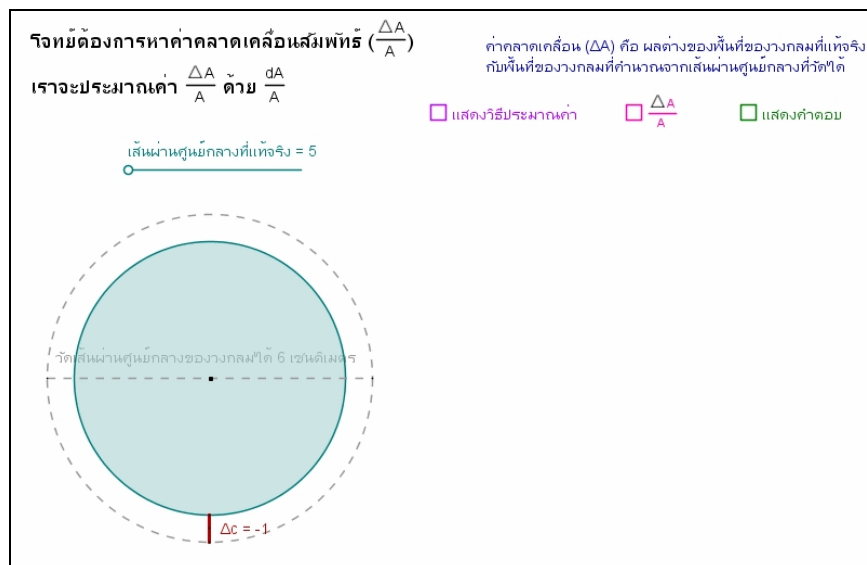
5. นิสิตศึกษาบทนิยามค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ และบทนิยามค่าคลาดเคลื่อนร้อยละ ครูอธิบายขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาค่าคลาดเคลื่อน ได้แก่ อ่านโจทย์ พิจารณาสถานการณ์ที่กำหนดให้ กำหนดตัวแปร สร้างฟังก์ชันเพื่อหาคำตอบ และดำเนินการหาค่าคลาดเคลื่อนตามที่โจทย์ต้องการ จากนั้นนิสิตลงมือทำกิจกรรมการหาค่าคลาดเคลื่อนจากโปรแกรม C.a.R. (ดังภาพประกอบ 9 – 11) และตอบคำถามลงในใบกิจกรรม



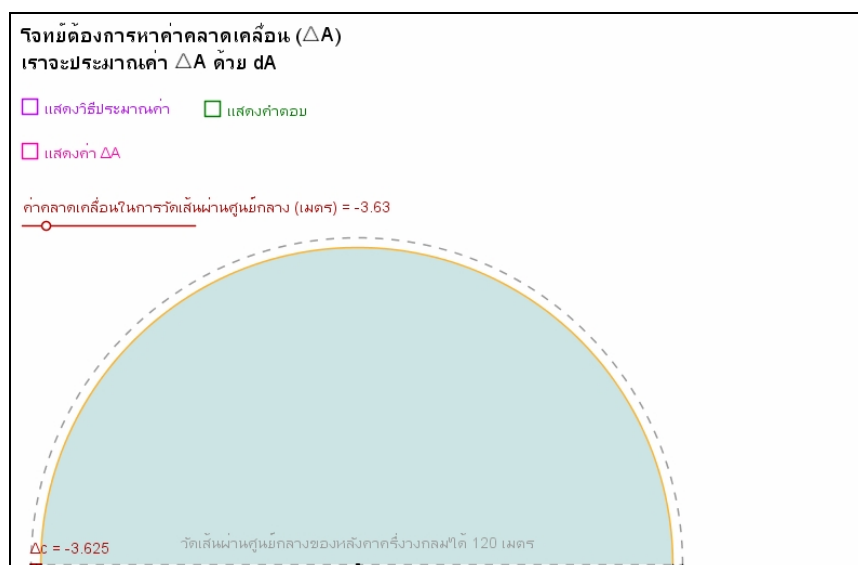
ภาพประกอบ 33



ภาพประกอบ 34



ภาพประกอบ 35



ภาพประกอบ 36

6. ครูและนิสิตพูดคุยสรุปสิ่งที่ได้เรียนรู้ในวันนี้ ครูมอบหมายให้นิสิตทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนในหนังสือเรียน

5. สื่อการเรียนรู้

1. ใบกิจกรรมที่ 7 เรื่องการประยุกต์ของอนุพันธ์ : ความเร็วและความเร่ง อัตราสัมพัทธ์ และค่าเชิงอนุพันธ์และการประยุกต์
2. แฟ้มคำสั่งกิจกรรมภาคปฏิบัติบนคอมพิวเตอร์ : กิจกรรมที่ 7
3. เอกสาร MA 111: คณิตศาสตร์ 1 (หนังสือประกอบการเรียนของภาควิชา)

6. การวัดและประเมินผล

1. ตรวจใบกิจกรรม
2. สังเกตความร่วมมือ ความสนใจในการทำกิจกรรม

บันทึกหลังการสอน

.....

.....

.....

.....

.....

ภาคผนวก จ

**กิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ โดยใช้โปรแกรม C.a.R.
และโปรแกรม Euler สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี**

ใบกิจกรรมที่ 1

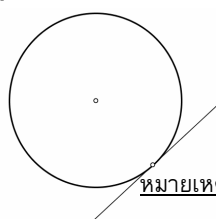
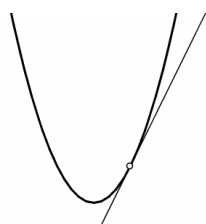
วิชา คณิตศาสตร์ 1 (MATHEMATICS 1) : MA111

เนื้อหา อนุพันธ์ : อนุพันธ์และอนุพันธ์อันดับสูง

ชื่อ.....เลขที่.....

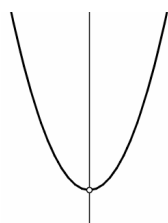
นิสิตคิดว่า เส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน คืออะไร?

> เส้นตรงที่ตัดกราฟของฟังก์ชันเพียงจุดเดียว เช่น



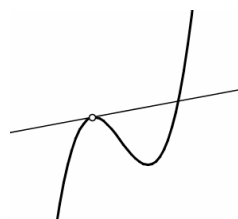
หมายเหตุ วงกลมเป็นฟังก์ชันในระบบพิกัดเชิงขั้ว

> ถ้าเส้นตรงตัดกราฟของฟังก์ชันเพียงจุดเดียวโดยตัดในลักษณะดังนี้



จะยังเป็นเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันหรือไม่

> เส้นตรงที่ตัดกราฟของฟังก์ชันสองจุด ดังรูป



เส้นตรงเส้นนี้จะเป็นเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันได้หรือไม่

แล้ว เส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน คืออะไร ???

บทนิยาม 1.1 กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ เส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน ที่จุด $P(c, f(c))$ คือ
เส้นตรงที่ผ่านจุด P และมีความชันเท่ากับ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ เมื่อลิมิตหาค่า
ได้ แต่ถ้าลิมิตเป็น ∞ เส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน จะเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด P
และตั้งฉากกับแกน x

ในบทนิยาม ถ้าแทน Δx ด้วย $x - c$ จะได้ว่าถ้า $\Delta x \rightarrow 0$ แล้ว $x - c \rightarrow 0$ และ $x \rightarrow c$

ดังนั้นเขียนบทนิยามได้อีกแบบหนึ่งคือ เส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่จุด $P(c, f(c))$

คือ เส้นตรงที่ผ่านจุด P และมีความชันเท่ากับ $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ เมื่อลิมิตหาค่าได้

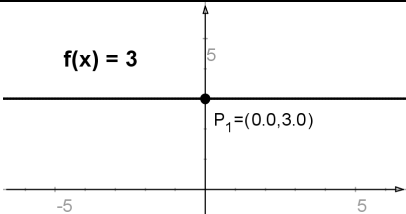
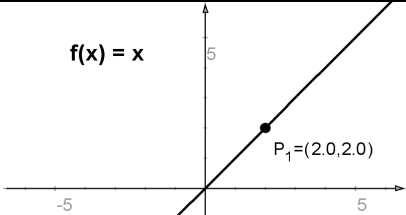
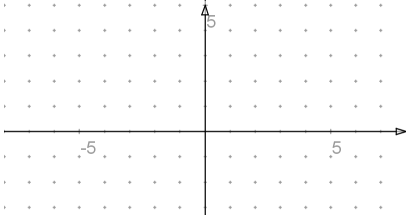
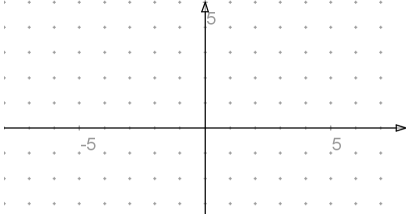
1. ให้นิสิตทำกิจกรรมต่อไปนี้

1.1 คลิกเลือกกิจกรรมสำรวจค่าความชันของเส้นสัมผัสกราฟจากไฟล์ [tangent f\(x\).html](#)

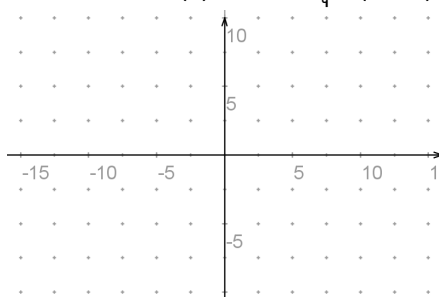
1.2 เขียนกราฟของฟังก์ชัน (คลิกขวาที่เส้นกราฟเพื่อกำหนดฟังก์ชันใหม่)

1.3 กำหนดพิกัดจุด P_1 ตามโจทย์กำหนด (คลิกขวาที่จุด P_1 เพื่อกำหนดพิกัดใหม่)

1.4 เลื่อนจุด P_2 เข้าหาจุด P_1 จงสังเกตว่าความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันที่จุด $P_1(x_1, f(x_1))$ มีค่าเปลี่ยนไปหรือไม่ ถ้าค่าความชันไม่เปลี่ยน ค่าความชันมีค่าเท่าไร ถ้าค่าความชันเปลี่ยนไป ค่าความชันเปลี่ยนเข้าสู่ค่าอะไร

ฟังก์ชัน	กราฟของฟังก์ชัน	ความชันของเส้นสัมผัส กราฟของฟังก์ชันที่จุด $P_1(x_1, f(x_1))$
$f(x) = 3$ ที่จุด $P_1(0, 3)$		
$f(x) = x$ ที่จุด $P_1(2, 2)$		
$f(x) = x^2$ ที่จุด $P_1(2, 4)$		
$f(x) = x^2$ ที่จุด $P_1(-1, 1)$		

2. จงหาสมการของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ ที่จุด $(-3, 9)$



กราฟของ $f(x) = x^2$

วิธีทำ จากความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ ที่จุด $(-3, 9)$

$$\begin{aligned} \text{คือ } m &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-3 + \Delta x) - f(-3)}{\Delta x} \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน คือ $y - y_1 = m(x - x_1)$

.....
.....

บทนิยาม 1.2 กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ บนช่วง (a, b) และ $c \in (a, b)$ จะกล่าวว่า

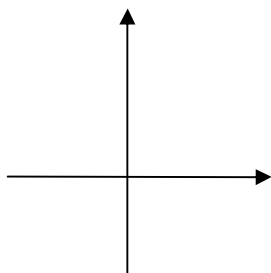
f มีอนุพันธ์ที่ c หรือ f หาอนุพันธ์ได้ที่ c เมื่อ

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \text{ หาค่าได้ และเรียกค่าลิมิตนี้ว่า}$$

อนุพันธ์ของ f ที่ c ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $f'(c)$ หรือ $y'|_{x=c}$ หรือ $\frac{dy}{dx}|_{x=c}$

หมายเหตุ ในบทนิยาม a อาจเป็น $-\infty$ หรือ b อาจเป็น ∞ ก็ได้

3. กำหนดให้ $f(x) = 3x$ ถ้า $c \in D_f$ จงหา $f'(c)$



.....

.....

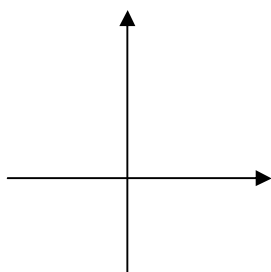
.....

.....

.....

.....

4. กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{x}$ เมื่อ $x \neq 0$ จงหาอนุพันธ์ของ f ที่ x ใด ๆ



.....

.....

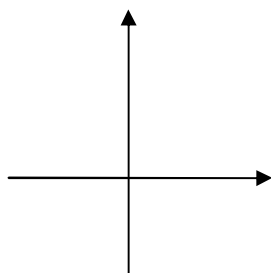
.....

.....

.....

.....

5. กำหนดให้ $f(x) = \sin(x)$ จงหาอนุพันธ์ของ f ที่ x ใด ๆ



.....

.....

.....

.....

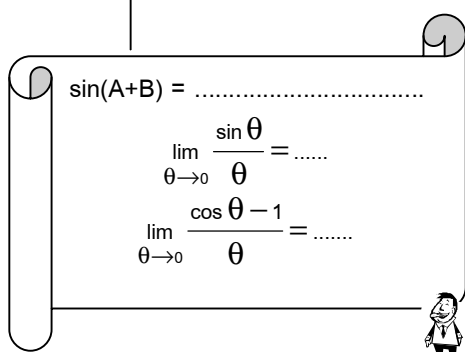
.....

.....

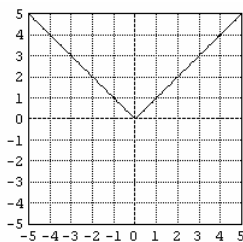
.....

.....

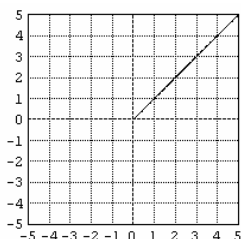
.....



6. กำหนดให้ $f(x) = |x|$ จงแสดงว่า f มีอนุพันธ์ทุก $x \neq 0$



กราฟของ $f(x) = |x|$



กรณี 1 ในช่วง $(0, \infty)$ พังก์ชัน $f(x) = |x|$ เขียนได้เป็น $f(x) = x$

ดังนั้น สำหรับ $c \in (0, \infty)$ จะได้

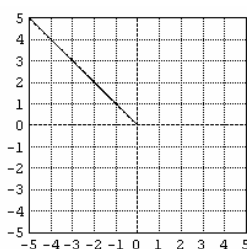
.....

.....

.....

.....

.....



กรณี 2 ในช่วง $(-\infty, 0)$ พังก์ชัน $f(x) = |x|$ เขียนได้เป็น $f(x) = -x$

ดังนั้น สำหรับ $c \in (-\infty, 0)$ จะได้

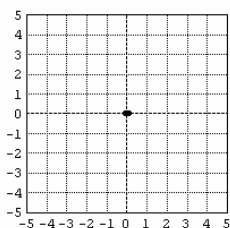
.....

.....

.....

.....

.....



กรณี 3 เมื่อ $c = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

ทฤษฎีบท 1.1 ถ้าฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้ที่ $x = c$ แล้ว f จะต่อเนื่องที่ $x = c$

7. จงเขียนบทกลับของทฤษฎีบท 1.1

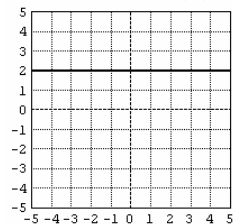
.....

8. นิสิตคิดว่าบทกลับของทฤษฎีบท 1.1 เป็นจริงหรือไม่ ถ้าไม่ จงยกตัวอย่างค้าน

.....

สมบัติของอนุพันธ์

9. กำหนดให้ $f(x) = 2$ จงหาอนุพันธ์ของ f ที่ x ใด ๆ



กราฟของ $f(x) = 2$

.....

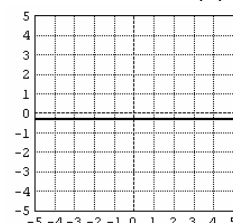
.....

.....

.....

.....

10. กำหนดให้ $f(x) = -\frac{1}{3}$ จงหาอนุพันธ์ของ f ที่ x ใด ๆ



กราฟของ $f(x) = -\frac{1}{3}$

.....

.....

.....

.....

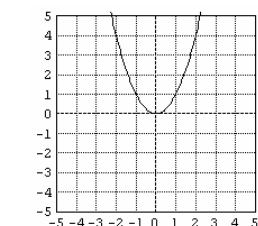
.....

จากข้อ 9 และ ข้อ 10 มีทฤษฎีบทยืนยันว่า อนุพันธ์ของฟังก์ชันคงตัวมีค่าเท่ากับศูนย์ คือ

ทฤษฎีบท 1.2 กำหนด a เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$$\text{ฟังก์ชันคงตัว } f(x) = a \text{ มีอนุพันธ์ที่จำนวนจริง } x \text{ และ } f'(x) = \frac{da}{dx} = 0$$

11. กำหนดให้ $f(x) = x^2$ จงหาอนุพันธ์ของ f ที่ x ใด ๆ



กราฟของ $f(x) = x^2$

.....

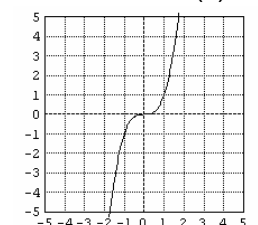
.....

.....

.....

.....

12. กำหนดให้ $f(x) = x^3$ จงหาอนุพันธ์ของ f ที่ x ใด ๆ



กราฟของ $f(x) = x^3$

.....

.....

.....

.....

.....

นิสิตคิดว่า ถ้า $f(x) = x^4$ แล้วอนุพันธ์ของ f ที่ x ใด ๆ จะเท่ากับ $4x^3$ หรือไม่

ทฤษฎีบท 1.3 ฟังก์ชัน $f(x) = x^n$ มีอนุพันธ์ และ $f'(x) = \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ เมื่อ x^{n-1} นิยาม

ทฤษฎีบท 1.4 กำหนดให้ฟังก์ชัน f และ g มีอนุพันธ์ที่ x และ $c \in \mathbb{R}$

ฟังก์ชัน $f + g$, fg , cf , $\frac{f}{g}$ จะมีอนุพันธ์ที่ x ด้วย โดยที่

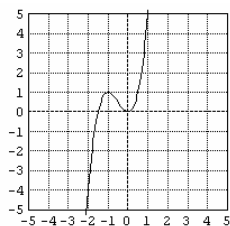
$$(1) \frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

$$(2) \frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f(x) \frac{d}{dx}g(x) + g(x) \frac{d}{dx}f(x)$$

$$(3) \frac{d}{dx}(cf(x)) = c \frac{d}{dx}f(x)$$

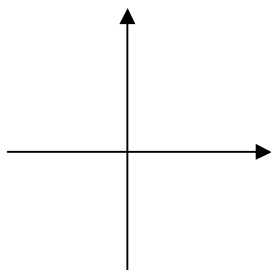
$$(4) \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x) \frac{d}{dx}f(x) - f(x) \frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}, \quad g(x) \neq 0$$

13. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 2x^3 + 3x^2$

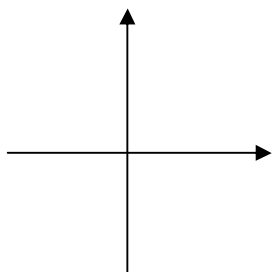


กราฟของ $f(x) = 2x^3 + 3x^2$

14. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{3x^2 + 16}{8}$



15. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{3x^2 + 16}{8 - x^3}$, $x \neq 2$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

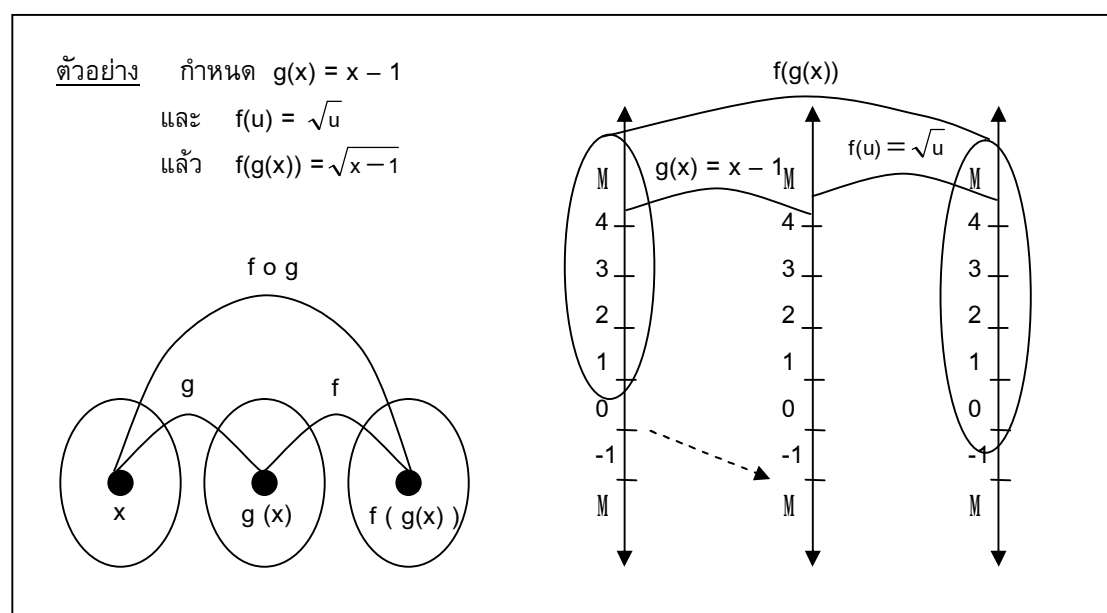
กฎลูกโซ่ (Chain rule)

บทนิยาม 1.3 กำหนดฟังก์ชัน f และ g

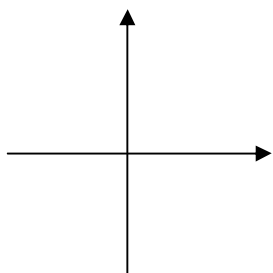
ฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f \circ g$ ซึ่งเป็น

ฟังก์ชันที่นิยามว่า $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ สำหรับทุกๆ $x \in D(g)$

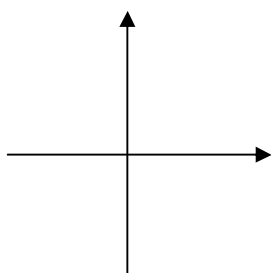
ซึ่งทำให้ $g(x) \in D(f)$



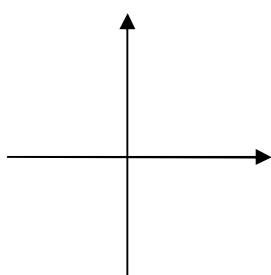
16. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ และ $g(x) = x^2 - 3x + 4$ จงหาฟังก์ชันประกอบต่อไปนี้



$f \circ g =$



$$g \circ f = \dots\dots\dots$$



$$g \circ g = \dots\dots\dots$$

17. จงเขียนฟังก์ชัน $y = h(x)$ ในข้อต่อไปนี ในรูปของฟังก์ชันประกอบ $f \circ g$

$$y = h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \text{หรือ} \quad y = h(x) = f(u) \quad \text{เมื่อ} \quad u = g(x)$$

$$17.1 \quad y = h(x) = \sqrt{x^2 + 3} \quad = \sqrt{u} \quad \text{เมื่อ} \quad u = x^2 + 3$$

$$17.2 \quad y = h(x) = (x^2 + 3)^4 \quad = \dots\dots\dots$$

$$17.3 \quad y = h(x) = \sin^2 x \quad = \dots\dots\dots$$

$$17.4 \quad y = h(x) = \cos(3x) \quad = \dots\dots\dots$$

ทฤษฎีบท 1.5 กฎลูกโซ่ (Chain rule)

กำหนดให้ฟังก์ชัน $y = f(u)$ และ $u = g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ u และ x ตามลำดับ
ฟังก์ชันประกอบ $y = f(g(x))$ จะมีอนุพันธ์ที่ x และ

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{หรือ} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

18. จงใช้กฎลูกโซ่หา $\frac{dy}{dx}$ ในข้อต่อไปนี

$$18.1 \quad y = (2x + 1)^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$$

$$18.2 \quad y = \sqrt{x^2 + 3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$$

$$18.3 \quad y = (x^2 + 3)^4$$

$$\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผัน

บทนิยาม 1.4 ให้ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งที่มีโดเมนเป็น A และมีเรนจ์เป็น B

ฟังก์ชันผกผันของ f เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ f^{-1} ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่มี

โดเมนเป็น B และมีเรนจ์เป็น A ซึ่งนิยามว่า $f^{-1}(y) = x$

ก็ต่อเมื่อ $f(x) = y$ สำหรับทุก $y \in B$

ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

บทนิยาม 1.5 ฟังก์ชัน f ที่มีโดเมนเป็น A จะเรียกว่าเป็น ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ

สำหรับทุก $x_1, x_2 \in A$ ถ้า $x_1 \neq x_2$ แล้ว $f(x_1) \neq f(x_2)$

กิจกรรม 1 $f(x) = x + 2$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

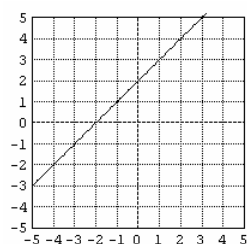
กิจกรรม 2 $f(x) = x^2 + 1$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

.....

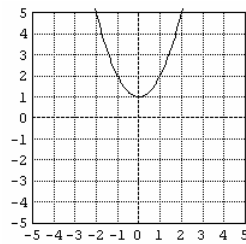
.....

.....

.....



กราฟของ $f(x) = x + 2$



กราฟของ $f(x) = x^2 + 1$

ขั้นตอนการหาฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชัน f เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f มาให้ มีดังนี้

1. เขียน $y = f(x)$
2. สลับตัวแปร x และ y
3. แก้สมการเพื่อหาค่า y ในเทอมของ x (ถ้าทำได้) สิ่งที่ได้คือ $y = f^{-1}(x)$

1) ให้ $f(x) = x + 1$ จงหา $y = f^{-1}(x)$

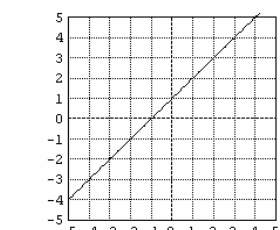
2) ให้ $f(x) = x^3$ จงหา $y = f^{-1}(x)$

.....

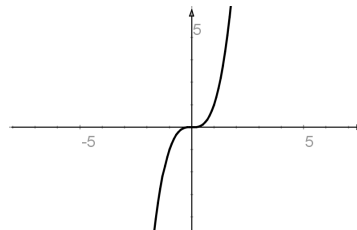
.....

.....

.....



กราฟ $f(x) = x + 1$



กราฟ $f(x) = x^3$

19. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x^5 - 2$ จงหาอนุพันธ์ของ $f^{-1}(x)$ และ $(f^{-1})'(1)$

วิธีทำ จะได้ (1. เขียน $y = f(x)$)
 (2. สลับตัวแปร x และ y)
 (3. แก่สมการเพื่อหาค่า y ในเทอมของ x)

สิ่งที่ได้คือ $f^{-1}(x) = y = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $(f^{-1})'(x) = \dots\dots\dots$

และ $(f^{-1})'(1) = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$

ทฤษฎีบท 1.6 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บนช่วง (a, b) โดยที่ $f'(x) \neq 0$
 และ g เป็นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชัน f ซึ่งต่อเนื่องใน $D_g \subset \mathbb{R}_g$
 แล้ว g จะมีอนุพันธ์ที่ x และ $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$

20. จงใช้ทฤษฎีบท 1.6 ช่วยในการหา $(f^{-1})'(1)$ ของฟังก์ชันในข้อ 19

วิธีทำ จาก $f(x) = x^5 - 2$

ดังนั้น $f'(x) = \dots\dots\dots$

$$\therefore (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dots\dots\dots \text{----- (1)}$$

$$\therefore (f^{-1})'(1) = \dots\dots\dots$$

สมมติ $f^{-1}(1) = a$

เนื่องจาก f^{-1} เป็นฟังก์ชันผกผันของ f จะได้ว่า $f(f^{-1}(x)) = x$

$$\therefore f(a) = f(f^{-1}(1)) = \dots\dots\dots$$

เพราะว่า $f(a) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

$$\therefore f(\dots\dots\dots) = 1$$

$$\text{และได้ } f^{-1}(1) = a = \dots\dots\dots \text{----- (2)}$$

$$\text{จาก (1) และ (2) จะได้ } (f^{-1})'(1) = \dots\dots\dots$$

21. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x^3 + x^2 + x - 2$ จงหา $(f^{-1})'(-3)$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

จากบทนิยามฟังก์ชันผกผัน

$$f^{-1}(y) = x \text{ ก็ต่อเมื่อ } f(x) = y$$

$$\text{ดังนั้น } (f^{-1} \circ f)(\boxed{x}) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = \boxed{x}$$

$$\text{และ } (f \circ f^{-1})(\boxed{y}) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = \boxed{y}$$

จะเห็นว่า ฟังก์ชันประกอบของ f^{-1} และ f

และฟังก์ชันประกอบของ f และ f^{-1} ต่างเป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์

โดยที่ ฟังก์ชันประกอบของ f^{-1} และ f เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์บน A

ฟังก์ชันประกอบของ f และ f^{-1} เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์บน B

22. กำหนด $f(x) = \sin(x)$ ซึ่งจากข้อ 5 จะได้ว่า $\sin(x)$ มีอนุพันธ์ที่ x ใดๆ

ให้ g เป็นฟังก์ชันผกผันของ $\sin(x)$ ซึ่ง g ต่อเนื่องใน $D_g \subset \mathbb{R}_g$ จะใช้ทฤษฎีบท 1.6 หาอนุพันธ์ของ g ที่ x

ให้นิสิตอธิบายเหตุผลในแต่ละบรรทัด

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } g'(x) &= \frac{1}{f'(g(x))} & \dots\dots\dots \\ &= \frac{1}{\cos(g(x))} & \dots\dots\dots \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(g(x))}} & \dots\dots\dots \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันของ $\sin(x)$ เท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ทุกค่าของ x ซึ่ง $|x| < 1$

อนุพันธ์อันดับสูง (Higher – Order Derivatives)

การหาอนุพันธ์ที่กล่าวมานั้น เป็นการหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง เขียนแทนด้วย $f'(x)$ หรือ $\frac{dy}{dx}$ ถ้านำอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งไปหาอนุพันธ์ต่อไปอีก จะได้อนุพันธ์อันดับที่สอง (Second Derivative) เขียนแทนด้วย $f''(x)$ หรือ $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ หรือ $\frac{d^2y}{dx^2}$ และถ้านำอนุพันธ์อันดับที่สองไปหาอนุพันธ์อีกก็จะได้อนุพันธ์อันดับที่สาม ซึ่งสามารถทำเช่นนี้ต่อไปเรื่อยๆ จนถึงอันดับที่ n ซึ่งอนุพันธ์อันดับที่สี่เป็นต้นไปให้ใช้ตัวเลข เขียนแทนด้วย $f^{(n)}(x)$ หรือ $\frac{d^n y}{dx^n}$ โดยที่อนุพันธ์ที่มากกว่าอันดับที่หนึ่งขึ้นไปเรียกว่า อนุพันธ์อันดับสูง

บทนิยาม 1.6 อนุพันธ์อันดับที่ n (n – the – order Derivative) ของฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วย $f^{(n)}(x)$ เป็นการหาอนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่ $n - 1$ เทียบกับ x นั่นคือ $f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}[f^{(n-1)}(x)]$

23. จงหาอนุพันธ์อันดับที่ 4 ของ $f(x) = x^3 + 3x + 1$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } f'(x) &= \dots\dots\dots \\ f''(x) &= \dots\dots\dots \\ f'''(x) &= \dots\dots\dots \\ f^{(4)}(x) &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

24. จงแสดงว่า $3y''' - 5xy''' + 6xy'' - 12y' = 0$ เมื่อ $y = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 6$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } y' &= \dots\dots\dots \\ y'' &= \dots\dots\dots \\ y''' &= \dots\dots\dots \\ \text{ดังนั้น } 3y''' - 5xy''' + 6xy'' - 12y' &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

คำอธิบายเกี่ยวกับการใช้คำสั่งของโปรแกรม Euler ในกิจกรรมที่ 1

คำสั่ง	การใช้งาน
<code>::function g(x):=x^5\$ 'diff(g(x),x)=diff(g(x),x)</code>	ให้ผู้เรียนกำหนดฟังก์ชัน $g(x) = \underline{\hspace{1cm}}$ (เช่น x^5) โปรแกรมจะหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $g(x)$ ให้
<code>::function f(x):=x^2\$ a:5\$ 'limit(f(x),x,a)=limit(f(x),x,a)</code>	ให้ผู้เรียนกำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \underline{\hspace{1cm}}$ (เช่น x^2) และกำหนดค่า $a = \underline{\hspace{1cm}}$ (a อาจเป็นค่าคงที่, ∞ หรือ $-\infty$ ถ้า a แทน ∞ หรือ $-\infty$ จะพิมพ์ คำสั่ง <code>inf</code> หรือ <code>minf</code> ตามลำดับ) โปรแกรมจะหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ให้
<code>::trigexpand(sin(2*A))</code>	ให้ผู้เรียนกำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ต้องการ กระจายรูปลงในช่องว่าง <code>::trigexpand(\underline{\hspace{1cm}})</code> เช่น <code>sin(2*A)</code> โปรแกรมจะกระจายรูปของ ฟังก์ชันตรีโกณมิติให้
<code>plot2d("(3*x^2+16)/8",r=5,thickness=2); insimg;</code>	ให้ผู้เรียนกำหนดฟังก์ชันที่ต้องการจะสร้าง กราฟลงในช่องว่าง <code>plot2d(" \underline{\hspace{1cm}} ",</code> และกำหนดค่า $r = \underline{\hspace{1cm}}$ (r เป็นค่าคงที่ แทน ขอบเขตของกรอบด้านซ้าย, ขวา, ล่าง และ ด้านบนของภาพกราฟ) และกำหนดค่า <code>thickness = \underline{\hspace{1cm}}</code> (thickness แทนความหนาของเส้นกราฟ)
<code>::function f(x):=x^(1/3) ::function g(x):=x^2-3*x+4 ::function h(x):=f(g(x)) ::plot2d(h,[x,-5,5],[y,-5,5])</code>	ให้กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \underline{\hspace{1cm}}$ และ $g(x) = \underline{\hspace{1cm}}$ และผู้เรียนกำหนดฟังก์ชันประกอบ $h(x) = \underline{\hspace{1cm}}$ โปรแกรมจะสร้างกราฟของฟังก์ชัน $h(x)$
<code>function g(x) := x^(1/3) function h(x) := x^2-3*x+4 function r(x) := g(h(x)) plot2d("r",a=-1,b=5,c=-1,d=5); insimg;</code>	ให้กำหนดฟังก์ชัน $g(x) = \underline{\hspace{1cm}}$ และ $h(x) = \underline{\hspace{1cm}}$ และผู้เรียนกำหนดฟังก์ชันประกอบ $r(x) = \underline{\hspace{1cm}}$ โปรแกรมจะสร้างกราฟของฟังก์ชัน $r(x)$ โดยที่ค่า a, b, c และ d คือกรอบด้านซ้าย, ขวา, ล่าง และด้านบนของภาพ ตามลำดับ
<code>::function g(x):=x^3+2*x\$ a:3\$ 'diff(g(x),x,a)=diff(g(x),x,a)</code>	ให้กำหนดฟังก์ชัน $g(x) = \underline{\hspace{1cm}}$ และค่า $a = \underline{\hspace{1cm}}$ โปรแกรมจะหาอนุพันธ์อันดับที่ a ของ $g(x)$

หมายเหตุ คำสั่งที่มี :: อยู่ข้างหน้าคือคำสั่งที่ประมวลผลจากโปรแกรม Maxima ซึ่งเป็นโปรแกรมแบบ CAS ที่แฝงอยู่ในโปรแกรม Euler

ใบกิจกรรมที่ 2

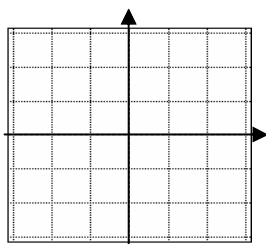
วิชา คณิตศาสตร์ 1 (MATHEMATICS 1) : MA111

เนื้อหา อนุพันธ์ : อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
ชื่อ.....เลขที่.....

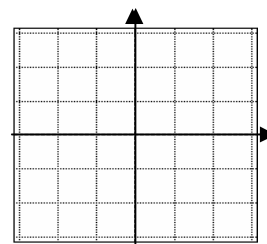
อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. จงใช้โปรแกรม Euler เขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

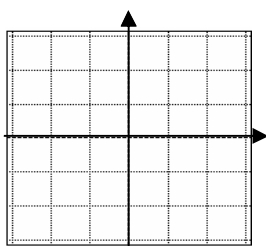
1.1 $f(x) = \sin x$



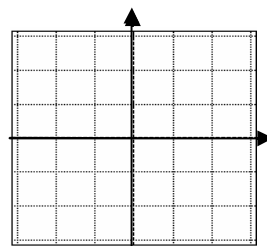
1.4 $f(x) = \csc x$



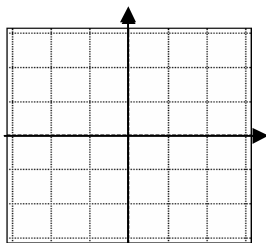
1.2 $f(x) = \cos x$



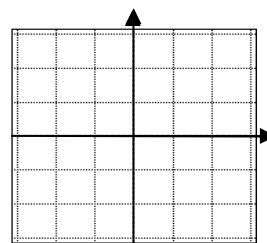
1.5 $f(x) = \sec x$



1.3 $f(x) = \tan x$



1.6 $f(x) = \cot x$



ทฤษฎีบท 2.1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ และ

(1) $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$

(2) $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

(3) $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x, x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{I}$

(4) $\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x, x \neq n\pi, n \in \mathbb{I}$

(5) $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x, x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{I}$

(6) $\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x, x \neq n\pi, n \in \mathbb{I}$

หมายเหตุ นิสิตได้พิสูจน์ทฤษฎีบท 2.1(1) ไปแล้วในใบกิจกรรมที่ 1 ข้อ 5

สำหรับทฤษฎีบทข้ออื่น ๆ ให้นำนิสิตฝึกทำด้วยตนเอง

2. ให้นิสิตวิเคราะห์วิธีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้

$$2.1 \ y = \cos^3 2x \quad \frac{d}{du}(u^3) \cdot \frac{d}{dv}(\cos v) \cdot \frac{d}{dx}(2x) \quad \text{โดยที่ } u = \cos 2x \text{ และ } v = 2x$$

$$2.2 \ y = x \sin \frac{1}{x}$$

$$2.3 \ y = \frac{\sin 3x}{\cos 2x}$$

3. จงหาอนุพันธ์ของ $y = \cot 3x$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \frac{dy}{dx} &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \# \end{aligned}$$

4. จงหาอนุพันธ์ของ $y = \cos^3 2x$

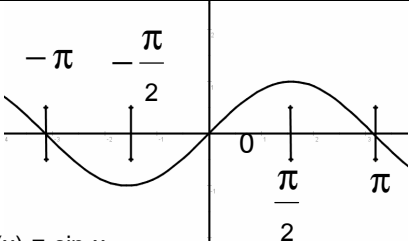
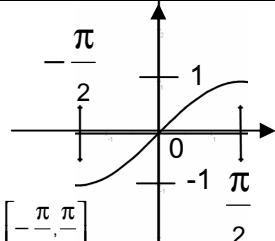
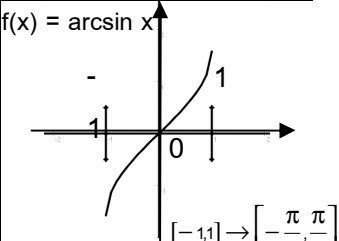
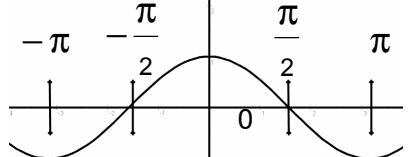
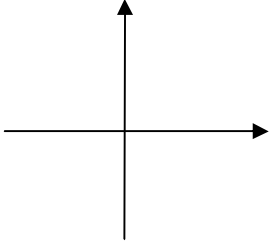
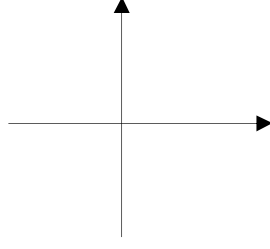
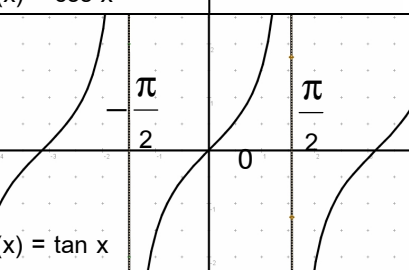
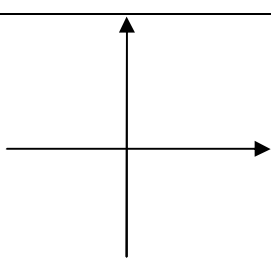
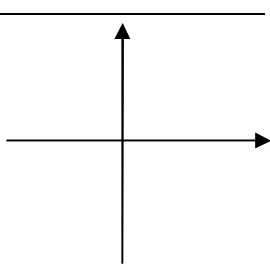
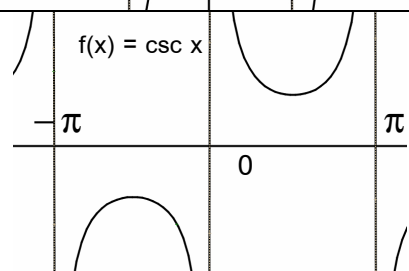
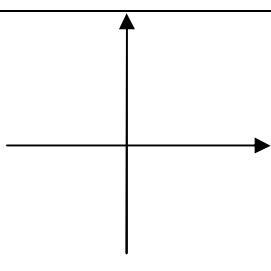
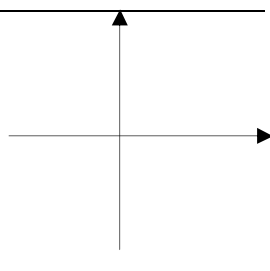
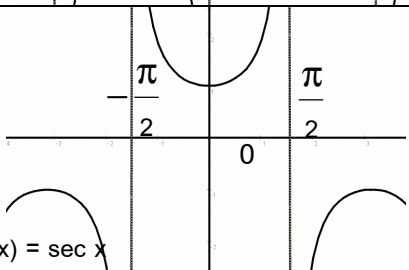
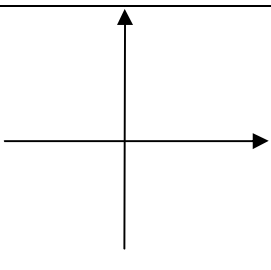
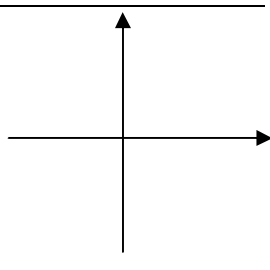
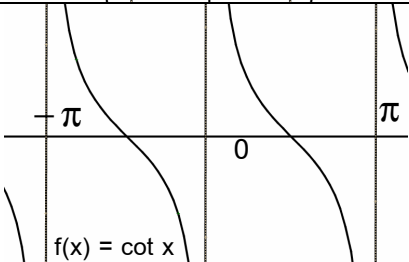
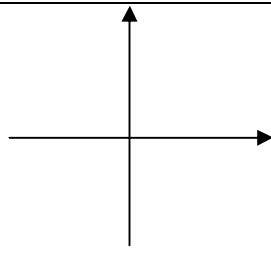
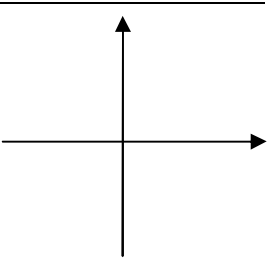
$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \frac{dy}{dx} &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \# \end{aligned}$$

5. จงหาอนุพันธ์ของ $y = x \sin \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \frac{dy}{dx} &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \# \end{aligned}$$

จากความรู้เรื่องฟังก์ชันผกผัน เราทราบว่าฟังก์ชันที่มีอินเวอร์สเป็นฟังก์ชันจะต้องเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แต่เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งใน R ดังนั้นจึงต้องมีการกำหนดโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เพื่อให้ฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งใน R ซึ่งส่งผลให้มีอินเวอร์สเป็นฟังก์ชัน

6. จงกำหนดโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เพื่อให้ฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งใน $\mathbb{R}$

กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	เมื่อกำหนดโดเมนให้ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแล้ว	
	กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	กราฟของฟังก์ชันผกผัน
 $f(x) = \sin x$	 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	 $f(x) = \arcsin x$
 $f(x) = \cos x$		
 $f(x) = \tan x$		
 $f(x) = \csc x$		
 $f(x) = \sec x$		
 $f(x) = \cot x$		

บทนิยาม 2.1

(1) ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันไซน์

นิยามว่า $y = \arcsin x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \sin y$ โดยที่ $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(2) ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคไซน์

นิยามว่า $y = \arccos x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \cos y$ โดยที่ $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

(3) ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์

นิยามว่า $y = \arctan x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \tan y$ โดยที่ $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(4) ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคแทนเจนต์

นิยามว่า $y = \operatorname{arccot} x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \cot y$ โดยที่ $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$

(5) ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเซแคนต์

นิยามว่า $y = \operatorname{arcsec} x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \sec y$ โดยที่ $\operatorname{arcsec} : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \rightarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

(6) ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคเซแคนต์

นิยามว่า $y = \operatorname{arccsc} x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \csc y$ โดยที่ $\operatorname{arccsc} : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

ทฤษฎีบท 2.2

(1) ฟังก์ชัน $y = \arcsin x$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกค่าของ x ซึ่ง $|x| < 1$

$$\text{และ } \frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(2) ฟังก์ชัน $y = \arccos x$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกค่าของ x ซึ่ง $|x| < 1$

$$\text{และ } \frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(3) ฟังก์ชัน $y = \arctan x$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกค่าของ $x \in \mathbb{R}$

$$\text{และ } \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

(4) ฟังก์ชัน $y = \operatorname{arccot} x$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกค่าของ $x \in \mathbb{R}$

$$\text{และ } \frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$$

(5) ฟังก์ชัน $y = \operatorname{arcsec} x$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกค่าของ x ซึ่ง $|x| > 1$

$$\text{และ } \frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

(6) ฟังก์ชัน $y = \operatorname{arccsc} x$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกค่าของ x ซึ่ง $|x| > 1$

$$\text{และ } \frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$



7. ให้นิสดิวิเคราะห์วิธีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้

7.1 $y = \arcsin \sqrt{x}$

7.2 $y = \arccos \frac{x^3 + 1}{x^2}$

7.3 $y = \arctan(x - 4)^2$

7.4 $y = x^2 \arccos x^2$

8. จงหาอนุพันธ์ของ $y = \arcsin \sqrt{x}$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots \#$

9. จงหาอนุพันธ์ของ $y = \arccos \frac{x^3 + 1}{x^2}$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots \#$

คำอธิบายเกี่ยวกับการใช้คำสั่งของโปรแกรม Euler ในกิจกรรมที่ 2

คำสั่ง	การใช้งาน
<pre>plot2d("sin(x)",a=-2*pi,b=2*pi,c=-2,d=2); insimg(5);</pre>	ให้ผู้เรียนกำหนดฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ต้องการจะสร้างกราฟลงในช่องว่าง <code>plot2d("___",</code> และกำหนดขอบเขตของกรอบด้านซ้าย, ขวา, ล่าง และด้านบนของภาพกราฟ (ค่า <code>a</code>, <code>b</code>, <code>c</code> และ <code>d</code> ตามลำดับ) และกำหนดขนาดของกราฟที่จะนำมาแทรกในหน้าต่างคำสั่งลงในช่องว่างนี้ <code>insimg(___);</code> หมายเหตุ ใช้ <code>pi</code> แทนค่า π และเพื่อให้แตกต่างจากการใช้อักษรทั่วไป เราสามารถใช้ <code>%pi</code> แทนค่า π ได้อีกด้วย
<pre>::diff(x*sin(1/x),x)</pre>	ให้ผู้เรียนกำหนดฟังก์ชันที่ต้องการหาอนุพันธ์ลงในช่องว่าง <code>::diff(___ ,x)</code> หมายเหตุ ผู้เรียนสามารถใช้ตัวแปรตัวอื่นที่ไม่ใช่ตัวแปร <code>x</code> ได้ โดยกำหนดฟังก์ชันในรูปตัวแปรตัวนั้น แล้วอนุพันธ์เทียบกับตัวแปรตัวนั้น ดังนี้ <code>::diff(t*sin(1/ t) ,t)</code>
<pre>plot2d("asin(x)",a=-5,b=5,c=-5,d=5); insimg(5);</pre>	ให้ผู้เรียนกำหนดฟังก์ชันที่ต้องการจะสร้างกราฟลงในช่องว่าง <code>plot2d("___",</code> และกำหนดค่าอื่น ๆ ที่เหลือตามต้องการ หมายเหตุ ในโปรแกรมจะใช้ <code>a</code> แทน <code>arc</code> เช่น <code>asin(x)</code> แทน <code>arcsin(x)</code>
<pre>::plot2d(asec(x),[x,-5,5],[y,-5,5])</pre>	ให้ผู้เรียนกำหนดฟังก์ชันที่ต้องการจะสร้างกราฟลงในช่องว่าง <code>::plot2d(___ ,</code> และกำหนดขอบเขตของกรอบด้านซ้ายและขวา ลงในช่องว่างตามลำดับ <code>[x , ___ , ___]</code> และ ขอบเขตของกรอบด้านล่างและด้านบน ลงใน ช่องว่างตามลำดับ <code>[y , ___ , ___]</code> หมายเหตุ สำหรับกราฟของฟังก์ชันใดที่โปรแกรม Euler ไม่สามารถสร้างได้ เราจะสามารถสร้างด้วยคำสั่งจากโปรแกรม Maxima

หมายเหตุ คำสั่งที่มี :: นำหน้าคือคำสั่งที่ประมวลผลจากโปรแกรม Maxima ซึ่งเป็นโปรแกรมแบบ CAS ที่แฝงอยู่ในโปรแกรม Euler

ใบกิจกรรมที่ 3

วิชา คณิตศาสตร์ 1 (MATHEMATICS 1) : MA111

เนื้อหา อนุพันธ์ : อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย

ชื่อ.....เลขที่.....

อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ผ่านมาเป็นการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันโดยชัดแจ้ง (Explicit function) ตัวอย่างเช่น $y = x^2 - 6x + 8$ หรือ $y = \sqrt{6x - x^2}$ เป็นต้น อย่างไรก็ตาม บางฟังก์ชันไม่ได้กำหนดในรูปฟังก์ชันโดยชัดแจ้ง แต่แฝงอยู่ในรูปความสัมพันธ์ $F(x, y) = 0$ เรียกว่า ฟังก์ชันโดยปริยาย (Implicit function) ตัวอย่างเช่น

$$xy = 3 \quad \text{----- (1)}$$

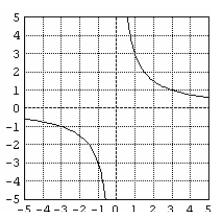
$$x^3y + xy - 1 = 0 \quad \text{----- (2)}$$

$$y^2 - x + 3 = 0 \quad \text{----- (3)}$$

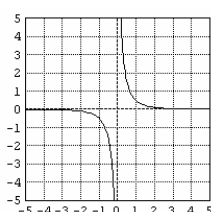
$$x^3y + xy^3 + x^2y^2 + xy - 2 = 0 \quad \text{----- (4)}$$

พบว่า สมการ (1) และ (2) เขียนในรูปฟังก์ชันโดยชัดแจ้งได้ง่าย ได้แก่ $y = \frac{3}{x}$ และ $y = \frac{1}{x^3 + x}$

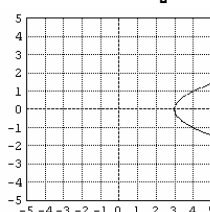
ตามลำดับ ส่วนสมการ (3) สามารถเขียนในรูปฟังก์ชันโดยชัดแจ้งได้มากกว่า 1 ฟังก์ชัน คือ $f(x) = \sqrt{x-3}$ หรือ $g(x) = -\sqrt{x-3}$ แต่สมการ (4) เขียนในรูปฟังก์ชันโดยชัดแจ้งได้ยากมาก



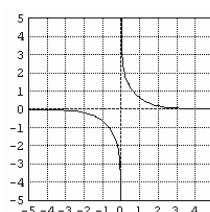
$$xy = 3$$



$$x^3y + xy - 1 = 0$$



$$y^2 - x + 3 = 0$$



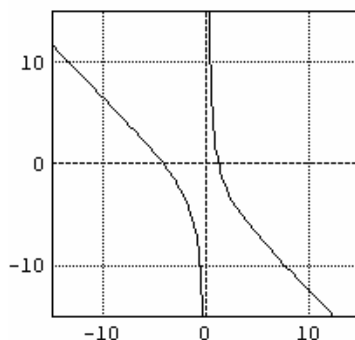
$$x^3y + xy^3 + x^2y^2 + xy - 2 = 0$$

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย อาจทำได้โดยจัดรูปของฟังก์ชันโดยปริยายนั้นให้อยู่ในรูปฟังก์ชันโดยชัดแจ้งแล้วจึงทำการอนุพันธ์ แต่ถ้าฟังก์ชันโดยปริยายนั้นยากมากที่จะเขียนในรูปฟังก์ชันโดยชัดแจ้ง จำเป็นต้องใช้ความรู้ในเรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบเข้ามาช่วยในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย ซึ่งมีขั้นตอน ดังนี้

1. หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการเทียบกับ x
2. จัดเทอม $\frac{dy}{dx}$ ให้อยู่ข้างเดียวกันของสมการ
3. ดึงตัวประกอบร่วมของ $\frac{dy}{dx}$ ออก
4. แก่สมการหา $\frac{dy}{dx}$

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $x^2 + 3x + xy = 5$



วิธีทำ

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 3x + xy) = \frac{d}{dx}(5)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. พิจารณาฟังก์ชันในข้อ 1 นิสิตคิดว่ามีวิธีหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันด้วยวิธีอื่นหรือไม่ ถ้ามีจงแสดง

วิธีทำ จากฟังก์ชันในข้อ 1 สามารถจัดรูปของฟังก์ชันให้อยู่ในรูปฟังก์ชันโดยชัดแจ้งได้ง่าย จึงทำการจัดรูปให้อยู่ในรูปแบบ $y = f(x)$ ได้ดังนี้

$$x^2 + 3x + xy = 5$$

$$xy = \dots\dots\dots$$

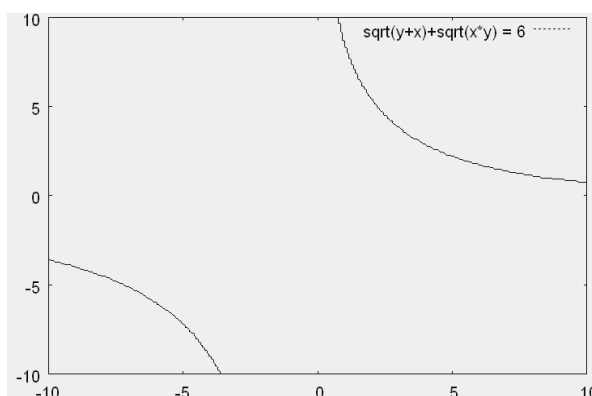
$$\text{ดังนั้น } y = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$$

3. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $\sqrt{x+y} + \sqrt{xy} = 6$



วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

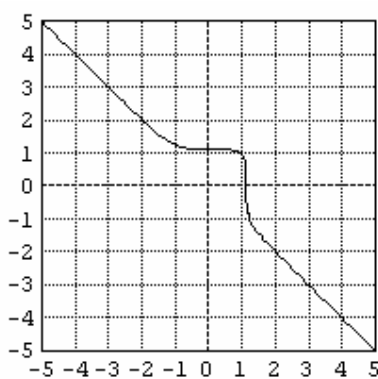
.....

.....

.....

.....

4. จงหาสมการเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $x^5 + y^5 = 2$ ณ จุด (1, 1)



วิธีทำ $\frac{d}{dx}(x^5 + y^5) = \frac{d}{dx}(2)$

.....

.....

คำอธิบายเกี่ยวกับการใช้คำสั่งของโปรแกรม Euler ในกิจกรรมที่ 3

คำสั่ง	การใช้งาน
<pre>fcontour("x^2+3*x+x*y-5",niveau=0,xmin=-15,xmax=15,ymin=-15,ymax=15); insimg(15);</pre>	ให้ผู้เรียนกำหนดฟังก์ชันโดยปริยายที่ต้องการจะสร้างกราฟลงในช่องว่าง fcontour ("___" , โดยกำหนดฟังก์ชันโดยปริยายในรูปแบบ $F(x, y) = 0$ เช่น ถ้าต้องการสร้างกราฟของ $x^2 + 3x + xy = 5$ ให้พิมพ์ดังนี้ $x^2 + 3x + xy - 5 = 0$ และกำหนดขอบเขตของกราฟคือ ค่า xmin , xmax , ymin และ ymax หมายเหตุ สำหรับคำสั่ง niveau=0 ให้คงไว้
<pre>::load(implicit_plot) ::implicit_plot(x^5+y^5=2,[x,-4,4],[y,-4,4])</pre>	ให้กำหนดฟังก์ชันโดยปริยายที่ต้องการจะสร้างกราฟลงในช่องว่าง ::implicit_plot(__ , และกำหนดขอบเขตของกรอบด้านซ้ายและขวา ลงในช่องว่างตามลำดับ [x , __ , __] และขอบเขตของกรอบด้านล่างและด้านบน ลงในช่องว่างตามลำดับ [y , __ , __]
<pre>::depends (y,x) ::diff(sqrt(x+y)+sqrt(x*y)-6,x)</pre>	บรรทัดแรกเป็นการประกาศให้โปรแกรมทราบ ว่า y เป็นตัวแปรของ x ให้ผู้เรียนกำหนดฟังก์ชันโดยปริยายที่ต้องการหาอนุพันธ์ลงในช่องว่าง ::diff(__ ,x) โดยที่ กำหนดฟังก์ชันโดยปริยายในรูป $F(x, y) = 0$ หมายเหตุ ถ้าไม่ประกาศให้โปรแกรมทราบ ว่า y เป็นตัวแปรของ x โปรแกรมจะพิจารณา y เป็นเหมือนค่าคงตัวตัวหนึ่ง ส่งผลให้เมื่ออนุพันธ์เทียบกับตัวแปร x จะได้ค่าเป็นศูนย์

หมายเหตุ คำสั่งที่มี :: อยู่ข้างหน้าคือคำสั่งที่ประมวลผลจากโปรแกรม Maxima

ซึ่งเป็นโปรแกรมแบบ CAS ที่แฝงอยู่ในโปรแกรม Euler

ใบกิจกรรมที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์ 1 (MATHEMATICS 1) : MA111

เนื้อหา อนุพันธ์ : อนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม

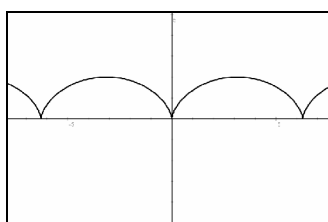
และอนุพันธ์ในพิกัดเชิงขั้ว

ชื่อ.....เลขที่.....

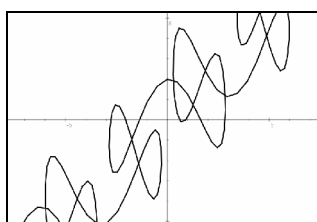
อนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม

ให้ t เป็นตัวแปรอิสระ และ $x = f(t)$ และ $y = g(t)$ ต่างเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ สมการ $x = f(t)$, $y = g(t)$ ---- (1) มีชื่อเรียกว่า **สมการอิงตัวแปรเสริม (Parametric Equations)** และเรียกตัวแปร t ว่า **ตัวแปรเสริม (Parameter)** โดยแต่ละค่า t จะให้ $(f(t), g(t))$ แทนจุดบนเส้นโค้งที่สอดคล้องกับสมการ (1)

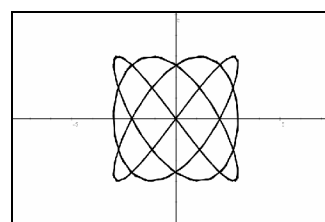
ตัวอย่างกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม



$$x = t - \sin(t) , y = 1 - \cos(t)$$



$$x = t + 2\sin(2t) , y = t + 2\cos(5t)$$



$$x = 3\sin(3t) , y = 3\sin(4t)$$

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม

ถ้าสมการอิงตัวแปรเสริมนั้นสามารถจัดตัวแปร t เพื่อเขียนสมการ (1) ให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์ $F(x, y) = 0$ ได้ง่าย จะใช้วิธีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย $F(x, y) = 0$ แต่ถ้าไม่สามารถจัดตัวแปร t ได้ จำเป็นต้องใช้ความรู้ในเรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผัน และกฎลูกโซ่หาค่าอนุพันธ์

$$\text{โดย } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \text{ถ้า } \frac{dx}{dt} \neq 0$$

1. จงหา $\frac{dy}{dx}$ ของฟังก์ชัน $x = \sqrt{t}$, $y = 1 - t$ โดยการขจัดตัวแปร t แล้วเขียนให้อยู่ในรูป

ความสัมพันธ์ $F(x, y) = 0$

วิธีทำ สมการอิงตัวแปรเสริมที่กำหนดให้ในข้อนี้ สามารถขจัดตัวแปร t ได้ง่าย ซึ่งจะได้ว่า

จาก $x = \sqrt{t}$

$t = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $y = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$

#

2. จงหา $\frac{dy}{dx}$ ของ $x = |t - 1|$, $y = t + 2$ โดยใช้สูตร $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ เมื่อ $\frac{dx}{dt} \neq 0$

วิธีทำ จาก $\frac{dx}{dt} = \begin{cases} \dots\dots\dots & \text{เมื่อ } t > 1 \\ \dots\dots\dots & \text{เมื่อ } t < 1 \\ \dots\dots\dots & \text{เมื่อ } t = 1 \end{cases}$

และ $\frac{dy}{dt} = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \begin{cases} \dots\dots\dots & \text{เมื่อ } t > 1 \\ \dots\dots\dots & \text{เมื่อ } t < 1 \\ \dots\dots\dots & \text{เมื่อ } t = 1 \end{cases}$

#

3. จงหา $\frac{dy}{dx}$ ของฟังก์ชัน $x = 3 \cos \theta$, $y = 3 \sin \theta$

วิธีที่ 1 สมการอิงตัวแปรเสริมที่กำหนดให้ในข้อนี้

สามารถจัดตัวแปร θ เพื่อเขียนให้อยู่ในรูป

ความสัมพันธ์ $F(x, y) = 0$ ได้ง่าย จะใช้วิธีการหา

อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย $F(x, y) = 0$

จาก $\frac{x}{3} = \cos \theta$

ดังนั้น $\theta = \dots\dots\dots$

จะได้ $y = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

วิธีที่ 2 ใช้ความรู้เรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ผกผัน และ กฎลูกโซ่ ด้วยสูตร

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \quad \text{เมื่อ } \frac{dx}{dt} \neq 0$$

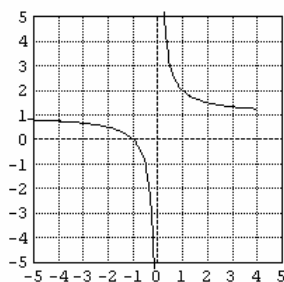
จะได้ $\frac{dx}{d\theta} = \dots\dots\dots$

$\frac{dy}{d\theta} = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

4. จงหาสมการของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $x = t - 1$, $y = \frac{t}{t-1}$ ณ จุดที่ $t = 2$



วิธีทำ จาก $x = t - 1$ จะได้ $\frac{dx}{dt} = \dots\dots\dots$

$y = \frac{t}{t-1}$ จะได้ $\frac{dy}{dt} = \dots\dots\dots$

เมื่อ $t = 2$ จะได้ $x = \dots\dots\dots$, $y = \dots\dots\dots$, $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=2} = \dots\dots\dots$ และ $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=2} = \dots\dots\dots$

นั่นคือ $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=2} = \dots\dots\dots$

หรือความชันของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง ณ จุดที่ $t = 2$ คือ $\dots\dots\dots$

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $x = t - 1$, $y = \frac{t}{t-1}$ ณ จุดที่ $t = 2$

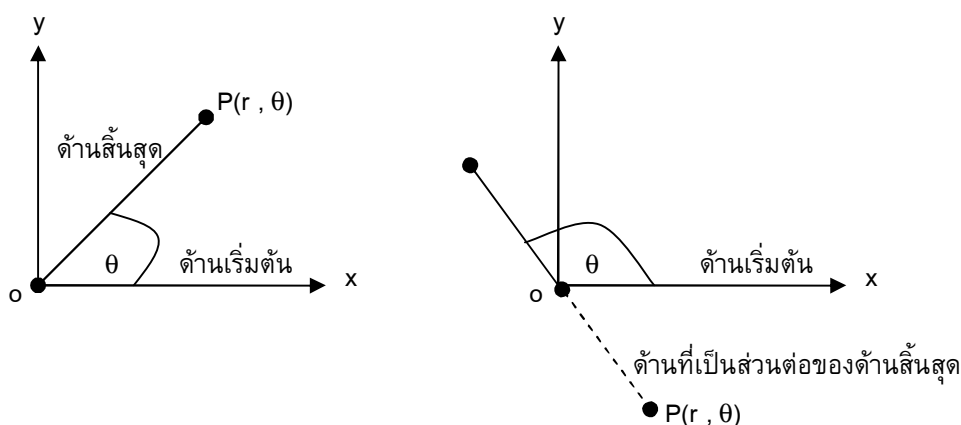
หรือจุด $(\dots\dots\dots, \dots\dots\dots)$ คือ $y - \dots\dots\dots = \dots\dots\dots(x - \dots\dots\dots)$

หรือ $\dots\dots\dots \#$

พิกัดเชิงขั้ว (Polar Coordinates)

ระบบพิกัดที่เราศึกษาและกล่าวไปแล้วแต่ตอนต้น เป็นระบบพิกัดที่เรียกว่า **พิกัดฉาก (Rectangular Coordinates)** นอกเหนือจากระบบพิกัดฉาก ยังมีระบบพิกัดอีกชนิดหนึ่งซึ่งเรียกว่า **พิกัดเชิงขั้ว (Polar Coordinates)** ซึ่งมีความหมายและรายละเอียดดังที่จะกล่าวต่อไป

ในระบบพิกัดเชิงขั้ว เราจะเริ่มต้นโดยการเลือกจุด ๆ หนึ่งบนระนาบ เรียกจุดนี้ว่า **ขั้ว (Pole)** หรือ **จุดกำเนิด (origin)** ซึ่งต่อไปนี้จะแทนด้วย o จากจุดนี้ลากเส้นตรง 2 เส้น โดยที่เส้นหนึ่งอยู่ในแนวนอนไปทางขวามือ เราเรียกเส้นนี้ว่า **แกนเชิงขั้ว (Polar axis)** ซึ่งต่อไปจะแทนด้วยแกน x ส่วนอีกเส้นหนึ่ง ลากจากขั้วไปตามแนวตั้ง เราเรียกเส้นนี้ว่า **แกนแนวฉาก (normal axis)** ซึ่งต่อไปจะแทนด้วยแกน y



ถ้า P เป็นจุด ๆ หนึ่งบนระนาบ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนการบอกตำแหน่งของจุด P คือ คู่อันดับ (r, θ) โดยที่

(1) θ แทนมุมที่ขั้ว โดยมีด้านเริ่มต้นของมุมทับแกนเชิงขั้ว และด้านสิ้นสุดของมุมหรือส่วนต่อของด้านสิ้นสุดของมุมผ่านจุด P โดยที่

$\theta > 0$ เมื่อหมุนด้านสิ้นสุดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจากด้านเริ่มต้น

$\theta < 0$ เมื่อหมุนด้านสิ้นสุดในทิศทางตามเข็มนาฬิกาจากด้านเริ่มต้น

(2) r แทนระยะทางที่ระบุทิศทาง จากขั้วไปถึงจุด P โดยที่

$r > 0$ เมื่อ P อยู่บนด้านสิ้นสุดของ θ มีระยะห่างจากขั้วเท่ากับ r หน่วย

$r < 0$ เมื่อ P อยู่บนด้านที่เป็นส่วนต่อของด้านสิ้นสุดของ θ มีระยะห่างจากขั้ว

เท่ากับ $|r|$ หน่วย

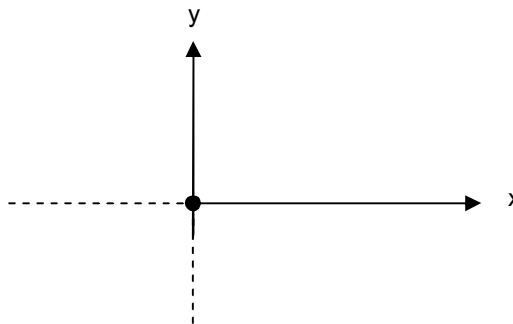
หมายเหตุ 1. พิกัดของจุด ๆ หนึ่งมีได้หลายพิกัด

2. ถ้า (r, θ) เป็นพิกัดของจุด P แล้ว $(r, \theta + 2n\pi)$ สำหรับทุก $n = 0, 1, 2, \dots$

จะเป็นพิกัดของจุด P ด้วย

5. จงหาตำแหน่งของ $P\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ พร้อมทั้งหาพิกัดของ P อีก 4 คู่อันดับ

วิธีทำ จากแกนเชิงขั้วหมุนไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม เรเดียน จากขั้ว
วัดไปตามด้านสิ้นสุดของมุม เป็นระยะทาง หน่วย จะได้ตำแหน่งของจุด $P\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$



พิกัดของจุด P ที่ต่างออกไปอีก 4 คู่อันดับ ได้แก่.....

ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดเชิงขั้วและพิกัดฉาก

ให้ P เป็นจุดบนระนาบ

(x, y) แทนพิกัดของ P ในระบบพิกัดฉาก

(r, θ) แทนพิกัดของ P ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

เมื่อกำหนดพิกัดของจุดในระบบพิกัดเชิงขั้วมาให้ เราสามารถหาพิกัดของจุดนั้นในระบบ
พิกัดฉากได้ด้วยความสัมพันธ์ ดังนี้ $x = r \cos \theta$ และ $y = r \sin \theta$

เมื่อกำหนดพิกัดของจุดในระบบพิกัดฉากมาให้ เราสามารถหาพิกัดของจุดนั้นในระบบ
พิกัดเชิงขั้วได้ ดังนี้

$$x^2 = r^2 \cos^2 \theta \text{ และ } y^2 = r^2 \sin^2 \theta$$

เพราะฉะนั้น $x^2 + y^2 = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$

ดังนั้น $x^2 + y^2 = r^2$

นั่นคือ
$$r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$

นอกจากนั้น จะได้ว่า $\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \frac{y}{x}$

นั่นคือ
$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

6. จงเปลี่ยนพิกัด $P(-2, 2)$ ในระบบพิกัดฉากเป็นพิกัดในระบบพิกัดเชิงขั้ว

วิธีทำ จากความสัมพันธ์ $r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$ และ $\tan \theta = \frac{y}{x}$ จะได้ว่า

$r = \dots\dots\dots$ และ $\tan \theta = \dots\dots\dots$

เพราะว่า P อยู่ในจุดภาค (quadrant) ที่ ดังนั้นเลือกมุม $\theta = \dots$ และ $r = \dots$

ดังนั้น พิกัดหนึ่งของ P ในระบบพิกัดเชิงขั้ว คือ #

กราฟที่สำคัญในระบบพิกัดเชิงขั้ว

1. เส้นตรง

1.1 สมการ: $r \cos \theta = a$

1.2 สมการ: $r \sin \theta = a$

1.3 สมการ: $r (A \cos \theta + B \sin \theta) + C = 0$ เมื่อ A, B และ C เป็นค่าคงตัวและ A, B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

2. วงกลม

2.1 สมการ: $r = a$ เมื่อ $a \neq 0$

2.2 สมการ: $r = 2a \cos \theta$ เมื่อ $a \neq 0$

2.3 สมการ: $r = 2a \sin \theta$ เมื่อ $a \neq 0$

2.4 สมการ: $r = a \cos \theta + b \sin \theta$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

3. เส้นโค้งรูปหัวใจ (Cardioids)

3.1 สมการ: $r = a (1 + \sin \theta)$ เมื่อ $a \neq 0$

3.2 สมการ: $r = a (1 - \sin \theta)$ เมื่อ $a \neq 0$

3.3 สมการ: $r = a (1 + \cos \theta)$ เมื่อ $a \neq 0$

3.4 สมการ: $r = a (1 - \cos \theta)$ เมื่อ $a \neq 0$

4. เส้นโค้งลิมาซอน (Limacons)

4.1 สมการ: $r = a + b \sin \theta$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

4.2 สมการ: $r = a - b \sin \theta$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

4.3 สมการ: $r = a + b \cos \theta$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

4.4 สมการ: $r = a - b \cos \theta$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

5. เส้นโค้งกลีบกุหลาบ (Rose Curve)

5.1 สมการ: $r = a \sin n\theta$ เมื่อ $a \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

5.2 สมการ: $r = a \cos n\theta$ เมื่อ $a \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

7. ให้นักศึกษาและสำรวจลักษณะของกราฟที่สำคัญในระบบพิกัดเชิงขั้วจากกิจกรรมภาคปฏิบัติบนคอมพิวเตอร์

ภาคตัดกรวยในพิกัดเชิงขั้ว

เมื่อกล่าวถึงภาคตัดกรวย จะต้องกล่าวถึงจุดหนึ่งที่จุดหนึ่งนั่นคือ **จุดโฟกัส**ของภาคตัดกรวย และอีกสิ่งหนึ่งที่ต้องกล่าวถึงคือเส้นตรงเส้นหนึ่งที่เป็นเส้นคงที่และจุดโฟกัสไม่อยู่บนเส้นตรงนี้นั่นคือ **เส้นบังคับ (directrix)** โดยที่ P เป็นจุดบนระนาบซึ่งเคลื่อนที่โดยทำให้อัตราส่วนระหว่าง

ระยะทางจากจุด P ถึงจุดโฟกัส กับ ระยะทางจากจุด P ถึงจุดเส้นบังคับ มีค่าคงตัวเสมอ ส่งผลให้ รอยกราฟที่ได้จากการเคลื่อนที่ของจุด P เป็นภาคตัดกรวย นั่นเอง

หมายเหตุ ในการศึกษาเรื่องภาคตัดกรวยในพิกัดเชิงขั้วครั้งนี้ จะศึกษาเฉพาะภาคตัดกรวยที่มี โฟกัสอยู่ที่ขั้วและมีเส้นบังคับตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว หรือแกนแนวฉาก เท่านั้น

บทนิยาม 4.1 ความเยื้องศูนย์กลางของภาคตัดกรวย

กำหนดให้ e เป็นความเยื้องศูนย์กลาง (eccentricity) ซึ่ง

$$e = \frac{\text{ระยะทางระหว่างจุด P และโฟกัส O}}{\text{ระยะทางระหว่างจุด P และเส้นบังคับ}}$$

สมการของภาคตัดกรวยมีดังนี้ เมื่อกำหนดให้ p แทนระยะทางจากจุดโฟกัส (ขั้ว) ถึงเส้นบังคับ

$$1. r = \frac{ep}{1 + e \cos(x)}$$

$$2. r = \frac{ep}{1 - e \cos(x)}$$

$$3. r = \frac{ep}{1 + e \sin(x)}$$

$$4. r = \frac{ep}{1 - e \sin(x)}$$

8. ให้นักศึกษาและสำรวจลักษณะของภาคตัดกรวยในระบบพิกัดเชิงขั้วจากกิจกรรมภาคปฏิบัติบน คอมพิวเตอร์ และตอบคำถามต่อไปนี้

8.1 สมการของภาคตัดกรวยต่อไปนี้ มีเส้นบังคับอยู่ในลักษณะเช่นไร

$$(1) r = \frac{ep}{1 + e \cos(x)} \dots\dots\dots$$

$$(2) r = \frac{ep}{1 - e \cos(x)} \dots\dots\dots$$

$$(3) r = \frac{ep}{1 + e \sin(x)} \dots\dots\dots$$

$$(4) r = \frac{ep}{1 - e \sin(x)} \dots\dots\dots$$

8.2 ค่า e สามารถบอกให้เราทราบว่าภาคตัดกรวยนั้นเป็นพาราโบลา หรือวงรี หรือ ไฮเพอร์โบลา ให้นักศึกษาตอบคำถามว่าค่า e เป็นเท่าใดจึงจะให้กราฟพาราโบลา วงรี หรือ ไฮเพอร์โบลา

- | | |
|-----------|-----------------------------------|
| (1) | ส่งผลให้ภาคตัดกรวยเป็นวงรี |
| (2) | ส่งผลให้ภาคตัดกรวยเป็นพาราโบลา |
| (3) | ส่งผลให้ภาคตัดกรวยเป็นไฮเพอร์โบลา |

อนุพันธ์ในพิกัดเชิงขั้ว

กำหนดฟังก์ชัน f ในพิกัดเชิงขั้ว

$$r = f(\theta)$$

เราจะนิยามอนุพันธ์ $f'(\theta)$ ดังนี้

$$f'(\theta) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{f(\theta + \Delta\theta) - f(\theta)}{\Delta\theta}$$

บทนิยามของอนุพันธ์ในพิกัดเชิงขั้วเหมือนกันกับบทนิยามของอนุพันธ์ในพิกัดฉาก แต่ความหมายในเชิงเรขาคณิตไม่เหมือนกัน กล่าวคือ ในพิกัดเชิงขั้วที่ได้ ไม่ได้หมายถึง ความชันของเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง แต่เราก็สามารถหาความชันของเส้นสัมผัสของเส้นโค้งได้ โดยที่การหาความชันของเส้นสัมผัสของเส้นโค้งนั้นต้องใช้ความรู้เรื่องอนุพันธ์ในพิกัดเชิงขั้วนี้ด้วย ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1 ถ้ากำหนดเส้นโค้ง $r = f(\theta)$ และ $P(r_1, \theta_1)$ เป็นจุดบนเส้นโค้ง และ m เป็นความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P แล้ว

$$m = \frac{f(\theta_1)\cos\theta_1 + f'(\theta_1)\sin\theta_1}{f'(\theta_1)\cos\theta_1 - f(\theta_1)\sin\theta_1}$$

$$\text{เมื่อ } f'(\theta_1)\cos\theta_1 - f(\theta_1)\sin\theta_1 \neq 0$$

จากทฤษฎีบท 4.1 เราจะได้สูตรการหาความชันของเส้นสัมผัสอีกสูตรหนึ่งซึ่งเป็นที่นิยมใช้มากกว่า เพราะเป็นสูตรที่สั้นและจำง่ายกว่า

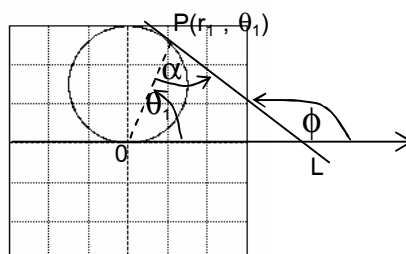
ทฤษฎีบท 4.2 กำหนดเส้นโค้ง $r = f(\theta)$ และ $P(r_1, \theta_1)$ เป็นจุดบนเส้นโค้ง

ให้ L เป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้ง f ที่จุด P และมีมุมเอียงเท่ากับ ϕ

ถ้า α เป็นมุมบวกที่วัดจากด้าน OP ไปยัง เส้นตรง L แล้ว

$$\tan \alpha = \frac{f(\theta_1)}{f'(\theta_1)}$$

$$\text{เมื่อ } f'(\theta) \neq 0 \text{ และ } r_1 \neq 0$$



9. จงหาความชันของเส้นสัมผัส L ซึ่งสัมผัสเส้นโค้ง $r = 6 \sin \theta$ ที่จุด $P(0,0)$ โดยใช้สูตรการหาความชันของเส้นสัมผัสในทฤษฎีบท 4.1

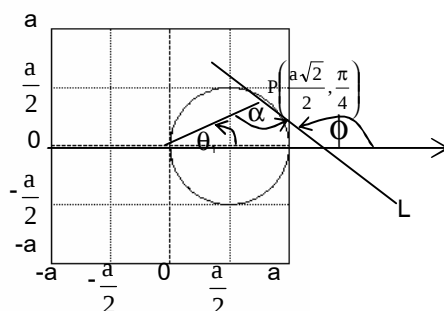
วิธีทำ จะได้ $\theta_1 = \dots$ และ $f(\theta) = \dots$ ดังนั้น $f'(\theta) = \dots$

สูตรการหาความชันของเส้นสัมผัสในทฤษฎีบท 4.1 คือ

$$m = \frac{f(\theta_1)\cos\theta_1 + f'(\theta_1)\sin\theta_1}{f'(\theta_1)\cos\theta_1 - f(\theta_1)\sin\theta_1}$$

ดังนั้น $m = \dots$ #

10. จงหาความชันของเส้นสัมผัส L ซึ่งสัมผัสเส้นโค้ง $r = a \cos \theta$, $a > 0$ ที่จุด $p\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ โดยใช้สูตรการหาความชันของเส้นสัมผัสในทฤษฎีบท 4.2



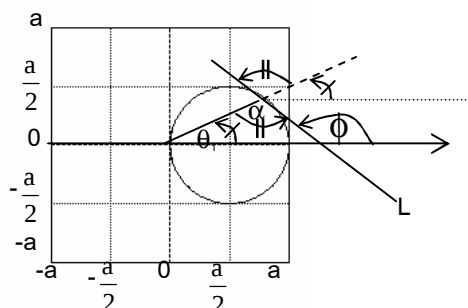
วิธีทำกำหนดให้ L เป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด P และ ϕ เป็นมุมเอียงของ L

ดังนั้น ความชันของ L เท่ากับ $\tan \phi$

$$\text{จากสูตรในทฤษฎีบท 4.2 จะได้ } \tan \alpha = \frac{f(\theta_1)}{f'(\theta_1)} = \dots$$

$$= \dots$$

ดังนั้น $\alpha = \dots$



จากรูป จะได้ว่า $\phi = \dots + \dots = \dots$

ดังนั้นความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่กำหนดให้ที่จุด P เท่ากับ $\tan \dots = \dots$ #

11. จงหาความชันของเส้นสัมผัส L ซึ่งสัมผัสเส้นโค้ง $r = 1 - 2\cos \theta$ ที่จุด $P\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ โดยใช้สูตรการหาความชันของเส้นสัมผัสในทฤษฎีบท 4.1 และสูตรการหาความชันของเส้นสัมผัสในทฤษฎีบท 4.2

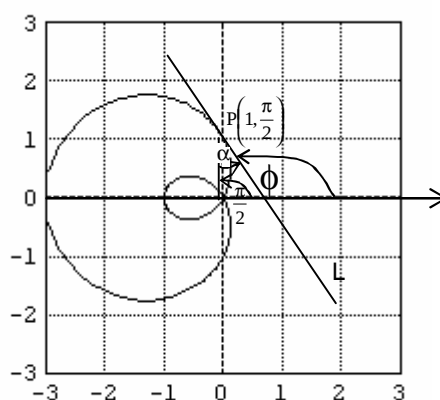
วิธีที่ 1 จะได้ $\theta_1 = \dots\dots$ และ $f(\theta) = \dots\dots\dots$ ดังนั้น $f'(\theta) = \dots\dots\dots$

หาความชันของเส้นสัมผัสโดยใช้สูตรในทฤษฎีบท 4.1

จะได้ $m = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$ #

วิธีที่ 2 การหาความชันจากสูตรการหาความชันของเส้นสัมผัสในทฤษฎีบท 4.2

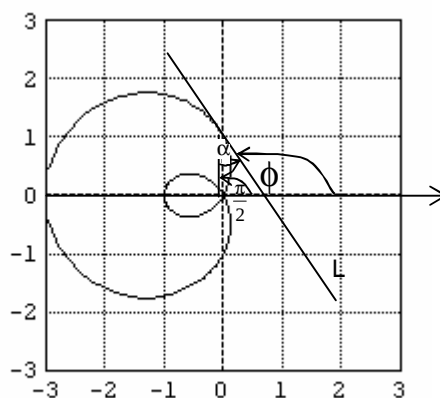


กำหนดให้ L เป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่กำหนดที่จุด P และ ϕ เป็นมุมเอียงของ L

ดังนั้น ความชันของ L เท่ากับ $\tan \phi$

จากสูตรในทฤษฎีบท 4.2 จะได้ $\tan \alpha = \dots\dots\dots$

จะได้ $\alpha = \dots\dots\dots$



จากรูป จะได้ว่า $\phi = \dots\dots + \dots\dots = \dots\dots\dots$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่กำหนดให้ที่จุด P เท่ากับ $\tan \dots\dots = \dots\dots$ #

คำอธิบายเกี่ยวกับการใช้คำสั่งของโปรแกรม Euler ในกิจกรรมที่ 4

คำสั่ง	การใช้งาน
<pre>::depends ([y,x],t) ::function x(t):=sqrt(t) ::function y(t):=1-t ::'diff(y(t),t)/diff(x(t),t)=diff(y(t),t)/diff(x(t),t)</pre>	บรรทัดแรกเป็นการประกาศให้โปรแกรมทราบว่า x, y เป็นตัวแปรของ t ให้ผู้เรียนกำหนดฟังก์ชัน $x(t)=$__ และ $y(t)=$__ บรรทัดที่สี่จะหา $\frac{dy}{dx}$
<pre>plot2d("sqrt(x)","1-x",a=0.1,b=5, c=-6,d=2); insimg(10);</pre> ข้อดีของคำสั่ง plot2d คือ คำสั่งง่ายใช้สะดวก ข้อจำกัดคือ ในบางฟังก์ชันจะสร้างกราฟไม่สมบูรณ์ เช่น ฟังก์ชัน $\sqrt{x}$	เมื่อต้องการสร้างกราฟของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม ให้ผู้เรียนกำหนด ฟังก์ชัน $x(t)$ และ $y(t)$ ลงในช่องว่างดังนี้ <code>plot2d("___", "___",</code> และกำหนดค่าอื่น ๆ ที่เหลือตามต้องการ
<pre>::plot2d([parametric,sqrt(t),1-t,[t,-5,5], [nticks,80]],x,-5,4/3))</pre> ข้อดีของคำสั่ง ::plot2d คือ สามารถแก้ไขข้อจำกัดของคำสั่ง <code>plot2d</code> ได้ ข้อจำกัดคือ ในบางกรณีไม่อาจจะเพิ่มขอบเขตของ t มากเท่าไร ก็ยังไม่เห็นมุมมองทั้งหมดของกราฟของฟังก์ชัน	ให้ผู้เรียนกำหนด ฟังก์ชัน $x(t)$ และ $y(t)$ ลงในช่องว่างดังนี้ <code>plot2d([parametric, ___ , ___ ,</code> กำหนดขอบเขตของ t ดังนี้ <code>[t , ___ , ___]</code> กำหนดจำนวนจุดที่ใช้ในการสร้างกราฟลงในช่องว่างดังนี้ <code>[nticks,___]</code> และกำหนดขอบเขตของกรอบด้านซ้ายและขวา ลงในช่องว่างตามลำดับ <code>[x , ___ , ___]</code>
<pre>::load(draw)\$::draw2d(explicit(0*x,x,-10,10),color = red,key = "This is the parametric one!!", parametric(sqrt(t),1-t,t,-2*%pi,2*%pi))\$</pre> ข้อดีของคำสั่ง ::draw2d คือ สามารถแก้ไขข้อจำกัดของคำสั่ง <code>::plot2d</code> ได้ ทำให้เห็นมุมมองทั้งหมดของกราฟของฟังก์ชัน ข้อจำกัดคือ คำสั่งยาก ไม่สะดวกต่อการใช้งานสำหรับในกรณีที่ต้องการสร้างกราฟของฟังก์ชันที่ไม่ซับซ้อน	1. ให้โปรแกรมแสดงแกน y และมีขอบเขตของกรอบด้านซ้ายและขวาเท่ากับ -10 และ 10 ตามลำดับ ด้วยคำสั่ง <code>::draw2d(explicit(0*x,x,-10,10),</code> 2. กำหนดสีกราฟของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริมดังนี้ <code>color = ___ ,</code> 3. สามารถเขียนข้อความอธิบายเพิ่มเติมลงในช่องว่างดังนี้ <code>key = "___",</code> 4. ให้ผู้เรียนกำหนดฟังก์ชัน $x(t)$ และ $y(t)$ กำหนดตัวแปร t และขอบเขตของ t ลงในช่องว่างตามลำดับ <code>parametric(___ , ___ , t , ___ , ___)</code>

หมายเหตุ สามารถเลือกใช้คำสั่ง `plot2d` , `::plot2d` หรือ `::draw2d` เพื่อสร้างกราฟของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริมได้ตามความต้องการ

คำอธิบายเกี่ยวกับการใช้คำสั่งของโปรแกรม Euler ในกิจกรรมที่ 4 (ต่อ)

คำสั่ง	การใช้งาน
<pre>a=-1; plot2d("(a/sin(x))*cos(x)","(a/sin(x))*sin(x)",r=7); insimg(10);</pre>	ให้ผู้เรียนกำหนดค่าคงที่ $a = \underline{\hspace{1cm}}$ โปรแกรมจะสร้างกราฟเส้นตรงในระบบพิกัดเชิงขั้วซึ่งมีสมการเป็น $r \sin \theta = a$ หมายเหตุ การพิมพ์คำสั่งเพื่อให้โปรแกรมสร้างกราฟ จะต้องแปลงจากสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วไปเป็นสมการในระบบพิกัดฉาก ดังนั้น จากสมการเส้นตรงในระบบพิกัดเชิงขั้ว $r \sin \theta = a$ จะได้ $r = \frac{a}{\sin(\theta)}$ เมื่อแปลงเป็นสมการในระบบพิกัดฉาก จะได้ $x(\theta) = r \cos \theta$ และ $y(\theta) = r \sin \theta$ จึงพิมพ์คำสั่งว่า <code>plot2d("(a/sin(x))*cos(x)", "(a/sin(x))*sin(x)",</code>
<pre>::solve(tan(x)+1,x)</pre>	เมื่อต้องการหาค่าของมุม ซึ่งค่าแทนเจนต์ของมุนั้นมีค่าเท่ากับ -1 ให้ใช้คำสั่งแก้สมการ (solve) โดยจัดรูปสมการ $\tan(x) = -1$ ให้เป็น $\tan(x)+1 = 0$ แล้วพิมพ์คำสั่ง ลงในช่องว่างนี้ <pre>::solve(____,x)</pre>
<pre>::tan(atan(1/2)+pi/2)</pre>	ให้ผู้เรียนกำหนดค่าของมุมที่ต้องการหาค่าแทนเจนต์ของมุมลงในช่องว่างดังนี้ <pre>::tan(____)</pre> หมายเหตุ ค่าของมุมที่กำหนดจะมีหน่วยเป็นเรเดียน หากต้องการกำหนดมุมที่มีหน่วยเป็นองศา เมื่อกำหนดค่าของมุมแล้วให้กด F7 การกด F7 เป็นการแทรกเครื่องหมาย $^{\circ}$

หมายเหตุ คำสั่งที่มี :: อยู่ข้างหน้าคือคำสั่งที่ประมวลผลจากโปรแกรม Maxima ซึ่งเป็นโปรแกรมแบบ CAS ที่แฝงอยู่ในโปรแกรม Euler

ใบกิจกรรมที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์ 1 (MATHEMATICS 1) : MA111

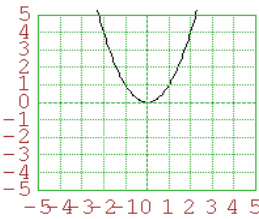
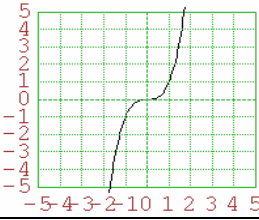
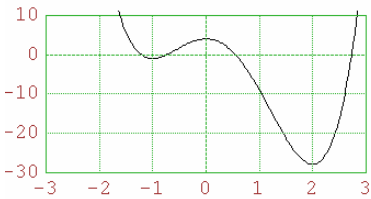
เนื้อหา การประยุกต์ของอนุพันธ์ : การเขียนกราฟของฟังก์ชัน

ชื่อ.....เลขที่.....

