ปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรี

ปริญญานิพนธ์

ของ

ขจรศรี วรรณสถิตย์

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์
มีนาคม 2544

คณะกรรมการควบคุมและคณะกรรมการสอบได้พิจารณาปริญญานิพนธ์ฉบับนี้แล้ว เห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒได้

คณะกรรมการควบคุม

.... ประธาน
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สุภาพร ศรีบุรินทร์)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ อภิชัย บวรกิติวงศ์)

คณะกรรมการสอบ

.... ประธาน
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สุภาพร ศรีบุรินทร์)

.... กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ อภิชัย บวรกิติวงศ์)

.... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุพจน์ ไชยสังข์)

.... กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(อาจารย์ ละเอียด ปรารถนาดี)

บัณฑิตวิทยาลัยอนุมัติให้รับปริญญานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

.... คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย
(ศาสตราจารย์ ดร.เสริมศักดิ์ วิศาลาภรณ์)
วันที่ ...8... เดือน .... พ.ศ. 2544

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้ได้รับทุนสนับสนุนจาก
ทุนงบประมาณแผ่นดิน ปีการศึกษา 2544

ประกาศคุณูปการ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยความช่วยเหลือ และให้คำปรึกษาอย่างดียิ่งจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สุภาพร ศรีบุรินทร์ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ อภิชัย บวรกิติวงศ์ โดยกรุณาให้คำแนะนำและข้อเสนอแนะต่างๆ ที่มีประโยชน์ต่อการวิจัย ตลอดจนตรวจแก้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้อย่างละเอียด มาโดยตลอด ผู้วิจัยรู้สึกทราบซึ้ง และขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอกราบขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ กมล เอกไทยเจริญ และอาจารย์สุภาลักษณ์ พงษ์สุธรรม ที่กรุณาเป็นผู้เชี่ยวชาญในการตรวจเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ขอกราบขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ ดร. สมพล เล็กสกุล และรองศาสตราจารย์ กมล เอกไทยเจริญ ที่กรุณาให้คำแนะนำที่มีประโยชน์ต่อการวิจัย

ขอกราบขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สุพจน์ ไชยสังข์ และอาจารย์ละเอียด ปรารถนาดี ที่กรุณาร่วมเป็นกรรมการสอบปากเปล่า และให้ข้อคิดที่มีประโยชน์ต่อการวิจัย

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ ดร. สุรพล วัฒนวิกย์กิจ ที่กรุณาให้คำแนะนำในการเขียนบทคัดย่อภาษาอังกฤษของงานวิจัย

ขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร ทุกท่าน ที่ช่วยประสิทธิ์ประสาทวิชา และทำให้ผู้วิจัยรักในวิชาคณิตศาสตร์

ขอขอบคุณ คุณศุภกิจ หงษ์ทอง นิสิตปริญญาเอกและปริญญาโท วิชาเอกคณิตศาสตร์ทุกท่าน และเพื่อนๆ ทุกคน ที่ให้คำแนะนำและกำลังใจ ตลอดจนให้ความช่วยเหลือในด้านต่างๆ แก่ผู้วิจัย

สุดท้ายนี้ ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา และพี่ๆ ที่ให้กำลังใจ และสนับสนุนกำลังทรัพย์แก่ผู้วิจัยมาโดยตลอด จนทำให้งานวิจัยนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี

ขจรศรี วรรณสถิตย์

สารบัญ

บทที่ หน้า

1 บทนำ 1
ภูมิหลัง 1
ความมุ่งหมายของการวิจัย 5
ความสำคัญของการวิจัย 5
ขอบเขตของการวิจัย 6
นิยามศัพท์เฉพาะ 6
สมมติฐานของการวิจัย 8
ข้อตกลงเบื้องต้น 8

2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 9
เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ 9
ความหมายของการพิสูจน์ 9
การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ 10
การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \leftrightarrow Q$ 12
เทคนิคที่ช่วยในการพิสูจน์ 13
งานวิจัยที่เกี่ยวกับการพิสูจน์ 15
งานวิจัยในประเทศ 15
งานวิจัยต่างประเทศ 16

3 วิธีดำเนินการศึกษาค้นคว้า 23
การกำหนดกลุ่มตัวอย่าง 23
เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย 23
การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย 23
การเก็บรวบรวมข้อมูล 27
การจัดกระทำและวิเคราะห์ข้อมูล 27
สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล 28

4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล 29
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล 29

5 สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ 54
สังเขปความมุ่งหมาย สมมติฐาน และวิธีดำเนินการวิจัย 54
ความมุ่งหมาย 54
สมมติฐานในการวิจัย 54
วิธีดำเนินการวิจัย 54
สรุปผลการวิจัย 55

บทที่		หน้า
5	อภิปรายผล	59
	ข้อเสนอแนะ	66
	ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัย	66
	ข้อเสนอแนะเพื่อการเรียนการสอน	66
บรรณานุกรม		68
ภาคผนวก		73
	ภาคผนวก ก แบบทดสอบอัตนัย	74
	ภาคผนวก ข แบบสัมภาษณ์	80
	ภาคผนวก ค เฉลยแบบทดสอบอัตนัย	83
	ภาคผนวก ง รายนามผู้เชี่ยวชาญ	89
ประวัติย่อผู้วิจัย		91

บัญชีตาราง

ตาราง หน้า

1 ตารางแสดงการจัดลำดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 30
2 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ 33
3 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการวิเคราะห์สิ่งที่ต้องพิสูจน์ 33
4 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการใช้บทนิยามเพื่อวิเคราะห์สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ ... 34
5 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการเขียนสิ่งที่กำหนดให้สำหรับการเริ่มต้นการพิสูจน์ 34
6 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการเขียนสิ่งที่ต้องพิสูจน์ 35
7 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการแสดงวิธีการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข 35
8 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการเขียนข้อความแย้งสลับที่ 36
9 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการเขียนข้อความที่จะต้องพิสูจน์แทนข้อความเดิมเมื่อต้องการแสดงการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ 37
10 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการบอกสิ่งกำหนดให้ในการเริ่มต้นการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ 37
11 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดการรู้ข้อสรุปในการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ 37
12 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการแสดงพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ 38
13 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการเขียนข้อขัดแย้ง 39
14 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการเขียนสิ่งสมมติสำหรับการพิสูจน์ข้อความ P และข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง 40
15 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการแสดงการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง 40
16 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการบอกข้อความที่ต้องพิสูจน์ 41
17 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการแสดงการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$ 42
18 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการแสดงการพิสูจน์ 43
19 ตารางแสดงค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ค่าสัมประสิทธิ์ของการแปรผันของคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยของนิสิตจำแนกตามเพศ 44
20 ตารางแสดงผลการทดสอบภาวะการแจกแจงปกติของคะแนนนิสิตชายและนิสิตหญิงโดยใช้การทดสอบลิลลี่ฟอร์ส (Lilliefors test) 44
21 ตารางแสดงผลการเปรียบเทียบปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตจำแนกตามเพศ 45
22 ตารางแสดงค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ค่าสัมประสิทธิ์ของการแปรผันของคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยของนิสิตจำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ 45
23 ตารางแสดงผลการทดสอบภาวะการแจกแจงปกติของคะแนนที่จำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ โดยใช้การทดสอบลิลลี่ฟอร์ส (Lilliefors test) 46
24 ตารางแสดงผลการทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของคะแนนที่จำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ โดยการทดสอบลีเวน (Levene's test) 46

ตาราง หน้า

25 ตารางแสดงผลการเปรียบเทียบปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต จำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ 47

26 ตารางแสดงค่าความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน คณิตศาสตร์เป็นรายคู่ โดยใช้การทดสอบ LSD 47

27 ตารางแสดงร้อยละของจำนวนนิสิตที่มีทัศนคติต่อระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์......... 48

28 ตารางแสดงผลการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างเพศกับระดับปัญหาในการพิสูจน์ ทางคณิตศาสตร์ ทั้ง 4 ขั้น 52

29 ตารางแสดงผลการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์กับ ระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ทั้ง 4 ขั้น 53

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ หน้า

1 ภาพประกอบแสดงปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษา 21

บทที่ 1
บทนำ

ภูมิหลัง

คณิตศาสตร์เป็นวิชาหนึ่งที่ถือได้ว่า เป็นวิชาที่ปลูกฝังให้บุคคลรู้จักคิด มีความรอบคอบ มีระเบียบแบบแผน และรู้จักวิเคราะห์ปัญหาอย่างมีเหตุผล ดังที่ยุพิน พิพิธกุล (2519 : 1) ได้กล่าวว่า คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เกี่ยวกับการคิด เราใช้คณิตศาสตร์พิสูจน์อย่างมีเหตุผลว่า ความคิดทั้งหลายนั้นเป็นจริง คณิตศาสตร์เป็นภาษาอย่างหนึ่ง ซึ่งสามารถช่วยให้เราเกิดการกระทำในการคำนวณ การแก้ปัญหาการพิสูจน์ที่ยุ่งยากซับซ้อน คณิตศาสตร์เป็นโครงสร้างที่รวมความรู้ที่มีเหตุผล และเริ่มต้นจากธรรมชาติ เฮิร์ช (Hersh. 1993 : 392) กล่าวว่า นักคณิตศาสตร์ให้ความสนใจต่อการพิสูจน์มากกว่าคุณค่าของผลลัพธ์ และถือว่าการพิสูจน์เป็นสิ่งจำเป็นจะละเว้นเสียไม่ได้ เช่นเดียวกับ มาร์เคล (Markel. 1994 : 291-295) ที่กล่าวว่าการพิสูจน์เป็นหัวใจสำคัญของคณิตศาสตร์ การสร้างทฤษฎีบท และการพิสูจน์ทฤษฎีบท เป็นหน้าที่ของนักคณิตศาสตร์ ส่วนโซโลว์ (Solow. 1982 : 1) กล่าวว่า เป้าหมายของนักคณิตศาสตร์คือการค้นพบความจริง และถ่ายทอดความจริงนั้นๆ ภาษาที่ใช้ในการถ่ายทอด คือวิชาคณิตศาสตร์ ส่วนการพิสูจน์ คือวิธีการถ่ายทอดความจริงให้ผู้ที่ใช้ภาษาเดียวกันได้รับรู้ ประเสริฐ เสียงดี (2527 : 1) กล่าวว่า การพิสูจน์เป็นกระบวนการให้เหตุผลที่สำคัญอันหนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์ ที่จะพัฒนาข้อคาดคะเนในระบบคณิตศาสตร์เรื่องนั้นๆ ว่าเป็นข้อความที่เป็นจริงหรือสมเหตุสมผลจนยอมรับเป็นทฤษฎีบท เพื่อนำไปเป็นเหตุในการสรุปข้อความใหม่ในเรื่องที่จะศึกษากว้างขวางยิ่งขึ้น และถ้าหากขาดความรู้ความเข้าใจในเรื่องการพิสูจน์ มโนมติเรื่องโครงสร้างของคณิตศาสตร์นั้น จะเกิดขึ้นไม่ได้ เซอิด (Saeed. 1997 : 4300-A) กล่าวว่า ความสามารถในการพิสูจน์ และความเข้าใจในธรรมชาติของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ รวมทั้งเทคนิควิธีในการพิสูจน์เป็นองค์ประกอบในการวิเคราะห์ที่สำคัญในการเรียนคณิตศาสตร์ ดังนั้นจะเห็นได้ว่าการเรียนคณิตศาสตร์นั้นต้องอาศัยขั้นตอนการพิสูจน์อย่างมีเหตุผลเป็นสำคัญ

ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับสูงนั้นนิสิตนักศึกษาจะต้องอ่าน ทำความเข้าใจ วิเคราะห์การพิสูจน์ แสดงความคิดเห็น และเขียนแสดงการพิสูจน์เองได้ อีกทั้งต้องเข้าใจและเห็นคุณค่าของการพิสูจน์ด้วย ถึงกระนั้นก็ตามยังคงมีนิสิตนักศึกษาเป็นจำนวนมากที่มีปัญหาในการอ่านและเขียนการพิสูจน์ หลายคนมีความคิดรวบยอดที่ผิดเกี่ยวกับการพิสูจน์ และเทคนิคในการพิสูจน์ ซึ่งเป็นสิ่งขัดขวางความสามารถในการเขียนการพิสูจน์ของนิสิตนักศึกษา (Saeed. 1997 : 4300-A) มีงานวิจัยหลายเรื่องที่ได้กล่าวถึงปัญหาการพิสูจน์ของนักเรียน นิสิตนักศึกษา เช่น พิชากร แปลงประสพโชค (2518 : 2-5) กล่าวว่า ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เป็นชั้นที่เริ่มเรียนการพิสูจน์อย่างมีแบบแผน ผู้สอนวิชาเรขาคณิตมักพบว่า นักเรียนเรียนวิชานี้ไม่รู้เรื่อง และพิสูจน์ไม่เป็น เช่น พิสูจน์โดยใช้เหตุและผลไปคนละทางบ้าง การนำสิ่งที่จะต้องพิสูจน์มาเป็นข้ออ้างบ้าง และแม้แต่นักเรียนเก่งก็มีปัญหา เพราะเขาไม่สามารถแยกแยะได้เลยว่าข้อใดเป็นสิ่งที่ยอมรับโดยไม่ต้องมีการพิสูจน์ และข้อใดเป็นสิ่งที่ต้องพิสูจน์เสียก่อนจึงจะนำไปใช้อ้างอิงในการพิสูจน์ข้อความต่างๆ นอกจากนี้เมื่อมีปัญหาในการพิสูจน์เกิดขึ้นแล้ว ก็ยังส่งผลต่อเจตคติของผู้เรียนวิชาคณิตศาสตร์ด้วย สุวัฒนา อุทัยรัตน์ (2539 : 147) ได้ทำการวิจัยพบว่า นิสิตนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์มีความคิดเห็นต่อเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์แต่ละรายวิชาว่าเป็นเรื่องยาก โดยให้เหตุผลหนึ่งว่า คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่จะต้องมีการพิสูจน์ ซึ่งเป็นเรื่องยากสำหรับเขา ส่วนกาญจนา สนธิโพธิ์ (2527 : 1) กล่าวว่า เรื่องที่เป็นปัญหามาก

สำหรับนิสิตที่เรียนวิชาเอกคณิตศาสตร์ คือ การพิสูจน์ ผู้เรียนไม่ทราบว่าจะเริ่มต้นการพิสูจน์อย่างไร และไม่ทราบว่าจะดำเนินการพิสูจน์ไปในแนวทางใด จึงจะบรรลุถึงสิ่งที่ต้องการจะพิสูจน์ ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของกรรณิกา คล่องกิจกล (2527 : 1-2) ที่กล่าวว่า ปัญหาสำหรับผู้เรียนคือ ผู้เรียนไม่สามารถพิสูจน์เองได้ เพราะไม่ทราบแนวการพิสูจน์ ผู้เรียนไม่ทราบว่าจะเริ่มต้นการพิสูจน์อย่างไร ไม่สามารถเชื่อมโยงสิ่งที่มีอยู่แล้วหรือสิ่งที่ทราบมาช่วยในการพิสูจน์ และทำให้ประสบปัญหาในเรื่องการเลือกรูปแบบการพิสูจน์ คุค-บากส์ (Cook-Bax. 1997 : 5088-A) กล่าวว่า นักศึกษามีปัญหาในการเริ่มต้นการพิสูจน์ ทั้งยังไม่เห็นความสำคัญของการพิสูจน์ และคิดว่าการพิสูจน์เป็นเรื่องยากและน่าเบื่อ มัวร์ (Moore. 1990 : 137-144) กล่าวว่า ในการเรียนวิชาที่เน้นการพิสูจน์ นักศึกษามักประสบปัญหาในการอ่านและการเขียนการพิสูจน์ ซึ่งสาเหตุที่ทำให้นักศึกษาประสบปัญหาในการพิสูจน์ มีดังนี้

1. นักศึกษาไม่ทราบบทนิยาม นั่นคือ เขาไม่สามารถเขียนบทนิยามได้
2. นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจเชิงสหัชญาณ (Intuitive) ในมโนมติทางคณิตศาสตร์น้อย
3. ภาพลักษณ์มโนทัศน์ (Concept Image) ของนักศึกษามีไม่เพียงพอในการเขียนการพิสูจน์
4. นักศึกษาไม่สามารถหรือไม่มีความตั้งใจในการคิดและการใช้ตัวอย่างเพื่อช่วยในการพิสูจน์
5. นักศึกษาไม่ทราบว่าจะใช้บทนิยามในการแสดงให้เห็นโครงสร้างการพิสูจน์อย่างไร
6. นักศึกษาไม่เข้าใจและไม่สามารถใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์
7. นักศึกษาไม่ทราบว่าจะเริ่มต้นการพิสูจน์อย่างไร

ซึ่งปัญหาในข้อ 1 - 6 ล้วนส่งผลต่อการเริ่มต้นการพิสูจน์ของผู้เรียน นั่นคือ เป็นเรื่องธรรมดาที่ผู้เรียนจะประสบปัญหาในการเริ่มต้นการพิสูจน์ จนกว่าจะได้พัฒนาแก้ไขปัญหาในข้อ 1 – 6 ที่กล่าวข้างต้น จากการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้อง พบว่า ปัญหาในการเรียนการพิสูจน์ของผู้เรียนมีความสำคัญเป็นอย่างยิ่ง เพราะจุดมุ่งหมายที่สำคัญของการเรียน การสอนคณิตศาสตร์คือ การสอนให้ผู้เรียนรู้จักคิดอย่างมีเหตุผล มีความสามารถในการพิสูจน์ ดังนั้นหากผู้เรียนมีปัญหาในการเรียนการพิสูจน์ ย่อมส่งผลต่อการเรียนคณิตศาสตร์ และการพัฒนาตนเองอย่างแน่นอน มัวร์ (Moore. 1990 : 3) กล่าวว่า ในสภาพการณ์โดยทั่วไป ครูผู้สอนพบว่า นักศึกษาเขียนการพิสูจน์ไม่ได้ ส่วนนักศึกษาก็เห็นว่าการพิสูจน์เป็นเรื่องยาก เมื่อผู้เรียนกล่าวว่า เขาไม่เข้าใจคณิตศาสตร์ เขาไม่สามารถเขียนการพิสูจน์ได้ นั่นหมายความว่าผู้เรียนขาดความเข้าใจในบางเรื่อง แต่ก็ไม่รู้ว่าเป็นเรื่องใด อาจเป็นเรื่องความคิดรวบยอด ตรรกศาสตร์ การให้เหตุผล ภาษาทางคณิตศาสตร์ รูปแบบการพิสูจน์ หรือเป็นเรื่องอื่นใด ดังนั้นการที่ครูผู้สอน ศึกษาและวินิจฉัยปัญหาหรืออุปสรรคในการเรียนการพิสูจน์ จะนำไปสู่การแก้ไขและพัฒนาความรู้ความเข้าใจในการพิสูจน์และการเรียนคณิตศาสตร์ให้บรรลุเป้าหมายสูงสุดได้ ดังที่บอราซิ (Borasi.1986 : 246-248) กล่าวว่า ข้อบกพร่องสามารถเป็นแรงจูงใจให้สนใจวิธีการทางคณิตศาสตร์ เช่น เมื่อเกิดปัญหาว่าวิธีการผิดแต่ทำให้ผลลัพธ์ที่ออกมาถูกต้อง ทำให้รู้สึกประหลาดใจและอยากรู้ว่ามันเกิดได้อย่างไร เพราะอะไรจึงเป็นเช่นนั้น ความพยายามที่จะตอบปัญหาเหล่านี้ จะก่อให้เกิดประสบการณ์ในด้านความช่างคิด ซึ่งสอดคล้องกับคำกล่าวของ ไชยและ อัง (ดารณี คำแหง. 2532 : 5 ; อ้างอิงมาจาก Chai and Ang. 1987 : 189-198) ที่กล่าวถึงความสำคัญของการศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ว่า ในการสอนคณิตศาสตร์ การวิเคราะห์ความผิดพลาดเป็นสิ่งสำคัญที่จะทำให้การเรียนมีประสิทธิภาพ และการศึกษาความผิดพลาดจะทำให้สามารถจัดหาข้อมูลซึ่งเกี่ยวกับความคิดของนักศึกษาเกี่ยวกับปัญหาทางคณิตศาสตร์ และกระบวนการที่ใช้ในการแก้ปัญหา ข้อมูลเหล่านี้ มีความสำคัญมากต่อการเรียนการสอน ซึ่งจะต้องมีการแนะแนวทางในการช่วยให้นักศึกษาหลีกเลี่ยงปัญหา และสามารถอธิบายได้ว่าเพราะสาเหตุใดนักศึกษาจึงไม่มีพัฒนาการด้านความเข้าใจ

ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งนักวิจัยยืนยันว่า เมื่อข้อผิดพลาดของนักเรียนได้แสดงออกมา ทำให้เห็นว่า การเรียนรู้กำลังเริ่มขึ้น และสามารถทำให้มั่นคงขึ้นในภายหลัง

วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์นั้นมีรูปแบบต่าง ๆ กัน เช่น การพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข (Rule of Conditional Proof) การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง (Contradiction) การพิสูจน์โดยใช้การแย้งสลับที่ (Contrapositive) การพิสูจน์โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Induction) การพิสูจน์โดยการยกตัวอย่างค้าน (Counter Example) เป็นต้น มีทฤษฎีบทและปัญหาทางคณิตศาสตร์มากมาย ที่มีข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ (ถ้า P แล้ว Q) ดังนั้นการรู้จักวิธีการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ จึงเป็นเรื่องสำคัญและเป็นพื้นฐานที่สำคัญสำหรับการพิสูจน์ข้อความในรูปแบบอื่นๆ นอกจากนี้ยังมีการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$ (P ก็ต่อเมื่อ Q) ซึ่งอาศัยความรู้เรื่องการสมมูลของประพจน์ $P \leftrightarrow Q$ สมมูลกับ $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ และใช้ความรู้เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่เชื่อมด้วย “$\rightarrow$” มาช่วยในการพิสูจน์ (กมล เอกไทยเจริญ. 2541)