บทนิยาม 5.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันบนโดเมน D ที่มี A เป็นสับเซตของ D และ A ไม่เป็นเซตว่าง

1. f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน A ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ สำหรับทุก ๆ ค่า $x_1 < x_2$ บน A
2. f เป็นฟังก์ชันลดบน A ถ้า $f(x_1) > f(x_2)$ สำหรับทุก ๆ ค่า $x_1 < x_2$ บน A

1. พิจารณากราฟของฟังก์ชัน และตอบคำถามต่อไปนี้

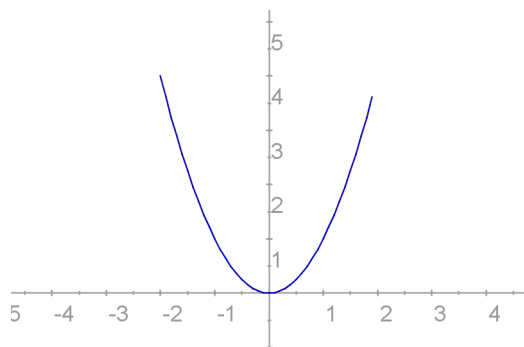
1.1 $f(x) = x^2$		เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง
1.2 $f(x) = x^3$		เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง
1.3 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 4$		เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง

บทนิยาม 5.2 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันบนโดเมน D และ $x_0 \in D$

1. f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ที่ $x = x_0$ เมื่อ $f(x_0) \geq f(x)$ สำหรับทุกค่า x บน D
และเรียก $(x_0, f(x_0))$ ว่า จุดสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บน D
เรียก $f(x_0)$ ว่า ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บน D
2. f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ ที่ $x = x_0$ เมื่อ $f(x_0) \leq f(x)$ สำหรับทุกค่า x บน D
และเรียก $(x_0, f(x_0))$ ว่า จุดต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บน D
เรียก $f(x_0)$ ว่า ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บน D

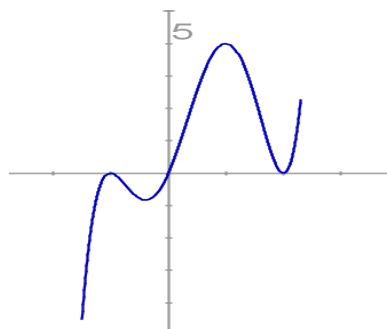
2. ให้นิสิตทำกิจกรรมบนคอมพิวเตอร์ ซึ่งต้องการให้หาจุดสูงสุดสัมบูรณ์และจุดต่ำสุดสัมบูรณ์ของกราฟที่ปรากฏ และเมื่อได้คำตอบที่ถูกต้องแล้วให้ตรวจคำตอบในกิจกรรมบนคอมพิวเตอร์(คลิกlink ที่ Solution)โดยการสำรวจค่าของฟังก์ชัน ณ จุดต่างๆ และตอบคำถามลงในใบกิจกรรม

2.1 $f(x) = x^2$ บน $[-2, 1.9]$



จุดสูงสุดสัมบูรณ์ _____
จุดต่ำสุดสัมบูรณ์ _____

2.2 $f(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 4x$ บน $[-1.5, 2.3]$



จุดสูงสุดสัมบูรณ์ _____
จุดต่ำสุดสัมบูรณ์ _____

บทนิยาม 5.3 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันบนโดเมน D และ $x_0 \in D$

1. f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ที่ $x = x_0$ เมื่อมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ที่ทำให้ $f(x_0) \geq f(x)$

สำหรับทุกค่า $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$

และเรียก $(x_0, f(x_0))$ ว่า จุดสูงสุดสัมพัทธ์ของ f บน D

เรียก $f(x_0)$ ว่า ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f บน D

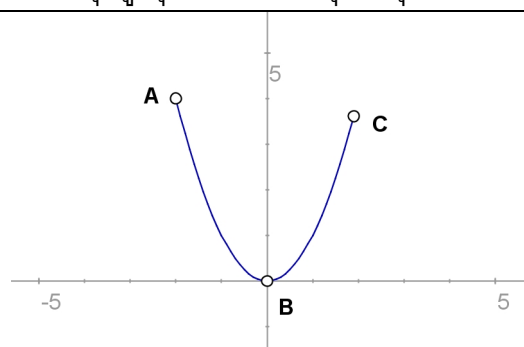
2. f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ที่ $x = x_0$ เมื่อมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ที่ทำให้ $f(x_0) \leq f(x)$

สำหรับทุกค่า $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$

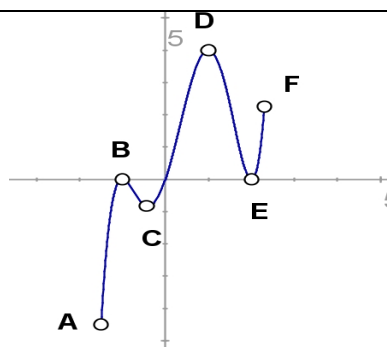
และเรียก $(x_0, f(x_0))$ ว่า จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f บน D

เรียก $f(x_0)$ ว่า ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f บน D

3. จงหาจุดสูงสุดสัมพัทธ์และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของกราฟต่อไปนี้

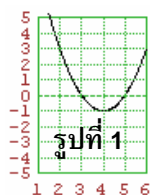


จุดสูงสุดสัมพัทธ์ _____
จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ _____

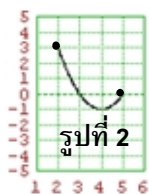


จุดสูงสุดสัมพัทธ์ _____
จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ _____

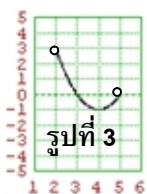
4. พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 8x + 15$



โดเมน = $\mathbb{R}$



โดเมน = $[2, 5]$



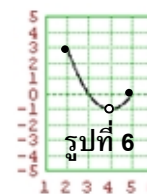
โดเมน = $(2, 5)$



โดเมน = $[2, 5)$



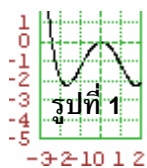
โดเมน = $(2, 5]$



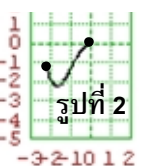
โดเมน = $[2, 5] - \{4\}$

คำถาม กราฟรูปใดที่มีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

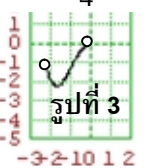
5. พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$ ต่อไปนี้



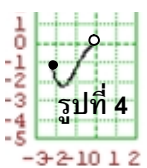
โดเมน = $\mathbb{R}$



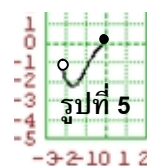
โดเมน = $[-2.2, 0]$



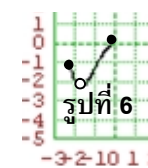
โดเมน = $(-2.2, 0)$



โดเมน = $[-2.2, 0)$



โดเมน = $(-2.2, 0]$



โดเมน = $[-2.2, 0] - \{\sqrt{3}\}$

คำถาม กราฟรูปใดที่มีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์



ชวนคิด: โดเมนลักษณะใดที่จะทำให้ฟังก์ชันมีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

6. ความจริงแล้ว มีทฤษฎีบทที่ยืนยันการมีค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์ในโดเมน ดังนี้

ทฤษฎีบท 5.1 ทฤษฎีบทค่าสุดขีด :

ทฤษฎีบท 5.2 ทฤษฎีบทของแฟร์มา : Fermat's Theorem

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงปิด $[a, b]$

ถ้า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = x_0$ เมื่อ $x_0 \in (a, b)$

แล้ว $f'(x_0) = 0$ หรือ f หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ x_0

7.1 จงเขียนบทกลับของทฤษฎีของแฟร์มา

7.2 บทกลับของทฤษฎีของแฟร์มาเป็นจริงหรือไม่ จงอภิปราย

บทนิยาม 5.4 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงเปิด (a, b)

จุดวิกฤต ของ f คือจุด $x = x_0 \in (a, b)$ ซึ่ง (1) $f'(x_0) = 0$ หรือ

(2) $f'(x_0)$ หาค่าไม่ได้

8. จงหาจุดวิกฤตทั้งหมดของฟังก์ชัน $f(x) = 3x^{\frac{5}{3}} - 15x^{\frac{2}{3}}$

จะได้ $f'(x) = \dots\dots\dots$

เมื่อ $f'(x) = 0$ จะได้ $\dots\dots\dots$ ดังนั้น $x = \dots\dots\dots$

จาก $f'(\dots\dots\dots)$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้นจุดวิกฤต ได้แก่ $x = \dots\dots\dots$

ทฤษฎีบท 5.3 : ทฤษฎีบทของรอล (Rolle's Theorem)

9. จงยกตัวอย่างการเขียนกราฟของฟังก์ชัน f ซึ่งมีเงื่อนไข 3 ข้อต่อไปนี้

- (1) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$
- (2) f เป็นฟังก์ชันที่อนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a, b)
- (3) $f(a) = f(b) = 0$



เป็นไปได้หรือไม่ที่จะเขียนกราฟของ f โดยที่ไม่มีจุด $c \in (a, b)$ ที่ทำให้ $f'(c) = 0$

ทฤษฎีบท 5.4 : ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย (Mean – Value Theorem)

10. จงยกตัวอย่างการเขียนกราฟของฟังก์ชัน f ซึ่ง

- (1) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$
- (2) f เป็นฟังก์ชันที่อนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a, b)



- (3) จงเขียนส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุด $A(a, f(a))$ และ $B(b, f(b))$
- (4) ความชันของ $\overline{AB} = \dots\dots\dots$
- (5) นิสิตคิดว่า จะมี $c \in (a, b)$ ที่ทำให้ $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ หรือไม่

.....

11. กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 3x - 2$ จงหาค่าของ x_0 ระหว่าง $a = 0$ และ $b = 2$

$$\text{ที่ทำให้ } f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

เพราะว่า $f(x) = x^2 - 3x - 2$ ดังนั้น $f'(x) = \dots\dots\dots$

เนื่องจาก $f(a) = \dots\dots\dots$ และ $f(b) = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dots\dots\dots$

นั่นคือ $f'(x_0) = \dots\dots\dots$

แก้สมการหาค่า x_0

.....



: “ถ้าเรามีฟังก์ชันอยู่ 1 ฟังก์ชัน เช่น $x^2 - 3x - 2$ เราจะหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ เราจะทำอย่างไรดี? ช่วยกันคิดหน่อย”



: “วาดกราฟสิครับ”



: “ได้ การวาดกราฟเป็นวิธีหนึ่ง แต่มีวิธีอื่นอีกไหม”



: “หาอนุพันธ์ แล้วหาจุดวิกฤตครับ”



: “พอเราได้จุดวิกฤต แล้วเราจะหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ได้อย่างไร อืม จากทฤษฎีบทแฟร์มา เรารู้ว่าจุดสูงสุดสัมพัทธ์และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ จะต้องเป็นจุดวิกฤต แต่บทกลับไม่จริง นั่นคือ ทุกจุดวิกฤตก็อาจไม่ใช่จุดสูงสุดสัมพัทธ์หรือจุดต่ำสุดสัมพัทธ์”



: “แสดงว่าถ้าหาอนุพันธ์เพื่อหาจุดวิกฤตแล้ว ก็ต้องวาดกราฟอยู่ดี”



: “แต่เดี๋ยวก่อน! เรามีวิธีตรวจสอบจุดวิกฤตว่าจุดวิกฤตนั้นให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือไม่ ดังนี้”

วิธีทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

ให้ฟังก์ชัน f มีจุดวิกฤตที่ $x = x_0$ และต่อเนื่องที่ $x = x_0$ บนช่วง I

1. ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in (x_1, x_0) \subset I$

และ $f'(x) < 0$ สำหรับทุก $x \in (x_0, x_2) \subset I$

แล้ว f มีจุดสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = x_0$

2. ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก $x \in (x_1, x_0) \subset I$

และ $f'(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in (x_0, x_2) \subset I$

แล้ว f มีจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = x_0$

ทฤษฎีบท 5.5 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a, b)

ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงเปิด (a, b)

บทแทรก 5.6 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a, b)

ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วงเปิด (a, b)

ทฤษฎีบท 5.7 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a, b)

ถ้า $f'(x) \neq 0$ สำหรับทุก $x \in (a, b)$

แล้ว $f'(x) > 0$ หรือ $f'(x) < 0$ สำหรับทุก $x \in (a, b)$

บทนิยาม 5.5 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I

1. ถ้ากราฟของ f อยู่เหนือเส้นสัมผัสของกราฟ ณ จุดใด ๆ บน I
แล้ว กราฟของ f เป็นกราฟเว้าบน บนช่วง I
2. ถ้ากราฟของ f อยู่ใต้เส้นสัมผัสของกราฟ ณ จุดใด ๆ บน I
แล้ว กราฟของ f เป็นกราฟเว้าล่าง บนช่วง I

14. จากบทนิยาม 5.5 จงยกตัวอย่างกราฟที่มีลักษณะเว้าบน และที่มีลักษณะเว้าล่าง



15. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง I

- (1) กราฟของ f บนช่วง I มีลักษณะเว้าบน เมื่อ $f'(x)$ เป็นเส้นโรบนช่วง I

.....

- (2) กราฟของ f บนช่วง I มีลักษณะเว้าบน เมื่อ $f''(x)$ เป็นเส้นโรบนช่วง I

.....

- (3) กราฟของ f บนช่วง I มีลักษณะเว้าล่าง เมื่อ $f'(x)$ เป็นเส้นโรบนช่วง I

.....

- (4) กราฟของ f บนช่วง I มีลักษณะเว้าล่าง เมื่อ $f''(x)$ เป็นเส้นโรบนช่วง I

.....

วิธีทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับสอง

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I และมีอนุพันธ์อันดับสองซึ่งต่อเนื่องบนช่วง I

และ $x = x_0$ เป็นจุดวิกฤตของฟังก์ชัน f บนช่วง I

1. ถ้า $f''(x_0) > 0$ แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด $x = x_0$
2. ถ้า $f''(x_0) < 0$ แล้ว f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด $x = x_0$
3. ถ้า $f''(x_0) = 0$ ทดสอบด้วยวิธีนี้ไม่ได้

16. จงหาจุดวิกฤตทั้งหมดของ $f(x) = x^3 + x^2 - x - 2$ และใช้อนุพันธ์อันดับสองตรวจสอบว่า มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ ที่จุดวิกฤตแต่ละจุด หรือไม่

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

บทนิยาม 5.6 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I และ $x_0 \in I$

เรียกจุด $x = x_0$ ว่า **จุดเปลี่ยนความเว้า** ถ้ากราฟของ f เปลี่ยนจากเว้าบนเป็น
 เว้าล่าง หรือกลับกัน ณ จุด $x = x_0$ นี้ โดยที่ (1) $f''(x_0) = 0$ หรือ
 (2) $f''(x_0)$ หาค่าไม่ได้

17. จงหาจุดเปลี่ยนความเว้าของฟังก์ชันในข้อ 16

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ขั้นตอนการเขียนกราฟ

เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ มาให้

1. หาจุดวิกฤต

2. ตรวจสอบจุดวิกฤต

ด้วยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง หรือ

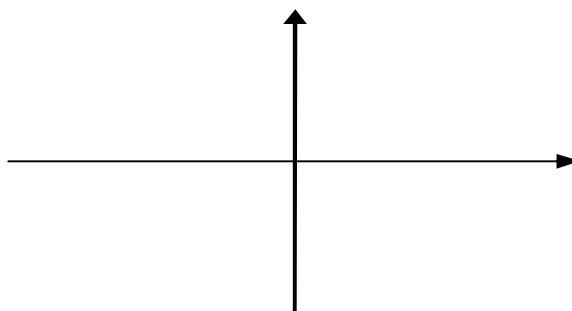
ด้วยอนุพันธ์อันดับสอง

3. หาจุดเปลี่ยนความเว้า และพิจารณาช่วงที่ทำให้กราฟเว้าบนและ/หรือเว้าล่าง

4. หาค่า $f(x)$ ของจุดวิกฤตและจุดเปลี่ยนความเว้า เพื่อลงจุดวาดกราฟ

20. จงเขียนกราฟของ $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$

วิธีทำ

[illegible]

คำอธิบายเกี่ยวกับการใช้คำสั่งของโปรแกรม Euler ในกิจกรรมที่ 5

คำสั่ง	การใช้งาน
<pre>::function f(x):=x^3-(21/4)*x^2+9*x-4 ::diff(f(x),x) ::solve(=0,x) ::function g(x):=diff(f(x),x) ::g(x) ::g(x);at(%,x=-1) ::bfloat(%) ::function h(x):=diff(f(x),x,2) ::h(x) ::h(x);at(%,x=-0.2) ::f(3/2)</pre>	ให้ผู้เรียนกำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ คำสั่งหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ คำสั่งแก้สมการ $f'(x) = 0$ คำสั่งนิยามฟังก์ชัน $g(x) = f'(x)$ คำสั่งให้แสดงฟังก์ชัน $g(x)$ คำสั่งหาค่าของฟังก์ชัน $g(-1)$ คำสั่งประมาณค่า คำสั่งนิยามฟังก์ชัน $h(x) = f''(x)$ คำสั่งให้แสดงฟังก์ชัน $h(x)$ คำสั่งหาค่าของฟังก์ชัน $h(-0.2)$ คำสั่งหาค่าของฟังก์ชัน $f(3/2)$
<pre>plot2d("x^3-(21/4)*x^2+9*x-4",a=-3,b=4, c=-5,d=5); insimg(15);</pre>	ให้ผู้เรียนกำหนดฟังก์ชันที่ต้องการจะสร้างกราฟลงในช่องว่าง <code>plot2d("___",</code> และกำหนดค่าอื่น ๆ ที่เหลือตามต้องการ
<pre>::plot2d(x^3-(21/4)*x^2+9*x-4,[x,-5,5], [y,-5,5])</pre>	ให้ผู้เรียนกำหนดฟังก์ชันที่ต้องการจะสร้างกราฟลงในช่องว่าง <code>::plot2d(___ ,</code> และกำหนดขอบเขตของแกน x และแกน y ลงในช่องว่าง <code>[x , ___ , ___]</code> และ <code>[y , ___ , ___]</code> ตามลำดับ
<pre>::load(draw) ::draw2d(yrange = [-5,5], explicit(x^(1/3)*(x+2)^(-2/3),x,-5,5), xrange = [-5,5])</pre>	ให้ผู้เรียนกำหนดฟังก์ชันที่ต้องการจะสร้างกราฟลงในช่องว่าง <code>explicit(___) ,</code> และกำหนดขอบเขตของแกน x และแกน y ลงในช่องว่าง <code>xrange = [___ , ___]</code> และ <code>yrange = [___ , ___]</code> ตามลำดับ

หมายเหตุ

1. % คือ ตัวแปรแทนการประมวลผลครั้งล่าสุด ใช้เพื่อประหยัดเวลาในการพิมพ์ใหม่
2. ผู้เรียนสามารถกำหนดค่าของฟังก์ชันที่ต้องการจะหาค่าได้ตามต้องการ
3. ผู้เรียนสามารถเลือกใช้คำสั่ง `plot2d` , `::plot2d` หรือ `::draw2d` ในการสร้างกราฟของฟังก์ชันได้ตามความต้องการ คำสั่ง `plot2d` และคำสั่ง `::plot2d` มีข้อจำกัดในบางกรณี เช่น คำสั่ง `plot2d` และคำสั่ง `::plot2d` ไม่สามารถแสดงกราฟของฟังก์ชัน $x^{1/3}$ ในช่วง $(-\infty, 0)$ ได้ แต่คำสั่ง `::draw2d` สามารถทำได้
4. คำสั่งที่มี `::` อยู่ข้างหน้าคือคำสั่งที่ประมวลผลจากโปรแกรม Maxima ซึ่งเป็นโปรแกรมแบบ CAS ที่แฝงอยู่ในโปรแกรม Euler

ใบกิจกรรมที่ 6

วิชา คณิตศาสตร์ 1 (MATHEMATICS 1) : MA111

เนื้อหา การประยุกต์ของอนุพันธ์ : โจทย์ปัญหาการหาค่าสูงสุดและต่ำสุด

ชื่อ.....เลขที่.....

โจทย์ปัญหาการหาค่าสูงสุดและต่ำสุด

ในชีวิตประจำวัน มีปัญหามากมายที่ต้องการคำตอบเป็นค่าที่เหมาะสม (optimization problem) ซึ่งเกี่ยวข้องกับการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน เช่น ถ้าต้องการใช้ลวดหนาม ล้อมรั้วเพื่อสร้างเป็นสวนมะม่วงรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า จะต้องสร้างรั้วขนาดเท่าใด จึงจะได้พื้นที่มากที่สุด หรือจะผลิตสินค้ากี่ชิ้น เพื่อให้กำไรมากที่สุด โดยที่สินค้ามีต้นทุนและราคาขายที่กำหนดไว้ เป็นต้น

ขั้นตอนวิธีการเปลี่ยนรูปปัญหาในชีวิตจริงให้อยู่ในรูปฟังก์ชัน

1. เขียนรูปประกอบ หรือพิจารณารายละเอียดของสิ่งที่โจทย์กำหนดให้
2. กำหนดตัวแปรแทนปริมาณต่าง ๆ ที่มีในโจทย์
3. สร้างฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด ซึ่งปัญหาส่วนใหญ่จะเป็นการหาพื้นที่ การหาปริมาตร หรือบางปัญหาอาจกำหนดฟังก์ชันมาให้แล้ว
4. ถ้าฟังก์ชันมีหลายตัวแปร ต้องทำให้เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียว โดยใช้ความสัมพันธ์ของตัวแปรที่เกี่ยวข้อง
5. กำหนดขอบเขตของตัวแปรตามเงื่อนไขของโจทย์
6. หาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน เพื่อได้เป็นคำตอบของปัญหา

1. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งมีความยาวรอบรูป 120 เซนติเมตร ถ้าต้องการให้ได้พื้นที่สูงสุด จะต้องมีความกว้างเท่าใด

วิธีทำ ให้ x แทนความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ให้ y แทนความยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ให้ A แทนพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ดังนั้น $A = xy$ ซึ่งมีตัวแปรสามตัว เราจะต้องกำจัดให้เหลือตัวแปรเพียงสอง

ตัวแปร เพื่อให้ A เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียว

โจทย์กำหนดให้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งมีความยาวรอบรูป 120 เซนติเมตร

.....

.....

.....

[illegible]

2. กล่องใบหนึ่งมีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และไม่มีฝาปิด มีพื้นที่ภายในกล่องทั้งหมด 100 ตารางนิ้ว จงหาขนาดที่จะทำให้กล่องมีปริมาตรมากที่สุด

วิธีทำ ให้ x แทนความยาวของฐานกล่อง

ให้ h แทนความสูงของกล่อง

ให้ V แทนปริมาตรของกล่อง

ดังนั้น $V = x^2 h$ ซึ่งมีตัวแปรสามตัว เราจะต้องกำจัดให้เหลือตัวแปรเพียงสอง

ตัวแปร เพื่อให้ V เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียว

จากโจทย์กำหนดว่า กล้องไม่มีฝาปิด และมีพื้นที่ภายในกล่องทั้งหมด 100 ตารางนิ้ว

[illegible]

5. ลวดเส้นหนึ่งยาว 10 นิ้ว ต้องการตัดแบ่งออกเป็นสองส่วน โดยส่วนหนึ่งขดเป็นวงกลมรัศมี r นิ้ว อีกส่วนหนึ่งทำเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ x นิ้ว จงหาว่าจะตัดแบ่งลวดอย่างไร จึงจะทำให้ผลบวกของพื้นที่วงกลมและพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสมีพื้นที่มากที่สุด

วิธีทำ ให้ x แทนความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ให้ r แทนรัศมีของวงกลม

ให้ A แทน.....

ดังนั้น $A =$

.....

จากโจทย์กำหนดให้ตัดแบ่งลวดซึ่งยาว 10 นิ้ว ออกเป็นสองส่วน โดยส่วนหนึ่งขดเป็นวงกลมรัศมี r นิ้ว อีกส่วนหนึ่งทำเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ x นิ้ว

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

คำอธิบายเกี่ยวกับการใช้คำสั่งของโปรแกรม Euler ในกิจกรรมที่ 6

คำสั่ง	การใช้งาน
<code>::function v(x):=x^2*(25/x-x/4)</code>	ให้ผู้เรียนกำหนดฟังก์ชัน $v(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ หมายเหตุ ใช้ตัวแปรอื่นได้ เช่น $A(r) = \pi \cdot r^2$
<code>::diff(v(x),x)</code>	คำสั่งหาอนุพันธ์ หมายเหตุ ผู้เรียนสามารถพิมพ์ฟังก์ชันได้เลยโดยไม่ต้องนิยามฟังก์ชันก่อน จากนั้นพิมพ์ตัวแปรลงในช่องว่าง <code>::diff(<u> </u> , <u> </u>)</code> ตามลำดับ เช่น <code>::diff(x^2+x+1,x)</code>
<code>::diff(v(x),x,2)</code>	คำสั่งหาอนุพันธ์อันดับสูง หมายเหตุ ผู้เรียนสามารถเปลี่ยนแปลงอันดับของอนุพันธ์โดยเปลี่ยนแปลงค่าคงตัวในช่องว่างต่อไปนี้ <code>::diff(v(x),x,<u> </u>)</code>
<code>::ratsimp(%)</code>	คำสั่งจัดรูปฟังก์ชัน/นิพจน์ให้อยู่ในรูปที่ง่ายขึ้นมาจาก Ratio Simplify หมายเหตุ ผู้เรียนสามารถพิมพ์ฟังก์ชัน/นิพจน์ที่ต้องการจัดรูปใหม่ลงในช่องว่างต่อไปนี้ <code>::ratsimp(<u> </u>)</code>
<code>::solve(=0,x)</code>	คำสั่งแก้สมการ หมายเหตุ ผู้เรียนสามารถพิมพ์สมการที่ต้องการหาคำตอบและพิมพ์ตัวแปรลงในช่องว่าง <code>::solve(<u> </u> , <u> </u>)</code> ตามลำดับ เช่น <code>::solve(t^2+2*t=-1,t)</code>
<code>::bfloat(%)</code>	คำสั่งประมาณค่า โดยแสดงผลในรูปทศนิยม หมายเหตุ ผู้เรียนสามารถพิมพ์จำนวน/นิพจน์ที่ต้องการประมาณค่าลงในช่องว่าง <code>::bfloat(<u> </u>)</code> เช่น $\frac{2}{3}$ <code>::bfloat($\frac{2}{3}$)</code> หรือ <code>::bfloat(pi)</code>
<code>::limit(f(x),x,inf)</code>	คำสั่งหาลิมิต โดยที่รูปแบบการคำสั่งคือพิมพ์ฟังก์ชัน , ตัวแปร และค่าคงที่(หรือ ∞ หรือ $-\infty$) ลงในช่องว่าง <code>::limit(<u> </u> , <u> </u> , <u> </u>)</code> ตามลำดับ

หมายเหตุ คำสั่งที่ใช้ในกิจกรรมที่ 6 ส่วนใหญ่จะเป็นคำสั่งที่ประมวลผลจากโปรแกรม Maxima ซึ่งเป็นโปรแกรมแบบ CAS ที่ฝังอยู่ในโปรแกรม Euler

ใบกิจกรรมที่ 7

วิชา คณิตศาสตร์ 1 (MATHEMATICS 1) : MA111

เนื้อหา การประยุกต์ของอนุพันธ์ : ความเร็วและความเร่ง อัตราสัมพัทธ์ และค่าเชิงอนุพันธ์ และการประยุกต์

ชื่อ.....เลขที่.....

ความเร็วและความเร่ง



ทำไมสมการของความเร็วจึงหาได้จากการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ ???

วัตถุหนึ่งเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง วัดระยะทางที่วัตถุนั้นเคลื่อนที่ไปในช่วงเวลาหนึ่ง

ถ้าให้ s = ระยะทางมีหน่วยตามที่กำหนด

t = เวลา มีหน่วยตามที่กำหนด

เราจะได้ $s = f(t)$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ

จากความรู้ทางคณิตศาสตร์เบื้องต้น เราทราบว่า

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \text{ความเร็วเฉลี่ยของวัตถุซึ่งเคลื่อนที่ไปในเวลา } t_2 - t_1 \text{ หน่วย}$$

ถ้าเราเปลี่ยนสัญลักษณ์ โดยให้ $t_2 - t_1 = \Delta t$ จะได้

$$\frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t} = \text{ความเร็วเฉลี่ยของวัตถุซึ่งเคลื่อนที่ไปในเวลา } \Delta t \text{ หน่วย}$$

โดยไม่เสียสภาพทั่วไปเราจะให้ t_1 แทนเวลา t ใด ๆ และ

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t} = \text{ความเร็วชั่วขณะของวัตถุเมื่อเวลา } t \text{ ใด ๆ}$$

ซึ่งเราทราบว่านี่คืออนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน f

นี่คือเหตุผลว่าทำไมสมการของความเร็วจึงหาได้จากการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่นั่นเอง (และเช่นเดียวกันกับเมื่อหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับความเร็ว จะได้สมการของความเร่ง)

การกำหนดค่าบวกหรือค่าลบของระยะทาง s , ความเร็ว v , ความเร่ง a

ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับความเร็ว ความเร่ง เราต้องกำหนดทิศทางของการเคลื่อนที่ให้อัตถุ โดยกำหนดค่าบวกหรือค่าลบให้แก่ตัวแปร s, v, a ดังนี้

ข้อตกลง $A \longrightarrow B$

ถ้ากำหนดให้อัตถุเคลื่อนที่จากจุด A ไปยังจุด B จะได้

1. ระยะทาง s จากจุด A ไป B มีค่าเป็นบวก และถ้ากลับกัน s จะมีค่าเป็นลบ
2. ความเร็ว v ของวัตถุที่เคลื่อนที่จาก A ไป B มีค่าเป็นบวก ถ้ากลับกัน v จะมีค่าเป็นลบ
3. ความเร่ง a มีค่าแปรตามการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว v ดังนี้
 - 3.1 ถ้าความเร็วเพิ่มขึ้น a มีค่าเป็นบวก
 - 3.2 ถ้าความเร็วลดลง a มีค่าเป็นลบ

1. วัตถุหนึ่งเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง โดยมีสมการของการเคลื่อนที่เป็น $s(t) = t^3 - 4t^2 - 3t$
 จงหาความเร็วและความเร่งเมื่อเวลา t ใด ๆ และจงหาความเร่งขณะที่ความเร็วมีค่าเป็นศูนย์

วิธีทำ เพราะว่า $s(t) = t^3 - 4t^2 - 3t$

ดังนั้น $v(t) = \dots\dots\dots$ = ความเร็วของวัตถุเมื่อเวลา t

และ $a(t) = \dots\dots\dots$ = ความเร่งของวัตถุเมื่อเวลา t

เมื่อเวลาเท่ากับ t ความเร็วมีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ $\dots\dots\dots = 0$

จะได้ $(\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots) = 0$

จะได้ $t = \dots\dots\dots$

นั่นคือ ความเร็วมีค่าเป็นศูนย์ เมื่อ $t = \dots\dots\dots$

ดังนั้น ความเร่งขณะที่ความเร็วมีค่าเป็นศูนย์ เท่ากับ $a(\dots\dots) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

2. กลิ้งลูกหินบนพื้นราบในแนวตรง ด้วยสมการของการเคลื่อนที่ $s(t) = 2t + t^2 - t^3$

เมื่อ s แทนระยะทางมีหน่วยเป็นเมตร และ t แทนเวลามีหน่วยเป็นวินาที

2.1 เมื่อเวลา $t = 1$ ลูกหินจะอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเท่าใด

วิธีทำ เมื่อเวลา $t = 1$ ลูกหินจะเคลื่อนที่ไปได้ระยะทางเท่ากับ $s(\dots) = \dots\dots\dots$
 $= \dots\dots\dots$

นั่นคือ เมื่อเวลา $t = 1$ ลูกหินจะอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้น $\dots\dots\dots$ เมตร

2.2 เมื่อเวลา $t = 1$ ความเร็วชั่วขณะและความเร่งชั่วขณะเป็นเท่าใด

วิธีทำ เพราะว่า $s(t) = 2t + t^2 - t^3$

ดังนั้น $v(t) = \dots\dots\dots$

และ $a(t) = \dots\dots\dots$

เมื่อเวลา $t = 1$ ความเร็วชั่วขณะเท่ากับ $v(\dots) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ เมตร/วินาที

และ ความเร่งชั่วขณะเท่ากับ $a(\dots) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ เมตร/วินาที²

2.3 ลูกหินจะกลับมามีเดิมเมื่อเวลาผ่านไปกี่วินาที

วิธีทำ ลูกหินกลับมามีเดิม หมายความว่า $s(t) = 0$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

3. ยิงปืนขึ้นสู่เบื้องบนในแนวดิ่งจากยอดตึกสูง 34.3 เมตร โดยมีสมการของการเคลื่อนที่เป็น $s(t) = 29.4t - 4.9t^2$ เมื่อ s แทนระยะทางมีหน่วยเป็นเมตร และ t แทนเวลามีหน่วยเป็นวินาที

3.1 อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ s ในช่วงเวลา $t = 2$ ถึง $t = 3$ เป็นเท่าไร

วิธีทำ เพราะว่า $s(t) = 29.4t - 4.9t^2$

จะได้ $s(2) = \dots\dots\dots$

และ $s(3) = \dots\dots\dots$

∴ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ s ในช่วงเวลา $t = 2$ ถึง $t = 3$ เท่ากับ $\dots\dots$ เมตร/วินาที

3.2 ลูกปืนจะขึ้นไปสูงสุดเป็นระยะทางกี่เมตรจากยอดตึก

วิธีทำ เพราะว่า $s(t) = 29.4t - 4.9t^2$

ดังนั้น $v(t) = \dots\dots\dots$

ปัญหาข้อนี้เกี่ยวกับสมบัติทางฟิสิกส์ นั่นคือเมื่อลูกปืนถูกยิงขึ้นไปในแนวดิ่ง

ลูกปืนจะขึ้นไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งมีความเร็วเป็นศูนย์ ระยะทางจากจุดเริ่มต้นถึงจุดที่มีความเร็วเป็นศูนย์เป็นระยะทางสูงสุดที่ลูกปืนจะขึ้นไปได้ จากนั้นลูกปืนจะเริ่มตกลงมาสู่พื้นดินด้วยอำนาจแรงดึงดูดของโลก

เมื่อ $0 = \dots\dots\dots$ จะได้ $t = \dots\dots\dots$ นั่นคือ ลูกปืนจะขึ้นไปสูงสุดเมื่อ $t = \dots\dots\dots$

ดังนั้น ลูกปืนจะขึ้นไปสูงสุดเป็นระยะทาง $s(\dots) = \dots\dots\dots$ เมตรจากยอดตึก

3.3 ขณะที่ลูกปืนตกถึงพื้นดิน ลูกปืนมีความเร็วเท่าใด

วิธีทำ เมื่อลูกปืนตกถึงพื้นดิน จะได้ว่า $s(t) = \dots\dots\dots$

.....

อัตราสัมพันธ์

จากเรื่องความเร็วและความเร่งที่ผ่านมา นั้น เป็นการพิจารณาอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรตัวหนึ่ง (ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ t) เทียบกับ t กล่าวคือ ความเร็วเป็นการพิจารณาอัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะทาง (ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา) เทียบกับเวลา ในขณะที่ความเร่งเป็นการพิจารณาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว (ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา) เทียบกับเวลา

ความเร็วและความเร่งจึงเป็นตัวอย่างหนึ่งของอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรเพียงตัวเดียว (Rate of Change) เท่านั้น

ในขณะที่ อัตราสัมพันธ์ (Related Rate) เป็นการพิจารณาอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรหลายตัว (ซึ่งต่างก็เป็นฟังก์ชันของ t) เทียบกับ t ประโยชน์ของการศึกษาเรื่องอัตราสัมพันธ์ คือ หากเราทราบอัตราการเปลี่ยนแปลงเพียงบางตัวเทียบกับ t เราก็จะสามารถหาอัตราการเปลี่ยนแปลงตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องได้ เรียกอัตราการเปลี่ยนแปลงที่เกี่ยวข้องนี้ว่า อัตราสัมพันธ์

ขั้นตอนในการแก้ปัญหาโจทย์ที่เกี่ยวกับอัตราสัมพันธ์

1. เขียนรูป หรือพิจารณารายละเอียดของสิ่งที่โจทย์กำหนดให้
2. สร้างสมการแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรที่ทราบอัตราการเปลี่ยนแปลงกับตัวแปรที่ไม่ทราบค่า
3. หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการในข้อ 2 เทียบกับเวลา (t)
4. แทนค่าตัวแปร และอัตราการเปลี่ยนแปลงที่ทราบค่าลงในสมการจากข้อ 3
5. หาอัตราการเปลี่ยนแปลงที่ต้องการ โดยการแก้สมการจากข้อ 4

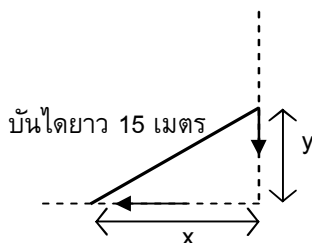
4. บ้านไดยาว 15 เมตร วางพิงกำแพงโดยที่ปลายล่างของบันไดถูกดึงให้เคลื่อนที่ห่างจากกำแพงด้วยอัตราเร็ว 1.5 เมตรต่อวินาที

4.1 ปลายบนของบันไดจะเคลื่อนที่ต่ำลงมาด้วยอัตราเร็วเท่าใดเมื่อปลายล่างอยู่ห่างจากกำแพง 10 เมตร

วิธีทำ ให้ x แทนระยะที่ปลายล่างของบันไดอยู่ห่างจากกำแพงเมื่อเวลา t ใด ๆ

ให้ y แทนระยะที่ปลายบนของบันไดอยู่ห่างจากกำแพงเมื่อเวลา t ใด ๆ

ความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y เมื่อเวลาใด ๆ คือ ดังรูป



$$y^2 = 225 - x^2$$

หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างเทียบกับ t จะได้

.....

.....
 โจทย์กำหนดให้ $\frac{dx}{dt} = \dots\dots\dots$ เมตรต่อวินาที

เมื่อ $x = 10$ จะได้ $y = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $\frac{dy}{dt} = \dots\dots\dots$ เมตรต่อวินาที

4.2 เมื่อใดปลายล่างและปลายบนของบันไดจะเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเท่ากัน

วิธีทำ ถ้าปลายล่างและปลายบนของบันไดเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเท่ากัน นั่นคือ

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

ซึ่งจากความสัมพันธ์ของโจทย์ในข้อนี้ คือ $\dots\dots\dots$

จะได้ว่า ปลายล่างและปลายบนของบันไดจะเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเท่ากัน

เมื่อ $\dots\dots\dots$

.....

5. ลูกบอลกลิ้งลงจากพื้นห่างจากผู้สังเกตการณ์ 400 เมตร ด้วยอัตราเร็ว 70 เมตรต่อวินาที มุมเงยของแนวมองของผู้สังเกตการณ์จะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเร็วเท่าใด เมื่อลูกบอลกลิ้งอยู่สูงจากพื้น 600 เมตร

วิธีทำ โจทย์ต้องการทราบ.....

ให้ y แทน ระยะที่ลูกบอลกลิ้งอยู่สูงจากพื้นเมื่อเวลา t ใด ๆ

จากรูปจะได้ ความสัมพันธ์ระหว่างมุมเงยของแนวมองของผู้สังเกตการณ์ และ y

เมื่อเวลาใด ๆ คือ $\tan \theta = \dots\dots\dots$

$$\theta = \dots\dots\dots$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \dots\dots\dots$$

โจทย์กำหนดให้ $\frac{dy}{dt} = \dots\dots\dots$ เมตรต่อวินาที และ $y = \dots\dots\dots$ เมตร

ดังนั้น $\frac{d\theta}{dt} = \dots\dots\dots$ เรเดียนต่อวินาที

6. รถยนต์สองคันเคลื่อนที่ออกจากจุด A ในเวลาเดียวกัน รถยนต์คันแรกเคลื่อนที่ไปทางทิศตะวันออกด้วยความเร็ว 45 กิโลเมตร/ชั่วโมง และรถยนต์คันที่สองวิ่งไปทางทิศเหนือด้วยความเร็ว 60 กิโลเมตร/ชั่วโมง จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะทางระหว่างรถยนต์ทั้งสอง เมื่อเวลา $t = 3$

วิธีทำ ให้ x แทน
 ให้ y แทน
 ให้ z แทน
 ความสัมพันธ์ระหว่าง x , y และ z เมื่อเวลาใด ๆ คือ ดังรูป

หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างเทียบกับ t จะได้

โจทย์กำหนดให้ $\frac{dx}{dt} = \dots$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง และ $\frac{dy}{dt} = \dots$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

เมื่อ $t = 3$ จะได้ $x = \dots$ กิโลเมตร

$y = \dots$ กิโลเมตร

$z = \dots$ กิโลเมตร

ดังนั้น #

7. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีเทียบกับเวลาของลูกบอลลุนทรกลงม ขณะที่มันรัศมีเท่ากับ 30 เซนติเมตร และอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรก๊าซฮีเลียมที่เป่าเข้าไปเทียบกับเวลาเท่ากับ 600 ลูกบาศก์เซนติเมตร/วินาที

วิธีทำ ให้ r เป็น.....

ให้ V เป็น.....

$$\text{จากความสัมพันธ์ } V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างเทียบกับ t จะได้

$$\text{จาก } r = 30 \text{ และ } \frac{dV}{dt} = 600$$

ดังนั้น จะได้ $\frac{dr}{dt} = \dots$

นั่นคืออัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีเทียบกับเวลาของลูกบอลลุนทรกลง เมื่อรัศมีเท่ากับ 30 เซนติเมตร และอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรก๊าซฮีเลียมที่เป่าเข้าไปเทียบกับเวลาเท่ากับ 600 ลูกบาศก์เซนติเมตร/วินาที มีค่าเท่ากับ เซนติเมตร/วินาที #

8. น้ำไหลเข้าแท็งก์น้ำรูปกรวย ด้วยอัตรา 2 เมตร³/นาที แท็งก์น้ำมีความสูง 10 เมตร และมีรัศมีที่ปากแท็งก์ 5 เมตร จงหาอัตราเร็วของระดับน้ำที่เพิ่มขึ้น ขณะที่น้ำมีความลึก 6 เมตร

วิธีทำ ให้ r เป็นรัศมีของพื้นผิวน้ำ ณ เวลา t

ให้ h เป็น.....

ให้ V เป็น.....

จากความสัมพันธ์ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

จะเห็นว่า V ขึ้นอยู่กับตัวแปรทั้ง r และ h

เราจะเปลี่ยนรูปตัวแปร r ให้อยู่ในรูปตัวแปร h

จากสามเหลี่ยมคล้าย ABC กับ APQ

จะได้ หรือ

แทนค่าใน $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

จะได้ $V = \dots\dots\dots$

หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างเทียบกับ t จะได้

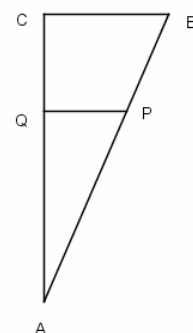
จาก $h = 6$ และ $\frac{dV}{dt} = 2$

ดังนั้น

.....

.....

นั่นคือ อัตราเร็วของระดับน้ำที่เพิ่มขึ้นเท่ากับเมตร/นาที #



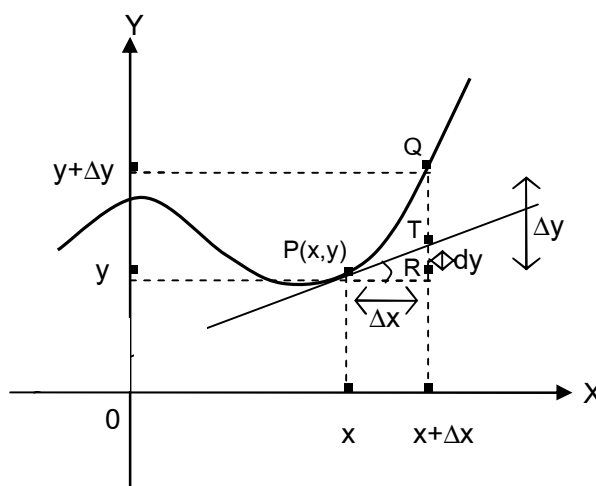
ค่าเชิงอนุพันธ์และการประยุกต์



ทำไม dy จึงใช้ประมาณค่า Δy ได้ ???

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ในช่วง I

ให้ $P(x, y)$ และ $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ เป็นจุดสองจุดบนกราฟของ $y = f(x)$ ในช่วง I ดังรูป



ลากเส้นสัมผัส PT ทำมุม θ กับแกน x นั่นคือ $\angle TPR = \theta$ และ f มีอนุพันธ์ที่จุด $x \in I$

ดังนั้น $\theta \neq \frac{\pi}{2}$

เราจะได้ความชันของเส้นสัมผัส $PT = \frac{dy}{dx} = \tan \theta = \frac{RT}{PR}$

เพราะว่า $PR = \Delta x = dx$ ทำให้ $RT = dy = f'(x)dx$

ดังนั้น $|\Delta y - dy| = |QR - TR|$

จากรูปจะเห็นว่าเมื่อ Q เคลื่อนที่มาตามกราฟของ $y = f(x)$ ยิ่งเข้าใกล้จุด P เข้ามาเท่าไร ความแตกต่างระหว่าง Δy และ dy จะน้อยลง ๆ นั่นคือเมื่อ Δx น้อยลงมาก ๆ dy จะประมาณค่า Δy ได้ใกล้เคียงมากขึ้น ๆ และเราจะเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\Delta y \approx dy = f'(x)dx \quad \text{เมื่อ } dx = \Delta x \quad \text{และ } \Delta x \text{ มีค่าน้อยมาก ๆ}$$

เรียก dy ว่า ค่าเชิงอนุพันธ์ (differential) ของตัวแปรตาม y

9. จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์หาค่าโดยประมาณของ $\sqrt{3}$

วิธีทำ ให้ $y = f(x) = \sqrt{x}$ ดังนั้น $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

ให้ $\sqrt{3} = \sqrt{x + \Delta x}$

ดังนั้นเลือก $x = \dots\dots\dots$ จะได้ว่า $dx = \Delta x = 3 - \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

จาก $y = \sqrt{x}$ จะได้ $y = \sqrt{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$

และ $dy = \dots\dots\dots$

จาก $\sqrt{x + \Delta x} = y + \Delta y \approx y + dy$

จะได้ $\sqrt{3} \approx \dots\dots\dots$

10. จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์หาค่าโดยประมาณของ $\sqrt{2}$

วิธีทำ ให้ $y = f(x) = \sqrt{x}$ ดังนั้น $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

ให้ $\sqrt{2} = \sqrt{x + \Delta x}$

ดังนั้นเลือก $x = \dots\dots\dots$ จะได้ว่า $dx = \Delta x = 2 - \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

จาก $y = \sqrt{x}$ จะได้ $y = \sqrt{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$

และ $dy = \dots\dots\dots$

จาก $\sqrt{x + \Delta x} = y + \Delta y \approx y + dy$

จะได้ $\sqrt{2} \approx \dots\dots\dots$

11. จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์หาค่าโดยประมาณของ $\sqrt{1.25}$

วิธีทำให้ $y = f(x) = \sqrt{x}$ ดังนั้น $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

ให้ $\sqrt{1.25} = \sqrt{x + \Delta x}$

ดังนั้นเลือก $x = \dots\dots\dots$ จะได้ว่า $dx = \Delta x = 1.25 - \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

จาก $y = \sqrt{x}$ จะได้ $y = \sqrt{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$

และ $dy = \dots\dots\dots$

จาก $\sqrt{x + \Delta x} = y + \Delta y \approx y + dy$

จะได้ $\sqrt{1.25} \approx \dots\dots\dots$

12. จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์หาค่าโดยประมาณของ $\sqrt{98}$

วิธีทำให้ $y = f(x) = \sqrt{x}$ ดังนั้น $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

ให้ $\sqrt{98} = \sqrt{x + \Delta x}$

ดังนั้นเลือก $x = \dots\dots\dots$ จะได้ว่า $dx = \Delta x = 98 - \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

จาก $y = \sqrt{x}$ จะได้ $y = \sqrt{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$

และ $dy = \dots\dots\dots$

$$\text{จาก } \sqrt{x + \Delta x} = y + \Delta y \approx y + dy$$

$$\text{จะได้ } \sqrt{98} \approx \dots\dots\dots$$

13. จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์หาค่าโดยประมาณของ $\frac{1}{1005}$

$$\text{วิธีทำให้ } y = f(x) = \dots\dots\dots \text{ ดังนั้น } dy = \dots\dots\dots$$

$$\text{ให้ } \frac{1}{1005} = \dots\dots\dots$$

$$\text{ดังนั้นเลือก } x = \dots\dots\dots \text{ จะได้ว่า } dx = \Delta x = \dots\dots\dots$$

$$\text{จาก } y = \dots\dots\dots \text{ จะได้ } y = \dots\dots\dots$$

$$\text{และ } dy = \dots\dots\dots$$

$$\text{จาก } \frac{1}{x + \Delta x} = y + \Delta y \approx y + dy$$

$$\text{จะได้ } \frac{1}{1005} \approx \dots\dots\dots$$

14. จงหาค่าโดยประมาณของ $f(1.98)$ เมื่อ $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 5$

$$\text{วิธีทำให้ } y = \dots\dots\dots \text{ ดังนั้น } dy = \dots\dots\dots$$

$$\text{ให้ } 1.98 = x + \Delta x$$

$$\text{ดังนั้นเลือก } x = \dots\dots\dots \text{ จะได้ว่า } dx = \Delta x = \dots\dots\dots$$

$$\text{และ } y = \dots\dots\dots$$

$$\text{และ } dy = \dots\dots\dots$$

$$\text{จาก } 3(x + \Delta x)^4 - 7(x + \Delta x)^3 + 4(x + \Delta x)^2 - 5 = y + \Delta y \approx y + dy$$

$$\text{จะได้ } 3(1.98)^4 - 7(1.98)^3 + 4(1.98)^2 - 5 \approx \dots\dots\dots$$

บทนิยาม 7.1 ให้ ΔA เป็นค่าคลาดเคลื่อนที่อาจเป็นไปได้อันเนื่องมาจากการวัดหรือจากการคำนวณของปริมาณ A

1. $\frac{\Delta A}{A}$ เรียกว่า ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (relative error)

2. $\frac{\Delta A}{A} \times 100$ เรียกว่า ค่าคลาดเคลื่อนร้อยละ (percentage error)

15. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหนึ่ง วัดความยาวได้ประมาณด้านละ 12 ซม. ถ้าความยาวที่แท้จริงของแต่ละด้านเป็น 11.98 ซม. ค่าคลาดเคลื่อนร้อยละของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสนี้เป็นเท่าไร

$$\text{วิธีทำ ให้พื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็น } A = x^2 \text{ ซึ่งทำให้ได้ } dA = \dots\dots\dots$$

$$\text{เนื่องจาก } x = \dots\dots\dots \text{ และ } dx = \Delta x = \dots\dots\dots$$

$$\text{จะได้ } A = \dots\dots\dots$$

$$\Delta A \approx dA = \dots\dots\dots$$

$$\frac{\Delta A}{A} \times 100 \approx \frac{dA}{A} \times 100 = \dots\dots\dots \%$$

16. เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่งวัดได้ 6 เซนติเมตร ด้วยค่าคลาดเคลื่อน 0.02 เซนติเมตร
ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ในการคำนวณหาพื้นที่ของวงกลมวงนี้เป็นเท่าไร

วิธีทำ ให้พื้นที่ของวงกลมเป็น $A = \dots\dots\dots$ โดยที่ c คือความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม
ซึ่งทำให้ได้ $dA = \dots\dots\dots$

$$\text{เนื่องจาก } c = 6 \quad \text{และ } dc = \Delta c = \pm 0.02$$

$$\text{จะได้ } A = \dots\dots\dots$$

$$\Delta A \approx dA = \dots\dots\dots$$

$$\frac{\Delta A}{A} \approx \frac{dA}{A} = \dots\dots\dots$$

17. การสร้างหลังคารูปครึ่งวงกลมมีราคา 500 บาทต่อตารางเมตร ถ้าวัดเส้นผ่านศูนย์กลางของ
หลังคานี้ได้ 120 เมตร โดยคาดว่าจะมีค่าคลาดเคลื่อนได้ 1 เมตร

17.1 จงหาค่าคลาดเคลื่อนโดยประมาณของพื้นที่ของหลังคา

วิธีทำ ให้พื้นที่ของครึ่งวงกลมเป็น $A = \dots\dots\dots$ โดยที่ c คือความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม
ซึ่งทำให้ได้ $dA = \dots\dots\dots$

$$\text{เนื่องจาก } c = \dots\dots\dots \quad \text{และ } dc = \Delta c = \dots\dots\dots \text{ เมตร}$$

$$\text{จะได้ } A = \dots\dots\dots$$

$$\Delta A \approx dA = \dots\dots\dots$$

17.2 ถ้าไม่ต้องการให้คำนวณค่าใช้จ่ายในการสร้างหลังคานี้ผิดไปเกินกว่า 12,500 บาท จะต้อง
ทำอย่างไร

วิธีทำ ถ้าไม่ต้องการคำนวณค่าใช้จ่ายในการสร้างหลังคานี้ผิดไปเกินกว่า 12,500 บาท จะต้อง

$$\text{มีค่าคลาดเคลื่อนโดยประมาณของ พื้นที่ของหลังคา ไม่เกิน } \frac{12500}{500} = \dots\dots\dots \text{ ตารางเมตร}$$

$\therefore$ ต้องวัด เส้นผ่านศูนย์กลางของหลังคาให้ห้มีค่าคลาดเคลื่อน $dc = \Delta c = \pm a$ เมตร

$$\text{จะได้ } dA = \frac{\pi}{4} c \cdot dc = \dots\dots\dots \leq \dots\dots$$

$\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

นั่นคือ ต้องวัดเส้นผ่านศูนย์กลางของหลังคาให้ห้มีค่าคลาดเคลื่อนไม่เกิน $\dots\dots\dots$ เมตร

คำอธิบายเกี่ยวกับการใช้คำสั่งของโปรแกรม Euler ในกิจกรรมที่ 7

คำสั่ง	การใช้งาน
<pre>::function s(t):=t^3-t^2-t ::s(2) ::function v(t):=diff(s(t),t) ::'v(t)=v(t) ::'v(t)=v(t);at(%,t=3) ::solve(v(t)=0,t) ::function a(t):=diff(v(t),t)</pre>	ให้ผู้เรียนกำหนดฟังก์ชันระยะทาง $s(t) = \underline{\hspace{2cm}}$ คำสั่งหาค่าของฟังก์ชันระยะทาง $s(\underline{\hspace{2cm}})$ คำสั่งกำหนดฟังก์ชันความเร็ว $v(t)$ คำสั่งให้แสดงฟังก์ชันความเร็ว $v(t)$ คำสั่งหาค่าของฟังก์ชันความเร็ว $at(%,t=\underline{\hspace{2cm}})$ คำสั่งแก้สมการเมื่อฟังก์ชันความเร็วเท่ากับ 0 คำสั่งกำหนดฟังก์ชันความเร่ง $a(t)$
<pre>::v(t);at(%,t=3) ::'v(t)=v(t);at(%,t=3)</pre>	การแสดงผลของคำสั่งนี้คือ 20 การแสดงผลของคำสั่งนี้คือ $v(3) = 20$ หมายเหตุ¹ การแสดงผลของสองคำสั่งนี้แตกต่างกัน จะเห็นว่าหลังเครื่องหมาย :: ของคำสั่งที่ 2 จะมี '$v(t)=$' ในขณะที่คำสั่งที่ 1 ไม่มี การเติมเครื่องหมาย ' หน้าคำสั่งใด คำสั่งนั้นจะไม่ประมวลผลแต่จะแสดงผลเป็นข้อความแทน ตัวอย่างเพิ่มเติมได้แก่ ถ้า $g(x) = x^2$ $\text{diff}(g(x),x)$ จะแสดงผลเป็น $2x$ $'\text{diff}(g(x),x)=\text{diff}(g(x),x)$ จะแสดงผลเป็น $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$ หมายเหตุ² การที่ $v(3) = 20$ เพราะฟังก์ชัน $v(t)$ ถูกนิยามว่า $::\text{function } v(t):=\text{diff}(s(t),t)$ และ $::\text{function } s(t):=t^3-t^2-t$ จากแถวที่ 1 ของตาราง
<pre>::depends ([x,y,z],t)</pre>	การประกาศให้โปรแกรมทราบว่า x เป็นตัวแปรของ t จะใช้คำสั่ง $::\text{depends } (x,t)$ แต่ถ้ามีตัวแปรหลายตัวที่เป็นตัวแปรของ t จะใช้เครื่องหมายก้ามปูครอบตัวแปรเหล่านั้นดังนี้ $::\text{depends } ([x,y],t)$ เป็นต้น
<pre>::function s(t):=t^3-t^2-t; 's(2)=s(2) ::function s(t):=t^3-t^2-t, 's(2)=s(2)</pre>	การแสดงผลของคำสั่งนี้คือ $s(2) = 2$ การแสดงผลของคำสั่งนี้คือ $s(t) = t^3 - t^2 - t$ $s(2) = 2$ หมายเหตุ การปิดท้ายคำสั่งที่ประมวลผลจากโปรแกรม Maxima ด้วยเครื่องหมาย ; คำสั่งนั้นจะไม่แสดงผล

หมายเหตุ คำสั่งที่ใช้ในกิจกรรมที่ 7 ส่วนใหญ่จะเป็นคำสั่งที่ประมวลผลจากโปรแกรม Maxima ซึ่งเป็นโปรแกรมแบบ CAS ที่แฝงอยู่ในโปรแกรม Euler

ภาคผนวก จ

**เฉลยกิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ โดยใช้โปรแกรม C.a.R.
และโปรแกรม Euler สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี**

เฉลยใบกิจกรรมที่ 1

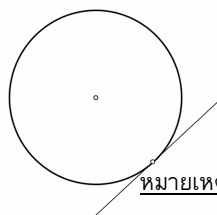
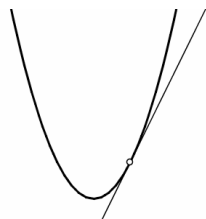
วิชา คณิตศาสตร์ 1 (MATHEMATICS 1) : MA111

เนื้อหา อนุพันธ์ : อนุพันธ์และอนุพันธ์อันดับสูง

ชื่อ.....เลขที่.....

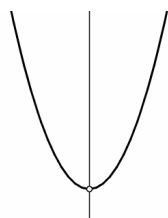
นิสิตคิดว่า เส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน คืออะไร?

> เส้นตรงที่ตัดกราฟของฟังก์ชันเพียงจุดเดียว เช่น



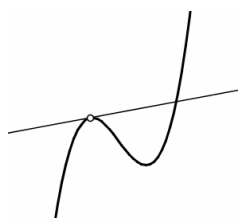
หมายเหตุ วงกลมเป็นฟังก์ชันในระบบพิกัดเชิงขั้ว

> ถ้าเส้นตรงตัดกราฟของฟังก์ชันเพียงจุดเดียวโดยตัดในลักษณะดังนี้



จะยังเป็นเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันหรือไม่

> เส้นตรงที่ตัดกราฟของฟังก์ชันสองจุด ดังรูป



เส้นตรงเส้นนี้จะเป็นเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันได้หรือไม่

แล้ว เส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน คืออะไร ???

บทนิยาม 1.1 กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ เส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน ที่จุด $P(c, f(c))$ คือ
เส้นตรงที่ผ่านจุด P และมีความชันเท่ากับ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ เมื่อลิมิตหาค่า
ได้ แต่ถ้าลิมิตเป็น ∞ เส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน จะเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด P
และตั้งฉากกับแกน x

หมายเหตุ

ในบทนิยาม ถ้าแทน Δx ด้วย $x - c$ จะได้ว่าถ้า $\Delta x \rightarrow 0$ แล้ว $x - c \rightarrow 0$ และ $x \rightarrow c$
ดังนั้นเขียนบทนิยามได้อีกแบบหนึ่งคือ เส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่จุด $P(c, f(c))$

คือ เส้นตรงที่ผ่านจุด P และมีความชันเท่ากับ $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ เมื่อลิมิตหาค่าได้

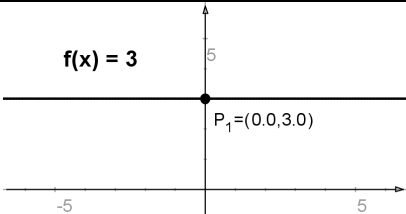
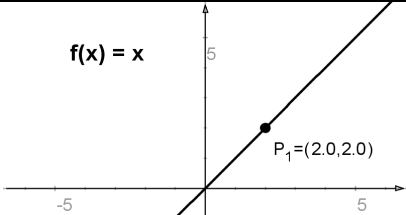
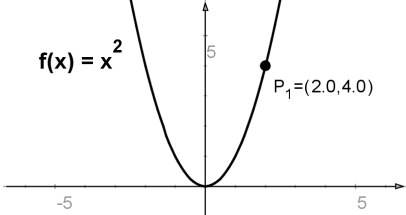
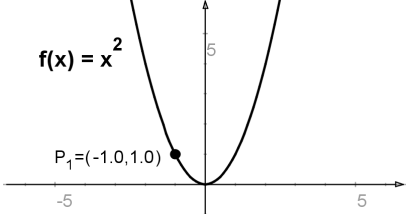
1. ให้นิสิตทำกิจกรรมต่อไปนี้

1.1 คลิกเลือกกิจกรรมสำรวจค่าความชันของเส้นสัมผัสกราฟจากไฟล์ [tangent f\(x\).html](#)

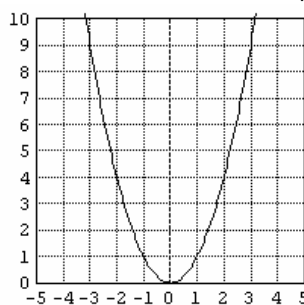
1.2 เขียนกราฟของฟังก์ชัน (คลิกขวาที่เส้นกราฟเพื่อกำหนดฟังก์ชันใหม่)

1.3 กำหนดพิกัดจุด P_1 ตามโจทย์กำหนด (คลิกขวาที่จุด P_1 เพื่อกำหนดพิกัดใหม่)

1.4 เลื่อนจุด P_2 เข้าหาจุด P_1 จงสังเกตว่าความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชันที่จุด P_1 ($x_1, f(x_1)$) มีค่าเปลี่ยนไปหรือไม่ ถ้าค่าความชันไม่เปลี่ยน ค่าความชันมีค่าเท่าไร ถ้าค่าความชันเปลี่ยนไป ค่าความชันเปลี่ยนเข้าสู่ค่าอะไร

ฟังก์ชัน	กราฟของฟังก์ชัน	ความชันของเส้นสัมผัส กราฟของฟังก์ชันที่จุด $P_1 (x_1, f(x_1))$
$f(x) = 3$ ที่จุด $P_1 (0, 3)$		ค่าความชันไม่เปลี่ยนแปลง และมีค่าเท่ากับ 0
$f(x) = x$ ที่จุด $P_1 (2, 2)$		ค่าความชันไม่เปลี่ยนแปลง และมีค่าเท่ากับ 1
$f(x) = x^2$ ที่จุด $P_1 (2, 4)$		ค่าความชันค่อย ๆ เปลี่ยนแปลงไป และเปลี่ยน เข้าสู่ 4
$f(x) = x^2$ ที่จุด $P_1 (-1, 1)$		ค่าความชันค่อย ๆ เปลี่ยนแปลงไป และเปลี่ยน เข้าสู่ - 2

2. จงหาสมการของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ ที่จุด $(-3, 9)$



กราฟของ $f(x) = x^2$

วิธีทำ จากความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ ที่จุด $(-3, 9)$

$$\begin{aligned}
 \text{คือ } m &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-3 + \Delta x) - f(-3)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(-3 + \Delta x)^2 - (-3)^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(-3)^2 + 2(-3)\Delta x + (\Delta x)^2 - (-3)^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(-3)\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-6\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{-6\Delta x}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} \right) \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-6 + \Delta x) \\
 &= (-6 + 0) \\
 &= -6
 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน คือ $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - (9) = (-6)(x + 3)$$

$$y = -6x - 9$$

บทนิยาม 1.2 กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ บนช่วง (a, b) และ $c \in (a, b)$ จะกล่าวว่า

f มีอนุพันธ์ที่ c หรือ f หาอนุพันธ์ได้ที่ c เมื่อ

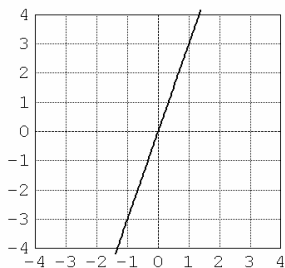
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \text{ หาค่าได้ และเรียกค่าลิมิตนี้ว่า}$$

อนุพันธ์ของ f ที่ c ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $f'(c)$ หรือ $y'|_{x=c}$ หรือ $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=c}$

หมายเหตุ

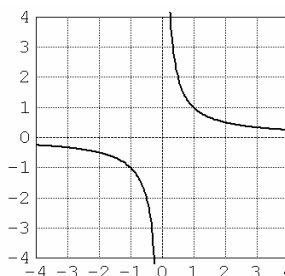
ในบทนิยาม a อาจเป็น $-\infty$ หรือ b อาจเป็น ∞ ก็ได้

3. กำหนดให้ $f(x) = 3x$ ถ้า $c \in D_f$ จงหา $f'(c)$



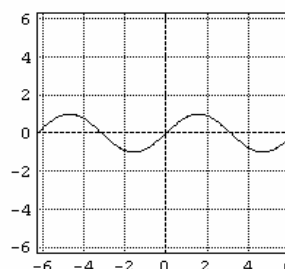
$$\begin{aligned}\Delta y &= f(c + \Delta x) - f(c) \\ &= 3(c + \Delta x) - 3c = 3c + 3\Delta x - 3c = 3\Delta x \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{3\Delta x}{\Delta x} = 3, \Delta x \neq 0 \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3 = 3 \\ \text{ดังนั้น } f'(c) &= 3\end{aligned}$$

4. กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{x}$ เมื่อ $x \neq 0$ จงหาอนุพันธ์ของ f ที่ x ใด ๆ



$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{-\Delta x}{x\Delta x(x + \Delta x)} = \frac{-1}{x(x + \Delta x)}, \Delta x \neq 0 \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{x(x + \Delta x)} \right) = -\frac{1}{x^2} \\ \text{ดังนั้น } f'(x) &= -\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

5. กำหนดให้ $f(x) = \sin(x)$ จงหาอนุพันธ์ของ f ที่ x ใด ๆ



$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin(x) \\ &= \sin(x)\cos(\Delta x) + \cos(x)\sin(\Delta x) - \sin(x) \\ &= \sin(x)(\cos(\Delta x) - 1) + \cos(x)\sin(\Delta x) \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sin(x)(\cos(\Delta x) - 1)}{\Delta x} + \frac{\cos(x)\sin(\Delta x)}{\Delta x}, \Delta x \neq 0\end{aligned}$$

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

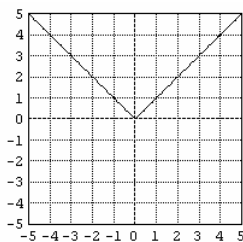
$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} = 0$$



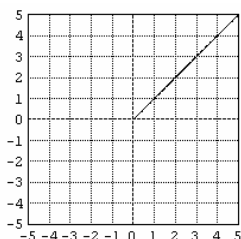
$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(x)(\cos(\Delta x) - 1)}{\Delta x} + \frac{\cos(x)\sin(\Delta x)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)(\cos(\Delta x) - 1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\sin(\Delta x)}{\Delta x} \\ &= \sin(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\cos(\Delta x) - 1)}{\Delta x} + \cos(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \\ &= \sin(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot (1) = \cos(x)\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } f'(x) = \cos(x)$$

6. กำหนดให้ $f(x) = |x|$ จงแสดงว่า f มีอนุพันธ์ทุก $x \neq 0$



กราฟของ $f(x) = |x|$



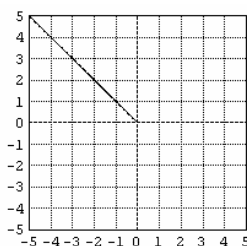
กรณี 1 ในช่วง $(0, \infty)$ พังก์ชัน $f(x) = |x|$ เขียนได้เป็น $f(x) = x$

ดังนั้น สำหรับ $c \in (0, \infty)$ จะได้

$$\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c) = (c + \Delta x) - (c) = \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \Delta x \neq 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \quad \text{ดังนั้น } f \text{ มีอนุพันธ์ที่ } c \text{ เมื่อ } c \in (0, \infty)$$



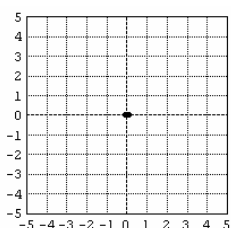
กรณี 2 ในช่วง $(-\infty, 0)$ พังก์ชัน $f(x) = |x|$ เขียนได้เป็น $f(x) = -x$

ดังนั้น สำหรับ $c \in (-\infty, 0)$ จะได้

$$\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c) = -(c + \Delta x) - (-c) = -\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1, \Delta x \neq 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1 \quad \text{ดังนั้น } f \text{ มีอนุพันธ์ที่ } c \text{ เมื่อ } c \in (-\infty, 0)$$



กรณี 3 เมื่อ $c = 0$

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = |\Delta x|$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}, \Delta x \neq 0$$

$$\text{จะพบว่า } \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\text{จะพบว่า } \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ หาค่าไม่ได้}$$

แสดงว่า f ไม่มีอนุพันธ์ที่ 0

ทฤษฎีบท 1.1 ถ้าฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้ที่ $x = c$ แล้ว f จะต่อเนื่องที่ $x = c$

7. จงเขียนบทกลับของทฤษฎีบท 1.1

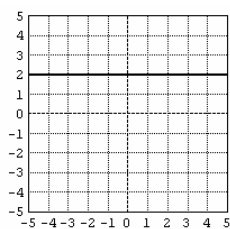
ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = c$ แล้ว f จะหาอนุพันธ์ได้ที่ $x = c$

8. นิสิตคิดว่าบทกลับของทฤษฎีบท 1.1 เป็นจริงหรือไม่ ถ้าไม่ จงยกตัวอย่างค้าน

ไม่จริง เช่น ฟังก์ชัน $f(x) = |x|$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 0$ แต่ไม่มีอนุพันธ์ที่ $x = 0$

สมบัติของอนุพันธ์

9. กำหนดให้ $f(x) = 2$ จงหาอนุพันธ์ของ f ที่ x ใด ๆ



กราฟของ $f(x) = 2$

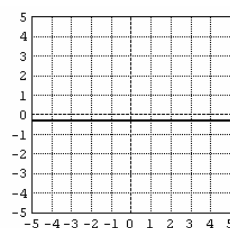
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 2 - 2 = 0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0, \Delta x \neq 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

$$\text{ดังนั้น } f'(x) = 0$$

10. กำหนดให้ $f(x) = -\frac{1}{3}$ จงหาอนุพันธ์ของ f ที่ x ใด ๆ



กราฟของ $f(x) = -\frac{1}{3}$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = -\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0, \Delta x \neq 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

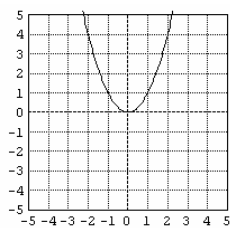
$$\text{ดังนั้น } f'(x) = 0$$

จากข้อ 9 และ ข้อ 10 มีทฤษฎีบทยืนยันว่า อนุพันธ์ของฟังก์ชันคงตัวมีค่าเท่ากับศูนย์ คือ

ทฤษฎีบท 1.2 กำหนด a เป็นจำนวนจริงใดๆ

$$\text{ฟังก์ชันคงตัว } f(x) = a \text{ มีอนุพันธ์ที่จำนวนจริง } x \text{ และ } f'(x) = \frac{da}{dx} = 0$$

11. กำหนดให้ $f(x) = x^2$ จงหาอนุพันธ์ของ f ที่ x ใด ๆ



กราฟของ $f(x) = x^2$

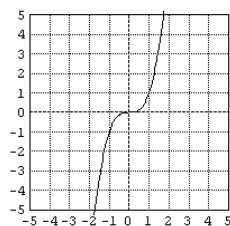
$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - (x)^2 \\ &= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x, \Delta x \neq 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 2x$$

$$\text{ดังนั้น } f'(x) = 2x$$

12. กำหนดให้ $f(x) = x^3$ จงหาอนุพันธ์ของ f ที่ x ใด ๆ



กราฟของ $f(x) = x^3$

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - (x)^3 \\ &= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2, \Delta x \neq 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3x^2 + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3x\Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x^2 = 3x^2 \text{ ดังนั้น } f'(x) = 3x^2$$

นิสิตคิดว่า ถ้า $f(x) = x^4$ แล้วอนุพันธ์ของ f ที่ x ใดๆ จะเท่ากับ $4x^3$ หรือไม่

ทฤษฎีบท 1.3 ฟังก์ชัน $f(x) = x^n$ มีอนุพันธ์ และ $f'(x) = \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ เมื่อ x^{n-1} นิยาม

ทฤษฎีบท 1.4 กำหนดให้ฟังก์ชัน f และ g มีอนุพันธ์ที่ x และ $c \in \mathbb{R}$

ฟังก์ชัน $f + g$, fg , cf , $\frac{f}{g}$ จะมีอนุพันธ์ที่ x ด้วย โดยที่

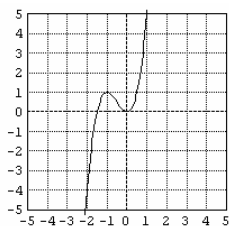
$$(1) \quad \frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

$$(2) \quad \frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f(x) \frac{d}{dx}g(x) + g(x) \frac{d}{dx}f(x)$$

$$(3) \quad \frac{d}{dx}(cf(x)) = c \frac{d}{dx}f(x)$$

$$(4) \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x) \frac{d}{dx}f(x) - f(x) \frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}, \quad g(x) \neq 0$$

13. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 2x^3 + 3x^2$



กราฟของ $f(x) = 2x^3 + 3x^2$

จาก ทบ.1.4 (1) จะได้ $\frac{d}{dx}(2x^3 + 3x^2) = \frac{d}{dx}(2x^3) + \frac{d}{dx}(3x^2)$

พิจารณา $\frac{d}{dx}(2x^3)$ จาก ทบ.1.4 (3) จะได้ $\frac{d}{dx}(2x^3) = 2 \frac{d}{dx}(x^3)$

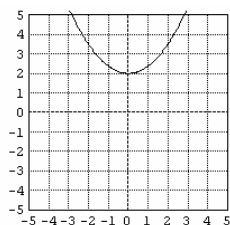
และจาก ทบ.1.3 จะได้ $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$ ดังนั้น $\frac{d}{dx}(2x^3) = 6x^2$

พิจารณา $\frac{d}{dx}(3x^2)$ จาก ทบ.1.4 (3) จะได้ $\frac{d}{dx}(3x^2) = 3 \frac{d}{dx}(x^2)$

จาก ทบ.1.3 ได้ $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$ ดังนั้น $\frac{d}{dx}(3x^2) = 6x$

ดังนั้น $f'(x) = 6x^2 + 6x$

14. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{3x^2 + 16}{8}$



จาก ทบ.1.4 (3) จะได้ $\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2 + 16}{8}\right) = \frac{1}{8} \frac{d}{dx}(3x^2 + 16)$

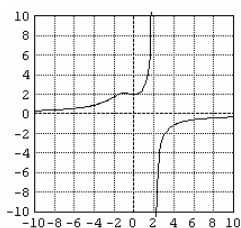
พิจารณา $\frac{d}{dx}(3x^2 + 16)$ จะได้ $\frac{d}{dx}(3x^2 + 16) = \frac{d}{dx}(3x^2) + \frac{d}{dx}(16)$ (ทบ.1.4 (1))

พิจารณา $\frac{d}{dx}(3x^2)$ จาก ทบ.1.4 (3) จะได้ $\frac{d}{dx}(3x^2) = 3 \frac{d}{dx}(x^2)$

พิจารณา $\frac{d}{dx}(x^2)$ จาก ทบ.1.3 จะได้ $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$

ดังนั้น $\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2 + 16}{8}\right) = \frac{1}{8}(3(2)x + 0) = \frac{1}{8}(6x) = \frac{3}{4}x$ #

15. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{3x^2 + 16}{8 - x^3}$, $x \neq 2$



จาก ทบ.1.4 (4) จะได้ $\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{3x^2 + 16}{8 - x^3} \right)$

$$= \frac{(8 - x^3) \frac{d}{dx} (3x^2 + 16) - (3x^2 + 16) \frac{d}{dx} (8 - x^3)}{(8 - x^3)^2}$$

$$= \frac{6x}{(8 - x^3)} + \frac{3x^2(3x^2 + 16)}{(8 - x^3)^2}$$

#

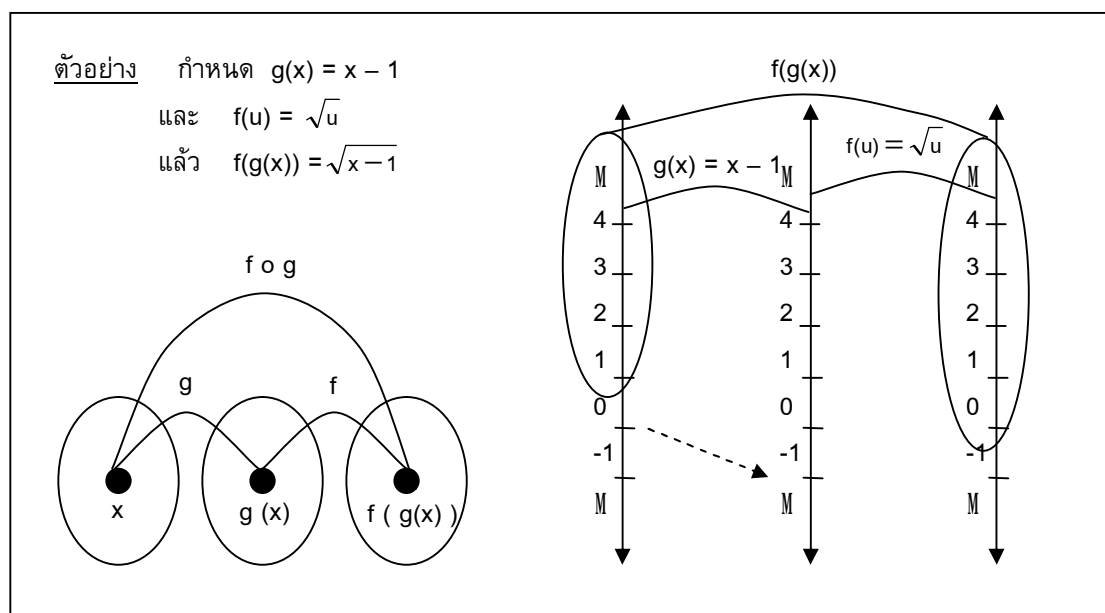
กฎลูกโซ่ (Chain rule)

บทนิยาม 1.3 กำหนดฟังก์ชัน f และ g

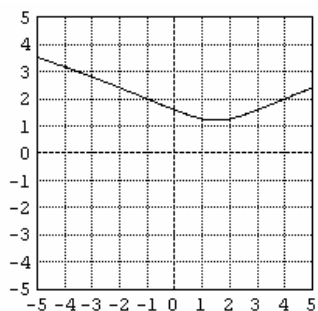
ฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f \circ g$ ซึ่งเป็น

ฟังก์ชันที่นิยามว่า $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ สำหรับทุกๆ $x \in D(g)$

ซึ่งทำให้ $g(x) \in D(f)$

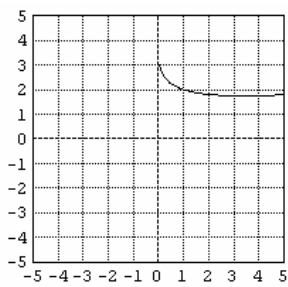


16. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ และ $g(x) = x^2 - 3x + 4$ จงหาฟังก์ชันประกอบต่อไปนี้

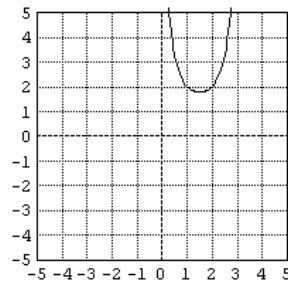


กราฟฟังก์ชันประกอบ $f \circ g$

$$f \circ g = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 4}$$

กราฟฟังก์ชันประกอบ $g \circ f$

$$g \circ f = (\sqrt[3]{x})^2 - 3\sqrt[3]{x} + 4$$

กราฟฟังก์ชันประกอบ $g \circ g$

$$\begin{aligned} g \circ g &= (x^2 - 3x + 4)^2 - 3(x^2 - 3x + 4) + 4 \\ &= x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 15x^2 + 8 \end{aligned}$$

17. จงเขียนฟังก์ชัน $y = h(x)$ ในข้อต่อไปนี้อยู่ในรูปของฟังก์ชันประกอบ $f \circ g$

$$y = h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \text{หรือ} \quad y = h(x) = f(u) \quad \text{เมื่อ} \quad u = g(x)$$

$$17.1 \quad y = h(x) = \sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{u} \quad \text{เมื่อ} \quad u = x^2 + 3$$

$$17.2 \quad y = h(x) = (x^2 + 3)^4 = u^4 \quad \text{เมื่อ} \quad u = x^2 + 3$$

$$17.3 \quad y = h(x) = \sin^2 x = u^2 \quad \text{เมื่อ} \quad u = \sin(x)$$

$$17.4 \quad y = h(x) = \cos(3x) = \cos(u) \quad \text{เมื่อ} \quad u = 3x$$

ทฤษฎีบท 1.5 กฎลูกโซ่ (Chain rule)

กำหนดให้ฟังก์ชัน $y = f(u)$ และ $u = g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ u และ x ตามลำดับ ฟังก์ชันประกอบ $y = f(g(x))$ จะมีอนุพันธ์ที่ x และ

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{หรือ} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

18. จงใช้กฎลูกโซ่หา $\frac{dy}{dx}$ ในข้อต่อไปนี้อยู่

$$18.1 \quad y = (2x + 1)^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3(2x + 1)^2 \cdot (2) = 24x^2 + 24x + 6$$

$$18.2 \quad y = \sqrt{x^2 + 3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}(x^2 + 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = x \cdot (x^2 + 3)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

$$18.3 \quad y = (x^2 + 3)^4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4(x^2 + 3)^3 \cdot (2x) = 8x \cdot (x^2 + 3)^3$$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผัน

บทนิยาม 1.4 ให้ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งที่มีโดเมนเป็น A และมีเรนจ์เป็น B

ฟังก์ชันผกผันของ f เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ f^{-1} ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น B และมีเรนจ์เป็น A ซึ่งนิยามว่า $f^{-1}(y) = x$ ก็ต่อเมื่อ $f(x) = y$ สำหรับทุก $y \in B$

ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

บทนิยาม 1.5 ฟังก์ชัน f ที่มีโดเมนเป็น A จะเรียกว่าเป็น ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ

สำหรับทุก $x_1, x_2 \in A$ ถ้า $x_1 \neq x_2$ แล้ว $f(x_1) \neq f(x_2)$

กิจกรรม 1 $f(x) = x + 2$ เป็น

กิจกรรม 2 $f(x) = x^2 + 1$ เป็น

ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

สมมติ $f(x_1) = f(x_2)$

สมมติ $f(x_1) = f(x_2)$

$$x_1 + 2 = x_2 + 2$$

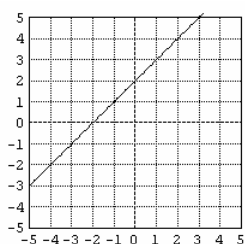
$$x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1$$

$$x_1 = x_2$$

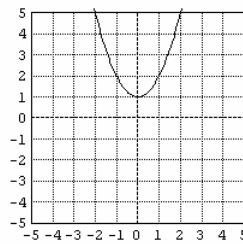
พบว่า เป็นไปได้ที่ $x_1 \neq x_2$

$\therefore f(x) = x + 2$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

$\therefore f(x) = x^2 + 1$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง



กราฟของ $f(x) = x + 2$



กราฟของ $f(x) = x^2 + 1$

ขั้นตอนการหาฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชัน f เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f มาให้ มีดังนี้

1. เขียน $y = f(x)$

2. สลับตัวแปร x และ y

3. แก้สมการเพื่อหาค่า y ในเทอมของ x (ถ้าทำได้) สิ่งที่ได้คือ $y = f^{-1}(x)$

1) ให้ $f(x) = x + 1$ จงหา $y = f^{-1}(x)$

2) ให้ $f(x) = x^3$ จงหา $y = f^{-1}(x)$

จาก $y = x + 1$

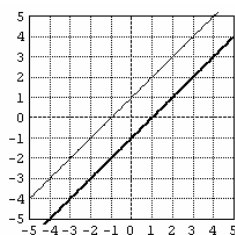
สลับตัวแปร x และ y จะได้ $x = y^3$

สลับตัวแปร x และ y จะได้ $x = y + 1$

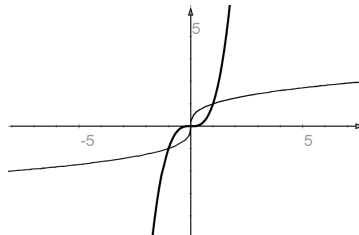
แก้สมการหา y ในเทอมของ x จะได้ $y = x^{1/3}$

แก้สมการหา y ในเทอมของ x จะได้ $y = x - 1$

นั่นคือ $f^{-1}(x) = x - 1$



กราฟ $f(x) = x + 1$ (---) และ $f^{-1}(x) = x - 1$ (—) กราฟ $f(x) = x^3$ (—) และ $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ (---)



19. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x^5 - 2$ จงหาอนุพันธ์ของ $f^{-1}(x)$ และ $(f^{-1})'(1)$

วิธีทำ จะได้ $y = x^5 - 2$ (1. เขียน $y = f(x)$)

$x = y^5 - 2$ (2. สลับตัวแปร x และ y)

$x + 2 = y^5$ (3. แกสมการเพื่อหาค่า y ในเทอมของ x)

$$(x+2)^{\frac{1}{5}} = y$$

สิ่งที่ได้คือ $f^{-1}(x) = y = (x+2)^{\frac{1}{5}}$

ดังนั้น $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{5}(x+2)^{-\frac{4}{5}}$

และ $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{5}(1+2)^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5}(3)^{-\frac{4}{5}} = \frac{(3)^{-\frac{4}{5}}}{5} = \frac{1}{5(3)^{\frac{4}{5}}}$

ทฤษฎีบท 1.6 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บนช่วง (a, b) โดยที่ $f'(x) \neq 0$
 และ g เป็นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชัน f ซึ่งต่อเนื่องใน $D_g \subset R_g$
 แล้ว g จะมีอนุพันธ์ที่ x และ $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$

20. จงใช้ทฤษฎีบท 1.6 ช่วยในการหา $(f^{-1})'(1)$ ของฟังก์ชันในข้อ 19

วิธีทำ จาก $f(x) = x^5 - 2$

ดังนั้น $f'(x) = 5x^4$

$$\therefore (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{5(f^{-1}(x))^4} \quad \text{----- (1)}$$

$$\therefore (f^{-1})'(1) = \frac{1}{5(f^{-1}(1))^4}$$

สมมติ $f^{-1}(1) = a$

เนื่องจาก f^{-1} เป็นฟังก์ชันผกผันของ f จะได้ว่า $f(f^{-1}(x)) = x$

$$\therefore f(a) = f(f^{-1}(1)) = 1$$

เพราะว่า $f(a) = a^5 - 2 = 1$

$$a^5 = 3 \quad \text{จะได้} \quad a = 3^{\left(\frac{1}{5}\right)} \quad \text{ดังนั้น} \quad f\left(3^{\left(\frac{1}{5}\right)}\right) = 1$$

และได้ $f^{-1}(1) = a = 3^{\left(\frac{1}{5}\right)} \quad \text{----- (2)}$

จาก (1) และ (2) จะได้ $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{5\left(3^{\left(\frac{1}{5}\right)}\right)^4} \quad \#$

21. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x^3 + x^2 + x - 2$ จงหา $(f^{-1})'(-3)$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^3 + x^2 + x - 2$

$$\text{ดังนั้น } f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

$$\therefore (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{3(f^{-1}(x))^2 + 2(f^{-1}(x)) + 1} \quad \dots (1)$$

$$\therefore (f^{-1})'(-3) = \frac{1}{3(f^{-1}(-3))^2 + 2(f^{-1}(-3)) + 1}$$

$$\text{สมมติ } f^{-1}(-3) = a$$

เนื่องจาก f^{-1} เป็นฟังก์ชันผกผันของ f จะได้ว่า $f(f^{-1}(x)) = x$

$$\therefore f(a) = f(f^{-1}(-3)) = -3$$

$$\text{เพราะว่า } f(a) = a^3 + a^2 + a - 2 = -3$$

$$\therefore f(-1) = -3$$

$$\text{และได้ } f^{-1}(-3) = a = -1 \quad \dots (2)$$

$$\text{จาก (1) และ (2) จะได้ } (f^{-1})'(-3) = \frac{1}{3(-1)^2 + 2(-1) + 1} = \frac{1}{2} \quad \#$$

จากบทนิยามฟังก์ชันผกผัน

$$f^{-1}(y) = x \text{ ก็ต่อเมื่อ } f(x) = y$$

$$\text{ดังนั้น } (f^{-1} \circ f)(\boxed{x}) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = \boxed{x}$$

$$\text{และ } (f \circ f^{-1})(\boxed{y}) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = \boxed{y}$$

จะเห็นว่า ฟังก์ชันประกอบของ f^{-1} และ f

และฟังก์ชันประกอบของ f และ f^{-1} ต่างเป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์

โดยที่ ฟังก์ชันประกอบของ f^{-1} และ f เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์บน A

ฟังก์ชันประกอบของ f และ f^{-1} เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์บน B

22. กำหนด $f(x) = \sin(x)$ ซึ่งจากข้อ 5 จะได้ว่า $\sin(x)$ มีอนุพันธ์ที่ x ใด ๆ

ให้ g เป็นฟังก์ชันผกผันของ $\sin(x)$ ซึ่ง g ต่อเนื่องใน $D_g \subset R_g$ จะใช้ทฤษฎีบท 1.6 หาอนุพันธ์ของ g ที่ x

ให้นิสิตอธิบายเหตุผลในแต่ละบรรทัด

$$\text{วิธีทำ } g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \quad (\text{ทฤษฎีบท 1.6})$$

$$= \frac{1}{\cos(g(x))} \quad \left(\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x) \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(g(x))}} \quad (\cos^2 x + \sin^2 x = 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{ฟังก์ชันประกอบของ } f \text{ และ } f^{-1} \text{ เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์})$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันของ $\sin(x)$ เท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ทุกค่าของ x ซึ่ง $|x| < 1$

อนุพันธ์อันดับสูง

การหาอนุพันธ์ที่กล่าวมานั้น เป็นการหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง เขียนแทนด้วย $f'(x)$ หรือ $\frac{dy}{dx}$ ถ้านำอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งไปหาอนุพันธ์ต่อไปอีก จะได้อนุพันธ์อันดับที่สอง (Second Derivative) เขียนแทนด้วย $f''(x)$ หรือ $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ หรือ $\frac{d^2y}{dx^2}$ และถ้านำอนุพันธ์อันดับที่สองไปหาอนุพันธ์อีกก็จะได้อนุพันธ์อันดับที่สาม ซึ่งสามารถทำเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ จนถึงอันดับที่ n ซึ่งอนุพันธ์อันดับที่สี่เป็นต้นไปให้ใช้ตัวเลข เขียนแทนด้วย $f^{(n)}(x)$ หรือ $\frac{d^ny}{dx^n}$ โดยที่อนุพันธ์ที่มากกว่าอันดับที่หนึ่งขึ้นไปเรียกว่า อนุพันธ์อันดับสูง

บทนิยาม 1.6 อนุพันธ์อันดับที่ n (n – the – order Derivative) ของฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วย $f^{(n)}(x)$ เป็นการหาอนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่ $n - 1$ เทียบกับ x นั่นคือ $f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}[f^{(n-1)}(x)]$

23. จงหาอนุพันธ์อันดับที่ 4 ของ $f(x) = x^3 + 3x + 1$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } f'(x) &= 3x^2 + 3 \\ f''(x) &= 6x \\ f'''(x) &= 6 \\ f^{(4)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

24. จงแสดงว่า $3y''' - 5xy''' + 6xy'' - 12y' = 0$ เมื่อ $y = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 6$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } y' &= 6x^2 - 10x + 3 \\ y'' &= 12x - 10 \\ y''' &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } 3y''' - 5xy''' + 6xy'' - 12y' &= 3(12) - 5(12)x + 6x(12x - 10) - 12(6x^2 - 10x + 3) \\ &= 36 - 60x + 72x^2 - 60x - 72x^2 + 120x - 36 \\ &= 0 \end{aligned}$$

เฉลยใบกิจกรรมที่ 2

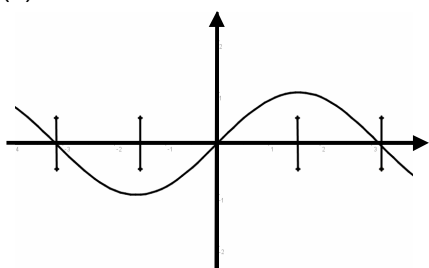
วิชา คณิตศาสตร์ 1 (MATHEMATICS 1) : MA111

เนื้อหา อนุพันธ์ : อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
ชื่อ.....เลขที่.....