หลักสูตรคณิตศาสตร์ในประเทศไทย ได้บรรจุวิชาที่ฝึกให้นักเรียนพิสูจน์ตั้งแต่ระดับมัธยมศึกษา เช่น นักเรียนระดับมัธยมศึกษาจะได้เริ่มเรียนการพิสูจน์ในวิชาเรขาคณิต ส่วนในระดับมหาวิทยาลัยนิสิตที่เรียนวิชาเอกคณิตศาสตร์จะต้องศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ที่เน้นการพิสูจน์และเขียนแสดงการพิสูจน์ เช่น วิชาทฤษฎีจำนวน (Theory of Number) วิชาทฤษฎีเซต (Set Theory) วิชาคณิตศาสตร์วิเคราะห์ (Mathematical Analysis) วิชาพีชคณิตนามธรรม (Abstract Algebra) และวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์อื่นๆ เป็นต้น ดังนั้นการสอนคณิตศาสตร์ที่เน้นการพิสูจน์นั้นจะเริ่มสอนอย่างจริงจังในระดับนี้ หลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิตและ หลักสูตรการศึกษาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ได้บรรจุรายวิชา คณ 241 ชื่อรายวิชา หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์ (Principle of Mathematics) ให้เป็นวิชาบังคับ ซึ่งมีเนื้อหาประกอบด้วย ตรรกวิทยา เซต ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ระบบจำนวนจริง วิชานี้จะเน้นการให้เหตุผล และหลักการในการพิสูจน์ (มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. 2526 : 5) เนื้อหาที่เรียนไม่ใช่เรื่องใหม่เมื่อเทียบกับวิชาคณิตศาสตร์บางวิชาที่นิสิตเคยเรียนในระดับมัธยมศึกษา หรือวิชาพื้นฐานทางคณิตศาสตร์บางวิชาที่เรียนในระดับมหาวิทยาลัย แต่วิชานี้เป็นการเรียนที่เน้นการให้เหตุผลและฝึกการพิสูจน์ ให้นิสิตสามารถพัฒนาตัวเองในการให้เหตุผลและการเขียนการพิสูจน์ และในหลักสูตรวิชาเอกคณิตศาสตร์ทั้งคณะวิทยาศาสตร์ คณะครุศาสตร์หรือคณะศึกษาศาสตร์ของสถาบันการศึกษาอื่นๆ เช่น มหาวิทยาลัยนเรศวรและมหาวิทยาลัยบูรพา จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ สถาบันราชภัฏต่างๆ เป็นต้น ก็ได้บรรจุวิชาที่มีเนื้อหาและจุดมุ่งหมายคล้ายคลึงกับวิชา คณ 241 หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์ เป็นวิชาบังคับในหลักสูตรวิชาเอกคณิตศาสตร์ที่นิสิตนักศึกษาต้องเรียน ก่อนการเรียนวิชาคณิตศาสตร์วิชาอื่น โดยมหาวิทยาลัยนเรศวรและมหาวิทยาลัยบูรพา ใช้ชื่อวิชาหลักและวิธีการของคณิตศาสตร์ (Principle of Mathematics) (มหาวิทยาลัยนเรศวร.2539 : 75; มหาวิทยาลัยบูรพา. 2542 : 64) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยใช้ชื่อวิชา หลักคณิตศาสตร์ (Principle of Mathematics) (จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 2541 : 60) มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ใช้ชื่อวิชา รากฐานคณิตศาสตร์ (Foundation of Mathematics) (มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์. 2541 : 282) ส่วนสถาบันราชภัฏ เช่น สถาบันราชภัฏจันทรเกษม สถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา ใช้ชื่อวิชา หลักการคณิตศาสตร์ (Principle of Mathematics) (สถาบันราชภัฏจันทรเกษม. 2539 : 201 ; สถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา. 2540 : 178) จะเห็นได้ว่าในสถาบันการศึกษาต่างๆ ได้บรรจุวิชาที่เน้นการพิสูจน์ที่กล่าวมาข้างต้นเป็นวิชาบังคับสำหรับนิสิตนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ซึ่งอาจใช้ชื่อวิชาแตกต่างกันไปบ้าง ดังนั้นวิชาต่างๆ เหล่านี้และวิชา คณ 241 จึงเป็นวิชาที่เป็นพื้นฐานและมี

ประโยชน์อย่างยิ่งต่อผู้ที่เรียนวิชาเอกคณิตศาสตร์ นิสิตที่เรียนในหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต ก็จะสามารถนำความรู้ความเข้าใจ และทักษะในการพิสูจน์ที่ได้จากการเรียนวิชานี้ ไปใช้เป็นพื้นฐานในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์อื่นๆ ที่ต้องอาศัยการพิสูจน์ในขั้นสูงขึ้นไป นอกจากนี้นิสิตที่เรียนในหลักสูตรการศึกษาบัณฑิต ก็ยังสามารถที่จะนำวิธีการพิสูจน์ไปประยุกต์ใช้ในการประกอบวิชาชีพครูต่อไป

จากเหตุผลดังกล่าวข้างต้น ทำให้ผู้วิจัยสนใจศึกษาปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ โดยมุ่งศึกษากับนิสิตหลักสูตรการศึกษาบัณฑิต และเนื่องจากนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ทุกคนต้องเรียนวิชา คณ 241 หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นวิชาที่ฝึกการเขียนการพิสูจน์และเป็นวิชาพื้นฐานของวิชาเอกหลายวิชา เช่น วิชาทฤษฎีจำนวน (Theory of Number) วิชาทฤษฎีเซต (Set Theory) วิชาคณิตศาสตร์วิเคราะห์ (Mathematical Analysis) เป็นต้น จึงทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตหลักสูตรการศึกษาบัณฑิต ที่กำลังเรียนวิชา คณ 241 นอกจากนั้น ผู้วิจัยยังได้ลองทำการสำรวจเบื้องต้นเกี่ยวกับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ทั้งในหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต และหลักสูตรการศึกษาบัณฑิต ชั้นปีที่ 2 - 4 ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2542 จำนวน 89 คน โดยแบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มที่เรียนวิชา คณ 241 แล้ว จำนวน 39 คน เป็นนิสิตชาย จำนวน 14 คน นิสิตหญิงจำนวน 25 คน และกลุ่มที่กำลังเรียนวิชา คณ 241 ในภาคเรียนนี้ จำนวน 50 คน เป็นนิสิตชาย 11 คน นิสิตหญิง 39 คนผลการสำรวจพบว่า

1. ในกลุ่มที่เรียนวิชา คณ 241 แล้ว พบว่า นิสิตบางคนมีปัญหามากในเรื่องการคิดค้นวิธีการพิสูจน์ การเริ่มต้นการพิสูจน์ การเลือกรูปแบบการพิสูจน์ จำขั้นตอนการพิสูจน์ไม่ได้ ไม่รู้ว่าจะนำเนื้อหาส่วนใดมาใช้ ใช้การท่องจำมากกว่าเข้าใจ นิสิตบางคนบอกว่าทำการพิสูจน์ได้โดยอาศัยตัวอย่างจากหนังสือหรือที่อาจารย์เคยสอน ถ้าเป็นโจทย์ที่อาจารย์ไม่ให้คำแนะนำหรือไม่มีตัวอย่าง ก็จะทำไม่ได้เลย ส่วนรูปแบบการพิสูจน์ที่นิสิตคิดว่าเป็นปัญหาเมื่อนำมาใช้ ได้แก่ การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป “ถ้า P แล้ว Q” การพิสูจน์แบบแย้งสลับที่ การพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง บางคนทำการพิสูจน์แล้วไม่ทราบว่าอะไรคือข้อขัดแย้ง

2. ในกลุ่มที่กำลังเรียนวิชา คณ 241 พบว่า นิสิตบางคนมีปัญหามากในเรื่องการคิดค้นการพิสูจน์ การเริ่มต้นการพิสูจน์ การเขียนการพิสูจน์ การให้เหตุผล มีปัญหาในเรื่องความรู้พื้นฐาน เช่น ไม่เข้าใจเนื้อหาที่เรียน ลืมหรือจดจำเนื้อหาที่เรียนได้บ้างเล็กน้อย จึงพิสูจน์ไม่ได้ ไม่เข้าใจว่าทำไมต้องมีการพิสูจน์ ไม่เข้าใจบทนิยาม ทฤษฎีบท บางครั้งรู้สิ่งที่จะพิสูจน์ แต่ไม่สามารถหาข้อมูลมาพิสูจน์ได้ การพิสูจน์ที่ซับซ้อนก็ทำให้มีปัญหาในการพิสูจน์มาก นอกจากนี้ นิสิตบางคนบอกว่าไม่เข้าใจแนวคิดหรือสิ่งที่อาจารย์สอน และนิสิตส่วนใหญ่มักมีปัญหาในการพิสูจน์ทุกรูปแบบ

จากการที่ผู้วิจัยได้สัมภาษณ์นิสิตอย่างไม่เป็นทางการ กับนิสิตที่เคยเรียนวิชา คณ 241 หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์ เป็นนิสิตที่เรียนชั้นปีที่ 4 จำนวน 3 คน และนิสิตที่จบปริญญาตรี จำนวน 1 คน จากการสัมภาษณ์พบว่า นิสิตมีความคิดเห็นว่าวิชานี้มีประโยชน์ต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์อื่นๆ แต่บางทีเมื่อเรียนวิชาอื่นๆ ก็มักจะลืม เพราะแต่ละวิชาก็จะมีเนื้อหาที่ยากขึ้น ซับซ้อนมากขึ้น นิสิตเห็นว่าอาจารย์ผู้สอนแต่ละท่านมีเทคนิคการสอนต่างกัน ทำให้ยากง่ายต่างกัน นอกจากนี้นิสิตยังมีปัญหาในการพิสูจน์ เช่น ไม่ทราบว่าจะเริ่มต้นการพิสูจน์อย่างไร ไม่ทราบว่าจะเขียนการพิสูจน์อย่างไร เมื่อพบโจทย์แล้วมองไม่ออกว่าจะทำการพิสูจน์อย่างไร การเรียนในชั้นเรียนส่วนใหญ่จะเรียนรู้เรื่อง เข้าใจการพิสูจน์ และทำการพิสูจน์ได้ตามอาจารย์ผู้สอน แต่เมื่อทำแบบฝึกหัด หรือการบ้านที่ได้รับมอบหมายกลับพบปัญหาในการพิสูจน์ และอาจทำการพิสูจน์ต่อได้หากได้รับการชี้แนะจากอาจารย์

จากปัญหาการเรียนการสอนการพิสูจน์ซึ่งกล่าวมาในหลายลักษณะข้างต้น และโดยที่การพิสูจน์เป็นเรื่องที่เป็นพื้นฐานและจำเป็นสำหรับคณิตศาสตร์ทุกสาขา จึงทำให้ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะศึกษาปัญหาในการพิสูจน์ โดยผู้วิจัยเลือกวิจัยเฉพาะปัญหาที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ ของนิสิตหลักสูตรการศึกษาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ ว่านิสิตมีปัญหาในการพิสูจน์ในด้านใด แต่ละด้านที่เป็นปัญหามีจำนวนนิสิตมากน้อยเพียงใด มีลักษณะข้อผิดพลาดในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เป็นอย่างไร มีจำนวนนิสิตที่ผิดพลาดตามลักษณะนั้นๆ มากน้อยเพียงใด เปรียบเทียบปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตจำแนกตามตัวแปร คือ เพศ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ (ซึ่งแบ่งเป็น 3 กลุ่ม ตามเกรดเฉลี่ยของวิชา คณ 111 และ คณ 112 ได้แก่ กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ปานกลาง กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำ) ตลอดจนศึกษาถึงระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต และความสัมพันธ์ระหว่างระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตที่จำแนกตามตัวแปรข้างต้น เพื่อจะได้ข้อมูลสำหรับเป็นแนวทางในการจัดการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อศึกษา วิเคราะห์และจัดลำดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตการศึกษาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา คณ 241 หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2543
2. เพื่อศึกษาลักษณะข้อผิดพลาดในการพิสูจน์คณิตศาสตร์ของนิสิต
3. เพื่อเปรียบเทียบปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตจำแนกตามเพศ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์
4. เพื่อศึกษาระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต
5. เพื่อศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต กับตัวแปรทางด้านเพศ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