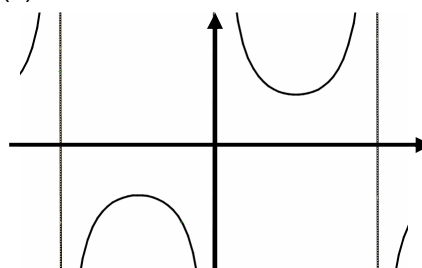
อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. จงใช้โปรแกรม Euler เขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

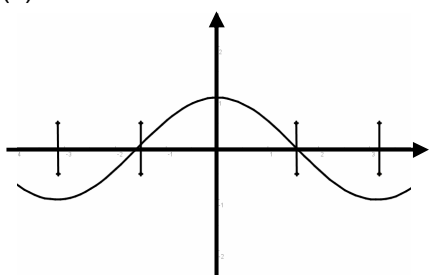
1.1 $f(x) = \sin x$



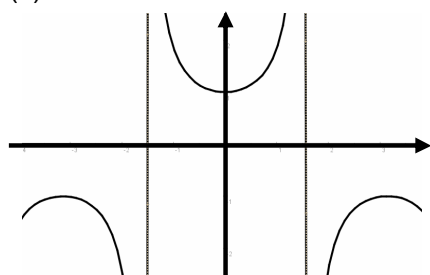
1.4 $f(x) = \csc x$



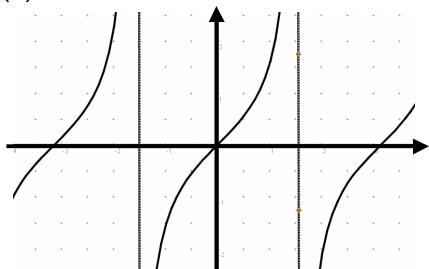
1.2 $f(x) = \cos x$



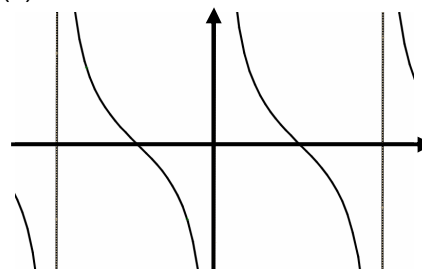
1.5 $f(x) = \sec x$



1.3 $f(x) = \tan x$



1.6 $f(x) = \cot x$



ทฤษฎีบท 2.1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ และ

(1) $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$

(2) $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

(3) $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$, $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{I}$

(4) $\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$, $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{I}$

(5) $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$, $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{I}$

(6) $\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$, $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{I}$

หมายเหตุ นิสิตได้พิสูจน์ทฤษฎีบท 2.1(1) ไปแล้วในใบกิจกรรมที่ 1 ข้อ 5

สำหรับทฤษฎีบทข้ออื่น ๆ ให้นำนิสิตฝึกทำด้วยตนเอง

2. ให้นิสิตวิเคราะห์วิธีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้

2.1 $y = \cos^3 2x$	$\frac{d}{du}(u^3) \cdot \frac{d}{dv}(\cos v) \cdot \frac{d}{dx}(2x)$	โดยที่ $u = \cos 2x$ และ $v = 2x$
2.2 $y = x \sin \frac{1}{x}$	$x \frac{d}{dx} \left(\sin \frac{1}{x} \right) + \sin \frac{1}{x} \frac{d}{dx}(x)$	อนุพันธ์ของผลคูณของฟังก์ชัน
2.3 $y = \frac{\sin 3x}{\cos 2x}$	$\frac{\cos 2x \frac{d}{dx}(\sin 3x) - \sin 3x \frac{d}{dx}(\cos 2x)}{\cos^2 2x}$	อนุพันธ์ของผลหารของฟังก์ชัน

3. จงหาอนุพันธ์ของ $y = \cot 3x$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ } \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{du}(\cot u) \cdot \frac{d}{dx}(3x) && \text{โดยที่ } u = 3x \\
 &= (-\csc^2 u) \cdot 3 \\
 &= -3 \csc^2 3x && \#
 \end{aligned}$$

4. จงหาอนุพันธ์ของ $y = \cos^3 2x$

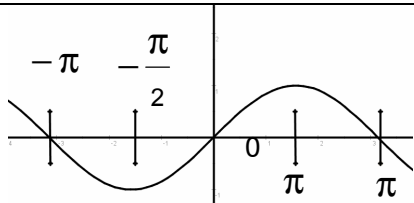
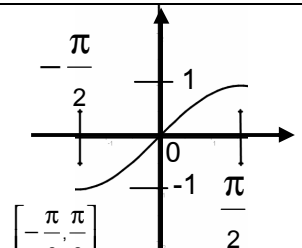
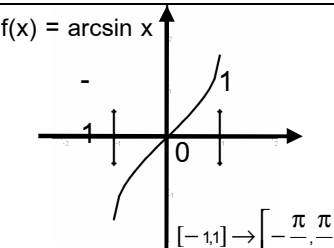
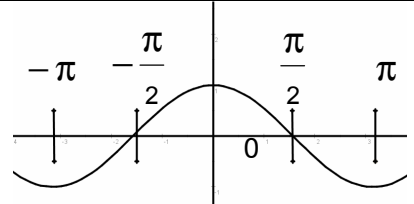
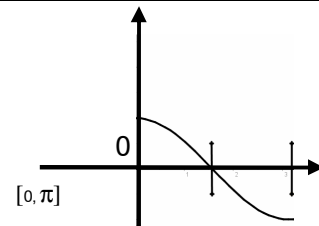
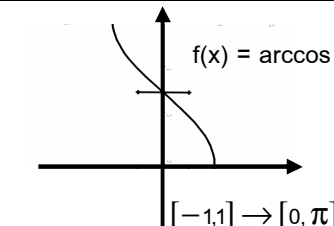
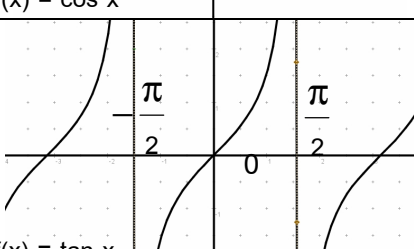
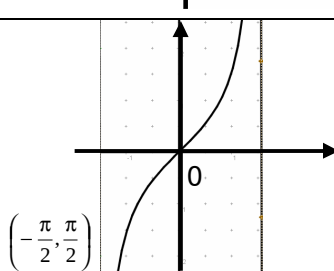
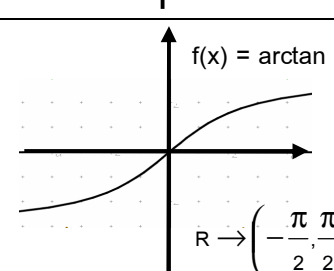
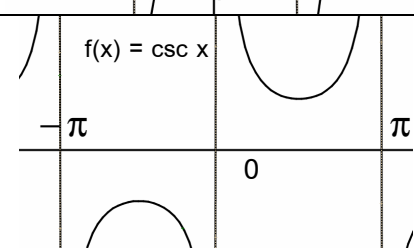
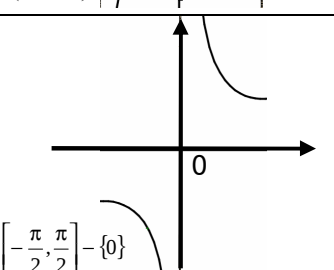
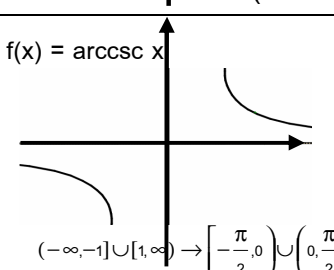
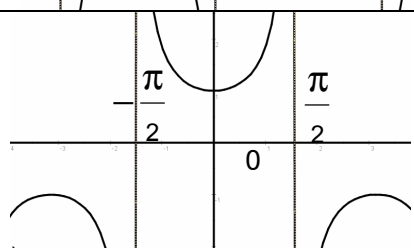
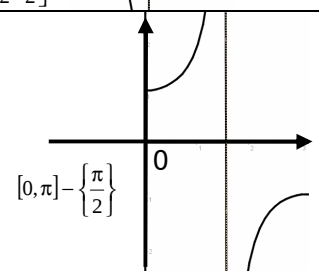
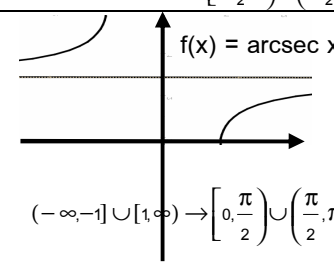
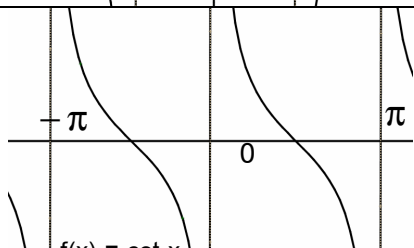
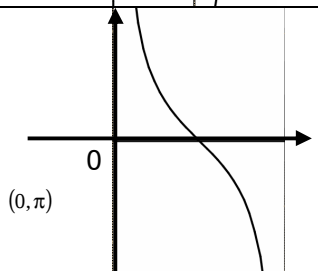
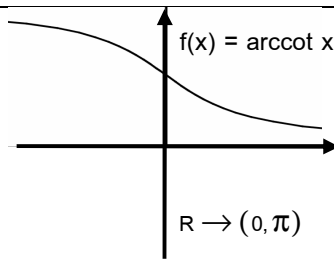
$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ } \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{du}(u^3) \cdot \frac{d}{dv}(\cos v) \cdot \frac{d}{dx}(2x) && \text{โดยที่ } u = \cos 2x \text{ และ } v = 2x \\
 &= 3u^2 \cdot (-\sin v) \cdot 2 \\
 &= -6 \cos^2(2x) \sin(2x) && \#
 \end{aligned}$$

5. จงหาอนุพันธ์ของ $y = x \sin \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ } \frac{dy}{dx} &= x \frac{d}{dx} \left(\sin \frac{1}{x} \right) + \sin \frac{1}{x} \frac{d}{dx}(x) \\
 &= x \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) + \sin \frac{1}{x} \\
 &= -\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} && \#
 \end{aligned}$$

จากความรู้เรื่องฟังก์ชันผกผัน เราทราบว่าฟังก์ชันที่มีอินเวอร์สเป็นฟังก์ชันจะต้องเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แต่เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งใน R ดังนั้นจึงต้องมีการกำหนดโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เพื่อให้ฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งใน R ซึ่งส่งผลให้มีอินเวอร์สเป็นฟังก์ชัน

6. จงกำหนดโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เพื่อให้ฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งใน $\mathbb{R}$

กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	เมื่อกำหนดโดเมนให้ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแล้ว	
	กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	กราฟของฟังก์ชันผกผัน
 $f(x) = \sin x$	 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	 $f(x) = \arcsin x$ $[-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
 $f(x) = \cos x$	 $[0, \pi]$	 $f(x) = \arccos x$ $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$
 $f(x) = \tan x$	 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	 $f(x) = \arctan x$ $\mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
 $f(x) = \csc x$	 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$	 $f(x) = \operatorname{arccsc} x$ $(-\infty, -1] \cup [1, \infty) \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$
 $f(x) = \sec x$	 $\left[0, \pi\right] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$	 $f(x) = \operatorname{arcsec} x$ $(-\infty, -1] \cup [1, \infty) \rightarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
 $f(x) = \cot x$	 $(0, \pi)$	 $f(x) = \operatorname{arccot} x$ $\mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$

บทนิยาม 2.1

(1) ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันไซน์

นิยามว่า $y = \arcsin x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \sin y$ โดยที่ $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(2) ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคไซน์

นิยามว่า $y = \arccos x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \cos y$ โดยที่ $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

(3) ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์

นิยามว่า $y = \arctan x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \tan y$ โดยที่ $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(4) ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคแทนเจนต์

นิยามว่า $y = \operatorname{arccot} x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \cot y$ โดยที่ $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$

(5) ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเซแคนต์

นิยามว่า $y = \operatorname{arcsec} x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \sec y$ โดยที่ $\operatorname{arcsec} : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \rightarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

(6) ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคเซแคนต์

นิยามว่า $y = \operatorname{arccsc} x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \csc y$ โดยที่ $\operatorname{arccsc} : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ **ทฤษฎีบท 2.2**(1) ฟังก์ชัน $y = \arcsin x$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกค่าของ x ซึ่ง $|x| < 1$

และ
$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(2) ฟังก์ชัน $y = \arccos x$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกค่าของ x ซึ่ง $|x| < 1$

และ
$$\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(3) ฟังก์ชัน $y = \arctan x$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกค่าของ $x \in \mathbb{R}$

และ
$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

(4) ฟังก์ชัน $y = \operatorname{arccot} x$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกค่าของ $x \in \mathbb{R}$

และ
$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$$

(5) ฟังก์ชัน $y = \operatorname{arcsec} x$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกค่าของ x ซึ่ง $|x| > 1$

และ
$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

(6) ฟังก์ชัน $y = \operatorname{arccsc} x$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกค่าของ x ซึ่ง $|x| > 1$

และ
$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$



7. ให้นิบัติวิเคราะห์วิธีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้

7.1 $y = \arcsin \sqrt{x}$	$\frac{d}{du}(\arcsin u) \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$	โดยที่ $u = \sqrt{x}$
7.2 $y = \arccos \frac{x^3 + 1}{x^2}$	$\frac{d}{du}(\arccos u) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3 + 1}{x^2}\right)$	โดยที่ $u = \frac{x^3 + 1}{x^2}$
7.3 $y = \arctan(x - 4)^2$	$\frac{d}{du}(\arctan u) \cdot \frac{d}{dx}(x - 4)^2$	โดยที่ $u = (x - 4)^2$
7.4 $y = x^2 \arcsin x^2$	$x^2 \frac{d}{dx}(\arcsin x^2) + \arcsin x^2 \frac{d}{dx}(x^2)$	อนุพันธ์ของผลคูณของฟังก์ชัน

8. จงหาอนุพันธ์ของ $y = \arcsin \sqrt{x}$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ } \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{du}(\arcsin u) \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) && \text{โดยที่ } u = \sqrt{x} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}
 \end{aligned}$$

#

9. จงหาอนุพันธ์ของ $y = \arccos \frac{x^3 + 1}{x^2}$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ } \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{du}(\arccos u) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3 + 1}{x^2}\right) && \text{โดยที่ } u = \frac{x^3 + 1}{x^2} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \left(\frac{x^2 \cdot 3x^2 - (x^3 + 1)2x}{x^4}\right) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^3 + 1}{x^2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{3x^4 - (x^3 + 1)2x}{x^4}\right) \\
 &= -\frac{\left(3 - \frac{2(x^3 + 1)}{x^3}\right)}{\sqrt{1-\frac{(x^3 + 1)^2}{x^4}}}
 \end{aligned}$$

#

เฉลยใบกิจกรรมที่ 3

วิชา คณิตศาสตร์ 1 (MATHEMATICS 1) : MA111

เนื้อหา อนุพันธ์ : อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย

ชื่อ.....เลขที่.....

อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ผ่านมาเป็นการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันโดยชัดแจ้ง (Explicit function) ตัวอย่างเช่น $y = x^2 - 6x + 8$ หรือ $y = \sqrt{6x - x^2}$ เป็นต้น

อย่างไรก็ตาม บางฟังก์ชันไม่ได้กำหนดในรูปฟังก์ชันโดยชัดแจ้ง แต่แฝงอยู่ในรูปความสัมพันธ์ $F(x, y) = 0$ เรียกว่า ฟังก์ชันโดยปริยาย (Implicit function) ตัวอย่างเช่น

$$xy = 3 \quad \text{----- (1)}$$

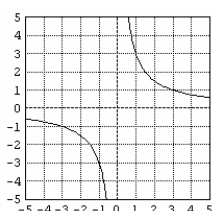
$$x^3y + xy - 1 = 0 \quad \text{----- (2)}$$

$$y^2 - x + 3 = 0 \quad \text{----- (3)}$$

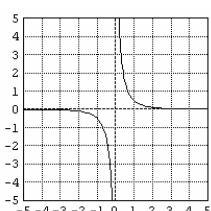
$$x^3y + xy^3 + x^2y^2 + xy - 2 = 0 \quad \text{----- (4)}$$

พบว่า สมการ (1) และ (2) เขียนในรูปฟังก์ชันโดยชัดแจ้งได้ง่าย ได้แก่ $y = \frac{3}{x}$ และ $y = \frac{1}{x^3 + x}$

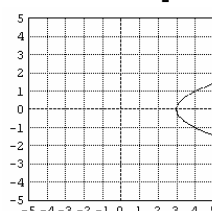
ตามลำดับ ส่วนสมการ (3) สามารถเขียนในรูปฟังก์ชันโดยชัดแจ้งได้มากกว่า 1 ฟังก์ชัน คือ $f(x) = \sqrt{x-3}$ หรือ $g(x) = -\sqrt{x-3}$ แต่สมการ (4) เขียนในรูปฟังก์ชันโดยชัดแจ้งได้ยากมาก



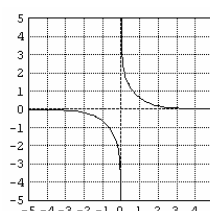
$$xy = 3$$



$$x^3y + xy - 1 = 0$$



$$y^2 - x + 3 = 0$$



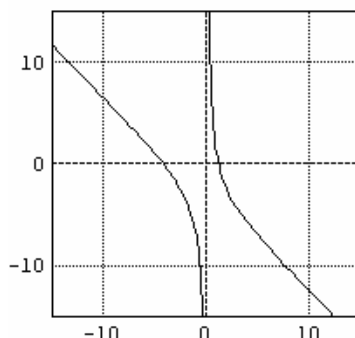
$$x^3y + xy^3 + x^2y^2 + xy - 2 = 0$$

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย อาจทำได้โดยจัดรูปของฟังก์ชันโดยปริยายนั้นให้อยู่ในรูปฟังก์ชันโดยชัดแจ้งแล้วจึงทำการอนุพันธ์ แต่ถ้าฟังก์ชันโดยปริยายนั้นยากมากที่จะเขียนในรูปฟังก์ชันโดยชัดแจ้ง จำเป็นต้องใช้ความรู้ในเรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบเข้ามาช่วยในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย ซึ่งมีขั้นตอน ดังนี้

1. หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการเทียบกับ x
2. จัดเทอม $\frac{dy}{dx}$ ให้อยู่ข้างเดียวกันของสมการ
3. ดึงตัวประกอบร่วมของ $\frac{dy}{dx}$ ออก
4. แก่สมการหา $\frac{dy}{dx}$

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $x^2 + 3x + xy = 5$



วิธีทำ

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 3x + xy) = \frac{d}{dx}(5)$$

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}3x + \frac{d}{dx}(xy) = 0$$

$$2x + 3 + x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx} = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} = -y - 2x - 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x} - 2 - \frac{3}{x}$$

$$= \frac{-(5x^{-1} - x - 3)}{x} - 2 - \frac{3}{x}$$

$$= \frac{-5x^{-1}}{x} + \frac{x}{x} + \frac{3}{x} - 2 - \frac{3}{x}$$

$$= -5x^{-2} - 1$$

#

2. พิจารณาฟังก์ชันในข้อ 1 นิสิตคิดว่ามีวิธีหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันวิธีอื่นหรือไม่ ถ้ามีจงแสดง

วิธีทำ จากฟังก์ชันในข้อ 1 สามารถจัดรูปของฟังก์ชันให้อยู่ในรูปฟังก์ชันโดยชัดแจ้งได้ง่าย

จึงทำการจัดรูปให้อยู่ในรูปแบบ $y = f(x)$ ได้ดังนี้

$$x^2 + 3x + xy = 5$$

$$xy = 5 - x^2 - 3x$$

$$\text{ดังนั้น } y = \frac{5 - x^2 - 3x}{x}$$

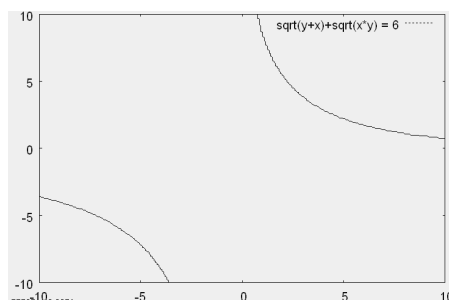
$$y = \frac{5}{x} - x - 3$$

$$= 5x^{-1} - x - 3$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} = -5x^{-2} - 1$$

#

3. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $\sqrt{x+y} + \sqrt{xy} = 6$



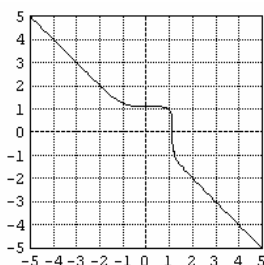
วิธีทำ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\sqrt{x+y}) + \frac{d}{dx}(\sqrt{xy}) &= \frac{d}{dx}(6) \\ \frac{1}{2\sqrt{x+y}} \frac{d}{dx}(x+y) + \frac{1}{2\sqrt{xy}} \frac{d}{dx}(xy) &= 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x+y}} \left(\frac{dx}{dx} + \frac{dy}{dx} \right) + \frac{1}{2\sqrt{xy}} \left(x \frac{dy}{dx} + y \frac{dx}{dx} \right) &= 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x+y}} \left(1 + \frac{dy}{dx} \right) + \frac{1}{2\sqrt{xy}} \left(x \frac{dy}{dx} + y \right) &= 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x+y}} + \frac{1}{2\sqrt{x+y}} \frac{dy}{dx} + \frac{x}{2\sqrt{xy}} \frac{dy}{dx} + \frac{y}{2\sqrt{xy}} &= 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x+y}} \frac{dy}{dx} + \frac{x}{2\sqrt{xy}} \frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{2\sqrt{xy}} - \frac{1}{2\sqrt{x+y}} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{x}{\sqrt{xy}} \right) \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{y}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{x+y}} \right) \\ \left(\frac{\sqrt{xy} + x\sqrt{x+y}}{\sqrt{x+y}\sqrt{xy}} \right) \frac{dy}{dx} &= - \left(\frac{y\sqrt{x+y} + \sqrt{xy}}{\sqrt{x+y}\sqrt{xy}} \right) \\ \frac{dy}{dx} &= - \left(\frac{y\sqrt{x+y} + \sqrt{xy}}{x\sqrt{x+y} + \sqrt{xy}} \right) \end{aligned}$$

ดังนั้น

#

4. จงหาสมการเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $x^5 + y^5 = 2$ ณ จุด (1, 1)



วิธีทำ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^5 + y^5) &= \frac{d}{dx}(2) \\ \frac{d}{dx}x^5 + \frac{d}{dx}y^5 &= 0 \end{aligned}$$

$$5x^4 + 5y^4 \frac{dy}{dx} = 0$$

ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-5x^4}{5y^4} = \frac{-x^4}{y^4}$$

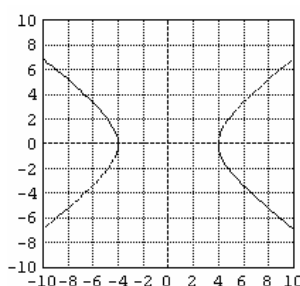
ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $x^5 + y^5 = 2$ ณ จุด $(1, 1)$ เท่ากับ $\frac{-(1)^4}{(1)^4} = -1$

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $x^5 + y^5 = 2$ ณ จุด $(1, 1)$ เท่ากับ $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 1 = -1(x - 1)$$

$$y = 2 - x \quad \#$$

5. จงหาสมการเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ณ จุด $(-5, \frac{9}{4})$



วิธีทำ
$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} \right) = \frac{d}{dx} (1)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{16} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{y^2}{9} \right) = 0$$

$$\frac{x}{8} - \frac{2y}{9} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{8} \cdot \frac{9}{2y}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ณ จุด $(-5, \frac{9}{4})$

$$\text{เท่ากับ } \frac{-5}{8} \cdot \frac{9(4)}{2(9)} = \frac{-5}{4}$$

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ณ จุด $(-5, \frac{9}{4})$

$$\text{เท่ากับ } y - \frac{9}{4} = \frac{-5}{4} (x + 5)$$

$$y = \frac{-5}{4}x - 4 \quad \#$$

เฉลยใบกิจกรรมที่ 4

วิชา คณิตศาสตร์ 1 (MATHEMATICS 1) : MA111

เนื้อหา อนุพันธ์ : อนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม

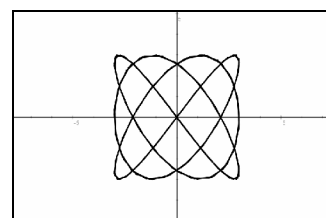
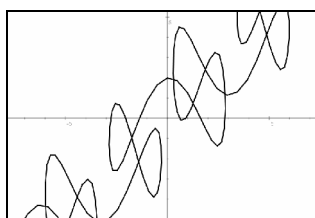
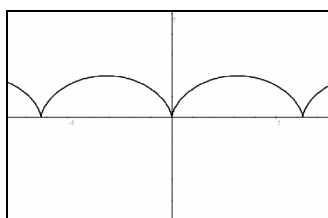
และอนุพันธ์ในพิกัดเชิงขั้ว

ชื่อ.....เลขที่.....

อนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม

ให้ t เป็นตัวแปรอิสระ และ $x = f(t)$ และ $y = g(t)$ ต่างเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ สมการ $x = f(t)$, $y = g(t)$ ---- (1) มีชื่อเรียกว่า สมการอิงตัวแปรเสริม (Parametric Equations) และเรียกตัวแปร t ว่า ตัวแปรเสริม (Parameter) โดยแต่ละค่า t จะให้ $(f(t), g(t))$ แทนจุดบนเส้นโค้งที่สอดคล้องกับสมการ (1)

ตัวอย่างกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม



$$x = t - \sin(t), y = 1 - \cos(t) \quad x = t + 2\sin(2t), y = t + 2\cos(5t) \quad x = 3\sin(3t), y = 3\sin(4t)$$

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งกำหนดในรูปสมการอิงตัวแปรเสริม

ถ้าสมการอิงตัวแปรเสริมนั้นสามารถจัดตัวแปร t เพื่อเขียนสมการ (1) ให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์ $F(x, y) = 0$ ได้ง่าย จะใช้วิธีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย $F(x, y) = 0$ แต่ถ้าไม่สามารถจัดตัวแปร t ได้ จำเป็นต้องใช้ความรู้ในเรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผันและกฎลูกโซ่หาค่าอนุพันธ์

$$\text{โดย } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \text{ถ้า } \frac{dx}{dt} \neq 0$$

1. จงหา $\frac{dy}{dx}$ ของฟังก์ชัน $x = \sqrt{t}$, $y = 1 - t$ โดยการจัดตัวแปร t แล้วเขียนให้อยู่ในรูป

ความสัมพันธ์ $F(x, y) = 0$

วิธีทำ สมการอิงตัวแปรเสริมที่กำหนดให้ในข้อนี้ สามารถจัดตัวแปร t ได้ง่าย ซึ่งจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \text{จาก} \quad x &= \sqrt{t} \\ t &= x^2 \\ \text{ดังนั้น} \quad y &= 1 - x^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = -2x$$

#

2. จงหา $\frac{dy}{dx}$ ของ $x = |t-1|$, $y = t+2$ โดยใช้สูตร $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ เมื่อ $\frac{dx}{dt} \neq 0$

วิธีทำ จาก $\frac{dx}{dt} = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } t > 1 \\ -1 & \text{เมื่อ } t < 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } t = 1 \end{cases}$

และ $\frac{dy}{dt} = 1$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } t > 1 \\ -1 & \text{เมื่อ } t < 1 \\ \text{หาค่าไม่ได้} & \text{เมื่อ } t = 1 \end{cases}$ #

3. จงหา $\frac{dy}{dx}$ ของฟังก์ชัน $x = 3 \cos \theta$, $y = 3 \sin \theta$

วิธีที่ 1 สมการอิงตัวแปรเสริมที่กำหนดให้ในข้อนี้สามารถจัดตัวแปร θ เพื่อเขียนให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์ $F(x, y) = 0$ ได้ง่าย จะใช้วิธีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย $F(x, y) = 0$

จาก $\frac{x}{3} = \cos \theta$

ดังนั้น $\theta = \arccos \frac{x}{3}$

จะได้ $y = 3 \sin \left(\arccos \frac{x}{3} \right)$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 3 \cos \left(\arccos \frac{x}{3} \right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{3} \right)^2}} \right) \cdot \frac{1}{3} \\ &= -\frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \# \end{aligned}$$

วิธีที่ 2 ใช้ความรู้เรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผัน และ กฎลูกโซ่ ด้วยสูตร

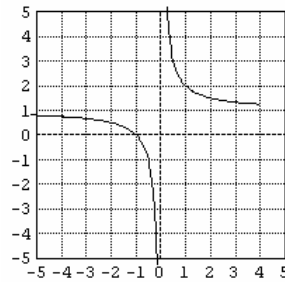
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \quad \text{เมื่อ } \frac{dx}{d\theta} \neq 0$$

จะได้ $\frac{dx}{d\theta} = -3 \sin \theta$

$$\frac{dy}{d\theta} = 3 \cos \theta$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{-3 \cos \theta}{3 \sin \theta} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \#$

4. จงหาสมการของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $x = t - 1$, $y = \frac{t}{t-1}$ ณ จุดที่ $t = 2$



วิธีทำจาก $x = t - 1$ จะได้ $\frac{dx}{dt} = 1$

$y = \frac{t}{t-1}$ จะได้ $\frac{dy}{dt} = \frac{t-1-t}{(t-1)^2}$

เมื่อ $t = 2$ จะได้ $x = 1$, $y = 2$, $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=2} = 1$ และ $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=2} = -1$

นั่นคือ $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=2} = -1$

หรือความชันของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง ณ จุดที่ $t = 2$ คือ -1

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $x = t - 1$, $y = \frac{t}{t-1}$ ณ จุดที่ $t = 2$

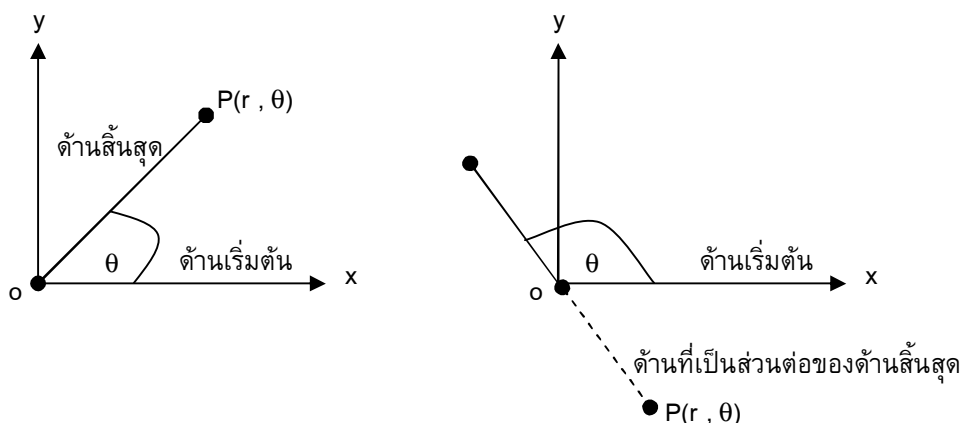
หรือจุด $(1, 2)$ คือ $y - 2 = -1(x - 1)$

หรือ $y = -x + 3$ #

พิกัดเชิงขั้ว (Polar Coordinates)

ระบบพิกัดที่เราศึกษาและกล่าวไปแล้วแต่ตอนต้น เป็นระบบพิกัดที่เรียกว่า **พิกัดฉาก (Rectangular Coordinates)** นอกเหนือจากระบบพิกัดฉาก ยังมีระบบพิกัดอีกชนิดหนึ่งที่เรียกว่า **พิกัดเชิงขั้ว (Polar Coordinates)** ซึ่งมีความหมายและรายละเอียดดังที่จะกล่าวต่อไปนี้

ในระบบพิกัดเชิงขั้ว เราจะเริ่มต้นโดยการเลือกจุด ๆ หนึ่งในฐานะ เรียกจุดนี้ว่า **ขั้ว (Pole)** หรือ **จุดกำเนิด (Origin)** ซึ่งต่อไปนี้จะแทนด้วย o จากจุดนี้ลากเส้นตรง 2 เส้น โดยที่เส้นหนึ่งอยู่ในแนวอนันต์ไปทางขวามือ เราเรียกเส้นนี้ว่า **แกนเชิงขั้ว (Polar Axis)** ซึ่งต่อไปจะแทนด้วยแกน x ส่วนอีกเส้นหนึ่ง ลากจากขั้วไปตามแนวตั้ง เราเรียกเส้นนี้ว่า **แกนแนวฉาก (Normal Axis)** ซึ่งต่อไปจะแทนด้วยแกน y



ถ้า P เป็นจุด ๆ หนึ่งบนระนาบ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนการบอกตำแหน่งของจุด P คือ คู่อันดับ (r, θ) โดยที่

(1) θ แทนมุมที่ชี้ โดยมีด้านเริ่มต้นของมุมทับแกนเชิงชี้ และด้านสิ้นสุดของมุมหรือส่วนต่อของด้านสิ้นสุดของมุมผ่านจุด P โดยที่

$\theta > 0$ เมื่อหมุนด้านสิ้นสุดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจากด้านเริ่มต้น

$\theta < 0$ เมื่อหมุนด้านสิ้นสุดในทิศทางตามเข็มนาฬิกาจากด้านเริ่มต้น

(2) r แทนระยะทางที่ระบุทิศทาง จากชี้ไปถึงจุด P โดยที่

$r > 0$ เมื่อ P อยู่บนด้านสิ้นสุดของ θ มีระยะห่างจากชี้เท่ากับ r หน่วย

$r < 0$ เมื่อ P อยู่บนด้านที่เป็นส่วนต่อของด้านสิ้นสุดของ θ มีระยะห่างจากชี้

เท่ากับ $|r|$ หน่วย

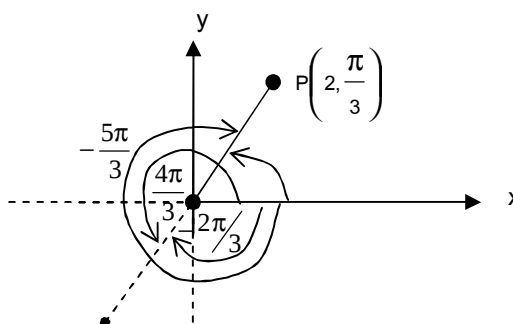
หมายเหตุ 1. พิกัดของจุด ๆ หนึ่งมีได้หลายพิกัด

2. ถ้า (r, θ) เป็นพิกัดของจุด P แล้ว $(r, \theta + 2n\pi)$ สำหรับทุก $n = 0, 1, 2, \dots$

จะเป็นพิกัดของจุด P ด้วย

5. จงหาตำแหน่งของ $P\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ พร้อมทั้งหาพิกัดของ P อีก 4 คู่อันดับ

วิธีทำ จากแกนเชิงชี้หมุนไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม $\frac{\pi}{3}$ เรเดียน จากชี้วัดไปตามด้านสิ้นสุดของมุม $\frac{\pi}{3}$ เป็นระยะทาง 2 หน่วย จะได้ตำแหน่งของจุด $P\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$



พิกัดของจุด P ที่ต่างออกไปอีก 4 คู่อันดับ ได้แก่ $\left(2, -\frac{5\pi}{3}\right)$ $\left(-2, \frac{4\pi}{3}\right)$ $\left(-2, -\frac{2\pi}{3}\right)$ และ
 พิกัดที่อยู่ในรูป $\left(2, \frac{\pi}{3} + 2n\pi\right)$, $\left(2, -\frac{5\pi}{3} - 2n\pi\right)$, $\left(-2, \frac{4\pi}{3} + 2n\pi\right)$, $\left(-2, -\frac{2\pi}{3} - 2n\pi\right)$ เมื่อ n
 เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดเชิงขั้วและพิกัดฉาก

ให้ P เป็นจุดบนระนาบ

(x, y) แทนพิกัดของ P ในระบบพิกัดฉาก

(r, θ) แทนพิกัดของ P ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

เมื่อกำหนดพิกัดของจุดในระบบพิกัดเชิงขั้วมาให้ เราสามารถหาพิกัดของจุดนั้นในระบบ
 พิกัดฉากได้ด้วยความสัมพันธ์ ดังนี้

$$x = r \cos \theta \quad \text{และ} \quad y = r \sin \theta$$

เมื่อกำหนดพิกัดของจุดในระบบพิกัดฉากมาให้ เราสามารถหาพิกัดของจุดนั้นในระบบ
 พิกัดเชิงขั้วได้ ดังนี้

$$x^2 = r^2 \cos^2 \theta \quad \text{และ} \quad y^2 = r^2 \sin^2 \theta$$

เพราะฉะนั้น $x^2 + y^2 = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$

ดังนั้น $x^2 + y^2 = r^2$ นั่นคือ $r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$

นอกจากนั้น จะได้ว่า $\frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \frac{y}{x}$ นั่นคือ $\tan \theta = \frac{y}{x}$

6. จงเปลี่ยนพิกัด $P(-2, 2)$ ในระบบพิกัดฉากเป็นพิกัดในระบบพิกัดเชิงขั้ว

วิธีทำ จากความสัมพันธ์ $r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$ และ $\tan \theta = \frac{y}{x}$ จะได้ว่า

$$r = \pm \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \pm \sqrt{8} \quad \text{และ} \quad \tan \theta = \frac{2}{-2} = -1$$

เพราะว่า P อยู่ในจุดภาค (quadrant) ที่ 2 ดังนั้นเลือกมุม $\theta = \frac{3\pi}{4}$ และ $r = \sqrt{8}$

ดังนั้น พิกัดหนึ่งของ P ในระบบพิกัดเชิงขั้ว คือ $\left(\sqrt{8}, \frac{3\pi}{4}\right)$ #

กราฟที่สำคัญในระบบพิกัดเชิงขั้ว

1. เส้นตรง

1.1 สมการ: $r \cos \theta = a$

1.2 สมการ: $r \sin \theta = a$

1.3 สมการ: $r (A \cos \theta + B \sin \theta) + C = 0$ เมื่อ A, B และ C เป็นค่าคงตัวและ

A, B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

2. วงกลม

2.1 สมการ: $r = a$ เมื่อ $a \neq 0$

2.2 สมการ: $r = 2a \cos \theta$ เมื่อ $a \neq 0$

2.3 สมการ: $r = 2a \sin \theta$ เมื่อ $a \neq 0$

2.4 สมการ: $r = a \cos \theta + b \sin \theta$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

3. เส้นโค้งรูปหัวใจ (Cardioids)

3.1 สมการ: $r = a(1 + \sin \theta)$ เมื่อ $a \neq 0$

3.2 สมการ: $r = a(1 - \sin \theta)$ เมื่อ $a \neq 0$

3.3 สมการ: $r = a(1 + \cos \theta)$ เมื่อ $a \neq 0$

3.4 สมการ: $r = a(1 - \cos \theta)$ เมื่อ $a \neq 0$

4. เส้นโค้งลิมาซง (Limacons)

4.1 สมการ: $r = a + b \sin \theta$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

4.2 สมการ: $r = a - b \sin \theta$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

4.3 สมการ: $r = a + b \cos \theta$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

4.4 สมการ: $r = a - b \cos \theta$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

5. เส้นโค้งกลีบกุหลาบ (Rose Curve)

5.1 สมการ: $r = a \sin n\theta$ เมื่อ $a \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

5.2 สมการ: $r = a \cos n\theta$ เมื่อ $a \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

7. ให้นิสิตศึกษาและสำรวจลักษณะของกราฟที่สำคัญในระบบพิกัดเชิงขั้วจากกิจกรรมภาคปฏิบัติบนคอมพิวเตอร์

ภาคตัดกรวยในพิกัดเชิงขั้ว

เมื่อกล่าวถึงภาคตัดกรวย จะต้องกล่าวถึงจุดคงที่จุดหนึ่งนั่นคือ **จุดโฟกัส**ของภาคตัดกรวย และอีกสิ่งหนึ่งที่ต้องกล่าวถึงคือเส้นตรงเส้นหนึ่งที่เป็นเส้นคงที่และจุดโฟกัสไม่อยู่บนเส้นตรงนี้นั่นคือ **เส้นบังคับ (directrix)** โดยที่ P เป็นจุดบนระนาบซึ่งเคลื่อนที่โดยทำให้อัตราส่วนระหว่างระยะทางจากจุด P ถึงจุดโฟกัส กับ ระยะทางจากจุด P ถึงจุดเส้นบังคับ มีค่าคงตัวเสมอ ส่งผลให้รอยกราฟที่ได้จากการเคลื่อนที่ของจุด P เป็นภาคตัดกรวย นั่นเอง

หมายเหตุ ในการศึกษาเรื่องภาคตัดกรวยในพิกัดเชิงขั้วครั้งนี้ จะศึกษาเฉพาะภาคตัดกรวยที่มีโฟกัสอยู่ที่ขั้วและมีเส้นบังคับตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว หรือแกนแนวนอน เท่านั้น

บทนิยาม 4.1 ความเยื้องศูนย์กลางของภาคตัดกรวย

กำหนดให้ e เป็นความเยื้องศูนย์กลาง (eccentricity) ซึ่ง

$$e = \frac{\text{ระยะทางระหว่างจุด } P \text{ และโฟกัส } O}{\text{ระยะทางระหว่างจุด } P \text{ และเส้นบังคับ}}$$

สมการของภาคตัดกรวยมีดังนี้ เมื่อกำหนดให้ p แทนระยะทางจากจุดโฟกัส (ซ้าย) ถึงเส้นบังคับ

$$1. r = \frac{ep}{1 + e \cos(x)}$$

$$2. r = \frac{ep}{1 - e \cos(x)}$$

$$3. r = \frac{ep}{1 + e \sin(x)}$$

$$4. r = \frac{ep}{1 - e \sin(x)}$$

8. ให้นิสิตศึกษาและสำรวจลักษณะของภาคตัดกรวยในระบบพิกัดเชิงขั้วจากกิจกรรมภาคปฏิบัติบนคอมพิวเตอร์ และตอบคำถามต่อไปนี้

8.1 สมการของภาคตัดกรวยต่อไปนี้มีเส้นบังคับอยู่ในลักษณะเช่นไร

$$(1) r = \frac{ep}{1 + e \cos(x)} \quad \text{เส้นบังคับตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว อยู่ห่างจากขั้วไปทาง}$$

ด้านขวา p หน่วย

$$(2) r = \frac{ep}{1 - e \cos(x)} \quad \text{เส้นบังคับตั้งฉากกับแกนเชิงขั้ว อยู่ห่างจากขั้วไปทาง}$$

ด้านซ้าย p หน่วย

$$(3) r = \frac{ep}{1 + e \sin(x)} \quad \text{เส้นบังคับตั้งฉากกับแกนแนวฉาก อยู่ห่างจากขั้วไปทาง}$$

ด้านบน p หน่วย

$$(4) r = \frac{ep}{1 - e \sin(x)} \quad \text{เส้นบังคับตั้งฉากกับแกนแนวฉาก อยู่ห่างจากขั้วไปทาง}$$

ด้านล่าง p หน่วย

8.2 ค่า e สามารถบอกให้เราทราบว่าภาคตัดกรวยนั้นเป็นพาราโบลา หรือวงรี หรือไฮเพอร์โบลา ให้นิสิตตอบคำถามว่าค่า e เป็นเท่าใดจึงให้กราฟพาราโบลา วงรี หรือไฮเพอร์โบลา

(1) ค่า $0 < e < 1$ ส่งผลให้ภาคตัดกรวยเป็นวงรี

(2) ค่า $e = 1$ ส่งผลให้ภาคตัดกรวยเป็นพาราโบลา

(3) ค่า $e > 1$ ส่งผลให้ภาคตัดกรวยเป็นไฮเพอร์โบลา

อนุพันธ์ในพิกัดเชิงขั้ว

กำหนดฟังก์ชัน f ในพิกัดเชิงขั้ว

$$r = f(\theta)$$

เราจะนิยามอนุพันธ์ $f'(\theta)$ ดังนี้

$$f'(\theta) = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{f(\theta + \Delta\theta) - f(\theta)}{\Delta\theta}$$

บทนิยามของอนุพันธ์ในพิกัดเชิงขั้วเหมือนกันกับบทนิยามของอนุพันธ์ในพิกัดฉาก แต่ความหมายในเชิงเรขาคณิตไม่เหมือนกัน กล่าวคือ ในพิกัดเชิงขั้วที่ได้ ไม่ได้หมายถึง ความชันของเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง แต่เราสามารถหาความชันของเส้นสัมผัสของเส้นโค้งได้ โดยที่การหาความชันของเส้นสัมผัสของเส้นโค้งนั้นต้องใช้ความรู้เรื่องอนุพันธ์ในพิกัดเชิงขั้วนี้ด้วย ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1 ถ้ากำหนดเส้นโค้ง $r = f(\theta)$ และ $P(r_1, \theta_1)$ เป็นจุดบนเส้นโค้ง และ m เป็นความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P แล้ว

$$m = \frac{f(\theta_1)\cos\theta_1 + f'(\theta_1)\sin\theta_1}{f'(\theta_1)\cos\theta_1 - f(\theta_1)\sin\theta_1}$$

เมื่อ $f'(\theta_1)\cos\theta_1 - f(\theta_1)\sin\theta_1 \neq 0$

จากทฤษฎีบท 4.1 เราจะได้สูตรการหาความชันของเส้นสัมผัสอีกสูตรหนึ่งซึ่งเป็นที่นิยมใช้มากกว่า เพราะเป็นสูตรที่สั้นและจำง่ายกว่า

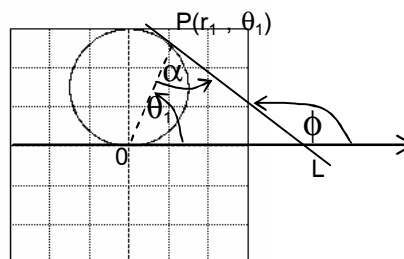
ทฤษฎีบท 4.2 กำหนดเส้นโค้ง $r = f(\theta)$ และ $P(r_1, \theta_1)$ เป็นจุดบนเส้นโค้ง

ให้ L เป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้ง f ที่จุด P และมีมุมเอียงเท่ากับ ϕ

ถ้า α เป็นมุมบวกที่วัดจากด้าน OP ไปยัง เส้นตรง L แล้ว

$$\tan \alpha = \frac{f(\theta_1)}{f'(\theta_1)}$$

เมื่อ $f'(\theta) \neq 0$ และ $r_1 \neq 0$



9. จงหาความชันของเส้นสัมผัส L ซึ่งสัมผัสเส้นโค้ง $r = 6 \sin \theta$ ที่จุด $P(0, 0)$ โดยใช้สูตรการหาความชันของเส้นสัมผัสในทฤษฎีบท 4.1

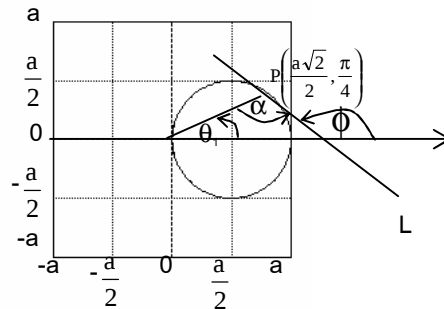
วิธีทำ จะได้ $\theta_1 = 0$ และ $f(\theta) = 6 \sin \theta$ ดังนั้น $f'(\theta) = 6 \cos \theta$

สูตรการหาความชันของเส้นสัมผัสในทฤษฎีบท 4.1 คือ

$$m = \frac{f(\theta_1)\cos\theta_1 + f'(\theta_1)\sin\theta_1}{f'(\theta_1)\cos\theta_1 - f(\theta_1)\sin\theta_1}$$

$$\text{ดังนั้น } m = \frac{6\sin(0)\cos(0) + 6\cos(0)\sin(0)}{6\cos(0)\cos(0) - 6\sin(0)\sin(0)} = \frac{0+0}{6-0} = 0 \quad \#$$

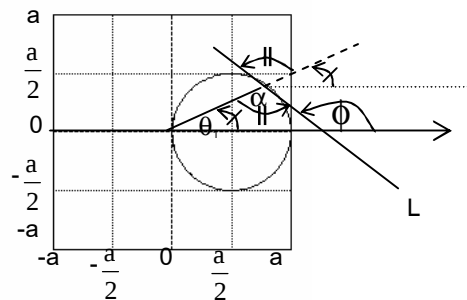
10. จงหาความชันของเส้นสัมผัส L ซึ่งสัมผัสเส้นโค้ง $r = a \cos \theta$, $a > 0$ ที่จุด $P\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ โดยใช้สูตรการหาความชันของเส้นสัมผัสในทฤษฎีบท 4.2



วิธีทำกำหนดให้ L เป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด P และ ϕ เป็นมุมเอียงของ L ดังนั้น ความชันของ L เท่ากับ $\tan \phi$

$$\begin{aligned} \text{จากสูตรในทฤษฎีบท 4.2 จะได้ } \tan \alpha &= \frac{f(\theta_1)}{f'(\theta_1)} = \frac{a \cos \frac{\pi}{4}}{-a \sin \frac{\pi}{4}} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = -1 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \alpha = \frac{3\pi}{4}$$



$$\text{จากรูป จะได้ว่า } \phi = \alpha + \theta_1 = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi$$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่กำหนดให้ที่จุด P เท่ากับ $\tan \pi = 0$ #

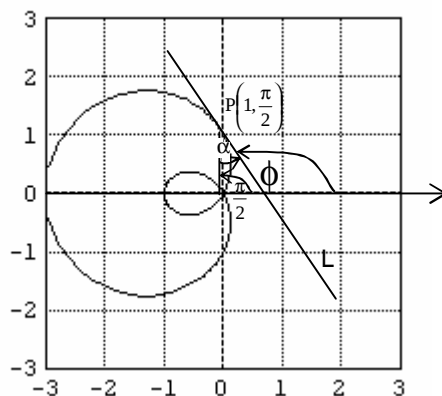
11. จงหาความชันของเส้นสัมผัส L ซึ่งสัมผัสเส้นโค้ง $r = 1 - 2\cos \theta$ ที่จุด $P\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ โดยใช้สูตรการหาความชันของเส้นสัมผัสในทฤษฎีบท 4.1 และสูตรการหาความชันของเส้นสัมผัสในทฤษฎีบท 4.2

$$\text{วิธีที่ 1 จะได้ } \theta_1 = \frac{\pi}{2} \text{ และ } f(\theta) = 1 - 2\cos \theta \quad \text{ดังนั้น } f'(\theta) = 2 \sin \theta$$

หาความชันของเส้นสัมผัสโดยใช้สูตรในทฤษฎีบท 4.1

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } m &= \frac{\left(1 - 2 \cos \frac{\pi}{2}\right) \cos \frac{\pi}{2} + 2 \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}}{2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \left(1 - 2 \cos \frac{\pi}{2}\right) \sin \frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{(1 - 2(0))(0) + 2(1)}{2(1)(0) - (1 - 0)(1)} = -2 \quad \#
 \end{aligned}$$

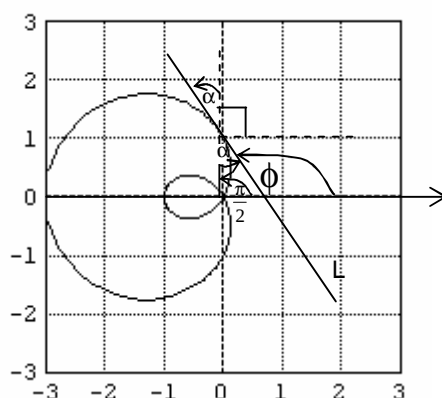
วิธีที่ 2 การหาความชันจากสูตรการหาความชันของเส้นสัมผัสในทฤษฎีบท 4.2



กำหนดให้ L เป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่กำหนดที่จุด P และ ϕ เป็นมุมเอียงของ L
 ดังนั้น ความชันของ L เท่ากับ $\tan \phi$

$$\text{จากสูตรในทฤษฎีบท 4.2 จะได้ } \tan \alpha = \frac{f(\theta_1)}{f'(\theta_1)} = \frac{1 - 2 \cos \frac{\pi}{2}}{2 \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{จะได้ } \alpha = \arctan \frac{1}{2} \quad (\approx 0.4636476090008)$$



$$\text{จากรูป จะได้ว่า } \phi = \alpha + \theta_1 = \arctan \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่กำหนดให้ที่จุด } P \text{ เท่ากับ } \tan\left(\arctan \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -2 \quad \#$$

เฉลยใบกิจกรรมที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์ 1 (MATHEMATICS 1) : MA111

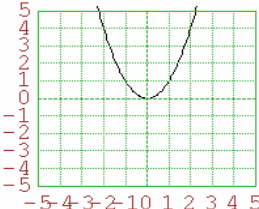
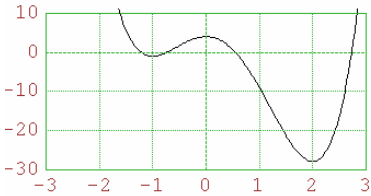
เนื้อหา การประยุกต์ของอนุพันธ์ : การเขียนกราฟของฟังก์ชัน

ชื่อ.....เลขที่.....

บทนิยาม 5.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันบนโดเมน D ที่มี A เป็นสับเซตของ D และ A ไม่เป็นเซตว่าง

1. f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน A ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ สำหรับทุกๆ ค่า $x_1 < x_2$ บน A
2. f เป็นฟังก์ชันลดบน A ถ้า $f(x_1) > f(x_2)$ สำหรับทุกๆ ค่า $x_1 < x_2$ บน A

1. พิจารณากราฟของฟังก์ชัน และตอบคำถามต่อไปนี้

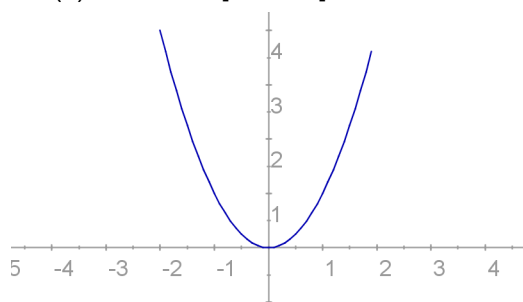
1.1 $f(x) = x^2$		เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[0, \infty)$ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty, 0]$
1.2 $f(x) = x^3$		เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, \infty)$ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง -
1.3 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 4$		เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-1, 0)$ และ $(2, \infty)$ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty, -1)$ และ $(0, 2)$

บทนิยาม 5.2 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันบนโดเมน D และ $x_0 \in D$

1. f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ที่ $x = x_0$ เมื่อ $f(x_0) \geq f(x)$ สำหรับทุกค่า x บน D
และเรียก $(x_0, f(x_0))$ ว่า จุดสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บน D
เรียก $f(x_0)$ ว่า ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บน D
2. f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ ที่ $x = x_0$ เมื่อ $f(x_0) \leq f(x)$ สำหรับทุกค่า x บน D
และเรียก $(x_0, f(x_0))$ ว่า จุดต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บน D
เรียก $f(x_0)$ ว่า ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บน D

2. ให้นักเรียนทำกิจกรรมบนคอมพิวเตอร์ ซึ่งต้องการให้หาจุดสูงสุดสัมบูรณ์และจุดต่ำสุดสัมบูรณ์ของกราฟที่ปรากฏ และเมื่อได้คำตอบที่ถูกต้องแล้วให้ตรวจคำตอบในกิจกรรมบนคอมพิวเตอร์(คลิกlink ที่ Solution)โดยการสำรวจค่าของฟังก์ชัน ณ จุดต่างๆ และตอบคำถามลงในใบกิจกรรม

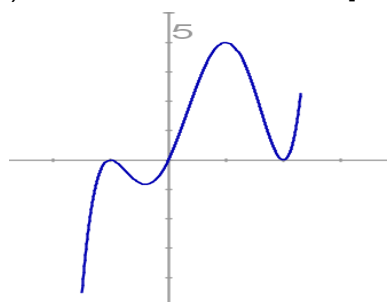
2.1 $f(x) = x^2$ บน $[-2, 1.9]$



จุดสูงสุดสัมบูรณ์ ($x = -2$)

จุดต่ำสุดสัมบูรณ์ ($x = 0$)

2.4 $f(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 4x$ บน $[-1.5, 2.3]$



จุดสูงสุดสัมบูรณ์ ($x = -1.5$)

จุดต่ำสุดสัมบูรณ์ ($x = 1$)

บทนิยาม 5.3 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันบนโดเมน D และ $x_0 \in D$

2. f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ที่ $x = x_0$ เมื่อมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ที่ทำให้ $f(x_0) \geq f(x)$

สำหรับทุกค่า $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$

และเรียก $(x_0, f(x_0))$ ว่า จุดสูงสุดสัมพัทธ์ของ f บน D

เรียก $f(x_0)$ ว่า ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f บน D

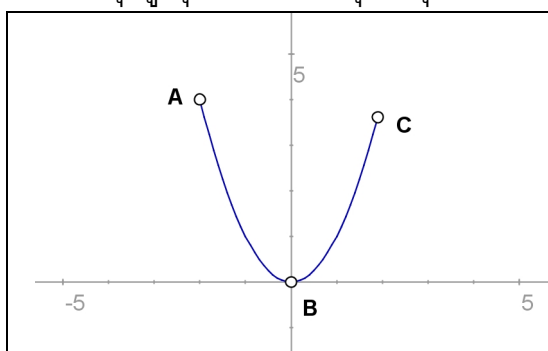
2. f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ที่ $x = x_0$ เมื่อมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ที่ทำให้ $f(x_0) \leq f(x)$

สำหรับทุกค่า $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$

และเรียก $(x_0, f(x_0))$ ว่า จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f บน D

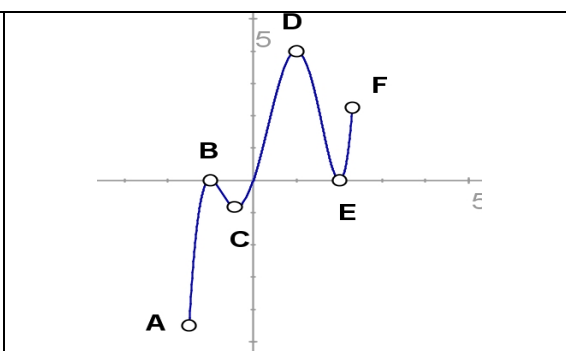
เรียก $f(x_0)$ ว่า ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f บน D

3. จงหาจุดสูงสุดสัมพัทธ์และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของกราฟต่อไปนี้



จุดสูงสุดสัมพัทธ์ (จุด A , จุด C)

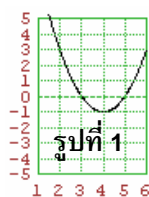
จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ (จุด B)



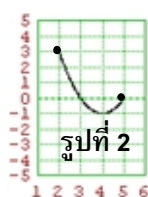
จุดสูงสุดสัมพัทธ์ (จุด B , จุด D , จุด F)

จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ (จุด A , จุด C , จุด E)

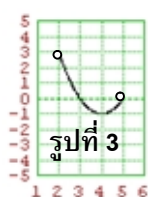
4. พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 8x + 15$



โดเมน = $\mathbb{R}$



โดเมน = $[2, 5]$



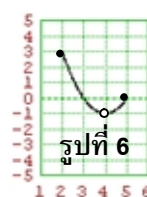
โดเมน = $(2, 5)$



โดเมน = $[2, 5]$



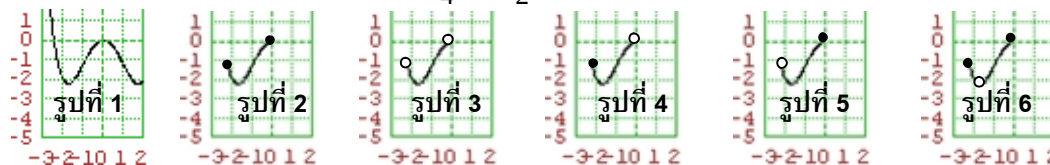
โดเมน = $(2, 5]$



โดเมน = $[2, 5] - \{4\}$

คำถาม กราฟรูปใดที่มีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ (รูป 2 และรูป 4)

5. พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$ ต่อไปนี้



โดเมน = R โดเมน = [-2.2, 0] โดเมน = (-2.2, 0) โดเมน = [-2.2, 0) โดเมน = (-2.2, 0] โดเมน = [-2.2, 0] \setminus \{\sqrt{3}\}

คำถาม กราฟรูปใดที่มีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ (รูป 2 และรูป 5)



ชวนคิด: โดเมนลักษณะใดที่จะทำให้ฟังก์ชันมีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

6. ความจริงแล้ว มีทฤษฎีบทที่ยืนยันการมีค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์ในโดเมน ที่ชื่อว่า **ทฤษฎีบทค่าสุดขีด** มีใจความดังนี้

ทฤษฎีบท 5.1 ทฤษฎีบทค่าสุดขีด : ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่นิยามบนช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว f จะมีค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

ทฤษฎีบท 5.2 ทฤษฎีบทของแฟร์มา : Fermat's Theorem

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงปิด $[a, b]$

ถ้า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = x_0$ เมื่อ $x_0 \in (a, b)$

แล้ว $f'(x_0) = 0$ หรือ f หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ x_0

7.1 จงเขียนบทกลับของทฤษฎีบทของแฟร์มา

(ถ้า $f'(x_0) = 0$ หรือ f หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ x_0

แล้ว f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = x_0$)

7.2 บทกลับของทฤษฎีบทของแฟร์มาเป็นจริงหรือไม่ จงอภิปราย

(บทกลับไม่จริง คือ แม้ว่า $f'(x_0) = 0$ แต่ $f(x_0)$ อาจไม่ให้เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (หรือต่ำสุดสัมพัทธ์) เช่น $f(x) = x^3$)

บทนิยาม 5.4 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงเปิด (a, b)

จุดวิกฤต ของ f คือจุด $x = x_0 \in (a, b)$ ซึ่ง (1) $f'(x_0) = 0$ หรือ

(2) $f'(x_0)$ หาค่าไม่ได้

8. จงหาจุดวิกฤตทั้งหมดของฟังก์ชัน $f(x) = 3x^{\frac{5}{3}} - 15x^{\frac{2}{3}}$

$$\text{จะได้ } f'(x) = 5x^{\frac{2}{3}} - 10x^{\frac{-1}{3}} = 5\left(x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{-1}{3}}\right)$$

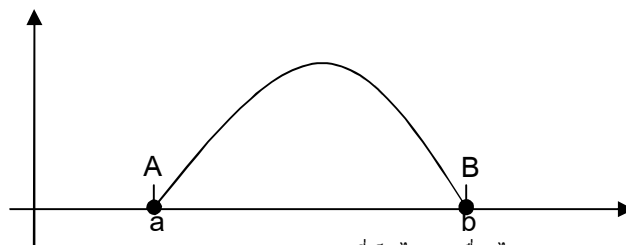
$$\text{เมื่อ } f'(x) = 0 \quad \text{จะได้ } 5\left(x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{-1}{3}}\right) = 0 \quad \text{ดังนั้น } x = 2$$

จาก $f'(0)$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้นจุดวิกฤต ได้แก่ $x = 0, 2$

ทฤษฎีบท 5.3 : ทฤษฎีบทของรอล (Rolle's Theorem)

9. จงยกตัวอย่างการเขียนกราฟของฟังก์ชัน f ซึ่งมีเงื่อนไข 3 ข้อต่อไปนี้

- (1) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$
- (2) f เป็นฟังก์ชันที่อนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a, b)
- (3) $f(a) = f(b) = 0$



หมายเหตุ กราฟที่เป็นไปตามเงื่อนไข (1) – (3) สามารถวาดได้มากกว่า 1 แบบ

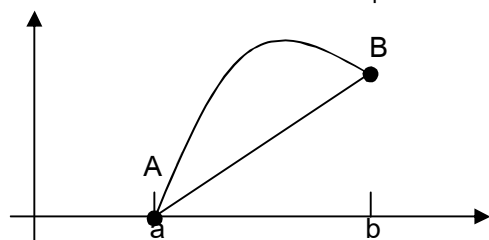
จะเป็นไปได้หรือไม่ที่จะเขียนกราฟของ f โดยที่ไม่มีจุด $c \in (a, b)$ ที่ทำให้ $f'(c) = 0$

(เป็นไปไม่ได้ จะต้องมียุค $c \in (a, b)$ อย่างน้อย 1 จุด ที่ทำให้ $f'(c) = 0$)

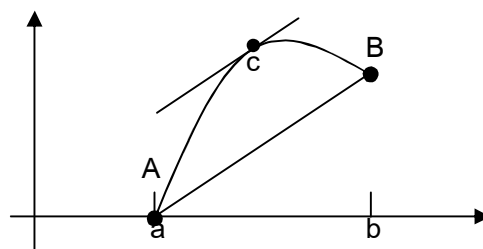
ทฤษฎีบท 5.4 : ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย (Mean – Value Theorem)

10. จงยกตัวอย่างการเขียนกราฟของฟังก์ชัน f ซึ่ง

- (1) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$
- (2) f เป็นฟังก์ชันที่อนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a, b)



กราฟที่เป็นไปตามเงื่อนไข (1) และ (2) สามารถวาดได้มากกว่า 1 แบบ



- (3) จงเขียนส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุด $A(a, f(a))$ และ $B(b, f(b))$

$$(4) \text{ ความชันของ } \overline{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- (5) นิสิตคิดว่ามี $c \in (a, b)$ ที่ทำให้ $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ หรือไม่ (มีแสดงในรูปบนขวา)

11. ให้ $f(x) = x^2 - 3x - 2$ จงหาค่า x_0 ระหว่าง $a = 0$ และ $b = 2$ ที่ทำให้ $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

เพราะว่า $f(x) = x^2 - 3x - 2$ ดังนั้น $f'(x) = 2x - 3$

เนื่องจาก $f(a) = -2$ และ $f(b) = -4$

$$\text{ดังนั้น } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{-4 - (-2)}{2 - 0} = \frac{-2}{2} = -1$$

นั่นคือ $f'(x_0) = -1$

แก้สมการหาค่า x_0 $2x_0 - 3 = -1$

$$x_0 = 1$$



: “ถ้าเรามีฟังก์ชันอยู่ 1 ฟังก์ชัน เช่น $x^2 - 3x - 2$ เราจะหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ เราจะทำอย่างไรดี? ช่วยกันคิดหน่อย”



: “วาดกราฟสิครับ”



: “ได้ การวาดกราฟเป็นวิธีหนึ่ง แต่มีวิธีอื่นอีกไหม”



: “หาอนุพันธ์ แล้วหาจุดวิกฤตครับ”



: “พอเราได้จุดวิกฤต แล้วเราจะหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ได้อย่างไร อืม จากทฤษฎีบทแฟร์มา เรารู้ว่าจุดสูงสุดสัมพัทธ์และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ จะต้องเป็นจุดวิกฤต แต่บทกลับไม่จริง นั่นคือ ทุกจุดวิกฤตก็อาจไม่ใช่จุดสูงสุดสัมพัทธ์หรือจุดต่ำสุดสัมพัทธ์”



: “แสดงว่าถ้าหาอนุพันธ์เพื่อหาจุดวิกฤตแล้ว ก็ต้องวาดกราฟอยู่ดี”



: “แต่เดี๋ยวก่อน! เรามีวิธีตรวจสอบจุดวิกฤตว่าจุดวิกฤตนั้นให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือไม่ ดังนี้”

วิธีทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

ให้ฟังก์ชัน f มีจุดวิกฤตที่ $x = x_0$ และต่อเนื่องที่ $x = x_0$ บนช่วง I

1. ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in (x_1, x_0) \subset I$

และ $f'(x) < 0$ สำหรับทุก $x \in (x_0, x_2) \subset I$

แล้ว f มีจุดสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = x_0$

2. ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก $x \in (x_1, x_0) \subset I$

และ $f'(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in (x_0, x_2) \subset I$

แล้ว f มีจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = x_0$

ทฤษฎีบท 5.5 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a, b)

ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงเปิด (a, b)

บทแทรก 5.6 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a, b)

ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วงเปิด (a, b)

ทฤษฎีบท 5.7 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วงเปิด (a, b)

ถ้า $f'(x) \neq 0$ สำหรับทุก $x \in (a, b)$

แล้ว $f'(x) > 0$ หรือ $f'(x) < 0$ สำหรับทุก $x \in (a, b)$

12. จงหาจุดวิกฤตทั้งหมดของ $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ และใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่งตรวจสอบว่ามีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุดวิกฤตแต่ละจุด หรือไม่

(1) หาจุดวิกฤต $f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$

เมื่อ $f'(x) = 0$ จะได้ $(3x - 2)(x - 2) = 0$ ดังนั้น $x = 2, \frac{2}{3}$ เป็นจุดวิกฤต

(2) หาช่วงที่ทำให้เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือเป็นฟังก์ชันลด

พิจารณาจากจุดวิกฤต เราจะได้ช่วง $(-\infty, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, 2)$ และ $(2, \infty)$

ซึ่ง $f'(x) \neq 0$ ในแต่ละช่วงเหล่านั้น โดยการเลือกจุดใดจุดหนึ่งในช่วงมาทดสอบหาค่า $f'(x)$ ตามทฤษฎีบท 5.7 จะตรวจสอบได้ว่า

บน $(-\infty, \frac{2}{3})$ f มีค่าเพิ่มขึ้น เพราะว่า $f'(x) > 0$ ($f'(0) = 4 > 0$)

บน $(\frac{2}{3}, 2)$ f มีค่าลดลง เพราะว่า $f'(x) < 0$ ($f'(1) = -1 < 0$)

บน $(2, \infty)$ f มีค่าเพิ่มขึ้น เพราะว่า $f'(x) > 0$ ($f'(3) = 7 > 0$)

สรุปว่า จุด $x = \frac{2}{3}$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ และจุด $x = 2$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

ดังนั้น ช่วงที่ทำให้เป็นฟังก์ชันเพิ่มคือ $(-\infty, \frac{2}{3}) \cup (2, \infty)$

ช่วงที่ทำให้เป็นฟังก์ชันลดคือ $(\frac{2}{3}, 2)$

13. จงหาจุดวิกฤตทั้งหมดของ $f(x) = 3x^{\frac{5}{3}} - 15x^{\frac{2}{3}}$ และใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่งตรวจสอบว่ามีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุดวิกฤตแต่ละจุด หรือไม่

(1) หาจุดวิกฤต $f'(x) = 5x^{\frac{2}{3}} - 10x^{-\frac{1}{3}} = 5\left(x^{\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}}\right)$

เมื่อ $f'(x) = 0$ จะได้ $5\left(x^{\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{3}}\right) = 0$ ดังนั้น $x = 2$

จาก $f'(0)$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้นจุดวิกฤต ได้แก่ $x = 0, 2$

(2) หาช่วงที่กราฟเพิ่มหรือลด

พิจารณาจากจุดวิกฤต เราจะได้ช่วง $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ และ $(2, \infty)$

ซึ่ง $f'(x) \neq 0$ ในแต่ละช่วงเหล่านั้น โดยการเลือกจุดใดจุดหนึ่งในช่วงมาทดสอบหาค่า $f'(x)$ ตามทฤษฎีบท 5.7 จะตรวจสอบได้ว่า

บน $(-\infty, 0)$ f มีค่าเพิ่มขึ้น เพราะว่า $f'(x) > 0$ ($f'(-1) = 15 > 0$)

บน $(0, 2)$ f มีค่าลดลง เพราะว่า $f'(x) < 0$ ($f'(1) = -5 < 0$)

บน $(2, \infty)$ f มีค่าเพิ่มขึ้น เพราะว่า $f'(x) > 0$ ($f'(3) = 3.467 > 0$)

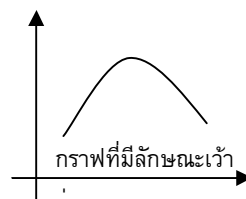
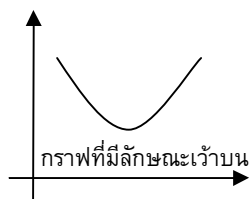
สรุปได้ว่า จุด $x = 0$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ และจุด $x = 2$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

ดังนั้น ช่วงที่ทำให้เป็นฟังก์ชันเพิ่มคือ $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ ช่วงที่ทำให้เป็นฟังก์ชันลด $(0, 2)$

บทนิยาม 5.5 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I

1. ถ้ากราฟของ f อยู่เหนือเส้นสัมผัสของกราฟ ณ จุดใดๆ บน I
แล้ว กราฟของ f เป็นกราฟเว้าบน บนช่วง I
2. ถ้ากราฟของ f อยู่ใต้เส้นสัมผัสของกราฟ ณ จุดใดๆ บน I
แล้ว กราฟของ f เป็นกราฟเว้าล่าง บนช่วง I

14. จากบทนิยาม 5.5 จงยกตัวอย่างกราฟที่มีลักษณะเว้าบน และที่มีลักษณะเว้าล่าง



15. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง I

- (1) กราฟของ f บนช่วง I มีลักษณะเว้าบน เมื่อ $f'(x)$ เป็นเส้นโรบนช่วง I
 $f'(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง I
- (2) กราฟของ f บนช่วง I มีลักษณะเว้าบน เมื่อ $f''(x)$ เป็นเส้นโรบนช่วง I
 $f''(x) > 0$ บนช่วง I
- (3) กราฟของ f บนช่วง I มีลักษณะเว้าล่าง เมื่อ $f'(x)$ เป็นเส้นโรบนช่วง I
 $f'(x)$ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง I
- (4) กราฟของ f บนช่วง I มีลักษณะเว้าล่าง เมื่อ $f''(x)$ เป็นเส้นโรบนช่วง I
 $f''(x) < 0$ บนช่วง I

วิธีทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับสอง

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I และมีอนุพันธ์อันดับสองซึ่งต่อเนื่องบนช่วง I
และ $x = x_0$ เป็นจุดวิกฤตของฟังก์ชัน f บนช่วง I

1. ถ้า $f''(x_0) > 0$ แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด $x = x_0$
2. ถ้า $f''(x_0) < 0$ แล้ว f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด $x = x_0$
3. ถ้า $f''(x_0) = 0$ ทดสอบด้วยวิธีนี้ไม่ได้

16. จงหาจุดวิกฤตทั้งหมดของ $f(x) = x^3 + x^2 - x - 2$ และใช้อนุพันธ์อันดับสองตรวจสอบว่า มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ ที่จุดวิกฤตแต่ละจุด หรือไม่

วิธีทำ หาจุดวิกฤต $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

$$\text{เมื่อ } f'(x) = 0 \quad \text{จะได้ } (3x - 1)(x + 1) = 0$$

$$\text{ดังนั้น } x = \frac{1}{3}, -1$$

$$f''(x) = 6x + 2$$

ตรวจสอบจุดวิกฤตด้วยอนุพันธ์อันดับสอง

$$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 6\left(\frac{1}{3}\right) + 2 = 4 > 0$$

$$f''(-1) = 6(-1) + 2 = -4 < 0$$

จะได้ จุด $x = -1$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ และจุด $x = \frac{1}{3}$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

บทนิยาม 5.6 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I และ $x_0 \in I$

เรียกจุด $x = x_0$ ว่า **จุดเปลี่ยนความเว้า** ถ้ากราฟของ f เปลี่ยนจากเว้าบนเป็นเว้าล่าง หรือกลับกัน ณ จุด $x = x_0$ นี้ โดยที่

- (1) $f''(x_0) = 0$ หรือ
- (2) $f''(x_0)$ หาค่าไม่ได้

17. จงหาจุดเปลี่ยนความเว้าของฟังก์ชันในข้อ 16

วิธีทำ จาก $f(x) = x^3 + x^2 - x - 2$ ดังนั้น $f''(x) = 6x + 2$

เมื่อ $f''(x) = 0$ จะได้ $(6x + 2) = 0$ ดังนั้น $x = \boxed{-\frac{1}{3}}$

เมื่อ $x > \boxed{-\frac{1}{3}}$ แล้ว $f''(x) > 0$ (เติมเครื่องหมาย $<, >, =$)

และเมื่อ $x < \boxed{-\frac{1}{3}}$ แล้ว $f''(x) < 0$ (เติมเครื่องหมาย $<, >, =$)

ทำให้สรุปได้ว่า กราฟของ f เว้าบน บนช่วง $(-\frac{1}{3}, \infty)$

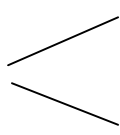
กราฟของ f เว้าล่าง บนช่วง $(-\infty, -\frac{1}{3})$

เราเรียกจุด $x = -\frac{1}{3}$ ว่า **จุดเปลี่ยนความเว้า**

ขั้นตอนการเขียนกราฟ

เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ มาให้

1. หาจุดวิกฤต

2. ตรวจสอบจุดวิกฤต  ด้วยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง หรือ
ด้วยอนุพันธ์อันดับสอง

3. หาจุดเปลี่ยนความเว้า และพิจารณาช่วงที่ทำให้กราฟเว้าบนและ/หรือเว้าล่าง

4. หาค่า $f(x)$ ของจุดวิกฤตและจุดเปลี่ยนความเว้า เพื่อลงจุดวาดกราฟ

18. จงเขียนกราฟของ $f(x) = x^3 - 27x + 4$

วิธีทำ $f'(x) = 3x^2 - 27$

เมื่อ $f'(x) = 0$ จะได้ $3x^2 - 27 = 0$ ดังนั้น $x = \pm 3$ เป็นจุดวิกฤต

จาก $f''(x) = 6x$

ตรวจสอบด้วยอนุพันธ์อันดับสอง พบว่า $f''(3) = 18 > 0$ และ $f''(-3) = -18 < 0$

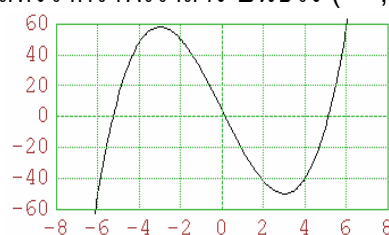
สรุปว่า จุด $x = -3$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ และจุด $x = 3$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

เมื่อ $f''(x) = 0$ จะได้ $6x = 0$ ดังนั้น $x = 0$ เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

$f''(x) > 0$ จะได้ $6x > 0$ หรือ $x > 0$ แสดงว่ากราฟเว้าบน บนช่วง $(0, \infty)$

$f''(x) < 0$ จะได้ $6x < 0$ หรือ $x < 0$ แสดงว่ากราฟเว้าลง บนช่วง $(-\infty, 0)$

x	-3	0	3
f(x)	58	4	-50



19. จงเขียนกราฟของ $f(x) = 5x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$

วิธีทำ $f'(x) = \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{10}{3x^{\frac{1}{3}}} - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}x^{-\frac{1}{3}}(2 - x)$

เมื่อ $f'(x) = 0$ จะได้ $\frac{5}{3}x^{-\frac{1}{3}}(2 - x) = 0$ ดังนั้น $x = 2$ เป็นจุดวิกฤต

พบว่า $f'(x)$ ไม่นิยามที่จุด $x = 0$

นั่นคือ $f'(0)$ หาค่าไม่ได้ แสดงว่า $x = 0$ เป็นจุดวิกฤต

$$f''(x) = \frac{-10}{9}x^{-\frac{4}{3}} - \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{-10}{9x^{\frac{4}{3}}} - \frac{10}{9x^{\frac{1}{3}}} = \frac{-10}{9}x^{-\frac{4}{3}}(1 + x)$$

ตรวจสอบด้วยอนุพันธ์อันดับสอง พบว่า $f''(0)$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น จึงทดสอบด้วยวิธีนี้ไม่ได้ ต้องตรวจสอบด้วยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง พิจารณาจากจุดวิกฤต เราจะได้ช่วง $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ และ $(2, \infty)$ ซึ่ง $f'(x) \neq 0$ ในแต่ละช่วงเหล่านั้น โดยการเลือกจุดใดจุดหนึ่งในช่วงมาทดสอบหาค่า $f'(x)$ ตามทฤษฎีบท 5.7 จะตรวจสอบได้ว่า

บน $(-\infty, 0)$ f มีค่าลดลงเพราะว่า $f'(x) < 0$ ($f'(-1) = -5 < 0$)

บน $(0, 2)$ f มีค่าเพิ่มขึ้นเพราะว่า $f'(x) > 0$ ($f'(1) = \frac{5}{3} > 0$)

บน $(2, \infty)$ f มีค่าลดลงเพราะว่า $f'(x) < 0$ ($f'(8) = -5 < 0$)

สรุปว่า จุด $x = 2$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ และจุด $x = 0$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

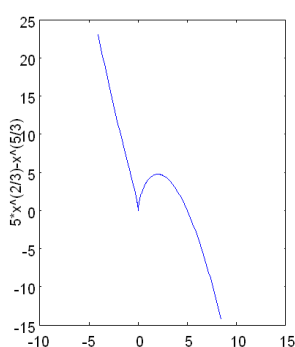
พบว่า $f''(x)$ ไม่นิยามที่จุด $x = 0$

นั่นคือ $f''(0)$ หาค่าไม่ได้ แสดงว่า $x = 0$ อาจเป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

และ $f''(x) = 0$ จะได้ $-\frac{10}{9}x^{\frac{4}{3}}(1+x) = 0$ ดังนั้น $x = -1$ อาจเป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

ตรวจสอบ บน $(-\infty, -1)$ f เว้าบนเพราะว่า $f''(x) > 0$ ($f''(-2) = 0.44 > 0$)
 บน $(-1, 0)$ f เว้าล่างเพราะว่า $f''(x) < 0$ ($f''(-0.5) = -1.39 < 0$)
 บน $(0, \infty)$ f เว้าล่างเพราะว่า $f''(x) < 0$ ($f''(1) = -2.22 < 0$)

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	3
f(x)	$7(-2)^{\frac{2}{3}}$	6	$\frac{11}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$	0	4	$3\sqrt[3]{4}$	$2\sqrt[3]{9}$



จากกราฟของ f ไม่เปลี่ยนจากเว้าล่างเป็นเว้าบนที่ $x = 0$
 ดังนั้น $x = 0$ ไม่เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

สรุปได้ว่า

จุด $x = 2$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ ,
 จุด $x = 0$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ ,
 และจุด $x = -1$ เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

20. จงเขียนกราฟของ $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$

วิธีทำ $f'(x) = x^3 - 3x$

เมื่อ $f'(x) = 0$ จะได้ $x^3 - 3x = 0$ ดังนั้น $x = -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0$ เป็นจุดวิกฤต

$f''(x) = 3x^2 - 3$

ตรวจสอบด้วยอนุพันธ์อันดับสอง พบว่า $f''(-\sqrt{3}) = 6 > 0$

$f''(0) = -3 < 0$

$f''(\sqrt{3}) = 6 > 0$

สรุปว่า จุด $x = 0$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ และจุด $x = -\sqrt{3}, \sqrt{3}$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

เมื่อ $f''(x) = 0$ จะได้ $3x^2 - 3 = 0$

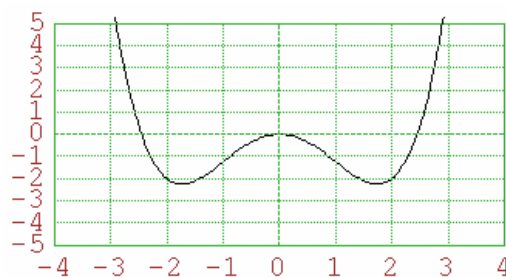
ดังนั้น $x = -1, 1$ เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

บน $(-\infty, -1)$ f เว้าบนเพราะว่า $f''(x) > 0$ ($f''(-2) = 9 > 0$)

บน $(-1, 1)$ f เว้าล่างเพราะว่า $f''(x) < 0$ ($f''(0) = -3 < 0$)

บน $(1, \infty)$ f เว้าบนเพราะว่า $f''(x) > 0$ ($f''(2) = 9 > 0$)

x	-2	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	2
f(x)	-2	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{5}{4}$	0	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{9}{4}$	-2



21. จงเขียนกราฟของ $f(x) = x\sqrt{x+3}$

วิธีทำ $f'(x) = \sqrt{x+3} + \frac{x}{2\sqrt{x+3}}$

เมื่อ $f'(x) = 0$ จะได้ $\sqrt{x+3} + \frac{x}{2\sqrt{x+3}} = 0$ ดังนั้น $x = -2$ เป็นจุดวิกฤต

พิจารณาพบว่า $f'(x)$ ไม่นิยามที่ $x = -3$ ดังนั้น $x = -3$ เป็นจุดวิกฤตด้วย

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}} - \frac{x}{4(\sqrt{x+3})^3}$$

พบว่า ไข้อนุพันธ์อันดับสองตรวจสอบ $x = -3$ ไม่ได้ เนื่องจาก $f''(-3)$ ไม่นิยาม

จึงต้องตรวจสอบด้วยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง พิจารณาจากจุดวิกฤต เราจะได้ช่วง $[-3, -2)$ และ $(-2, \infty)$ ซึ่ง $f'(x) \neq 0$ ในแต่ละช่วงเหล่านั้น โดยการเลือกจุดใดจุดหนึ่งในช่วงมาทดสอบหาค่า $f'(x)$ ตามทฤษฎีบท 5.7 จะตรวจสอบได้ว่า

บน $[-3, -2)$ f มีค่าลดลงเพราะว่า $f'(x) < 0$ ($f'(-2.5) = -1.06 < 0$)

บน $(-2, \infty)$ f มีค่าเพิ่มขึ้นเพราะว่า $f'(x) > 0$ ($f'(1) = \frac{9}{4} > 0$)

ดังนั้น ตรวจสอบด้วยอนุพันธ์อันดับหนึ่งจะได้ จุด $x = -2$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

พิจารณาจุด $x = -3$

พบว่า มีช่วงย่อย $[-3, -2)$ ซึ่งทำให้ $f(-3) \geq f(x)$ สำหรับทุกค่า $x \in [-3, -3 + \delta)$

นั่นคือ มี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $f(-3) \geq f(x)$ สำหรับทุกค่า $x \in [-3, -3 + \delta)$

นั่นคือ มี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $f(-3) \geq f(x)$ สำหรับทุกค่า $x \in (-3 - \delta, -3 + \delta) \cap [-3, \infty)$

นั่นคือ มี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $f(-3) \geq f(x)$ สำหรับทุกค่า $x \in (-3 - \delta, -3 + \delta) \cap D_f$

ดังนั้น จากการพิจารณาจุด $x = -3$ และบทนิยามจุดสูงสุดสัมพัทธ์ จะได้ว่า จุด $x = -3$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์

เมื่อ $f''(x) = 0$ จะได้ $\frac{1}{\sqrt{x+3}} - \frac{x}{4(\sqrt{x+3})^3} = 0$ ดังนั้น $x = -4$

และ $f''(x)$ ไม่นิยามที่ $x = -3$ ดังนั้น $x = -4, -3$ อาจเป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

จาก $D_f = [-3, \infty)$

ดังนั้น ไม่พิจารณา $x = -4$

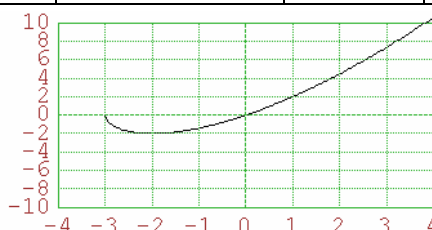
พิจารณาบทนิยามจุดเปลี่ยนความเว้า พบว่า จุด $x = x_0$ จะเป็นจุดเปลี่ยนความเว้า เมื่อกราฟของ f เปลี่ยนจากเว้าบนเป็นเว้าล่าง หรือกลับกัน ณ จุด $x = x_0$

จาก $D_f = [-3, \infty)$ ดังนั้นกราฟของ f ไม่มีทางเปลี่ยนจากเว้าบนเป็นเว้าล่าง หรือกลับกัน ณ จุด $x = -3$ ได้