ความสำคัญของการวิจัย

การวิจัยเรื่องปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตที่ลงทะเบียนเรียนวิชา คณ 241 หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์ คาดว่าจะก่อให้เกิดประโยชน์ ดังนี้

1. ทำให้ทราบถึงลำดับของปัญหา และลักษณะปัญหา ตลอดจนลักษณะข้อผิดพลาดในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ของนิสิตที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา คณ 241 หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์
2. ทำให้ทราบถึงปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่จำแนกตามเพศ และ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์
3. ทำให้ทราบถึงระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต
4. ทำให้ทราบถึงความสัมพันธ์ระหว่างระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต กับเพศและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์
5. เพื่อเป็นแนวทางให้ผู้เกี่ยวข้องพิจารณา เพื่อปรับปรุงและแก้ไขการเรียน การสอนการพิสูจน์ต่อไป

ขอบเขตของการวิจัย

1. กลุ่มตัวอย่างเป็นนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา คณ 241 หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรการศึกษาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2543

2. ขอบเขตของเนื้อหา

เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยเป็นเนื้อหาในรายวิชา คณ 241 หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย ตรรกวิทยา เซต ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ระบบจำนวนจริง

3. รูปแบบการพิสูจน์

รูปแบบการพิสูจน์ที่ใช้ในการวิจัย มี 2 รูปแบบ คือ

3.1 รูปแบบการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ ได้แก่

3.1.1 การพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข (Rule of Conditional Proof)

3.1.2 การพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ (Contrapositive)

3.1.3 การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง (Contradiction)

3.2 รูปแบบการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$

4. ตัวแปรที่ศึกษา คือ

4.1 ปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต

4.2 ลักษณะข้อผิดพลาดในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

4.3 ระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต

4.5 เพศ

4.6 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. นิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ หมายถึง นิสิตที่เรียนในหลักสูตรการศึกษาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ที่ลงทะเบียนเรียนวิชา คณ 241 หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์ ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2543

2. การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การแสดงการให้เหตุผลแบบนิรนัยที่สมเหตุสมผล โดยอาศัยบทนิยาม สัจพจน์ ข้อความที่เคยพิสูจน์มาแล้ว และกฎการให้เหตุผลที่เป็นพื้นฐานทางตรรกศาสตร์

ในการวิจัยครั้งนี้ศึกษาการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของข้อความ 2 รูปแบบ คือ

2.1 การพิสูจน์ข้อความรูป $P \rightarrow Q$ ซึ่งได้แก่ การพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข (Rule of Conditional Proof) การพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ (Contrapositive) การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง (Contradiction)

2.2 การพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$

3. ปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง อุปสรรคหรือข้อขัดข้องที่เกิดขึ้นในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ที่ได้จากเครื่องมือที่เป็นแบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น แบ่งเป็น 4 ขั้น ได้แก่

3.1 ขั้นทำความเข้าใจโจทย์เบื้องต้น ได้แก่

3.1.1 รู้สิ่งที่โจทย์กำหนดหรือสมมติฐาน

3.1.2 รู้สิ่งที่โจทย์ให้พิสูจน์

3.1.3 รู้ว่าจะต้องแสดงการพิสูจน์อย่างไรที่จะพิสูจน์ตามที่โจทย์กำหนด

3.2 ขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ ได้แก่

3.2.1 การเลือกรูปแบบการพิสูจน์

3.2.2 การเขียนสมมติฐานเริ่มต้นสำหรับการพิสูจน์

3.2.3 รู้ข้อสรุปสำหรับการพิสูจน์

3.3 ขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์ ได้แก่

3.3.1 การใช้บทนิยาม ทฤษฎีบทในขั้นตอนการพิสูจน์

3.3.2 การใช้กระบวนการแก้ปัญหาหรือเทคนิคต่าง ๆ

3.3.3 การใช้ข้อเท็จจริงหรือสิ่งที่เรียนรู้มาแล้ว

3.3.4 การใช้ข้อมูลที่เกี่ยวข้องในการพิสูจน์

3.4 ขั้นการแสดงการพิสูจน์ ได้แก่

3.4.1 การเขียนแสดงการพิสูจน์เป็นขั้นตอนจนได้เป็นผลสำเร็จ

3.4.2 การใช้ภาษาและสัญลักษณ์

3.4.3 การใช้ตรรกศาสตร์ การอ้างเหตุผล หรือสัจนิรันดร์

3.4.4 การระมัดระวังในการแสดงการเขียนพิสูจน์

4. ข้อผิดพลาดในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง คำตอบหรือวิธีการพิสูจน์ที่ผิดของนิสิตที่ทำแบบทดสอบ

5. ระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต หมายถึง ความคิดเห็นของนิสิตต่อปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ว่านิสิตมีปัญหาในการพิสูจน์ในด้านใด เป็นปัญหาในระดับใด โดยได้จากแบบสัมภาษณ์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ซึ่งแบ่งเป็น 4 ด้าน ดังนี้

5.1 ระดับปัญหาในขั้นทำความเข้าใจโจทย์เบื้องต้น เช่น ความเข้าใจในโจทย์ การแยกแยะสิ่งที่โจทย์กำหนดและสิ่งที่ต้องพิสูจน์ ความเข้าใจในเนื้อหาที่เกี่ยวกับโจทย์ เป็นต้น

5.2 ระดับปัญหาในขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ เช่น การเขียนสมมติฐานสำหรับการพิสูจน์ การเขียนเริ่มต้นการพิสูจน์ เป็นต้น

5.3 ระดับปัญหาในขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์ เช่น การใช้เทคนิคหรือวิธีการที่นำมาช่วยในการพิสูจน์ เป็นต้น

5.4 ระดับปัญหาในขั้นแสดงการพิสูจน์ เช่น การเขียนการพิสูจน์ การแสดงขั้นตอนการพิสูจน์ การใช้ภาษาในการเขียน เป็นต้น

6. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ หมายถึง เกรดเฉลี่ยของวิชา คณ 111 และคณ 112 แบ่งเป็น 3 ระดับ ดังนี้

6.1 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง หมายถึง มีเกรดเฉลี่ยของวิชา คณ 111 และคณ 112 ตั้งแต่ 3.00 ขึ้นไป

6.2 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ปานกลาง หมายถึง มีเกรดเฉลี่ยของวิชา คณ 111 และคณ 112 ตั้งแต่ 2.00 - 2.99

6.3 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำ หมายถึง มีเกรดเฉลี่ยของวิชาคณ 111 และคณ 112 ต่ำกว่า 2.00

7. วิชา คณ 241 หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์ เป็นวิชาคณิตศาสตร์บังคับในหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิตและการศึกษาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรี ในมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เนื้อหาประกอบด้วย ตรรกวิทยา เซต ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ระบบจำนวนจริง วิชานี้เน้นการให้เหตุผลและหลักการในการพิสูจน์

สมมติฐานของการวิจัย

1. เพศ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ที่ต่างกัน มีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์แตกต่างกัน

2. เพศ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ มีความสัมพันธ์กับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต

ข้อตกลงเบื้องต้น

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยมีจุดมุ่งหมายที่จะศึกษาเฉพาะปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต โดยไม่ได้คำนึงถึงการสอนอาจารย์ผู้สอนแต่อย่างใด เพราะผู้วิจัยเชื่อว่าการแก้ปัญหาเฉพาะหน้าจะต้องเกิดจากการที่ผู้เรียนนำความรู้ที่ได้เรียนไปประยุกต์ใช้ให้เป็นได้ด้วยตนเอง

บทที่ 2
เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย

ในงานวิจัยเรื่องการศึกษาปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนวิชา คณ 241 หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

1. เอกสารที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์
   1.1 ความหมายของการพิสูจน์
   1.2 การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$
   1.3 การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \leftrightarrow Q$
   1.4 เทคนิคที่ช่วยในการพิสูจน์
2. งานวิจัยที่เกี่ยวกับพิสูจน์
   2.1 งานวิจัยในประเทศ
   2.2 งานวิจัยต่างประเทศ

ความหมายของการพิสูจน์

มีผู้ให้ความหมายของการพิสูจน์ (Proof) ไว้หลายท่าน เช่น

มัวร์ (Moore. 1991 : 51) ได้ให้ความหมายของการพิสูจน์ว่า การพิสูจน์คือ ลำดับทางตรรกศาสตร์ของประโยค โดยเริ่มจากสมมติฐานไปจนถึงบทสรุป ซึ่งมีลำดับขั้นตอนต่อไปนี้

1. อาศัยสมมติฐาน
2. อาศัยบทนิยามหรือสัจพจน์
3. อาศัยสิ่งที่พิสูจน์มาแล้ว
4. อาศัยกฎของการให้เหตุผล

วิลสัน (Wilson. 1993 : 49) กล่าวว่า การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นกระบวนการที่ใช้บทนิยาม สัจพจน์ ข้อความที่เคยพิสูจน์แล้วว่าเป็นจริงและการให้เหตุผลแบบนิรนัย ที่จะแสดงว่าข้อความนั้นสมเหตุสมผล

จอห์น เกลน และ เกรแฮม (John Glenn and Graham Littler. 1987) กล่าวว่าการพิสูจน์ข้อความหรือทฤษฎีบท คือ ลำดับของประโยค ที่อาศัยขั้นตอนทางตรรกศาสตร์เป็นลำดับ เช่นเดียวกับโมราช (Morash. 1991 : 143) ที่กล่าวว่า การพิสูจน์ คือลำดับของประโยค ที่แต่ละประโยคสมเหตุสมผล โดยอาศัยสัจพจน์หรือทฤษฎีบทที่ได้พิสูจน์มาแล้วใช้เป็นข้ออ้าง

เจมส์ (James. 1976) ได้ให้ความหมายของการพิสูจน์ว่า

1. การแสดงเหตุผลโดยอาศัยตรรกศาสตร์ ที่จะแสดงให้เห็นค่าความจริงของข้อความ
2. กระบวนการของการแสดงข้อความที่ต้องการพิสูจน์โดยได้มาจากข้อความที่พิสูจน์มาแล้วหรือระบบสัจพจน์

สุเทพ ทองอยู่ (2540 : 34) กล่าวว่า การพิสูจน์ คือการแสดงการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผล

ประเสริฐ เสียงดี (2527 : 1) กล่าวว่า การพิสูจน์เป็นกระบวนการให้เหตุผลที่สำคัญในวิชาคณิตศาสตร์ ที่จะพัฒนาข้อคาดคะเนในระบบคณิตศาสตร์เรื่องนั้น ๆ ว่าเป็นข้อความที่เป็นจริง หรือสมเหตุสมผลจนยอมรับเป็นทฤษฎี เพื่อนำไปเป็นเหตุในการสรุปข้อความใหม่

จากความหมายของการพิสูจน์ ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยให้ความหมายของการพิสูจน์ว่า หมายถึง การแสดงการให้เหตุผลแบบนิรนัยที่สมเหตุสมผล โดยอาศัยบทนิยาม สัจพจน์ ข้อความที่เคยพิสูจน์มาแล้ว และกฎการให้เหตุผลซึ่งเป็นพื้นฐานทางตรรกศาสตร์

วิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มีด้วยกันหลายวิธี การนำไปใช้ขึ้นอยู่กับลักษณะของโจทย์ปัญหานั้นๆ วิธีที่เลือกใช้ต้องเป็นวิธีที่เหมาะสม ได้ผลถูกต้อง ชัดเจนและรัดกุมที่สุด

การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$

มีวิธีการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \rightarrow Q$ อยู่หลายรูปแบบ เช่น การพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข การพิสูจน์โดยใช้การแย้งสลับที่ การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง มีรายละเอียดดังนี้

1. การพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข (Rule of Conditional Proof : RCP) เป็นการพิสูจน์ทางตรง (Direct Proof) โดยเริ่มจากการยอมรับว่าเหตุ (P) เป็นจริง แล้วใช้ บทนิยาม ทฤษฎีบทที่มาก่อนหน้า สัจพจน์ รวมทั้งกฎต่าง ๆ ทางตรรกศาสตร์อ้างหรือพิสูจน์ให้ได้ผล (Q)

กล่าวคือ ถ้า P เป็นเหตุ และ $S_1, S_2, S_3, ..., S_n$ เป็นบทนิยาม หรือทฤษฎีบท หรือสัจพจน์ หรือกฎทางตรรกศาสตร์ และ Q เป็นผล การพิสูจน์ข้อความ $P \rightarrow Q$ คือการอ้างเหตุผล $P, S_1, S_2, S_3, ..., S_n \vdash Q$ ซึ่งสมเหตุสมผล และการแสดงว่ารูปแบบการอ้างเหตุผลสมเหตุสมผลนั้นทำได้โดยแสดงว่า $(P \wedge S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge ... \wedge S_n) \rightarrow Q$ เป็นสัจนิรันดร์

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนคู่แล้ว a^2 เป็นจำนวนคู่

<u>วิเคราะห์</u> ข้อความ P คือ a เป็นจำนวนคู่

ข้อความ Q คือ a^2 เป็นจำนวนคู่

<u>พิสูจน์</u> ให้ a เป็นจำนวนคู่

เพราะฉะนั้น มีจำนวนเต็ม k บางจำนวน ซึ่ง $a = 2k$ (S_1)

$a^2 = 2(2k^2)$ และ $2k^2$ เป็นจำนวนเต็ม (S_2)

ดังนั้น a^2 เป็นจำนวนคู่

(นั่นคือ ได้แสดงแล้วว่า $P \wedge S_1 \wedge S_2 \rightarrow Q$)

2. การพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ (Contrapositive)

จากความรู้เรื่องตรรกศาสตร์ เราทราบว่า $P \rightarrow Q$ สมมูลกับ $\sim Q \rightarrow \sim P$ ประพจน์ที่สมมูลกันในลักษณะนี้เรียกว่า ประพจน์แย้งสลับที่ (Contrapositive) ดังนั้น ถ้าต้องการพิสูจน์ข้อความ $P \rightarrow Q$ ก็สามารถพิสูจน์ข้อความ $\sim Q \rightarrow \sim P$ แทนได้ โดยใช้การพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข ช่วยการพิสูจน์ต่อไป

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า ถ้า a^2 เป็นจำนวนคี่แล้ว a เป็นจำนวนคี่

<u>วิเคราะห์</u> ข้อความ P คือ a^2 เป็นจำนวนคี่

ข้อความ $\sim P$ คือ a^2 เป็นจำนวนคู่

ข้อความ Q คือ a เป็นจำนวนคี่

ข้อความ $\sim Q$ คือ a เป็นจำนวนคู่

<u>พิสูจน์</u> พิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ เราจะต้องพิสูจน์ว่า

ถ้า a เป็นจำนวนคู่แล้ว a^2 เป็นจำนวนคู่

แล้วใช้การพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข ช่วยในการพิสูจน์ต่อไป

(Bittinger. 1972 : 65-69)

3. การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง (Contradiction)

3.1 การพิสูจน์ข้อความ P โดยใช้ข้อขัดแย้ง

จากการตรวจสอบค่าความจริง ประพจน์ที่อยู่ในรูป $\sim P \wedge (R \wedge \sim R) \rightarrow P$ เป็นสัจนิรันดร์ ดังนั้น ถ้าเราต้องการพิสูจน์ข้อความ P โดยใช้ข้อขัดแย้ง มีขั้นตอนวิธีการพิสูจน์ดังนี้

ขั้นที่ 1 สมมติ $\sim P$

ขั้นที่ 2 ใช้สมมติฐาน $\sim P$ พิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข จนกระทั่งได้ประพจน์ $R \wedge \sim R$ ซึ่งเป็นประพจน์ที่ขัดแย้งกัน โดยที่ R อาจจะเป็นสัจพจน์ ทฤษฎีบทที่พิสูจน์มาก่อนหน้า หรือเป็นบทนิยาม

ขั้นที่ 3 จะได้ P

3.2 การพิสูจน์ข้อความ $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง

ในการพิสูจน์ข้อความ $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง ทำได้เช่นเดียวกับการพิสูจน์ในข้อ 3.1 โดยการเปรียบข้อความ $P \rightarrow Q$ เหมือนกับข้อความเดี่ยว S ดังนั้นขั้นตอนการพิสูจน์จะเป็นดังนี้

ขั้นที่ 1 สมมติ $\sim S$ คือ $\sim(P \rightarrow Q)$ ซึ่งสมมูลกับ $P \wedge \sim Q$

ขั้นที่ 2 ใช้สมมติฐานนี้พิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข จนกระทั่งได้ประพจน์ที่ขัดแย้งกัน ซึ่งอาจเป็น $P \wedge \sim P$ หรือ $Q \wedge \sim Q$ หรือ $R \wedge \sim R$ ประพจน์ใดประพจน์หนึ่งก็ได้ เมื่อ R เป็นสัจพจน์ หรือทฤษฎีบทที่พิสูจน์มาแล้ว หรือเป็นบทนิยาม

ขั้นที่ 3 จะได้ $P \rightarrow Q$

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิสูจน์ว่า $x \neq 0 \rightarrow x^{-1} \neq 0$

<u>วิเคราะห์</u> ข้อความ P คือ $x \neq 0$

ข้อความ Q คือ $x^{-1} \neq 0$

ข้อความ $\sim Q$ คือ $x^{-1} = 0$

<u>พิสูจน์</u> การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง

สมมติ $x \neq 0 \wedge x^{-1} = 0$

พิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไขต่อไปจนกระทั่งได้ $R \wedge \sim R$ หรือประพจน์ที่ขัดแย้งอื่นๆ เพื่อสรุปให้ได้ว่า $x \neq 0 \rightarrow x^{-1} \neq 0$ เป็นจริง

สิ่งสำคัญในวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง คือ ต้องเข้าใจและเขียนข้อความนิเสธ (Negation of the Statement) ได้ เช่น

ข้อความนิเสธของข้อความ "ไม่มีจำนวนจริงบวกที่น้อยที่สุด" คือ "มีจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด"

ข้อความนิเสธของข้อความ "$x \neq 0 \rightarrow x^{-1} \neq 0$" คือ "$x \neq 0 \wedge x^{-1} = 0$"

(กมล เอกไทยเจริญ. 2541)

การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \leftrightarrow Q$

การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \leftrightarrow Q$ สามารถทำการพิสูจน์ได้ 2 วิธี ดังนี้

1. โดยการพิสูจน์ข้อความ $P \rightarrow Q$ กับ $Q \rightarrow P$

จากความรู้เรื่องการสมมูลของประพจน์ เราทราบว่า $P \leftrightarrow Q$ สมมูลกับ $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ ดังนั้นการพิสูจน์ข้อความ ต้องแยกการพิสูจน์ออกเป็น 2 ตอน คือ

ตอนที่ 1 พิสูจน์ข้อความ $P \rightarrow Q$

ตอนที่ 2 พิสูจน์ข้อความ $Q \rightarrow P$

แต่ละตอนใช้ความรู้เรื่องการพิสูจน์ข้อความที่เชื่อมด้วย “$\rightarrow$”

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า a เป็นจำนวนคู่ก็ต่อเมื่อ a^2 เป็นจำนวนคู่

<u>วิเคราะห์</u> ข้อความ $P \rightarrow Q$ คือ ถ้า a เป็นจำนวนคู่แล้ว a^2 เป็นจำนวนคู่

ข้อความ $Q \rightarrow P$ คือ ถ้า a^2 เป็นจำนวนคู่แล้ว a เป็นจำนวนคู่

<u>พิสูจน์</u> *ตอนที่ 1* (จะต้องพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนคู่แล้ว a^2 เป็นจำนวนคู่)

ให้ a เป็นจำนวนคู่

แล้วพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข พิสูจน์ให้ได้ a^2 เป็นจำนวนคู่

ตอนที่ 2 (จะต้องพิสูจน์ว่า ถ้า a^2 เป็นจำนวนคู่แล้ว a เป็นจำนวนคู่)

(พิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ นั่นคือ ต้องพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนคี่แล้ว a^2 เป็นจำนวนคี่)

ให้ a เป็นจำนวนคี่

แล้วพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข พิสูจน์ให้ได้ a^2 เป็นจำนวนคี่

2. พิสูจน์โดยใช้อีฟ สตริง (Iff-string)

ปัญหาบางปัญหาที่เป็นข้อความ $P \leftrightarrow Q$ การพิสูจน์อาจไม่ต้องแยกออกเป็น 2 ตอน ดังในข้อ 1 หากในระหว่างการพิสูจน์นั้นเราใช้เฉพาะบทนิยามหรือกฎต่างๆ ที่ว่าด้วยการสมมูลเท่านั้น กล่าวคือ ถ้าสามารถหาข้อความ $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ ซึ่งทำให้

$P \leftrightarrow Q_1$

$Q_1 \leftrightarrow Q_2$

$Q_2 \leftrightarrow Q_3$

...

$Q_n \leftrightarrow Q$

ก็จะสามารถสรุป $P \leftrightarrow Q$ ได้

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ A และ B เป็นเซต จงพิสูจน์ว่า $A \cup B = B \cup A$

<u>พิสูจน์</u> $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

$\leftrightarrow x \in B \vee x \in A$

$\leftrightarrow x \in B \cup A$

ดังนั้น $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in B \cup A$

ดังนั้น $A \cup B = B \cup A$

รูปแบบการพิสูจน์ที่กล่าวมา เป็นการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ นอกจากนี้ยังมีวิธีการพิสูจน์อื่นๆ อีก เช่น การพิสูจน์โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Induction) การพิสูจน์ว่ามีอยู่ (Existence) การพิสูจน์โดยการแจงกรณี (Proof by Case) การพิสูจน์ว่าเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน (Counterexample) เป็นต้น ทั้งนี้การที่ผู้พิสูจน์จะเลือกวิธีการพิสูจน์รูปแบบใดก็ขึ้นอยู่กับโจทย์และความเหมาะสม ซึ่งโจทย์บางโจทย์อาจแสดงการพิสูจน์ได้หลายวิธี หรือบางโจทย์อาจแสดงการพิสูจน์ได้วิธีเดียว ผู้พิสูจน์ต้องรู้จักเลือกวิธีพิสูจน์ โดยต้องเลือกแนวทางในการพิสูจน์ที่เหมาะสมที่สุด โดยยึดหลักที่ว่า ต้องเป็นวิธีที่ง่าย สั้น ชัดเจนและรัดกุม