พิจารณาค่าของ $f''(x)$ พบว่า $f''(x) > 0$ สำหรับทุกค่า $x \in (-3, \infty)$

ดังนั้น กราฟของ f เว้าบน บน $(-3, \infty)$

x	-5	-4	-3	-2	0	1
f(x)	จำนวนเชิงซ้อน	จำนวนเชิงซ้อน	0	-2	0	2



22. จงเขียนกราฟของ $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2$

วิธีทำ $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x$

เมื่อ $f'(x) = 0$ จะได้ $4x^3 - 9x^2 + 6x = 0$

ดังนั้น $x = 0, -\frac{\sqrt{-15}-9}{8}, \frac{\sqrt{-15}+9}{8}$ เป็นจุดวิกฤต

พบว่า $-\frac{\sqrt{-15}-9}{8}, \frac{\sqrt{-15}+9}{8}$ ไม่เป็นจำนวนจริง

จึงพิจารณาจุดวิกฤต คือ จุด $x = 0$ เพียงจุดเดียว

$$f''(x) = 12x^2 - 18x + 6$$

ตรวจสอบด้วยอนุพันธ์อันดับสอง พบว่า $f''(0) = 6 > 0$

สรุปว่า จุด $x = 0$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

เมื่อ $f''(x) = 0$ จะได้ $12x^2 - 18x + 6 = 0$

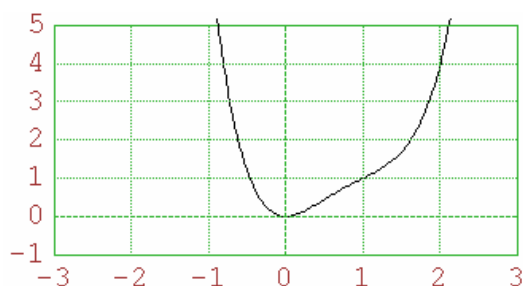
ดังนั้น $x = \frac{1}{2}, 1$ เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

บน $(-\infty, \frac{1}{2})$ f เว้าบนเพราะว่า $f''(x) > 0$ ($f''(0) = 6 > 0$)

บน $(\frac{1}{2}, 1)$ f เว้าล่างเพราะว่า $f''(x) < 0$ ($f''(\frac{3}{4}) = -\frac{3}{4} < 0$)

บน $(1, \infty)$ f เว้าบนเพราะว่า $f''(x) > 0$ ($f''(2) = 18 > 0$)

x	-2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	2
f(x)	52	0	$\frac{7}{16}$	$\frac{189}{256}$	1	4



23. จงเขียนกราฟของ $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$

วิธีทำ $f'(x) = \frac{4}{x^2 + 4} - \frac{8x^2}{(x^2 + 4)^2}$

เมื่อ $f'(x) = 0$ จะได้ $\frac{4}{x^2 + 4} - \frac{8x^2}{(x^2 + 4)^2} = 0$ ดังนั้น $x = -2, 2$ เป็นจุดวิกฤต

$$f''(x) = \frac{32x^3}{(x^2 + 4)^3} - \frac{24x}{(x^2 + 4)^2}$$

ตรวจสอบด้วยอนุพันธ์อันดับสอง พบว่า $f''(-2) = \frac{1}{4} > 0$

$$f''(2) = -\frac{1}{4} < 0$$

สรุปว่า จุด $x = 2$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ และจุด $x = -2$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

เมื่อ $f''(x) = 0$ จะได้ $\frac{32x^3}{(x^2 + 4)^3} - \frac{24x}{(x^2 + 4)^2} = 0$

ดังนั้น $x = -2\sqrt{3}, 0, 2\sqrt{3}$ เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

บน $(-\infty, -2\sqrt{3})$ f เว้าลง เพราะว่า $f''(x) < 0$ ($f''(-4) = -0.016 < 0$)

บน $(-2\sqrt{3}, 0)$ f เว้าบน เพราะว่า $f''(x) > 0$ ($f''(-1) = 0.704 > 0$)

บน $(0, 2\sqrt{3})$ f เว้าลง เพราะว่า $f''(x) < 0$ ($f''(1) = -0.704 < 0$)

บน $(2\sqrt{3}, \infty)$ f เว้าบน เพราะว่า $f''(x) > 0$ ($f''(5) = 0.0213 > 0$)

x	-4	$-2\sqrt{3}$	-2	0	2	$2\sqrt{3}$	4
f(x)	-0.8	-0.866	-1	0	1	0.866	0.8



24. จงเขียนกราฟของ $f(x) = (x+2)(x-2)^3$

วิธีทำ $f'(x) = 3(x+2)(x-2)^2 + (x-2)^3$

เมื่อ $f'(x) = 0$ จะได้ $3(x+2)(x-2)^2 + (x-2)^3 = 0$ ดังนั้น $x = -1, 2$ เป็นจุดวิกฤต

$$f''(x) = 6(x+2)(x-2) + 6(x-2)^2$$

ตรวจสอบด้วยอนุพันธ์อันดับสอง พบว่า $f''(2) = 0$ ดังนั้น จึงทดสอบด้วยวิธีนี้ไม่ได้

ต้องตรวจสอบด้วยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง พิจารณาจากจุดวิกฤต เราจะได้ช่วง $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$ และ $(2, \infty)$ ซึ่ง $f'(x) \neq 0$ ในแต่ละช่วงเหล่านั้น โดยการเลือกจุดใดจุดหนึ่งในช่วงมาทดสอบหาค่า $f'(x)$ ตามทฤษฎีบท 5.7 จะตรวจสอบได้ว่า

บน $(-\infty, -1)$ f มีค่าลดลงเพราะว่า $f'(x) < 0$ ($f'(-2) = -64 < 0$)

บน $(-1, 2)$ f มีค่าเพิ่มขึ้นเพราะว่า $f'(x) > 0$ ($f'(1) = 8 > 0$)

บน $(2, \infty)$ f มีค่าเพิ่มขึ้นเพราะว่า $f'(x) > 0$ ($f'(3) = 16 > 0$)

สรุปว่า จุด $x = -1$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

เมื่อ $f''(x) = 0$ จะได้ $6(x+2)(x-2) + 6(x-2)^2 = 0$

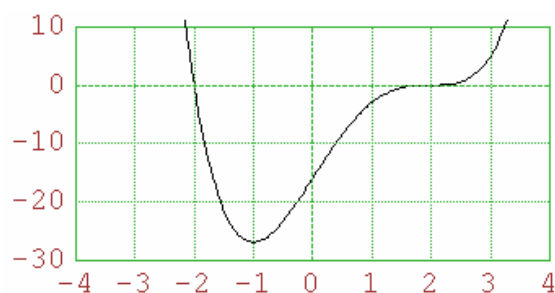
ดังนั้น $x = 0, 2$ เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

บน $(-\infty, 0)$ f เว้าบนเพราะว่า $f''(x) > 0$ ($f''(-2) = 96 > 0$)

บน $(0, 2)$ f เว้าล่างเพราะว่า $f''(x) < 0$ ($f''(1) = -12 < 0$)

บน $(2, \infty)$ f เว้าบนเพราะว่า $f''(x) > 0$ ($f''(3) = 36 > 0$)

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	3
f(x)	0	-27	$-\frac{375}{16}$	-16	-3	0	5



เฉลยใบกิจกรรมที่ 6

วิชา คณิตศาสตร์ 1 (MATHEMATICS 1) : MA111

เนื้อหา การประยุกต์ของอนุพันธ์ : โจทย์ปัญหาการหาค่าสูงสุดและต่ำสุด

ชื่อ.....เลขที่.....

โจทย์ปัญหาการหาค่าสูงสุดและต่ำสุด

ในชีวิตประจำวัน มีปัญหามากมายที่ต้องการคำตอบเป็นค่าที่เหมาะสม (optimization problem) ซึ่งเกี่ยวข้องกับการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน เช่น ถ้าต้องการใช้ลวดหนามล้อมรั้วเพื่อสร้างเป็นสวนมะม่วงรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า จะต้องสร้างรั้วขนาดเท่าใด จึงจะได้พื้นที่มากที่สุด หรือจะผลิตสินค้ากี่ชิ้น เพื่อให้กำไรมากที่สุด โดยที่สินค้ามีต้นทุนและราคาขายที่กำหนดไว้ เป็นต้น

ขั้นตอนวิธีการเปลี่ยนรูปปัญหาในชีวิตจริงให้อยู่ในรูปฟังก์ชัน

1. เขียนรูปประกอบ หรือพิจารณารายละเอียดของสิ่งที่โจทย์กำหนดให้
2. กำหนดตัวแปรแทนปริมาณต่าง ๆ ที่มีในโจทย์
3. สร้างฟังก์ชันที่ต้องการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด ซึ่งปัญหาส่วนใหญ่จะเป็นการหาพื้นที่ การหาปริมาตร หรือบางปัญหาอาจกำหนดฟังก์ชันมาให้แล้ว
4. ถ้าฟังก์ชันมีหลายตัวแปร ต้องทำให้เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียว โดยใช้ความสัมพันธ์ของตัวแปรที่เกี่ยวข้อง
5. กำหนดขอบเขตของตัวแปรตามเงื่อนไขของโจทย์
6. หาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน เพื่อได้เป็นคำตอบของปัญหา

1. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งมีความยาวรอบรูป 120 เซนติเมตร ถ้าต้องการให้ได้พื้นที่สูงสุด จะต้องมีความกว้างเท่าใด

วิธีทำ ให้ x แทนความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ให้ y แทนความยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ให้ A แทนพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ดังนั้น $A = xy$ ซึ่งมีตัวแปรสามตัว เราจะต้องกำจัดให้เหลือตัวแปรเพียงสองตัว

แปร เพื่อให้ A เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียว

จากโจทย์กำหนดให้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งมีความยาวรอบรูป 120 เซนติเมตร

จะได้ $2x + 2y = 120$

ดังนั้น $y = 60 - x$

จะได้ $A(x) = x(60 - x) = 60x - x^2$

$$A'(x) = 60 - 2x$$

เมื่อ $A'(x) = 0$ จะได้ $0 = 60 - 2x$

ดังนั้น $x = 30$ เป็นจุดวิกฤต

ขอบเขตของ x คือ จากโจทย์ จะได้ว่า $0 < x < 60$ จึงจะหาพื้นที่ได้

จาก $A''(x) = -2 < 0$ ทำให้ $x = 30$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์

และ $A(30) = 60(30) - (30)^2 = 900$ ตารางเซนติเมตร

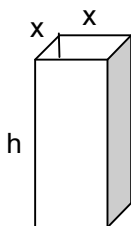
พิจารณาที่จุดปลายของช่วง $0 < x < 60$

เราจะได้ $A(0) = 0$ และ $A(60) = 0$

เราจึงสรุปได้ว่า A มีค่าสูงสุดที่ $x = 30$

นั่นคือ ถ้าต้องการให้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีพื้นที่สูงสุดจะต้องมีความกว้าง 30 เซนติเมตร #

2. กล่องใบหนึ่งมีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และไม่มีฝาปิด มีพื้นที่ภายในกล่องทั้งหมด 100 ตารางนิ้ว จงหาขนาดที่จะทำให้กล่องมีปริมาตรมากที่สุด



วิธีทำ ให้ x แทนความยาวของฐานกล่อง

ให้ h แทนความสูงของกล่อง

ให้ V แทนปริมาตรของกล่อง

ดังนั้น $V = x^2 h$ ซึ่งมีตัวแปรสามตัว เราจะต้องกำจัดให้เหลือตัวแปรเพียงสอง

ตัวแปร เพื่อให้ V เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียว

จากโจทย์กำหนดว่า กล่องไม่มีฝาปิด และมีพื้นที่ภายในกล่องทั้งหมด 100

ตารางนิ้ว

จะได้ $x^2 + 4xh = 100$

ดังนั้น $h = \frac{25}{x} - \frac{x}{4}$

จะได้ $V(x) = x^2 \left(\frac{25}{x} - \frac{x}{4} \right) = 25x - \frac{x^3}{4}$

$$V'(x) = 25 - \frac{3x^2}{4}$$

เมื่อ $V'(x) = 0$ จะได้ $0 = 25 - \frac{3x^2}{4}$

ดังนั้น $x = \pm \frac{10}{\sqrt{3}}$ เป็นจุดวิกฤต

ขอบเขตของ x คือ จาก $h > 0$ ดังนั้น x ต้องมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 10 จึงจะหาปริมาตรได้

ดังนั้น จึงใช้ค่า $x = \frac{10}{\sqrt{3}}$ เพียงค่าเดียว เพราะค่าอื่นอยู่นอกช่วง

$$\text{จาก } V''(x) = -\frac{3}{2}x \text{ ดังนั้น } V''\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{3}{2}\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right) = -5\sqrt{3} < 0$$

ทำให้ $x = \frac{10}{\sqrt{3}}$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์

$$\text{และ } V\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right) = 25\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^3}{4} = \frac{500}{3\sqrt{3}} \text{ ลูกบาศก์นิ้ว}$$

พิจารณาที่จุดปลายของช่วง $0 < x < 10$

เราจะได้ $V(0) = 0$ และ $V(10) = 0$

เราจึงสรุปได้ว่า V มีค่าสูงสุดที่ $x = \frac{10}{\sqrt{3}}$

นั่นคือ ถ้าต้องการให้กล่องมีปริมาตรมากที่สุด กล่องจะต้องมีความยาวของ

$$\text{ฐานเท่ากับ } \frac{10}{\sqrt{3}} \text{ นิ้ว และมีความสูงเท่ากับ } \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2\sqrt{3}} \text{ นิ้ว} \quad \#$$

3. ผลบวกของจำนวนสามจำนวนเป็น 30 ผลบวกของจำนวนที่หนึ่งกับสองเท่าของจำนวนที่สองและสามเท่าของจำนวนที่สามเป็น 60 จงหาจำนวนทั้งสามนี้ที่ทำให้ผลคูณมีค่ามากที่สุด

วิธีทำ ให้ x แทนจำนวนที่หนึ่ง

ให้ y แทนจำนวนที่สอง

ให้ z แทนจำนวนที่สาม

ให้ f แทนผลคูณของจำนวนทั้งสาม

ดังนั้น $f = x \times y \times z$ ซึ่งมีตัวแปรสี่ตัว เราจะต้องกำจัดให้เหลือตัวแปรเพียงสอง

ตัวแปร เพื่อให้ f เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียว

จากโจทย์กำหนดให้ผลบวกของจำนวนสามจำนวนเป็น 30 และผลบวกของจำนวนที่หนึ่งกับสองเท่าของจำนวนที่สองและสามเท่าของจำนวนที่สามเป็น 60

$$\text{จะได้ } x + y + z = 30 \text{ และ } x + 2y + 3z = 60$$

$$\text{ดังนั้น } z = 30 - x - y \text{ และ } y = 30 - 2x$$

$$\text{จะได้ } f(x) = x(30 - 2x)(30 - x - 30 + 2x) = 30x^2 - 2x^3$$

$$f'(x) = 60x - 6x^2$$

$$\text{เมื่อ } f'(x) = 0 \quad \text{จะได้ } 0 = 60x - 6x^2$$

ดังนั้น $x = 0, 10$ เป็นจุดวิกฤต

เนื่องจากกรณีนี้ไม่มีขอบเขตของ x จึงสามารถใช้ค่า x ได้ทั้งสองค่า

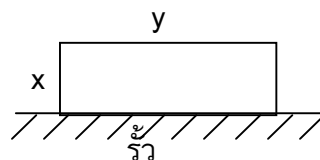
$$\text{จาก } f''(x) = 60 - 12x$$

$$\text{จะได้ } f''(0) = 60 > 0$$

$$\text{และ } f''(10) = -60 < 0 \quad \text{ทำให้ } x = 10 \text{ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์}$$

นั่นคือ จำนวนทั้งสามได้แก่ 10, 10 และ 10 ซึ่งทำให้ผลคูณมีค่ามากที่สุด (ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1000) #

4. ชายคนหนึ่งมีลวดหนามอยู่ 400 เมตร ต้องการล้อมรั้วรอบที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ไร่ปลูกมะม่วง โดยใช้รั้วบ้านเป็นรั้วหนึ่งของสวนนี้ ถ้าเขาปลูกมะม่วง 4 ต้น ต่อที่ดินทุกๆ 5 ตารางเมตร เขาจะปลูกมะม่วงได้มากที่สุดกี่ต้น โดยล้อมรั้วด้วยลวดหนามที่มีอยู่



วิธีทำ ให้ x แทนความกว้างของสวน

ให้ y แทนความยาวของสวน

ให้ A แทนพื้นที่ของสวน

ดังนั้น $A = xy$ ซึ่งมีตัวแปรสามตัว เราจะต้องกำจัดให้เหลือตัวแปรเพียงสอง

ตัวแปร เพื่อให้ A เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียว

จากโจทย์กำหนดให้ใช้ลวดหนาม 400 เมตร ล้อมรั้วรอบที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยใช้รั้วบ้านเป็นรั้วหนึ่งของสวนนี้ และให้ได้พื้นที่มากที่สุด เพื่อส่งผลให้สามารถปลูกมะม่วงได้มากที่สุด

$$\text{จะได้ } 2x + y = 400$$

$$\text{ดังนั้น } y = 400 - 2x$$

$$\text{จะได้ } A(x) = x(400 - 2x) = 400x - 2x^2$$

$$A'(x) = 400 - 4x$$

$$\text{เมื่อ } A'(x) = 0 \quad \text{จะได้ } 0 = 400 - 4x$$

$$\text{ดังนั้น } x = 100 \text{ เป็นจุดวิกฤต}$$

ขอบเขตของ x คือ จาก $y > 0$ ดังนั้น x ต้องมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 200 จึงจะหาพื้นที่ได้

$$\text{จาก } A''(x) = -4 < 0 \text{ ทำให้ } x = 100 \text{ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์}$$

$$\text{และ } A(100) = 100(400 - 200) = 20000 \text{ ตารางเมตร}$$

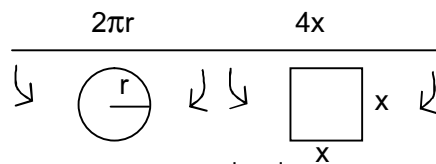
พิจารณาที่จุดปลายของช่วง $0 < x < 200$

เราจะได้ $A(0) = 0$ และ $A(200) = 0$

เราจึงสรุปได้ว่า A มีค่าสูงสุดที่ $x = 100$

นั่นคือ พื้นที่ 20000 ตารางเมตรซึ่งเป็นพื้นที่ที่มากที่สุดที่จะสามารถล้อมรั้วด้วยลวดหนามที่มีอยู่นั้น สามารถปลูกมะม่วงได้มากที่สุดจำนวน $4\left(\frac{20000}{5}\right) = 16,000$ ต้น #

5. ลวดเส้นหนึ่งยาว 10 นิ้ว ต้องการตัดแบ่งออกเป็นสองส่วน โดยส่วนหนึ่งขดเป็นวงกลมรัศมี r นิ้ว อีกส่วนหนึ่งทำเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ x นิ้ว จงหาว่าจะตัดแบ่งลวดอย่างไร จึงจะทำให้ผลบวกของพื้นที่วงกลมและพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสมีพื้นที่มากที่สุด



วิธีทำ ให้ x แทนความยาวด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ให้ r แทนรัศมีของวงกลม

ให้ A แทนผลรวมของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและวงกลม

ดังนั้น $A = \pi r^2 + x^2$ ซึ่งมีตัวแปรสามตัว เราจะต้องกำจัดให้เหลือตัวแปรเพียงสองตัวแปร เพื่อให้ A เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียว

จากโจทย์กำหนดให้ตัดแบ่งลวดซึ่งยาว 10 นิ้ว ออกเป็นสองส่วน โดยส่วนหนึ่งขดเป็นวงกลมรัศมี r นิ้ว อีกส่วนหนึ่งทำเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ x นิ้ว

$$\text{จะได้ } 4x + 2\pi r = 10$$

$$\text{ดังนั้น } x = \frac{10 - 2\pi r}{4}$$

$$\text{จะได้ } A(r) = \pi r^2 + \left(\frac{10 - 2\pi r}{4}\right)^2$$

$$A'(r) = 2\pi r - \frac{5}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi^2 r$$

$$\text{เมื่อ } A'(r) = 0 \quad \text{จะได้ } 0 = 2\pi r - \frac{5}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi^2 r$$

$$\text{ดังนั้น } r = \frac{5}{4 + \pi} \text{ เป็นจุดวิกฤต}$$

ขอบเขตของ r คือ จาก $x > 0$ จะได้ว่า $0 < r < \frac{5}{\pi}$ จึงจะหาพื้นที่ได้

จาก $A''(r) = 2\pi + \frac{1}{2}\pi^2 > 0$ ทำให้ $r = \frac{5}{4 + \pi}$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ ส่งผลให้ได้พื้นที่น้อยที่สุด

พิจารณาที่จุดปลายของช่วง $0 < r < \frac{5}{\pi}$

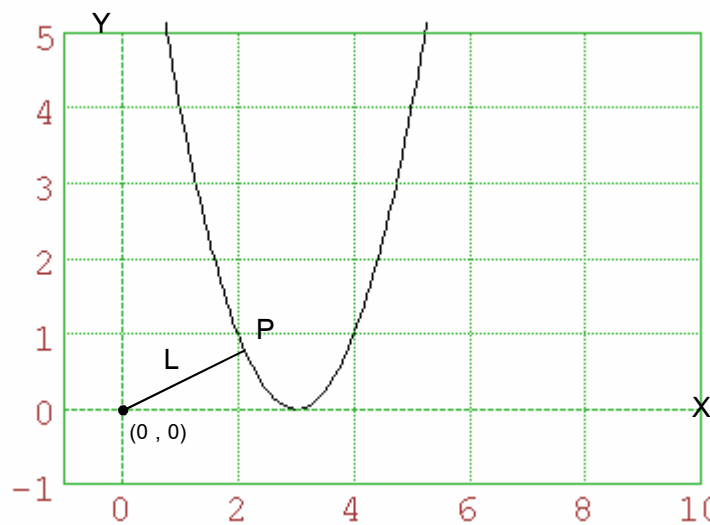
$$\text{เราจะได้ } A(0) = \frac{25}{4} \text{ และ } A\left(\frac{5}{\pi}\right) = \frac{25}{\pi}$$

$$\text{เราจึงสรุปได้ว่า } A \text{ มีค่าสูงสุดที่ } r = \frac{5}{\pi}$$

นั่นคือ ถ้าตัดลวดออกเป็นสองส่วน จะไม่ได้พื้นที่มากที่สุด แต่ถ้าไม่ตัดลวดเลย

แล้วเอามาตัดเป็นรูปวงกลม จะได้พื้นที่มากที่สุดโดยที่วงกลมมีรัศมี $\frac{5}{\pi}$ นิ้ว #

6. จงหาจุดบนกราฟพาราโบลา $y = (x - 3)^2$ ที่ใกล้จุด $(0, 0)$ มากที่สุด



วิธีทำ ให้ $P(x, (x - 3)^2)$ เป็นจุดบนกราฟพาราโบลา $y = (x - 3)^2$ ที่ใกล้จุด $(0, 0)$ ที่สุด

ให้ L แทนระยะทางระหว่างจุด $(0, 0)$ และจุด P

$$\text{จะได้ } L(x) = \sqrt{(x-0)^2 + ((x-3)^2 - 0)^2}$$

$$L'(x) = \frac{2x + 4(x-3)^3}{2\sqrt{x^2 + (x-3)^4}}$$

$$\text{เมื่อ } L'(x) = 0 \quad \text{จะได้ } 0 = \frac{2x + 4(x-3)^3}{2\sqrt{x^2 + (x-3)^4}}$$

$$\text{ดังนั้น } x = 2, \frac{7 \pm \sqrt{-5}}{2} \text{ เป็นจุดวิกฤต}$$

เนื่องจากกรณีนี้ไม่มีขอบเขตของ x แต่ $\frac{7 \pm \sqrt{-5}}{2}$ ไม่เป็นจำนวนจริง จึงใช้ค่า

$x = 2$ ได้เพียงค่าเดียว

$$\text{จาก } L''(x) = \frac{12(x-3)^2 + 2}{2\sqrt{x^2 + (x-3)^4}} - \frac{(2x + 4(x-3)^3)^2}{4(x^2 + (x-3)^4)^{\frac{3}{2}}}$$

$$L''(2) = 3.13 > 0 \text{ ทำให้ } x = 2 \text{ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์}$$

ดังนั้น ที่ $x = 2$ ทำให้ $L(2)$ เป็นระยะทางที่น้อยที่สุด
นั่นคือ จุด $(2, 1)$ อยู่ใกล้จุดกำเนิดมากที่สุด

#

7. ในการผลิตอุปกรณ์ชนิดหนึ่ง มีต้นทุนในการผลิต x ชิ้นต่อวัน เป็น $\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25$ บาท และ

ขายได้ในราคาชิ้นละ $50 - \frac{1}{2}x$ บาท

หมายเหตุ ปัญหาข้อนี้มีสมมติฐานว่าใน 1 วัน ผลิตได้เท่าไรก็ขายได้เท่านั้น

7.1 ควรผลิตวันละกี่ชิ้นจึงจะได้กำไรสูงสุด

วิธีทำ ให้ f แทนกำไรต่อวัน

$$\text{ดังนั้น } f(x) = x\left(50 - \frac{1}{2}x\right) - \left(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25\right) = -\frac{3}{4}x^2 + 15x - 25$$

โดยที่มีสมมติฐานว่าใน 1 วัน ผลิตได้เท่าไรก็ขายได้เท่านั้น

$$\text{จะได้ } f'(x) = -\frac{3}{2}x + 15$$

$$\text{เมื่อ } f'(x) = 0 \quad \text{จะได้ } 0 = -\frac{3}{2}x + 15$$

$$\text{ดังนั้น } x = 10 \text{ เป็นจุดวิกฤต}$$

ขอบเขตของ x คือ $x \in (0, \infty)$

$$\text{จาก } f''(x) = -\frac{3}{2} < 0 \text{ ทำให้ } x = 10 \text{ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์}$$

$$\text{และ } f(10) = 50 \text{ บาท}$$

$$\text{พิจารณาที่ปลายของช่วง} \quad \text{จะได้ } \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{3}{4}x^2 + 15x - 25 \right) = -25$$

$$\text{และ } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{4}x^2 + 15x - 25 \right) = -\infty$$

เราจึงสรุปได้ว่า f มีค่าสูงสุดที่ $x = 10$

นั่นคือ ควรผลิตวันละ 10 ชิ้นจึงจะได้กำไรสูงสุด

#

7.2 จงแสดงว่า จำนวนที่ผลิตในข้อ 7.1 ทำให้ต้นทุนในการผลิต 1 ชิ้น มีค่าต่ำสุด

วิธีทำ ให้ f แทนต้นทุนในการผลิต 1 ชิ้น

$$\text{ดังนั้น } f(x) = \frac{\left(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25\right)}{x} = \frac{1}{4}x + 35 + \frac{25}{x}$$

$$\text{จะได้ } f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{25}{x^2}$$

$$\text{เมื่อ } f'(x) = 0 \quad \text{จะได้ } 0 = \frac{1}{4} - \frac{25}{x^2}$$

ดังนั้น $x = \pm 10$ เป็นจุดวิกฤต

ขอบเขตของ x คือ $x \in (0, \infty)$ ดังนั้น จึงใช้ค่า $x = 10$ เพียงค่าเดียว เพราะค่าอื่นอยู่นอกช่วง

จาก $f''(x) = \frac{50}{x^3}$ จะได้ $f''(10) = 0.05 > 0$ ทำให้ $x = 10$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

$$\text{และ } f(10) = \frac{1}{4}(10) + 35 + \frac{25}{10} = 40 \text{ บาท}$$

พิจารณาที่ปลายของช่วง จะได้ $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4}x + 35 + \frac{25}{x} \right) = \infty$

$$\text{และ } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}x + 35 + \frac{25}{x} \right) = \infty$$

เราจึงสรุปได้ว่า f มีค่าต่ำสุดที่ $x = 10$

#

เฉลยใบกิจกรรมที่ 7

วิชา คณิตศาสตร์ 1 (MATHEMATICS 1) : MA111

เนื้อหา การประยุกต์ของอนุพันธ์ : ความเร็วและความเร่ง อัตราสัมพัทธ์ และค่าเชิงอนุพันธ์ และการประยุกต์

ชื่อ.....เลขที่.....

ความเร็วและความเร่ง



ทำไมสมการของความเร็วจึงหาได้จากการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ ???

วัตถุหนึ่งเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง วัดระยะทางที่วัตถุนั้นเคลื่อนที่ไปในช่วงเวลาหนึ่ง

ถ้าให้ s = ระยะทางมีหน่วยตามที่กำหนด และ t = เวลา มีหน่วยตามที่กำหนด

เราจะได้ $s = f(t)$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ

จากความรู้ทางคณิตศาสตร์เบื้องต้น เราทราบว่า

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \text{ความเร็วเฉลี่ยของวัตถุซึ่งเคลื่อนที่ไปในเวลา } t_2 - t_1 \text{ หน่วย}$$

ถ้าเราเปลี่ยนสัญลักษณ์ โดยให้ $t_2 - t_1 = \Delta t$ จะได้

$$\frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t} = \text{ความเร็วเฉลี่ยของวัตถุซึ่งเคลื่อนที่ไปในเวลา } \Delta t \text{ หน่วย}$$

โดยไม่เสียสภาพทั่วไปเราจะให้ t_1 แทนเวลา t ใด ๆ และ

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t} = \text{ความเร็วชั่วขณะของวัตถุเมื่อเวลา } t \text{ ใด ๆ}$$

ซึ่งเราทราบว่านี่คืออนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน f

นี่คือเหตุผลว่าทำไมสมการของความเร็วจึงหาได้จากการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่นั่นเอง (และเช่นเดียวกันกับเมื่อหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับความเร็ว จะได้สมการของความเร่ง)

การกำหนดค่าบวกหรือค่าลบของระยะทาง s , ความเร็ว v , ความเร่ง a

ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับความเร็ว ความเร่ง เราต้องกำหนดทิศทางของการเคลื่อนที่ให้อัตถุ โดยกำหนดค่าบวกหรือค่าลบให้แก่ตัวแปร s, v, a ดังนี้

ข้อตกลง $A \longrightarrow B$

ถ้ากำหนดให้อัตถุเคลื่อนที่จากจุด A ไปยังจุด B จะได้

1. ระยะทาง s จากจุด A ไป B มีค่าเป็นบวก และถ้ากลับกัน s จะมีค่าเป็นลบ
2. ความเร็ว v ของวัตถุที่เคลื่อนที่จาก A ไป B มีค่าเป็นบวก ถ้ากลับกัน v จะมีค่าเป็นลบ
3. ความเร่ง a มีค่าแปรตามการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว v ดังนี้
 - 3.1 ถ้าความเร็วเพิ่มขึ้น a มีค่าเป็นบวก
 - 3.2 ถ้าความเร็วลดลง a มีค่าเป็นลบ

1. วัตถุหนึ่งเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง โดยมีสมการของการเคลื่อนที่เป็น $s(t) = t^3 - 4t^2 - 3t$
 จงหาความเร็วและความเร่งเมื่อเวลา t ใด ๆ และจงหาความเร่งขณะที่ความเร็วมีค่าเป็นศูนย์

วิธีทำ เพราะว่า $s(t) = t^3 - 4t^2 - 3t$

ดังนั้น $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 8t - 3$ = ความเร็วของวัตถุเมื่อเวลา t

และ $a(t) = v'(t) = 6t - 8$ = ความเร่งของวัตถุเมื่อเวลา t

เมื่อเวลาเท่ากับ t ความเร็วมีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ $3t^2 - 8t - 3 = 0$

จะได้ $(3t + 1)(t - 3) = 0$

จะได้ $t = 3, -\frac{1}{3}$

นั่นคือ ความเร็วมีค่าเป็นศูนย์ เมื่อ $t = 3$

ดังนั้น ความเร่งขณะที่ความเร็วมีค่าเป็นศูนย์ เท่ากับ $a(3) = 6(3) - 8 = 10$ #

2. กลิ้งลูกหินบนพื้นราบในแนวตรง ด้วยสมการของการเคลื่อนที่ $s(t) = 2t + t^2 - t^3$

เมื่อ s แทนระยะทางมีหน่วยเป็นเมตร และ t แทนเวลามีหน่วยเป็นวินาที

2.1 เมื่อเวลา $t = 1$ ลูกหินจะอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเท่าใด

วิธีทำ เมื่อเวลา $t = 1$ ลูกหินจะเคลื่อนที่ไปได้ระยะทางเท่ากับ $s(1) = 2(1) + (1)^2 - (1)^3$
 $= 2$

นั่นคือ เมื่อเวลา $t = 1$ ลูกหินจะอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้น 2 เมตร #

2.2 เมื่อเวลา $t = 1$ ความเร็วชั่วขณะและความเร่งชั่วขณะเป็นเท่าใด

วิธีทำ เพราะว่า $s(t) = 2t + t^2 - t^3$

ดังนั้น $v(t) = s'(t) = 2 + 2t - 3t^2$ = ความเร็วของวัตถุเมื่อเวลา t

และ $a(t) = v'(t) = 2 - 6t$ = ความเร่งของวัตถุเมื่อเวลา t

เมื่อเวลา $t = 1$ ความเร็วชั่วขณะเท่ากับ $v(1) = 2 + 2(1) - 3(1)^2 = 1$ เมตร/วินาที

และ ความเร่งชั่วขณะเท่ากับ $a(1) = 2 - 6(1) = -4$ เมตร/วินาที² #

2.3 ลูกหินจะกลับมามีเดิมเมื่อเวลาผ่านไปกี่วินาที

วิธีทำ ลูกหินกลับมามีเดิม หมายความว่า $s(t) = 0$

จะได้ $2t + t^2 - t^3 = 0$

จะได้ $t(2 + t - t^2) = 0$

จะได้ $t(-t + 2)(t + 1) = 0$

จะได้ $t = -1, 0, 2$

นั่นคือ ลูกหินจะกลับมามีเดิมเมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที #

3. ยิงปืนขึ้นสู่เบื้องบนในแนวดิ่งจากยอดตึกสูง 34.3 เมตร โดยมีสมการของการเคลื่อนที่เป็น $s(t) = 29.4t - 4.9t^2$ เมื่อ s แทนระยะทางมีหน่วยเป็นเมตร และ t แทนเวลา มีหน่วยเป็นวินาที

3.1 อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ s ในช่วงเวลา $t = 2$ ถึง $t = 3$ เป็นเท่าไร

วิธีทำ เพราะว่า $s(t) = 29.4t - 4.9t^2$

$$\text{จะได้ } s(2) = 29.4(2) - 4.9(2)^2 = 39.2$$

$$\text{และ } s(3) = 29.4(3) - 4.9(3)^2 = 44.1$$

$\therefore$ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ s ในช่วงเวลา $t = 2$ ถึง $t = 3$ เท่ากับ

$$\frac{44.1 - 39.2}{3 - 2} = 4.9 \text{ เมตร/วินาที \#}$$

3.2 ลูกปืนจะขึ้นไปสูงสุดเป็นระยะทางกี่เมตรจากยอดตึก

วิธีทำ เพราะว่า $s(t) = 29.4t - 4.9t^2$

ดังนั้น $v(t) = s'(t) = 29.4 - 9.8t =$ ความเร็วของวัตถุเมื่อเวลา t

ปัญหาข้อนี้เกี่ยวกับสมบัติทางฟิสิกส์ นั่นคือเมื่อลูกปืนถูกยิงขึ้นไปใน

แนวดิ่ง ลูกปืนจะขึ้นไปเรื่อยๆ จนกระทั่งมีความเร็วเป็นศูนย์ ระยะทางจาก

จุดเริ่มต้นถึงจุดที่มีความเร็วเป็นศูนย์เป็นระยะทางสูงสุดที่ลูกปืนจะขึ้นไปได้

จากนั้นลูกปืนจะเริ่มตกลงมาสู่พื้นดินด้วยอำนาจแรงดึงดูดของโลก

เมื่อ $0 = 29.4 - 9.8t$ จะได้ $t = 3$ นั่นคือ ลูกปืนจะขึ้นไปสูงสุดเมื่อ $t = 3$

ดังนั้น ลูกปืนจะขึ้นไปสูงสุดเป็นระยะทาง $s(3) = 29.4(3) - 4.9(3)^2$

$$= 44.1 \text{ เมตรจากยอดตึก \#}$$

3.3 ขณะที่ลูกปืนตกถึงพื้นดิน ลูกปืนมีความเร็วเท่าใด

วิธีทำ เมื่อลูกปืนตกถึงพื้นดิน จะได้ว่า $s(t) = -34.3$

(เพราะลูกปืนมีทิศทางกลับกันกับทิศทางเริ่มต้นยิง)

$$\text{จาก } 29.4t - 4.9t^2 = -34.3$$

$$\text{จะได้ } 4.9t^2 - 29.4t - 34.3 = 0$$

$$49t^2 - 294t - 343 = 0$$

$$\text{จะได้ } (49t + 49)(t - 7) = 0$$

$$\text{จะได้ } t = -1, 7$$

นั่นคือ ลูกปืนตกถึงพื้นดินเมื่อ $t = 7$

ดังนั้น ลูกปืนมีความเร็วขณะที่ตกถึงพื้นดินเท่ากับ $v(7) = 29.4 - 9.8(7) = -39.2$ เมตรต่อวินาที #

อัตราสัมพันธ์

จากเรื่องความเร็วและความเร่งที่ผ่านมา นั้น เป็นการพิจารณาอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรตัวหนึ่ง (ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ t) เทียบกับ t กล่าวคือ ความเร็วเป็นการพิจารณาอัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะทาง (ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา) เทียบกับเวลา ในขณะที่ความเร่งเป็นการพิจารณาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็ว (ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา) เทียบกับเวลา ความเร็วและความเร่งจึงเป็นตัวอย่างหนึ่งของอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรเพียงตัวเดียว (Rate of Change)

ในขณะที่ อัตราสัมพันธ์ (Related Rate) เป็นการพิจารณาอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรหลายตัว (ซึ่งต่างก็เป็นฟังก์ชันของ t) เทียบกับ t ประโยชน์ของการศึกษาเรื่องอัตราสัมพันธ์ คือ หากเราทราบอัตราการเปลี่ยนแปลงเพียงบางตัวเทียบกับ t เราก็จะสามารถหาอัตราการเปลี่ยนแปลงตัวอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องได้ เรียกอัตราการเปลี่ยนแปลงที่เกี่ยวข้องนี้ว่า อัตราสัมพันธ์ ขั้นตอนในการแก้ปัญหาโจทย์ที่เกี่ยวกับอัตราสัมพันธ์

1. เขียนรูป หรือพิจารณารายละเอียดของสิ่งที่โจทย์กำหนดให้
2. สร้างสมการแสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรที่ทราบอัตราการเปลี่ยนแปลงกับตัวแปรที่ไม่ทราบค่า
3. หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการในข้อ 2 เทียบกับเวลา (t)
4. แทนค่าตัวแปร และอัตราการเปลี่ยนแปลงที่ทราบค่าลงในสมการจากข้อ 3
5. หาอัตราการเปลี่ยนแปลงที่ต้องการ โดยการแก้สมการจากข้อ 4

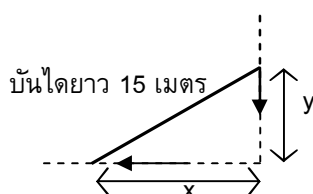
4. บ้านไดยาว 15 เมตร วางพิงกำแพงโดยที่ปลายล่างของบันไดถูกดึงให้เคลื่อนที่ห่างออกจากกำแพงด้วยอัตราเร็ว 1.5 เมตรต่อวินาที

4.1 ปลายบนของบันไดจะเคลื่อนที่ต่ำลงมาด้วยอัตราเร็วเท่าใดเมื่อปลายล่างอยู่ห่างจากกำแพง 10 เมตร

วิธีทำ ให้ x แทนระยะที่ปลายล่างของบันไดอยู่ห่างจากกำแพงเมื่อเวลา t ใด ๆ

ให้ y แทนระยะที่ปลายบนของบันไดอยู่ห่างจากกำแพงเมื่อเวลา t ใด ๆ

ความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y เมื่อเวลาใด ๆ คือ $x^2 + y^2 = 15^2$ ดังรูป



$$y^2 = 225 - x^2$$

หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างเทียบกับ t จะได้ $\frac{d}{dt}(y^2) = -\frac{d}{dt}(x^2)$

$$2y \frac{dy}{dt} = -2x \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dt}$$

โจทย์กำหนดให้ $\frac{dx}{dt} = 1.5$ เมตรต่อวินาที

เมื่อ $x = 10$ จะได้ $y = \sqrt{15^2 - 10^2} = \sqrt{125}$

ดังนั้น $\frac{dy}{dt} = \frac{-10}{\sqrt{125}}(1.5) \approx -1.3416$ เมตรต่อวินาที #

4.2 เมื่อไต่ปลายล่างและปลายบนของบันไดจะเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเท่ากัน

วิธีทำ ถ้าปลายล่างและปลายบนของบันไดเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเท่ากัน

นั่นคือ $\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}$

ซึ่งจากความสัมพันธ์ของโจทย์ในข้อนี้ คือ $\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dt}$

จะได้ว่า ปลายล่างและปลายบนของบันไดจะเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเท่ากัน เมื่อ $x = y$

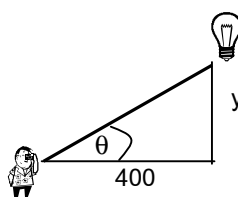
จาก $x^2 + y^2 = 15^2$

แทน x ด้วย y จะได้ $y^2 + y^2 = 225$

จะได้ $y = \sqrt{112.5} \approx 10.6$

ดังนั้น ปลายล่างและปลายบนของบันไดจะเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเท่ากัน เมื่อปลายล่าง
อยู่ห่างจากกำแพงประมาณ 10.6 เมตร #

5. ลูกบอลกลิ้งลงจากพื้นห่างจากผู้สังเกตการณ์ 400 เมตร ด้วยอัตราเร็ว 70 เมตรต่อวินาที มุม
เงยของแนวมองของผู้สังเกตการณ์จะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเร็วเท่าใด เมื่อลูกบอลกลิ้งอยู่สูงจากพื้น 600
เมตร



วิธีทำ โจทย์ต้องการทราบอัตราเร็วการเพิ่มขึ้นของมุมเงยของแนวมองของผู้สังเกตการณ์

ให้ y แทน ระยะที่ลูกบอลกลิ้งอยู่สูงจากพื้นเมื่อเวลา t ไต่ ๆ

จากรูปจะได้ ความสัมพันธ์ระหว่างมุมเงยของแนวมองของผู้สังเกตการณ์ และ y

เมื่อเวลาใด ๆ คือ $\tan \theta = \frac{y}{400}$

$$\theta = \arctan \frac{y}{400}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{400}\right)^2} \cdot \frac{1}{400} \cdot \frac{dy}{dt} \quad (\text{จาก ทบ.2.3(3) อนุพันธ์ของ } \arctan x)$$

โจทย์กำหนดให้ $\frac{dy}{dt} = 70$ เมตรต่อวินาที และ $y = 600$ เมตร

$$\text{ดังนั้น } \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1 + \left(\frac{600}{400}\right)^2} \cdot \frac{1}{400} \cdot (70) = 0.0538 \text{ เรเดียนต่อวินาที } \#$$

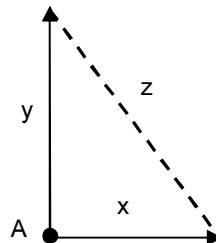
6. รถยนต์สองคันเคลื่อนที่ออกจากจุด A ในเวลาเดียวกัน รถยนต์คันแรกเคลื่อนที่ไปทางทิศตะวันออกด้วยความเร็ว 45 กิโลเมตร/ชั่วโมง และรถยนต์คันที่สองวิ่งไปทางทิศเหนือด้วยความเร็ว 60 กิโลเมตร/ชั่วโมง จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะทางระหว่างรถยนต์ทั้งสอง เมื่อเวลา $t = 3$

วิธีทำ ให้ x แทน ระยะที่รถยนต์คันแรกอยู่ห่างจากจุด A เมื่อเวลา t ใด ๆ

ให้ y แทน ระยะที่รถยนต์คันที่สองอยู่ห่างจากจุด A เมื่อเวลา t ใด ๆ

ให้ z แทน ระยะที่รถยนต์ทั้งสองอยู่ห่างกันเมื่อเวลา t ใด ๆ

ความสัมพันธ์ระหว่าง x , y และ z เมื่อเวลาใด ๆ คือ $x^2 + y^2 = z^2$ ดังรูป



หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างเทียบกับ t จะได้ $2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 2z \frac{dz}{dt}$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right)$$

โจทย์กำหนดให้ $\frac{dx}{dt} = 45$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง และ $\frac{dy}{dt} = 60$ กิโลเมตรต่อชั่วโมง

เมื่อ $t = 3$ จะได้

$$x = \text{อัตราเร็ว} \times \text{เวลา} = 45 \times 3 = 135 \text{ กิโลเมตร}$$

$$y = \text{อัตราเร็ว} \times \text{เวลา} = 60 \times 3 = 180 \text{ กิโลเมตร}$$

$$z = \sqrt{135^2 + 180^2} = 225 \text{ กิโลเมตร}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dz}{dt} = \frac{1}{225} ((135 \times 45) + (180 \times 60)) = 75 \text{ กิโลเมตรต่อชั่วโมง } \#$$

7. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีเทียบกับเวลาของลูกบอลลูนทรงกลม ขณะที่รัศมีเท่ากับ 30 เซนติเมตร และอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรก๊าซฮีเลียมที่เป่าเข้าไปเทียบกับเวลาเท่ากับ 600 ลูกบาศก์เซนติเมตร/วินาที

วิธีทำ ให้ r เป็นรัศมีของลูกบอลลูน มีหน่วยเป็นเซนติเมตร

ให้ V เป็นปริมาตรของบอลลูน มีหน่วยเป็นลูกบาศก์เซนติเมตร

$$\text{จากความสัมพันธ์ } V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างเทียบกับ } t \text{ จะได้ } \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\text{จาก } r = 30 \text{ และ } \frac{dV}{dt} = 600$$

$$\text{ดังนั้น } 600 = 4\pi(30)^2 \frac{dr}{dt} \quad \text{จะได้ } \frac{dr}{dt} = \frac{1}{6\pi}$$

นั่นคืออัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมีเทียบกับเวลาของลูกบอลลุนทรกลง เมื่อรัศมีเท่ากับ 30 เซนติเมตร และอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรก๊าซฮีเลียมที่เป่าเข้าไปเทียบกับเวลาเท่ากับ 600 ลูกบาศก์เซนติเมตร/วินาที มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{6\pi}$ เซนติเมตร/วินาที #

8. น้ำไหลเข้าแท็งก์น้ำรูปกรวย ด้วยอัตรา 2 เมตร³/นาที แท็งก์น้ำมีความสูง 10 เมตร และมีรัศมีที่ปากแท็งก์ 5 เมตร จงหาอัตราเร็วของระดับน้ำที่เพิ่มขึ้น ขณะที่น้ำมีความลึก 6 เมตร

วิธีทำ ให้ r เป็นรัศมีของพื้นผิวน้ำ ณ เวลา t

ให้ h เป็นความสูงของน้ำในแท็งก์ ณ เวลา t

ให้ V เป็นปริมาตรของน้ำภายในแท็งก์ ณ เวลา t

$$\text{จากความสัมพันธ์ } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

จะเห็นว่า V ขึ้นอยู่กับตัวแปรทั้ง r และ h

เราจะเปลี่ยนรูปตัวแปร r ให้อยู่ในรูปตัวแปร h

จากรูปสามเหลี่ยมคล้าย ABC กับ APQ

$$\text{จะได้ } \frac{r}{5} = \frac{h}{10} \quad \text{หรือ } r = \frac{1}{2}h$$

$$\text{แทนค่าใน } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$\text{จะได้ } V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{1}{2}h \right)^2 h = \frac{1}{12} \pi h^3$$

$$\text{หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างเทียบกับ } t \text{ จะได้ } \frac{dV}{dt} = \frac{1}{4} \pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\text{จาก } h = 6 \text{ และ } \frac{dV}{dt} = 2$$

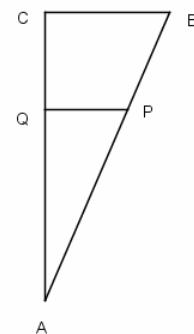
$$\text{ดังนั้น } \frac{dV}{dt} = \frac{1}{4} \pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$2 = \frac{1}{4} \pi 6^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4(2)}{36\pi} \approx 0.071 \text{ เมตร/นาที}$$

นั่นคือ อัตราเร็วของระดับน้ำที่เพิ่มขึ้นเท่ากับ 0.071 เมตร/นาที

#



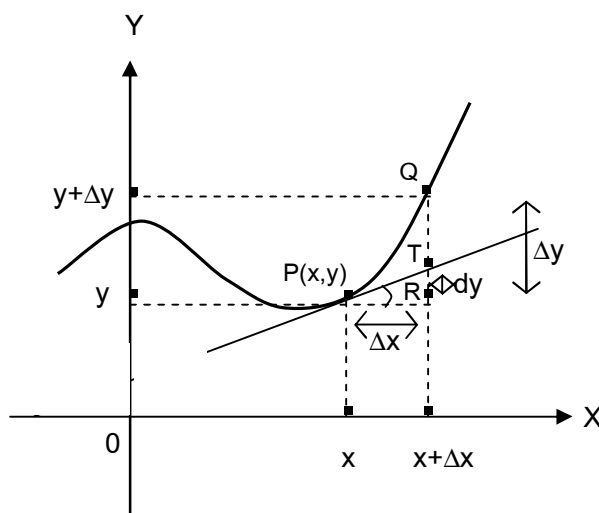
ค่าเชิงอนุพันธ์และการประยุกต์



ทำไม dy จึงใช้ประมาณค่า Δy ได้ ???