เทคนิคที่ช่วยในการพิสูจน์

ในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์นั้นจำเป็นต้องมีเทคนิคนิคที่ช่วยในการพิสูจน์ ซึ่งเทคนิคหนึ่งก็คือการเปลี่ยนรูปข้อความที่จะพิสูจน์ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ทางตรรกศาสตร์ หรืออาจนำแนวคิดหรือวิธีการพิสูจน์จากทฤษฎีบทที่ได้พิสูจน์มาแล้ว เป็นแนวทางในการพิสูจน์ เป็นต้น ดังที่ บิททินเจอร์ (Bittinger. 1972 : 75 - 79) ได้เสนอเทคนิคที่ช่วยในการพิสูจน์ไว้ดังนี้

1. การเปลี่ยนรูปข้อความที่จะพิสูจน์ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ (Translate to Logical Symbolism)

การแปลงข้อความที่จะพิสูจน์ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ทางตรรกศาสตร์ แล้วเลือกวิธีการพิสูจน์ที่เหมาะสม เช่น การพิสูจน์ข้อความ “P เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับ Q" แปลงให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ได้เป็น $P \rightarrow Q$ แล้วเลือกวิธีการพิสูจน์ข้อความ $P \rightarrow Q$ ซึ่งมี 3 วิธีคือ

1.1 RCP : การสมมติ P แล้วพิสูจน์ให้ได้ Q

1.2 Contrapositive : สมมติ $\sim Q$ แล้วพิสูจน์ให้ได้ $\sim P$

1.3 Contradiction : สมมติ $P \wedge \sim Q$ แล้วพิสูจน์เพื่อหาข้อขัดแย้ง จากนั้น

สรุป Q

เมื่อเลือกวิธีการพิสูจน์ได้แล้ว ก็ทำให้ทราบแนวทางในการพิสูจน์ต่อไป

2. การอุปมา (Analogy)

คือการนำแนวคิดหรือวิธีการพิสูจน์จากทฤษฎีบทหรือข้อความอื่นที่ได้พิสูจน์มาแล้วเป็นแนวทางหรือแบบอย่างในการพิสูจน์ข้อความที่ต้องการ ซึ่งนักคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่กล่าวว่า การที่จะเป็นนักคณิตศาสตร์ที่ดีนั้นต้องได้รับการฝึกปฏิบัติ ได้แก้ปัญหา และได้พิสูจน์ข้อความที่หลากหลาย

3. วิธีการคิดย้อนกลับ (Working Backwards)

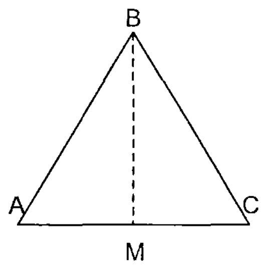
ใช้วิธีการคิดย้อนกลับ เพื่อหาแนวทางในการพิสูจน์ เช่น ในการพิสูจน์ข้อความ $P \rightarrow Q$ ทำโดยเริ่มต้นที่ข้อความ Q แล้วคิดย้อนกลับหาข้อความ R ที่ $R \rightarrow Q$ ต่อไปคิดย้อนกลับหาข้อความ S ที่ $S \rightarrow R$ และดำเนินการเช่นนี้ไปจนได้ข้อความ T ที่ $P \rightarrow T$

นั่นคือ $(R \rightarrow Q) \wedge (S \rightarrow R) \wedge (\ldots \rightarrow S) \wedge (T \rightarrow \ldots) \wedge (P \rightarrow T)$

จะได้ $P \rightarrow T \rightarrow \ldots \rightarrow S \rightarrow R \rightarrow Q$

นั่นคือ สามารถทำการพิสูจน์ $P \rightarrow Q$ ได้ โดยวิธีการคิดย้อนกลับ

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC



จงพิสูจน์ว่า ถ้า AB = CB แล้ว $\angle A = \angle C$

<u>วิเคราะห์</u> ใช้วิธีการคิดย้อนกลับ

1. $\angle A = \angle C$ เมื่อ $\angle A$ และ $\angle C$ เป็นมุมที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ

2. สามเหลี่ยมสองรูปจะเท่ากันทุกประการเมื่อ เป็นตามเงื่อนไข ด.ม.ด. หรือ ม.ด.ม. หรือ ด.ด.ด.

3. *สร้าง* ลากเส้นตรงจากจุด B มาแบ่งครึ่ง AC ที่จุด M จะได้ AM = MC และ BM = BM

4. AB = CB โจทย์กำหนด

<u>พิสูจน์</u> กำหนดให้ AB = CB

ลากเส้นตรงจากจุด B มาแบ่งครึ่ง AC ที่จุด M

จะได้ BM = BM (ด้านร่วม) และ AM = CM (จุด M แบ่งครึ่ง AC)

ดังนั้น $\Delta AMB \cong \Delta CMB$ (ด.ด.ด.)

ดังนั้น $\angle A = \angle C$

4. วิธีการลองผิดลองถูก (Do-Something Approach, Trial and Error)

ในการพิสูจน์ข้อความบางข้อความ เราไม่มีแบบแผนที่แน่นอนว่าจะดำเนินการพิสูจน์อย่างไร แต่เราสามารถหาวิธีพิสูจน์ด้วยวิธีการหนึ่ง คือการลองผิดลองถูกจนได้ผลสรุปตามที่ต้องการ เช่น การพิสูจน์ข้อความ $P \rightarrow Q$ อาจลองเลือกวิธีการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข เมื่อไม่ได้ผลสรุปตามที่ต้องการ ก็ลองเลือกวิธีการพิสูจน์ข้อความแย้งสลับที่ หรือแบบอื่นๆ ซึ่งอาจนำไปสู่ผลสรุปที่ต้องการได้ เป็นต้น

5. การใช้บทนิยามในการพิสูจน์ (Use of Definition)

บทนิยามจะช่วยให้เข้าใจมโนมติทางคณิตศาสตร์ และเห็นโครงสร้างในการพิสูจน์ ทำให้ทราบว่าจะดำเนินการพิสูจน์ไปในแนวทางใด จึงเลือกวิธีการพิสูจน์ได้ เช่น

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ A, B เป็นเซตใดๆ จงพิสูจน์ว่า $A \cap B \subset A$

<u>วิเคราะห์</u> ในการจะพิสูจน์ว่า $A \cap B \subset A$ โดยอาศัยบทนิยามที่ว่า

"$A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับสมาชิก x ทุกตัว $x \in A \rightarrow x \in B$"

ดังนั้น การพิสูจน์ข้อความนี้ ก็ต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า

"สำหรับสมาชิก x ทุกตัว ถ้า $x \in A \cap B$ แล้ว $x \in A$"

ต่อไปก็เลือกวิธีการพิสูจน์ที่เหมาะสม ในที่นี้จะเลือกการพิสูจน์แบบ RCP

<u>พิสูจน์</u> ให้ x เป็นสมาชิกใดๆ ของเอกภพสัมพัทธ์ U

$x \in A \cap B \rightarrow x \in A \wedge x \in B$

$\rightarrow x \in A$ $(p \wedge q) \rightarrow p$ เป็นสัจนิรันดร์

ดังนั้น $A \cap B \subset A$

6. การใช้ทฤษฎีบทที่มาก่อนหน้าหรือที่พิสูจน์มาแล้ว (Use Previously Proved Theorem)

วิธีนี้เป็นการใช้ทฤษฎีบทที่มาก่อนหน้าหรือที่พิสูจน์มาแล้วมาช่วยในการพิสูจน์ ซึ่งทฤษฎีบทที่นำมาใช้ในการพิสูจน์อาจมีความเกี่ยวข้องหรือสัมพันธ์กับสิ่งที่เราต้องการพิสูจน์

นอกจากนี้ สุเทพ ทองอยู่ (2535 : 11) ได้กล่าวถึง กระบวนการที่จำเป็นต้องใช้ในการพิสูจน์ไว้ 2 ประการ คือ

1. การสังเคราะห์ เป็นกระบวนการแก้ปัญหาที่เริ่มจากข้อมูลที่กำหนดหรือสมมติฐานดำเนินการไปเรื่อยๆ จนถึงสิ่งที่ต้องการพิสูจน์หรือผลสรุป ดังนั้นผู้แก้ปัญหาจะต้องพยายามแยกย่อย สมมติฐาน และพิจารณาว่าสมมติฐานแต่ละส่วนสามารถสรุปผลใดได้บ้าง จากนั้นใช้ความรู้ต่างๆ ที่เคยทราบมาก่อนรวมทั้งผลที่ได้จากสมมติฐาน หาเหตุผลที่ชัดเจนเพื่อนำไปสู่ผลสรุป

2. การวิเคราะห์ เป็นกระบวนการแก้ปัญหาที่กลับกันกับการสังเคราะห์โดยเริ่มจากสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ หรือผลสรุปย้อนกลับไปถึงข้อมูลที่กำหนด หรือสมมติฐาน ผู้พิสูจน์จะต้องพิจารณาว่ามีข้อมูลใดนำไปสู่ข้อมูลที่จะนำไปสู่สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ ทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนกว่าจะได้ข้อมูลซึ่งสามารถสรุปได้ผลจากข้อมูลที่กำหนด หรือข้อมูลที่เคยเรียนรู้มาก่อน

จากกระบวนการที่กล่าวมาข้างต้นมีความจำเป็นมากในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเวลาที่พิสูจน์จะต้องใช้กระบวนการต่างๆ อยู่ตลอดเวลา ตลอดจนไหวพริบและความชำนาญในการพิสูจน์ของนิสิตที่ต้องอาศัยความชำนาญ การฝึกฝน และความทุ่มเทในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเทคนิคต่างๆ เหล่านี้ไม่ใช่เทคนิคที่ตายตัว ผู้พิสูจน์อาจค้นพบวิธีการหรือแนวคิดได้เอง ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับประสบการณ์ของผู้พิสูจน์เอง การที่ผู้พิสูจน์มีเทคนิคหรือแนวทางที่ช่วยในการพิสูจน์และรู้จักใช้ ย่อมทำการพิสูจน์ได้ง่าย และสะดวกยิ่งขึ้น

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

งานวิจัยภายในประเทศ

มีผู้ทำการวิจัยเกี่ยวกับการศึกษาปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนและการสอนการพิสูจน์ไว้หลายท่าน เช่น ธนูชัย ภูอุดม (2524 : 22-23) ได้ทำการศึกษาสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ หลักสูตรการศึกษาบัณฑิต ชั้นปีที่ 4 มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ผลการวิจัยพบว่านิสิตมีสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้านต่ำ และได้สรุปว่าอาจมีสาเหตุมาจากหลายประการ เช่น นิสิตเกิดความสับสนในการตอบ ขาดความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ขาดความระมัดระวังในการคิดคำนวณ ขาดมโนมติในบางเรื่อง การสอนยังไม่ได้เน้นเรื่องการยกตัวอย่างค้านทำให้นิสิตไม่คุ้นเคย และไม่สนใจเรื่องนี้เท่าที่ควร ในการเขียนตอบแบบทดสอบพบว่า นิสิตยังเขียนไม่ถูกต้องตามภาษาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งต่อมา นวรัตน์ ศุภสินธุ์ (2525 : 1-3) ได้ทำการศึกษาถึงผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเซตและระบบจำนวน ของนิสิตที่ได้รับการสอนโดยการเน้นการยกตัวอย่างค้านกับการสอนตามปกติ พบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนิสิตที่ได้รับการสอนโดยการเน้นการยกตัวอย่างค้านสูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนตามปกติ ที่ระดับนัยสำคัญ .01 และยังพบว่า การสอนที่เน้นการยกตัวอย่างค้านช่วยให้นิสิตสามารถทำความเข้าใจทฤษฎีในเรื่องเซต และระบบจำนวนได้เป็นอย่างดี และ

ช่วยให้นิสิตเข้าใจถึงความสำคัญของเงื่อนไขของนิยาม และทฤษฎี สามารถนำนิยามและทฤษฎีต่างๆ ไปใช้ได้อย่างถูกต้องรอบคอบและระมัดระวัง

จากงานวิจัยของธนูชัย ที่ได้ศึกษาถึงสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้าน และพบว่าสมรรถภาพต่ำนั้น ทำให้ผู้วิจัยต้องการศึกษาว่า การพิสูจน์ข้อความในรูปแบบอื่นๆ เช่น การพิสูจน์ข้อความในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ ซึ่งก็มีวิธีการพิสูจน์ด้วยกันหลายวิธี ว่านิสิตจะมีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์หรือไม่ มีลักษณะของปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เป็นอย่างไร เป็นปัญหาในระดับมากน้อยเพียงใด

งานวิจัยต่างประเทศ

มีงานวิจัยที่เกี่ยวกับการพิสูจน์ทั้งในระดับมัธยมศึกษาและในระดับอุดมศึกษาจำนวนมาก ทั้งในด้านปัญหา การสอน และการพัฒนาการพิสูจน์ ดังนี้

มีงานวิจัยที่ศึกษาถึงปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในวิชาเรขาคณิต เป็นจำนวนมาก เช่น ไอรีแลนด์ (Ireland. 1974 : 102A – 103A) ได้ศึกษาปัญหาในการพิสูจน์แบบนิรนัยของนักเรียนเกรด 10 พบว่า นักเรียนมีความเข้าใจในการให้เหตุผลแบบนิรนัยน้อย มีปัญหาเรื่องภาษาในการพิสูจน์ ปัญหาในการอ้างเหตุผลรูปแบบ modus ponens และ modus tollens และนักเรียนมักนำการอ้างเหตุผลที่ไม่สมเหตุสมผล เช่น $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$ และ $[(p \rightarrow q) \wedge \sim p] \rightarrow \sim q$ มาใช้ในการพิสูจน์ นักเรียนมีปัญหาในการพิสูจน์ทางตรง นักเรียนไม่มีความรู้ความเข้าใจในขั้นตอนการพิสูจน์ ไม่รู้ว่าจะทำการพิสูจน์ไปตามขั้นตอนอย่างไร ไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างการพิสูจน์ทางเรขาคณิตกับวิชาอื่น ทำให้ทำการพิสูจน์ในเรื่องอื่นๆไม่ได้ และยังมีปัญหาในเรื่องการใช้คำอนิยาม ไม่เข้าใจในความแตกต่างระหว่างสัจพจน์กับทฤษฎีบท นอกจากนี้ ซิลเวอร์ และคาร์เพนเตอร์ (Thompsom. 1996 : 475 ; อ้างอิงจาก Silver and Carpenter. 1989 : 17-18) ยังพบว่า นักเรียนเกรด 11 ที่ได้ทำข้อสอบเพื่อวัดความเข้าใจของนักเรียนในเรื่องสัจพจน์และทฤษฎีบท ของ National Assessment of Educational Progess (NAEP) นักเรียนส่วนใหญ่ให้ความเห็นว่าทฤษฎีบทเป็นสิ่งจำเป็นในการแสดงเหตุผลหรือการอ้าง มีนักเรียนน้อยกว่า 1 ใน 4 ที่สามารถอธิบายความหมายของสัจพจน์ได้ถูกต้อง เขากล่าวว่า ถ้านักเรียนไม่สามารถแยกได้ระหว่างทฤษฎีบทกับการพิสูจน์ หรือระหว่างสมมติฐานกับการพิสูจน์ พวกเขาจะมีปัญหาในการพิจารณาความสมเหตุสมผลของการพิสูจน์ และสรุปอีกว่า นักเรียนที่เคยเรียนวิชาเรขาคณิตทำการพิสูจน์ได้ดีกว่านักเรียนที่ยังไม่ได้เรียนวิชานี้ นอกจากนี้ยังพบว่านักเรียนที่ใช้เวลาเรียน 2-3 ปี เพื่อเตรียมตัวเข้าเรียนในระดับวิทยาลัย มีนักเรียนจำนวนน้อย 50% ที่สามารถทำการพิสูจน์ได้ถูกต้อง ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของเซ็ง (Senk. 1983 : 417A) ที่พบว่า นักเรียนที่ได้เรียนวิชาเรขาคณิตที่เน้นกระบวนการพิสูจน์ระยะเวลาถึง 1 ปี มีนักเรียน 30% ทำการพิสูจน์ไม่ได้เลย มีนักเรียน 40% ที่สามารถเขียนการพิสูจน์ได้บ้าง และมีเพียง 30% เท่านั้นที่มีคะแนนในการพิสูจน์ถึง 75% นอกจากนี้ยัง พบว่าไม่มีความแตกต่างระหว่างเพศชายและหญิง ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของเซ็ง และยูซิสคิน (Senk and Usiskin. 1983 : 187-201) ที่ทำการศึกษาถึงความแตกต่างระหว่างเพศกับความสามารถในการเขียนการพิสูจน์ พบว่าผลสัมฤทธิ์ไม่แตกต่างกัน ต่อมา ในปี 1985 เซ็ง (Senk. 1985 : 448-456) ได้รายงานผลด้านความสามารถในการเขียนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต จากโครงการ Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry (CDASSG) พบว่า เมื่อสิ้นสุดภาคการศึกษาที่นักเรียนได้เรียนเรขาคณิตโดยเน้นกระบวนการพิสูจน์ มีนักเรียน 25% ที่เขียนการพิสูจน์ไม่สำเร็จ มีนักเรียน 25% ที่เขียนการพิสูจน์ได้เพียงบางส่วน มีนักเรียน 20% ที่สามารถทำการพิสูจน์ที่มีโครงสร้างซับซ้อนได้ และมี

นักเรียนเพียง 30% เท่านั้นที่สามารถทำการพิสูจน์ทฤษฎีบทและทำแบบฝึกหัดในหนังสือได้ และพบว่าปัญหาของนักเรียนในการพิสูจน์คือ

1. นักเรียนมีปัญหาในเรื่อง ตรรกศาสตร์และภาษาในการพิสูจน์และพบว่ามันทำให้เขามีปัญหาในการเริ่มต้นการพิสูจน์ นักเรียนมักนำทฤษฎีบทที่จะพิสูจน์มาใช้อ้างในขั้นตอนการพิสูจน์ทฤษฎีบทนั้น และมักใช้การอ้างที่ไม่สมเหตุสมผลในการพิสูจน์

2. นักเรียนมักมีปัญหาในการพิสูจน์อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อน

นอกจากนี้ยังพบว่า ผลสัมฤทธิ์ในการพิสูจน์ของนักเรียน ไม่มีความแตกต่างระหว่างเพศ

วิลเลียม (Thompson. 1996 : 476-478 ; citing William. 1979) ได้ทำการศึกษาถึงความเข้าใจในการพิสูจน์ของนักเรียนเกรด 11 จำนวน 255 คน พบว่า มีนักเรียนน้อยกว่า 30% ที่เข้าใจความหมายของการพิสูจน์ นักเรียนราว 50% เห็นว่าไม่มีความจำเป็นในการพิสูจน์ข้อความที่เขามองว่าเป็นจริง มีนักเรียนอย่างน้อย 70% ไม่สามารถชี้ความแตกต่างระหว่างการให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัยได้ รวมทั้งไม่รู้ว่าการอ้างเหตุผลแบบอุปนัยไม่สามารถใช้พิสูจน์กรณีทั่วไปได้ ประมาณ 80% ไม่เข้าใจความสำคัญของสมมติฐานกับบทนิยามในการพิสูจน์ และ 60% ไม่แสดงเหตุผลหรือทำการพิสูจน์ต่อ หากเขาคิดว่าสมมติฐานเป็นเท็จ นอกจากนี้นักเรียนยังมีปัญหาในการพิสูจน์ทางอ้อม ซึ่งพบว่ามีนักเรียนเพียง 1 ใน 3 เท่านั้นที่คิดว่าการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง เป็นวิธีการที่สมเหตุสมผล วิลเลียม สรุปว่ามีนักเรียนน้อยกว่า 20% ที่เข้าใจเทคนิคการพิสูจน์จริง ๆ นักเรียนบางส่วนมีปัญหาในการแยกระหว่างข้อความกับข้อความขัดแย้งของข้อความนั้น บางคนคิดว่าเขาสมมติสิ่งที่จะพิสูจน์แล้วถือเป็นการพิสูจน์ การอ้างเหตุผลมักจะวนไปวนมา และไม่สามารถจะพิสูจน์อะไรได้ ซึ่งถือเป็นอุปสรรคต่อการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง

ทอมสัน (Thompson. 1991) ได้ศึกษาการให้เหตุผลและความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียนที่เรียนวิชาแคลคูลัสและคณิตศาสตร์ดีสครีต ของนักเรียนจาก 9 โรงเรียน จำนวน 180 คน โดยศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการพิสูจน์เนื้อหาที่เกี่ยวกับจำนวนคู่ จำนวนคี่และสมบัติการหารลงตัว โดยการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง เอกลักษณ์ของตรีโกณมิติ และการพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ผลการศึกษาพบว่า

1. นักเรียนทำการพิสูจน์ในเรื่องเอกลักษณ์ตรีโกณมิติได้ 80% ทั้งนี้อาจเป็นเพราะได้เรียนเรื่องนี้ก่อนทำการทดสอบ

2. ในเรื่องทฤษฎีจำนวน มีนักเรียน 1 ใน 3 ที่สามารถยกตัวอย่างค้านสำหรับหัวข้อนี้ได้

3. นักเรียนส่วนใหญ่มีปัญหาในการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง และการพิสูจน์โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

นอกจากนี้ยังพบว่านักเรียนทั้ง 9 โรงเรียนมีปัญหาเช่นเดียวกัน และครูไม่ใช่ตัวแปรที่สำคัญต่อผลสัมฤทธิ์ทางการพิสูจน์

ต่อมาในปี 1992 ทอมสัน (Thompson. 1996 : 476-479 ; Thompson. 1992) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่เรียนวิชาแคลคูลัสที่เน้นการพิสูจน์ นักเรียนกลุ่มนี้ได้ผ่านการเรียนการพิสูจน์มาจากเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์หลายเรื่องแล้ว เช่น วิชาทฤษฎีจำนวน สมบัติของเศษส่วน และเรียนเทคนิคการพิสูจน์ เช่น การพิสูจน์ทางตรง การพิสูจน์ทางอ้อม การพิสูจน์แบบอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เป็นต้น แบบทดสอบสำหรับการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง ที่ทอมสันใช้ในการวิจัยมีลักษณะดังนี้

1. ให้เขียนข้อความนิเสธ เช่น ข้อความใดเป็นข้อความนิเสธของ “มีสัตว์บางชนิดเป็นม้า” โดยทำการทดสอบในตอนต้นภาคเรียน พบว่า มีนักเรียนเพียง 19% ที่เขียนข้อความนิเสธได้

2. ให้เขียนสมมติฐานสำหรับการพิสูจน์สำหรับข้อความเดี่ยวและประโยคเงื่อนไข เช่น จงเขียนสมมติฐานสำหรับการพิสูจน์ข้อความ "ไม่มีจำนวนเต็มที่น้อยที่สุด" พบว่ามีนักเรียนประมาณ 91% ที่เขียนสมมติฐานสำหรับข้อความเดี่ยวดังตัวอย่างได้ และมีนักเรียนเพียง 28% ที่เขียนสมมติฐานสำหรับข้อความที่เป็นประโยคเงื่อนไขได้ นั่นคือการเขียนข้อความนิเสธสำหรับประโยคเงื่อนไขเป็นเรื่องที่ยากสำหรับนักเรียน และมีนักเรียน 31% ที่เขียนข้อความนิเสธของข้อความ "ถ้า P แล้ว Q" ในรูป "ถ้า P แล้ว Q" แทนที่จะเขียน " P และ ~Q"