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ในช่วง I

ให้ $P(x, y)$ และ $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ เป็นจุดสองจุดบนกราฟของ $y = f(x)$ ในช่วง I ดังรูป



ลากเส้นสัมผัส PT ทำมุม θ กับแกน x นั่นคือ $\widehat{TPR} = \theta$ และ f มีอนุพันธ์ที่จุด $x \in I$

ดังนั้น $\theta \neq \frac{\pi}{2}$

$$\text{เราจะได้ความชันของเส้นสัมผัส } PT = \frac{dy}{dx} = \tan \theta = \frac{RT}{PR}$$

เพราะว่า $PR = \Delta x = dx$ ทำให้ $RT = dy = f'(x)dx$

$$\text{ดังนั้น } |\Delta y - dy| = |QR - TR|$$

จากรูปจะเห็นว่าเมื่อ Q เคลื่อนที่มาตามกราฟของ $y = f(x)$ ยิ่งเข้าใกล้จุด P เข้ามากเท่าไร ความแตกต่างระหว่าง Δy และ dy จะน้อยลง ๆ นั่นคือเมื่อ Δx น้อยลงมาก ๆ dy จะประมาณค่า Δy ได้ใกล้เคียงมากขึ้น ๆ และเราจะเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\Delta y \approx dy = f'(x)dx \quad \text{เมื่อ } dx = \Delta x \quad \text{และ } \Delta x \text{ มีค่าน้อยมาก ๆ}$$

เรียก dy ว่า ค่าเชิงอนุพันธ์ (differential) ของตัวแปรตาม y

9. จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์หาค่าโดยประมาณของ $\sqrt{3}$

วิธีทำ ให้ $y = f(x) = \sqrt{x}$ ดังนั้น $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

ให้ $\sqrt{3} = \sqrt{x + \Delta x}$

ดังนั้นเลือก $x = 4$ จะได้ $dx = \Delta x = 3 - 4 = -1$

จาก $y = \sqrt{x}$ จะได้ $y = \sqrt{4} = 2$

และ $dy = \frac{1}{2\sqrt{4}}(-1) = -0.25$

จาก $\sqrt{x + \Delta x} = y + \Delta y \approx y + dy$

จะได้ $\sqrt{3} \approx 2 - 0.25 = 1.75$

#

10. จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์หาค่าโดยประมาณของ $\sqrt{2}$

วิธีทำ ให้ $y = f(x) = \sqrt{x}$ ดังนั้น $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

ให้ $\sqrt{2} = \sqrt{x + \Delta x}$

ดังนั้นเลือก $x = 1$ จะได้ $dx = \Delta x = 2 - 1 = 1$

จาก $y = \sqrt{x}$ จะได้ $y = \sqrt{1} = 1$

และ $dy = \frac{1}{2\sqrt{1}}(1) = 0.5$

จาก $\sqrt{x + \Delta x} = y + \Delta y \approx y + dy$

จะได้ $\sqrt{2} \approx 1 + 0.5 = 1.5$

#

11. จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์หาค่าโดยประมาณของ $\sqrt{1.25}$

วิธีทำ ให้ $y = f(x) = \sqrt{x}$ ดังนั้น $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

ให้ $\sqrt{1.25} = \sqrt{x + \Delta x}$

ดังนั้นเลือก $x = 1$ จะได้ $dx = \Delta x = 1.25 - 1 = 0.25$

จาก $y = \sqrt{x}$ จะได้ $y = \sqrt{1} = 1$

และ $dy = \frac{1}{2\sqrt{1}}(0.25) = 0.125$

จาก $\sqrt{x + \Delta x} = y + \Delta y \approx y + dy$

จะได้ $\sqrt{1.25} \approx 1 + 0.125 = 1.125$

#

12. จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์หาค่าโดยประมาณของ $\sqrt{98}$

วิธีทำ ให้ $y = f(x) = \sqrt{x}$ ดังนั้น $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

ให้ $\sqrt{98} = \sqrt{x + \Delta x}$

ดังนั้นเลือก $x = 100$ จะได้ $dx = \Delta x = 98 - 100 = -2$

$$\begin{aligned} \text{จาก } y &= \sqrt{x} \quad \text{จะได้ } y = \sqrt{100} = 10 \\ \text{และ } dy &= \frac{1}{2\sqrt{100}}(-2) = -0.1 \end{aligned}$$

$$\text{จาก } \sqrt{x + \Delta x} = y + \Delta y \approx y + dy$$

$$\text{จะได้ } \sqrt{98} \approx 10 - 0.1 = 9.9 \quad \#$$

13. จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์หาค่าโดยประมาณของ $\frac{1}{1005}$

$$\text{วิธีทำ ให้ } y = f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{ดังนั้น } dy = -\frac{1}{x^2} dx$$

$$\text{ให้ } \frac{1}{1005} = \frac{1}{x + \Delta x}$$

$$\text{ดังนั้นเลือก } x = 1000 \quad \text{จะได้ } dx = \Delta x = 1005 - 1000 = 5$$

$$\text{จาก } y = \frac{1}{x} \quad \text{จะได้ } y = \frac{1}{1000} = 0.001$$

$$\text{และ } dy = -\frac{1}{1000^2}(5) = -0.000005$$

$$\text{จาก } \frac{1}{x + \Delta x} = y + \Delta y \approx y + dy$$

$$\text{จะได้ } \frac{1}{1005} \approx 0.001 - 0.000005 = 0.000995 \quad \#$$

14. จงหาค่าโดยประมาณของ $f(1.98)$ เมื่อ $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 5$

$$\text{วิธีทำ ให้ } y = 3x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 5 \quad \text{ดังนั้น } dy = (12x^3 - 21x^2 + 8x) dx$$

$$\text{ให้ } 1.98 = x + \Delta x$$

$$\text{ดังนั้นเลือก } x = 2 \quad \text{จะได้ } dx = \Delta x = 1.98 - 2 = -0.02$$

$$\text{และ } y = 3(2)^4 - 7(2)^3 + 4(2)^2 - 5 = 3$$

$$\text{และ } dy = (12(2)^3 - 21(2)^2 + 8(2))(-0.02) = -0.56$$

$$\text{จาก } 3(x + \Delta x)^4 - 7(x + \Delta x)^3 + 4(x + \Delta x)^2 - 5 = y + \Delta y \approx y + dy$$

$$\text{จะได้ } 3(1.98)^4 - 7(1.98)^3 + 4(1.98)^2 - 5 \approx 3 - 0.56 = 2.44 \quad \#$$

บทนิยาม 7.1 ให้ ΔA เป็นค่าคลาดเคลื่อนที่อาจเป็นไปได้อันเนื่องมาจากการวัดหรือจากการคำนวณของปริมาณ A

1. $\frac{\Delta A}{A}$ เรียกว่า ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (relative error)

2. $\frac{\Delta A}{A} \times 100$ เรียกว่า ค่าคลาดเคลื่อนร้อยละ (percentage error)

15. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหนึ่ง วัดความยาวได้ประมาณด้านละ 12 เซนติเมตร ถ้าความยาวที่แท้จริงของแต่ละด้านเป็น 11.98 เซนติเมตร ค่าคลาดเคลื่อนร้อยละของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสนี้เป็นเท่าไร

วิธีทำ ให้พื้นที่ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็น $A = x^2$ ซึ่งทำให้ได้ $dA = 2x dx$
 เนื่องจาก $x = 12$ และ $dx = \Delta x = 11.98 - 12 = -0.02$
 จะได้ $A = 12^2 = 144$
 $\Delta A \approx dA = 2(12)(-0.02) = -0.48$
 $\frac{\Delta A}{A} \times 100 \approx \frac{dA}{A} \times 100 = \frac{-0.48}{144} \times 100 = -0.333\%$ #

16. เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่งวัดได้ 6 เซนติเมตร ด้วยค่าคลาดเคลื่อน 0.02 เซนติเมตร ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ในการคำนวณหาพื้นที่ของวงกลมวงนี้เป็นเท่าไร

วิธีทำ ให้พื้นที่ของวงกลมเป็น $A = \frac{\pi}{4}c^2$ โดยที่ c คือความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม
 ซึ่งทำให้ได้ $dA = \frac{\pi}{2}c \cdot dc$
 เนื่องจาก $c = 6$ และ $dc = \Delta c = \pm 0.02$
 จะได้ $A = \frac{\pi}{4}(6)^2 = 9\pi$
 $\Delta A \approx dA = \frac{\pi}{2}(6) \cdot (\pm 0.02) = \pm 0.06\pi$
 $\frac{\Delta A}{A} \approx \frac{dA}{A} = \frac{\pm 0.06\pi}{9\pi} \approx \pm 0.00667$ #

17. การสร้างหลังคารูปครึ่งวงกลมมีราคา 500 บาทต่อตารางเมตร ถ้าวัดเส้นผ่านศูนย์กลางของหลังคานี้ได้ 120 เมตร โดยคาดว่าจะมีค่าคลาดเคลื่อนได้ 1 เมตร

17.1 จงหาค่าคลาดเคลื่อนโดยประมาณของพื้นที่ของหลังคา

วิธีทำ ให้พื้นที่ของครึ่งวงกลมเป็น $A = \frac{\pi}{8}c^2$ โดยที่ c คือความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม
 ซึ่งทำให้ได้ $dA = \frac{\pi}{4}c \cdot dc$
 เนื่องจาก $c = 120$ และ $dc = \Delta c = \pm 1$ เมตร
 จะได้ $A = \frac{\pi}{8}(120)^2 = 1800\pi$
 $\Delta A \approx dA = \frac{\pi}{4}(120) \cdot (\pm 1) = \pm 30\pi \approx \pm 94.24778$ #

17.2 ถ้าไม่ต้องการให้ค่านวนค่าใช้จ่ายในการสร้างหลังคานี้ผิดไปเกินกว่า 12,500 บาท จะต้องทำอย่างไร

วิธีทำ ถ้าไม่ต้องการค่านวนค่าใช้จ่ายในการสร้างหลังคานี้ผิดไปเกินกว่า 12,500 บาท จะต้อง
มีค่าคลาดเคลื่อนโดยประมาณของพื้นที่ของหลังคาไม่เกิน $\frac{12500}{500} = 25$ ตารางเมตร

∴ ต้องวัดเส้นผ่านศูนย์กลางของหลังคานี้ให้มีค่าคลาดเคลื่อน $dc = \Delta c = \pm a$ เมตร

$$\text{จะได้ } dA = \frac{\pi}{4} c \cdot dc = \frac{\pi}{4} (120) \cdot (\pm a) \leq 25$$

$$|\pm 30\pi a| \leq 25$$

$$|a| \leq \frac{25}{30\pi} \approx 0.26526$$

นั่นคือ ต้องวัดเส้นผ่านศูนย์กลางของหลังคานี้ให้มีค่าคลาดเคลื่อนไม่เกิน ± 0.26526 เมตร #

ภาคผนวก ข

แบบทดสอบย่อย แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์
เฉลยแบบทดสอบย่อย และเฉลยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
เรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์

แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 1

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบฉบับนี้สร้างขึ้นเพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนิสิตในเรื่องต่อไปนี้
 - 1.1 อนุพันธ์และอนุพันธ์อันดับสูง
 - 1.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
 - 1.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย
2. แบบทดสอบฉบับนี้เป็นแบบทดสอบแบบอัตนัย จำนวน 3 ข้อ
3. ให้นิสิตแสดงวิธีทำและเติมคำตอบลงในแบบทดสอบฉบับนี้ให้ถูกต้องครบถ้วน
4. เวลาที่ใช้ในการทำแบบทดสอบ 25 นาที

ชื่อ..... รหัสประจำตัว.....

คำสั่ง จงแสดงวิธีทำ

1. จงหา $f''(1)$ เมื่อ $f(x) = 6x^5 - 4x^2$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

2. จงหาอนุพันธ์ของ $y = \cos^5 3x$

วิธีทำ

3. จงหาสมการเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $x^2 - xy + y^3 = 1$ ณ จุด $(1, 1)$

วิธีทำ

แบบทดสอบย่อยฉบับที่ 2

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบฉบับนี้สร้างขึ้นเพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนิสิตในเรื่องต่อไปนี้
 - 1.1 การเขียนกราฟของฟังก์ชัน
 - 1.2 โจทย์ปัญหาการหาค่าสูงสุดและต่ำสุด
 - 1.3 อัตราสัมพัทธ์ และค่าเชิงอนุพันธ์และการประยุกต์
2. แบบทดสอบฉบับนี้เป็นแบบทดสอบแบบอัตนัย จำนวน 4 ข้อ
3. ให้นิสิตแสดงวิธีทำและเติมคำตอบลงในแบบทดสอบฉบับนี้ให้ถูกต้องครบถ้วน
4. เวลาที่ใช้ในการทำแบบทดสอบ 25 นาที

ชื่อ..... รหัสประจำตัว.....

2. จงหาจุดบนกราฟพาราโบลา $y = 2x^2$ ที่ใกล้จุด $(9, 0)$ มากที่สุด

วิธีทำ

[illegible]

3. บอลกลิ้งลอยขึ้นจากสนามหญ้าในแนวตั้ง โดยจุดเริ่มต้นห่างจากจุดมุมหนึ่งของสนาม (จุด A) เป็นระยะทาง 400 เมตร เมื่อลอยไปได้ช่วงหนึ่งพบว่า มุมเงยที่จุด A เป็น $\frac{\pi}{4}$ และมุมเงยเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 0.15 เรเดียนต่อวินาที บอลกลิ้งจะลอยขึ้นด้วยความเร็วเท่าใด ในขณะเวลานั้น

วิธีทำ

[illegible]

**แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์
โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler**

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบฉบับนี้สร้างขึ้นเพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ของนิสิตคณะวิทยาศาสตร์ ระดับปริญญาตรี ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler
2. แบบทดสอบฉบับนี้เป็นแบบทดสอบแบบอัตนัย จำนวน 10 ข้อ
3. ให้นิสิตแสดงวิธีทำและเติมคำตอบลงในแบบทดสอบฉบับนี้ให้ถูกต้องครบถ้วน
4. เวลาที่ใช้ในการทำแบบทดสอบ 2 คาบ (100 นาที)

ชื่อ..... รหัสประจำตัว.....

8. ผลต่างระหว่างจำนวนสองจำนวนเป็น 20 จงเลือกจำนวนสองจำนวนนี้ที่ทำให้ผลคูณมีค่าน้อยที่สุด

[illegible]

9. รถยนต์คันหนึ่งแล่นไปโดยมีสมการของการเคลื่อนที่เป็น $s(t) = 250t^2 - \frac{5}{4}t^4$

เมื่อ s แทนระยะทางมีหน่วยเป็นเมตร และ t แทนเวลามีหน่วยเป็นนาที่ เมื่อความเร่งมีค่าเป็นศูนย์ รถยนต์จะแล่นไปได้ระยะทางเท่าใด

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $5x^2 - 6xy + 5y^4 = 4$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

เฉลยแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 1

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบฉบับนี้สร้างขึ้นเพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนิสิตในเรื่องต่อไปนี้
 - 1.1 อนุพันธ์และอนุพันธ์อันดับสูง
 - 1.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
 - 1.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย
2. แบบทดสอบฉบับนี้เป็นแบบทดสอบแบบอัตนัย จำนวน 3 ข้อ
3. ให้นิสิตแสดงวิธีทำและเติมคำตอบลงในแบบทดสอบฉบับนี้ให้ถูกต้องครบถ้วน
4. เวลาที่ใช้ในการทำแบบทดสอบ 25 นาที

ชื่อ..... รหัสประจำตัว.....

คำสั่ง จงแสดงวิธีทำ

1. จงหา $f''(1)$ เมื่อ $f(x) = 6x^5 - 4x^2$

วิธีทำ $f'(x) = 30x^4 - 8x$

$$f''(x) = 120x^3 - 8$$

$$f''(1) = 112$$

2. จงหาอนุพันธ์ของ $y = \cos^5 3x$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\cos^5 3x)$

$$= 5 \cos^4 3x \frac{d}{dx}(\cos 3x)$$

$$= (5 \cos^4 3x)(-\sin 3x) \frac{d}{dx}(3x)$$

$$= -15 \sin 3x \cos^4 3x$$

3. จงหาสมการเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $x^2 - xy + y^3 = 1$ ณ จุด $(1, 1)$

วิธีทำ $\frac{d}{dx}(x^2 - xy + y^3) = \frac{d}{dx}(1)$

$$\frac{d}{dx}x^2 - \frac{d}{dx}xy + \frac{d}{dx}y^3 = 0$$

$$2x - x\frac{dy}{dx} - y + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$-x\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} = y - 2x$$

$$(-x + 3y^2)\frac{dy}{dx} = y - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{-x + 3y^2}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $x^2 - xy + y^3 = 1$ ณ จุด $(1, 1)$

$$\text{เท่ากับ } \frac{1 - 2(1)}{-1 + 3(1)^2} = -\frac{1}{2}$$

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $x^2 - xy + y^3 = 1$ ณ จุด $(1, 1)$

$$\text{เท่ากับ } y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

เฉลยแบบทดสอบย่อยฉบับที่ 2

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบฉบับนี้สร้างขึ้นเพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนิสิตในเรื่องต่อไปนี้
 - 1.1 การเขียนกราฟของฟังก์ชัน
 - 1.2 โจทย์ปัญหาการหาค่าสูงสุดและต่ำสุด
 - 1.3 อัตราสัมพัทธ์ และค่าเชิงอนุพันธ์และการประยุกต์
2. แบบทดสอบฉบับนี้เป็นแบบทดสอบแบบอัตนัย จำนวน 4 ข้อ
3. ให้นิสิตแสดงวิธีทำและเติมคำตอบลงในแบบทดสอบฉบับนี้ให้ถูกต้องครบถ้วน
4. เวลาที่ใช้ในการทำแบบทดสอบ 25 นาที

ชื่อ..... รหัสประจำตัว.....

คำสั่ง จงแสดงวิธีทำ

1. จงเขียนกราฟของ $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2$

วิธีทำ $f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$

เมื่อ $f'(x) = 0$ จะได้ $3x^2 - 3x - 6 = 0$ ดังนั้น $x = -1, 2$ เป็นจุดวิกฤต

จาก $f''(x) = 6x - 3$

ตรวจสอบด้วยอนุพันธ์อันดับสอง พบว่า $f''(2) = 9 > 0$

$$f''(-1) = -9 < 0$$

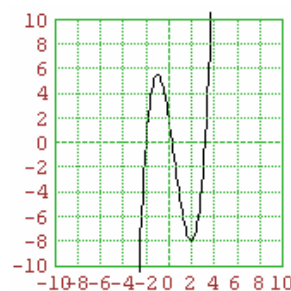
สรุปว่า จุด $x = -1$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ และจุด $x = 2$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

เมื่อ $f''(x) = 0$ จะได้ $6x - 3 = 0$ ดังนั้น $x = \frac{1}{2}$ เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

$f''(x) > 0$ จะได้ $6x - 3 > 0$ หรือ $x > \frac{1}{2}$ นั่นคือกราฟเว้าขึ้นบนช่วง $(\frac{1}{2}, \infty)$

$f''(x) < 0$ จะได้ $6x - 3 < 0$ หรือ $x < \frac{1}{2}$ นั่นคือกราฟเว้าลงบนช่วง $(-\infty, \frac{1}{2})$

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	2
f(x)	$\frac{11}{2}$	2	$-\frac{5}{4}$	-8
f'(x)	0	(-)	(-)	0
f''(x)	(-)	(-)	0	(+)



2. จงหาจุดบนกราฟพาราโบลา $y = 2x^2$ ที่ใกล้จุด $(9, 0)$ มากที่สุด

วิธีทำ ให้ $P(x, 2x^2)$ เป็นจุดบนกราฟพาราโบลา $y = 2x^2$ ที่ใกล้จุด $(9, 0)$ ที่สุด

ให้ L แทนระยะทางระหว่างจุด $(9, 0)$ และจุด P

$$\text{จะได้ } L(x) = \sqrt{(x-9)^2 + (2x^2-0)^2}$$

$$L'(x) = \frac{16x^3 + 2(x-9)}{2\sqrt{4x^4 + (x-9)^2}}$$

$$\text{เมื่อ } L'(x) = 0 \quad \text{จะได้ } 0 = \frac{16x^3 + 2(x-9)}{2\sqrt{4x^4 + (x-9)^2}}$$

$$\text{ดังนั้น } x = 1, \frac{-2 \pm \sqrt{-14}}{4} \text{ เป็นจุดวิกฤต}$$

เนื่องจากกรณีนี้ไม่มีขอบเขตของ x แต่ $\frac{-2 \pm \sqrt{-14}}{4}$ ไม่เป็นจำนวนจริง จึงใช้ค่า

$x = 1$ ได้เพียงค่าเดียว

ทดสอบจุดวิกฤตโดยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง เมื่อพิจารณาจากจุดวิกฤต เราจะได้

ช่วง $(-\infty, 1)$ และ $(1, \infty)$ ซึ่ง $L'(x) \neq 0$ ในแต่ละช่วงเหล่านั้น เลือกจุดใดจุดหนึ่งในช่วงมาทดสอบหาค่า $f'(x)$ ตามทฤษฎีบท 5.7 จะตรวจสอบได้ว่า

$$\text{บน } (-\infty, 1) \quad L \text{ มีค่าลดลงเพราะว่า } L'(x) < 0 \quad (L'(0) = -1 < 0)$$

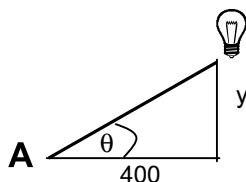
$$\text{บน } (1, \infty) \quad L \text{ มีค่าเพิ่มขึ้นเพราะว่า } L'(x) > 0 \quad (L'(2) = \frac{57}{\sqrt{113}} > 0)$$

นั่นคือ $x = 1$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

ดังนั้น ที่ $x = 1$ ทำให้ $L(1)$ เป็นระยะทางที่น้อยที่สุด

นั่นคือ จุด $(1, 2)$ อยู่ใกล้จุด $(9, 0)$ มากกว่า

3. บอลลูนลอยขึ้นจากสนามหญ้าในแนวตั้ง โดยจุดเริ่มต้นห่างจากจุดมุมหนึ่งของสนาม (จุด A) เป็นระยะทาง 400 เมตร เมื่อลอยไปได้ช่วงหนึ่งพบว่า มุมเงยที่จุด A เป็น $\frac{\pi}{4}$ และมุมเงยเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 0.15 เรเดียนต่อวินาที บอลลูนจะลอยขึ้นด้วยความเร็วเท่าใด ในขณะเวลานั้น



วิธีทำ ให้ y แทน ระยะที่บอลลูนอยู่สูงจากพื้นเมื่อเวลา t ใดๆ

ให้ θ แทน มุมเงยที่จุด A เมื่อเวลา t ใดๆ

จากรูปจะได้ ความสัมพันธ์ระหว่างมุมเงยของแนวมองของผู้สังเกตการณ์ และ y

เมื่อเวลาใดๆ คือ $\tan \theta = \frac{y}{400}$

$$\theta = \arctan \frac{y}{400}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{400}\right)^2} \cdot \frac{1}{400} \cdot \frac{dy}{dt} \quad (\text{จาก ทบ.2.3(3) อนุพันธ์ของ } \arctan x)$$

$$\text{จาก } \tan \theta = \frac{y}{400} \text{ และ } \theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{ดังนั้น } y = 400$$

โจทย์กำหนดให้ $\frac{d\theta}{dt} = 0.15$ เรเดียนต่อวินาที

$$\text{ดังนั้น} \quad 0.15 = \frac{1}{1 + \left(\frac{400}{400}\right)^2} \cdot \frac{1}{400} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = 120 \text{ เมตรต่อวินาที}$$

นั่นคือในเวลาที่มีมุมเงยที่จุด A เป็น $\frac{\pi}{4}$ บอลลูนจะลอยขึ้นด้วยความเร็ว 120 เมตรต่อวินาที

4. จงใช้ค่าเชิงอนุพันธ์หาค่าโดยประมาณของ $\sqrt{145}$

วิธีทำ $y = f(x) = \sqrt{x}$

$$\text{ดังนั้น } dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

เลือก $x = 144$ จะได้ $dx = \Delta x = 145 - 144 = 1$

จะได้ $y = \sqrt{144} = 12$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{144}}(1) = 0.04167$$

จาก $y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$

จะได้ $y + dy \approx \sqrt{x + dx}$ หรือ $\sqrt{145} \approx 12 + 0.04167 = 12.04167$

**เฉลยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์
โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler**

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบฉบับนี้สร้างขึ้นเพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ของนิสิตคณะวิทยาศาสตร์ ระดับปริญญาตรี ที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler
2. แบบทดสอบฉบับนี้เป็นแบบทดสอบแบบอัตนัย จำนวน 10 ข้อ
3. ให้นิสิตแสดงวิธีทำและเติมคำตอบลงในแบบทดสอบฉบับนี้ให้ถูกต้องครบถ้วน
4. เวลาที่ใช้ในการทำแบบทดสอบ 2 คาบ (100 นาที)

ชื่อ..... รหัสประจำตัว.....

คำสั่ง จงแสดงวิธีทำ

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x}$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \frac{d}{dx} \sqrt{x^2 - 8x} &= \frac{d}{dx} (x^2 - 8x)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} (x^2 - 8x)^{-\frac{1}{2}} (2x - 8) \quad , x^2 - 8x \neq 0 \\ &= \frac{(x - 4)}{\sqrt{x^2 - 8x}} \quad , x^2 - 8x \neq 0 \end{aligned}$$

2. จงหาอนุพันธ์อันดับที่สามของ $y = (x^3 + 3)^2$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad y' &= 2(x^3 + 3)(3x^2) = 6x^2(x^3 + 3) = 6x^5 + 18x^2 \\ y'' &= 30x^4 + 36x \\ y''' &= 120x^3 + 36 \end{aligned}$$

3. จงหาอนุพันธ์ของ $y = \frac{1 + \tan(x)}{\sin^2 x}$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{\sin^2 x \frac{d}{dx} (1 + \tan(x)) - (1 + \tan(x)) \frac{d}{dx} (\sin^2 x)}{\sin^4 x} \\ &= \frac{\sin^2 x \sec^2 x - (1 + \tan(x)) 2 \sin x \cos x}{\sin^4 x} \\ &= \frac{\sin^2 x \sec^2 x - 2 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x}{\sin^4 x} \\ &= \frac{\sin x \sec^2 x - 2 \cos x - 2 \sin x}{\sin^3 x} \\ &= \frac{\sec^2 x}{\sin^2 x} - \frac{2 \cos x}{\sin^3 x} - \frac{2}{\sin^2 x} = \frac{\sec^2 x - 2}{\sin^2 x} - \frac{2 \cos x}{\sin^3 x} \end{aligned}$$

4. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $x^2 + y^2 = 80$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \frac{d}{dx} (x^2 + y^2) &= \frac{d}{dx} (80) \\ \frac{d}{dx} x^2 + \frac{d}{dx} y^2 &= 0 \\ 2x + 2y \frac{dy}{dx} &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

หมายเหตุ วิธีทำอีกแบบหนึ่งในการหาความชัน คือ $x^2 + y^2 = 80$

$$y = \sqrt{80 - x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{80 - x^2}} = \frac{-x}{y}$$

5. จงหาสมการของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $x = t^2 - 1$, $y = 3t$ ณ จุดที่ $t = 3$

วิธีทำ จาก $x = t^2 - 1$ จะได้ $\frac{dx}{dt} = 2t$

$y = 3t$ จะได้ $\frac{dy}{dt} = 3$

เมื่อ $t = 3$ จะได้ $x = 8$, $y = 9$, $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=3} = 6$ และ $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=3} = 3$

นั่นคือ $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=3} = \frac{1}{2}$

หรือความชันของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง ณ จุดที่ $t = 3$ คือ $\frac{1}{2}$

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $x = t^2 - 1$, $y = 3t$ ณ จุดที่ $t = 3$

หรือ จุด $(8, 9)$ คือ $y - 9 = \frac{1}{2}(x - 8)$

หรือ $y = \frac{1}{2}x + 5$

6. จงหาความชันของเส้นสัมผัส L ซึ่งสัมผัสเส้นโค้ง $r = 2 \sin \theta$ ที่จุด $P(1, \frac{\pi}{6})$

วิธีที่ 1 จะได้ $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ และ $f(\theta) = 2 \sin \theta$ ดังนั้น $f'(\theta) = 2 \cos \theta$

สูตรการหาความชันของเส้นสัมผัสในพิกัดขั้วบท 4.1 คือ

$$m = \frac{f(\theta_1)\cos\theta_1 + f'(\theta_1)\sin\theta_1}{f'(\theta_1)\cos\theta_1 - f(\theta_1)\sin\theta_1}$$

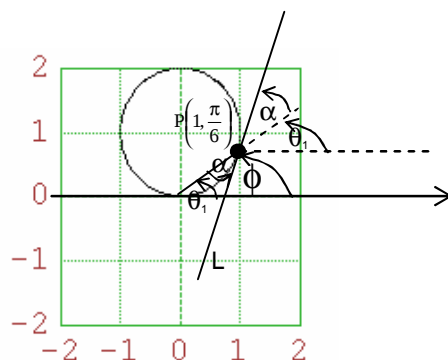
ดังนั้น $m = \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

$$= \frac{4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2\left(\frac{3}{4}\right) - \left(\frac{2}{4}\right)} = \sqrt{3}$$

วิธีที่ 2 กำหนดให้ L เป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P และ ϕ เป็นมุมเอียงของ L
 ดังนั้น ความชันของ L เท่ากับ $\tan \phi$

จากสูตรในทฤษฎีบท 4.2 จะได้ $\tan \alpha = \frac{2 \sin \frac{\pi}{6}}{2 \cos \frac{\pi}{6}} = \tan \frac{\pi}{6}$

ดังนั้น $\alpha = \frac{\pi}{6}$



จากรูป จะได้ว่า $\phi = \alpha + \theta_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่กำหนดให้ที่จุด P เท่ากับ $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

7. ให้ $f(x) = x\sqrt{x+5}$ จงหาจุดวิกฤต, ช่วงที่ทำให้เป็นฟังก์ชันเพิ่มและช่วงที่ทำให้เป็นฟังก์ชันลด

วิธีทำ $f'(x) = \frac{x}{2\sqrt{x+5}} + \sqrt{x+5}$

เมื่อ $f'(x) = 0$ จะได้ $\frac{x}{2\sqrt{x+5}} + \sqrt{x+5} = 0$

ดังนั้น $x = -\frac{10}{3}$ เป็นจุดวิกฤต

พบว่า $f'(x)$ ไม่นิยามที่จุด $x = -5$

นั่นคือ $f'(-5)$ หาค่าไม่ได้ แสดงว่า $x = -5$ เป็นจุดวิกฤต

จะได้ว่า จุด $x = -5, -\frac{10}{3}$ เป็นจุดวิกฤต

หาช่วงที่ทำให้เป็นฟังก์ชันเพิ่มและช่วงที่ทำให้เป็นฟังก์ชันลด โดยเมื่อพิจารณาจากจุดวิกฤต
 เราจะได้ช่วง $(-\infty, -5)$, $(-5, -\frac{10}{3})$ และ $(-\frac{10}{3}, \infty)$ ซึ่ง $f'(x) \neq 0$ ในแต่ละช่วงเหล่านั้น

โดยการเลือกจุดใดจุดหนึ่งในช่วงมาทดสอบหาค่า $f'(x)$ ตามทฤษฎีบท 5.7 จะตรวจสอบได้ว่า

บน $(-\infty, -5)$ พบว่า $f'(x)$ ไม่เป็นจำนวนจริง ดังนั้นไม่พิจารณาช่วงนี้

บน $(-5, -\frac{10}{3})$ f มีค่าลดลงเพราะว่า $f'(x) < 0$ ($f'(-4) = -1 < 0$)

บน $(-\frac{10}{3}, \infty)$ f มีค่าเพิ่มขึ้นเพราะว่า $f'(x) > 0$ ($f'(0) = \sqrt{5} > 0$)

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\frac{10}{3}, \infty)$ และเป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-5, -\frac{10}{3})$

8. ผลต่างระหว่างจำนวนสองจำนวนเป็น 20 จงเลือกจำนวนสองจำนวนนี้ที่ทำให้ผลคูณมีค่าน้อยที่สุด

วิธีทำ ให้ x แทนจำนวนที่หนึ่ง

ให้ y แทนจำนวนที่สอง

ให้ f แทนผลคูณของจำนวนทั้งสอง

ดังนั้น $f = xy$ ซึ่งมีตัวแปรสามตัว เราจะต้องกำจัดให้เหลือตัวแปรเพียงสอง

ตัวแปร เพื่อให้ f เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียว

จากโจทย์กำหนดให้ผลต่างระหว่างจำนวนสองจำนวนเป็น 20

จะได้ $y - x = 20$ และ $y = 20 + x$

จะได้ $f(x) = x(20 + x) = x^2 + 20x$

$f'(x) = 2x + 20$

เมื่อ $f'(x) = 0$ จะได้ $0 = 2x + 20$

ดังนั้น $x = -10$ เป็นจุดวิกฤต

จาก $f''(x) = 2 > 0$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$

ดังนั้น f มีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $x = -10$ นั่นคือ $y = 10$

นั่นคือ จำนวนทั้งสองได้แก่ -10 และ 10 ซึ่งทำให้ผลคูณมีค่าน้อยที่สุดมีค่าเท่ากับ -100

9. รถยนต์คันหนึ่งแล่นไปโดยมีสมการของการเคลื่อนที่เป็น $s(t) = 250t^2 - \frac{5}{4}t^4$

เมื่อ s แทนระยะทางมีหน่วยเป็นเมตร และ t แทนเวลา มีหน่วยเป็นนาฬิกา เมื่อความเร่งมีค่าเป็นศูนย์ รถยนต์จะแล่นไปได้ระยะทางเท่าใด

วิธีทำ เพราะว่า $s(t) = 250t^2 - \frac{5}{4}t^4$

ดังนั้น $v(t) = s'(t) = 500t - 5t^3 =$ ความเร็วของรถยนต์เมื่อเวลา t

และ $a(t) = v'(t) = 500 - 15t^2 =$ ความเร่งของรถยนต์เมื่อเวลา t

เมื่อความเร่งมีค่าเป็นศูนย์ จะได้ $0 = 500 - 15t^2$

$$t = \frac{10}{\sqrt{3}}, -\frac{10}{\sqrt{3}}$$

ดังนั้น เมื่อความเร่งมีค่าเป็นศูนย์ จะได้ $t = \frac{10}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น รถยนต์จะแล่นไปได้ระยะทาง } s\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right) &= 250\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{5}{4}\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^4 \\ &= \frac{62500}{9} = 6944.44 \text{ เมตร} \end{aligned}$$

10. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $5x^2 - 6xy + 5y^4 = 4$

วิธีทำ

$$\frac{d}{dx}(5x^2 - 6xy + 5y^4) = \frac{d}{dx}(4)$$

$$\frac{d}{dx}5x^2 - \frac{d}{dx}6xy + \frac{d}{dx}5y^4 = 0$$

$$10x - 6\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + 20y^3\frac{dy}{dx} = 0$$

$$10x - 6x\frac{dy}{dx} - 6y + 20y^3\frac{dy}{dx} = 0$$

$$-6x\frac{dy}{dx} + 20y^3\frac{dy}{dx} = 6y - 10x$$

$$\left(-6x + 20y^3\right)\frac{dy}{dx} = 6y - 10x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6y - 10x}{-6x + 20y^3} = \frac{3y - 5x}{-3x + 10y^3}$$

ภาคผนวก ข

**แบบวัดความพึงพอใจของนิสิตต่องิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์
และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler**

แบบวัดความพึงพอใจของนิสิตต่อการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์ โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

คำชี้แจง

1. แบบวัดความพึงพอใจฉบับนี้เป็นแบบวัดความพึงพอใจต่อการเรียนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler สำหรับนิสิตระดับปริญญาตรี มีจำนวน 20 ข้อ แบ่งเป็น 2 ตอน คือ

ตอนที่ 1 เป็นแบบวัดความพึงพอใจต่อการเรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

ตอนที่ 2 เป็นแบบวัดความพึงพอใจต่อการร่วมกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

2. ให้นิสิตทำเครื่องหมาย **ü** ลงในช่องทางขวามือหลังข้อความที่ตรงกับความรู้สึกที่แท้จริงของนิสิตเพียงช่องเดียว คำตอบที่นิสิตตอบนั้นไม่มีถูกหรือผิด เพราะแต่ละคนย่อมมีความรู้สึกแตกต่างกันไป

3. ในแต่ละช่องที่แสดงความพึงพอใจ มีความหมายดังนี้

พึงพอใจมากที่สุด หมายความว่า นิสิตเห็นด้วยกับข้อความข้อนั้นมากที่สุด

พึงพอใจมาก หมายความว่า นิสิตเห็นด้วยกับข้อความข้อนั้นมาก

พึงพอใจปานกลาง หมายความว่า นิสิตเห็นด้วยกับข้อความข้อนั้นปานกลาง

พึงพอใจน้อย หมายความว่า นิสิตเห็นด้วยกับข้อความข้อนั้นน้อย

พึงพอใจน้อยที่สุด หมายความว่า นิสิตเห็นด้วยกับข้อความข้อนั้นน้อยที่สุด

ตัวอย่าง

ข้อที่	ข้อความ	ระดับความพึงพอใจ				
		มากที่สุด	มาก	ปานกลาง	น้อย	น้อยที่สุด
1	กิจกรรมการเรียนการสอนทำให้ข้าพเจ้ามีความกระตือรือร้น และสนุกกับการเรียนมากขึ้น		ü			

ตอนที่ 1 แบบวัดความพึงพอใจต่อการเรียนด้วยกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

ข้อที่	ข้อความ	ระดับความพึงพอใจ				
		มากที่สุด	มาก	ปานกลาง	น้อย	น้อยที่สุด
1	จากการทำใบกิจกรรมในแต่ละคาบ ทำให้ข้าพเจ้าเข้าใจเนื้อหาเรื่องอนุพันธ์และการประยุกต์มากขึ้น					
2	การจัดลำดับเนื้อหาในใบกิจกรรม มีความต่อเนื่องและชัดเจน					
3	เนื้อหาในใบกิจกรรม มีความยากง่ายเหมาะสม					
4	เนื้อหาในใบกิจกรรม มีความเหมาะสมกับเวลาเรียน					
5	เครื่องมือในการทำกิจกรรม ใช้ได้สะดวกตามความต้องการของข้าพเจ้า					
6	เครื่องมือในการทำกิจกรรม มีประโยชน์ต่อการเรียนการสอนมาก					
7	การใช้ภาพเคลื่อนไหวทำให้กิจกรรมมีความน่าสนใจ					
8	การใช้ภาพเคลื่อนไหวทำให้ข้าพเจ้าเข้าใจแนวคิดของอนุพันธ์และการประยุกต์มากขึ้น					
9	กิจกรรมการเรียนการสอน ทำให้ข้าพเจ้ามองเห็นโมภาพของอัตราการเปลี่ยนแปลงต่างๆ ได้ดีขึ้น					
10	กิจกรรมการเรียนการสอนทำให้ข้าพเจ้ามีความกระตือรือร้น และสนุกกับการเรียนมากขึ้น					

ตอนที่ 2 แบบวัดความพึงพอใจต่อการร่วมกิจกรรมการเรียนรู้การสอนเรื่องอนุพันธ์และการ
ประยุกต์โดยใช้โปรแกรม C.a.R. และโปรแกรม Euler

ข้อที่	ข้อความ	ระดับความพึงพอใจ				
		มาก ที่สุด	มาก	ปาน กลาง	น้อย	น้อย ที่สุด
11	กิจกรรมการเรียนรู้การสอน ทำให้ข้าพเจ้าได้มีโอกาสแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับเพื่อนมากขึ้น					
12	กิจกรรมการเรียนรู้การสอน ทำให้ข้าพเจ้ามีอิสระในการคิดมากขึ้น					
13	กิจกรรมการเรียนรู้การสอน ทำให้ข้าพเจ้าเกิดการค้นพบด้วยตนเอง					
14	กิจกรรมการเรียนรู้การสอน ช่วยพัฒนาความคิดของข้าพเจ้า					
15	กิจกรรมการเรียนรู้การสอน ทำให้ข้าพเจ้าสามารถจดจำแนวคิดของอนุพันธ์และการประยุกต์ได้นานขึ้น					
16	กิจกรรมการเรียนรู้การสอน ทำให้ข้าพเจ้ามีความมั่นใจในตัวเองมากขึ้น					
17	ข้าพเจ้ารู้สึกสนุกกับการทำใบกิจกรรมระหว่างเรียน					
18	กิจกรรมการเรียนรู้การสอน ทำให้ข้าพเจ้ามีกำลังใจในการเรียนมากขึ้น					
19	กิจกรรมการเรียนรู้การสอน ทำให้ข้าพเจ้ามีความตั้งใจมากขึ้น					
20	กิจกรรมการเรียนรู้การสอน ทำให้ข้าพเจ้ามีเจตคติที่ดีต่อการเรียนแคลคูลัส					

ข้อเสนอแนะเพิ่มเติม

.....

.....

.....

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล

นางสาวทรศนีย์ รัตนวิจิตร

วันเดือนปีเกิด

9 มกราคม 2527

สถานที่เกิด

จังหวัดกรุงเทพมหานคร

สถานที่อยู่ปัจจุบัน

160 หมู่ 9 ตำบลบางโหลง อำเภอบางพลี

จังหวัดสมุทรปราการ 10540

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2542

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

จากโรงเรียนราชวินิตบางแก้ว จังหวัดสมุทรปราการ

พ.ศ. 2545

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

จากโรงเรียนราชวินิตบางแก้ว จังหวัดสมุทรปราการ

พ.ศ. 2549

วท.บ. (คณิตศาสตร์) เกียรตินิยมอันดับ 2

จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

พ.ศ. 2553

กศ.ม. (คณิตศาสตร์)

จากมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