3. ให้อธิบายขั้นตอนการพิสูจน์โดยที่ไม่ต้องแสดงการพิสูจน์ ซึ่งมีนักเรียน 8% ที่เห็นว่าการพิสูจน์แบบนี้ หมายถึงการยกตัวอย่าง บางคนคิดว่าคือการยกตัวอย่างค้าน

4. ให้พิสูจน์โจทย์ปัญหา พบว่าเป็นปัญหามากสำหรับนักเรียน มีนักเรียนเพียง 3% เท่านั้นที่ได้คะแนนเต็ม มี 38% ที่ได้คะแนนเป็น 0 และมี 7% ที่ไม่พยายามทำการพิสูจน์

5. ให้นักเรียนกำหนดโจทย์ที่สามารถพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งได้ และพิสูจน์ข้อความนั้น พบว่า มีนักเรียน 43% ที่สามารถทำสำเร็จ

จากงานวิจัยของทอมสัน สรุปว่า การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งเป็นเรื่องที่เป็นปัญหาสำหรับนักเรียน

มอร์แกน (Morgan. 1972 : 4081B) ได้ทำการศึกษาความสามารถของนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ ในเรื่องการพิสูจน์ พบว่า การเขียนข้อความแย้งสลับที่ (Contrapositive of the Conditional) และการเขียนข้อความขัดแย้ง (Negation of the Conditional) เป็นเรื่องที่เป็นปัญหาสำหรับนักศึกษา และในการเขียนสมมติฐานสำหรับการพิสูจน์ พบว่า

1. การเขียนสมมติฐานสำหรับการพิสูจน์ทางตรง ในจำนวนนักศึกษากลุ่มที่เรียนคณิตศาสตร์มากกว่า 30 ชม. มีนักศึกษาที่เขียนสมมติฐานสำหรับการพิสูจน์ได้จำนวน 80% ส่วนในกลุ่มที่เรียนน้อยกว่า 30 ชม. มีนักศึกษาที่เขียนสมมติฐานสำหรับการพิสูจน์ได้จำนวน 69%

2. การเขียนสมมติฐานสำหรับการพิสูจน์แบบใช้ข้อความแย้งสลับที่ พบว่า ในจำนวนนักศึกษากลุ่มที่เรียนมากกว่า 30 ชม. มีนักศึกษาที่เขียนสมมติฐานสำหรับการพิสูจน์ได้จำนวน 37% ส่วนในกลุ่มที่เรียนน้อยกว่า 30 ชม. มีเพียง 15% ที่เขียนสมมติฐานสำหรับการพิสูจน์ได้

3. การเขียนสมมติฐานในการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง พบว่าในจำนวนนักศึกษาที่เรียนมากกว่า 30 ชม. มีนักศึกษาที่เขียนสมมติฐานสำหรับการพิสูจน์ได้เพียง 33% ส่วนในกลุ่มที่เรียนน้อยกว่า 30 ชม. มีเพียง 5% เท่านั้นที่เขียนสมมติฐานสำหรับการพิสูจน์ได้

ผลจากการศึกษาของมอร์แกน สรุปได้ว่า นักศึกษามีปัญหาในเขียนสมมติฐานสำหรับการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง รองลงมาเป็นการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่

เซอิด (Saeed. 1997 : 4300A) ได้ศึกษาถึงความเข้าใจของนักศึกษา ในเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และความสัมพันธ์กับทัศนคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ โดยรูปแบบที่ศึกษาได้แก่ การให้เหตุผลแบบนิรนัย การให้เหตุผลแบบอุปนัย การพิสูจน์ทางตรง การพิสูจน์ทางอ้อม การยกตัวอย่างค้าน การตั้งสมมติฐาน การใช้บทนิยาม และการใช้หลักตรรกศาสตร์เบื้องต้น โดยกลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษามหาวิทยาลัยโอไฮโอ จำนวน 101 คน โดยใช้ข้อสอบการพิสูจน์ 10 ข้อ แบบทดสอบวัดทัศนคติจำนวน 26 ข้อ ผลการวิจัยพบว่า

1. นักศึกษาจำนวนมากไม่เห็นความแตกต่างระหว่างการอธิบายกับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และไม่เห็นความจำเป็นในการพิสูจน์ข้อความที่เขามองว่าเป็นจริง

2. นักศึกษาส่วนใหญ่ไม่เข้าใจกฎข้อความแย้งสลับที่ และไม่เข้าใจว่าการให้เหตุผลแบบอุปนัยไม่เป็นการเพียงพอที่จะพิสูจน์เหตุการณ์ทั่วไปได้

3. พบว่ามีความสัมพันธ์ระหว่างคะแนนการพิสูจน์กับทัศนคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

4. จากการวิเคราะห์ความแปรปรวน พบว่านักศึกษาที่ได้เรียนจำนวนวิชาคณิตศาสตร์มาต่างกันมีความสัมพันธ์กับคะแนนการพิสูจน์และทัศคติต่อวิชาคณิตศาสตร์แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .001

คุค-บากส์ (Cook-Bax. 1997 : 5088A) ได้ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมเกรด 9-10 ที่ใช้โปรแกรม Mira ในการพัฒนาการเขียนการพิสูจน์ ผู้วิจัยทำการทดลองโดยสอนกลุ่มทดลองด้วยโปรแกรม Mira มีจำนวนนักเรียน 21 คน ส่วนกลุ่มควบคุม ไม่ได้ใช้โปรแกรม Mira มีจำนวนนักเรียน 21 คน เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษา คือ แบบทดสอบ และการสัมภาษณ์ ซึ่งเกี่ยวกับการวางแผนการพิสูจน์ การคิดค้นการพิสูจน์ ความคิดเห็นต่อการพิสูจน์ในเรื่องทั่วๆ ไป และสำหรับกลุ่มทดลองได้ทำการสัมภาษณ์ถึงความคิดต่อการใช้โปรแกรม Mira ด้วย จากการวิจัยพบว่าโปรแกรม Mira มีประโยชน์ต่อนักเรียนที่มีความสามารถในระดับสูงและต่ำ จากการสัมภาษณ์พบว่า

1. นักเรียนไม่เห็นความจำเป็นในการพิสูจน์
2. นักเรียนมีปัญหาในการเริ่มต้นการพิสูจน์
3. นักเรียนพบว่าการพิสูจน์เป็นเรื่องที่น่าเบื่อและยาก

ลิวอิส (Lewis. 1987 : 3345A) ได้ทำการศึกษาความเข้าใจของนักศึกษาในการพิสูจน์ และความสัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาที่เรียนวิชาแคลคูลัส จำนวน 47 คน ใช้แบบสอบถาม 20 ฉบับ แต่ละฉบับมี 6 รายการ แบบสอบถามจะศึกษาความเข้าใจในการพิสูจน์ และใช้แบบสัมภาษณ์ซึ่งพัฒนาขึ้นจากผลของแบบสอบถาม การสัมภาษณ์จะประเมินความคิดตามความเข้าใจของนักศึกษา ในเรื่องธรรมชาติของการพิสูจน์ ระดับความพอใจในการพิสูจน์ ความเชื่อมั่นในตนเองต่อการพิสูจน์ ผลการวิจัยพบว่า

1. การตั้งสมมติฐานในการพิสูจน์เป็นปัญหาสำหรับนักศึกษา
2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนมีความสัมพันธ์กับความเข้าใจในการพิสูจน์

พรัส-วิสนิโอว์สกา (Prus-Wisniowska. 1996 : 614A-615A) ได้ศึกษาถึงการให้เหตุผลของนักศึกษา จำนวน 8 คน โดยใช้แบบสัมภาษณ์ในการแก้ปัญหา การสังเกตในชั้นเรียน และการสัมภาษณ์อย่างไม่เป็นทางการ ผลการวิจัยพบว่านักศึกษาใช้การให้เหตุผลในความหมายของการอ้าง ซึ่งยังอ่อนหรือไม่สมเหตุสมผล และได้สรุปสาเหตุหลักที่ทำให้นักศึกษามีปัญหาในการพิสูจน์ คือ

1. นักศึกษาขาดทักษะในการฟัง การพูด และการเขียนในทางคณิตศาสตร์
2. ภาษาเป็นอุปสรรคในการพิสูจน์สำหรับนักศึกษา
3. การนำบทนิยามไปใช้
4. พฤติกรรมการเรียนที่ไม่ส่งเสริมลักษณะในการพิสูจน์

เรด (Reid. 1996 : 1067A) ได้ทำการศึกษาและพัฒนาความเข้าใจของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาและนักศึกษาระดับมหาวิทยาลัย เกี่ยวกับเรื่องความจำเป็นในการพิสูจน์ โดยการสังเกตและการสัมภาษณ์พบว่า

1. นักเรียนและนักศึกษาสามารถให้เหตุผลแบบนิรนัยได้ และโดยการได้รับความช่วยเหลือก็จะสามารถเขียนการพิสูจน์ได้
2. การพิสูจน์เป็นแนวทางในการอธิบาย และการสำรวจ

3. การใช้เหตุผลของนักเรียนและนักศึกษา จะได้รับอิทธิพลจากกิจกรรมที่ได้รับ รวมทั้งจากคนรอบข้าง

มัวร์ (Moore. 1990 : 137-144) ได้ทำการศึกษาถึงปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาที่เรียนวิชาที่เน้นการพิสูจน์ (Transition course) ซึ่งสอนให้ผู้เรียนอ่านและทำการพิสูจน์ และสอนมโนมติทางคณิตศาสตร์ที่จะเป็นพื้นฐานสำหรับการเรียนวิชาอื่นๆ เนื้อหาในวิชานี้ เป็นเรื่องเกี่ยวกับตรรกศาสตร์ เทคนิคการพิสูจน์ ทฤษฎีเซต ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน และระบบจำนวน การพิสูจน์ในวิชานี้เป็นการพิสูจน์แบบนิรนัยสั้นๆ และอาศัยบทนิยาม กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาจำนวน 16 คน ในจำนวนนี้เป็นนักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ 8 คน นักศึกษาครูวิชาเอกคณิตศาสตร์ 6 คน และนักศึกษาที่เรียนคณิตศาสตร์จบแล้ว 2 คน ข้อมูลที่ศึกษาได้จากการสังเกตแบบไม่มีส่วนร่วม (Non-participant observation) การสัมภาษณ์นักศึกษาและอาจารย์ผู้สอน การช่วยสอนนอกชั้นเรียน จากการศึกษาพบว่ามีสาเหตุหลักของปัญหาในการพิสูจน์อยู่ 3 ด้าน คือ ความเข้าใจในมโนมติ (Concept Understanding) ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ (Mathematics language and Notation) และการเริ่มต้นการพิสูจน์ (Getting started on a proof) ซึ่งเป็นปัญหาดังนี้

D1 นักศึกษาไม่เข้าใจบทนิยาม นั่นคือ เขาไม่สามารถเขียนบทนิยามได้

D2 นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจเชิงสหัชญาณ (Intuitive) ในมโนมติทางคณิตศาสตร์น้อย

D3 ภาพลักษณ์มโนทัศน์ (Concept Image) ของนักศึกษามีไม่เพียงพอในการเขียนการพิสูจน์

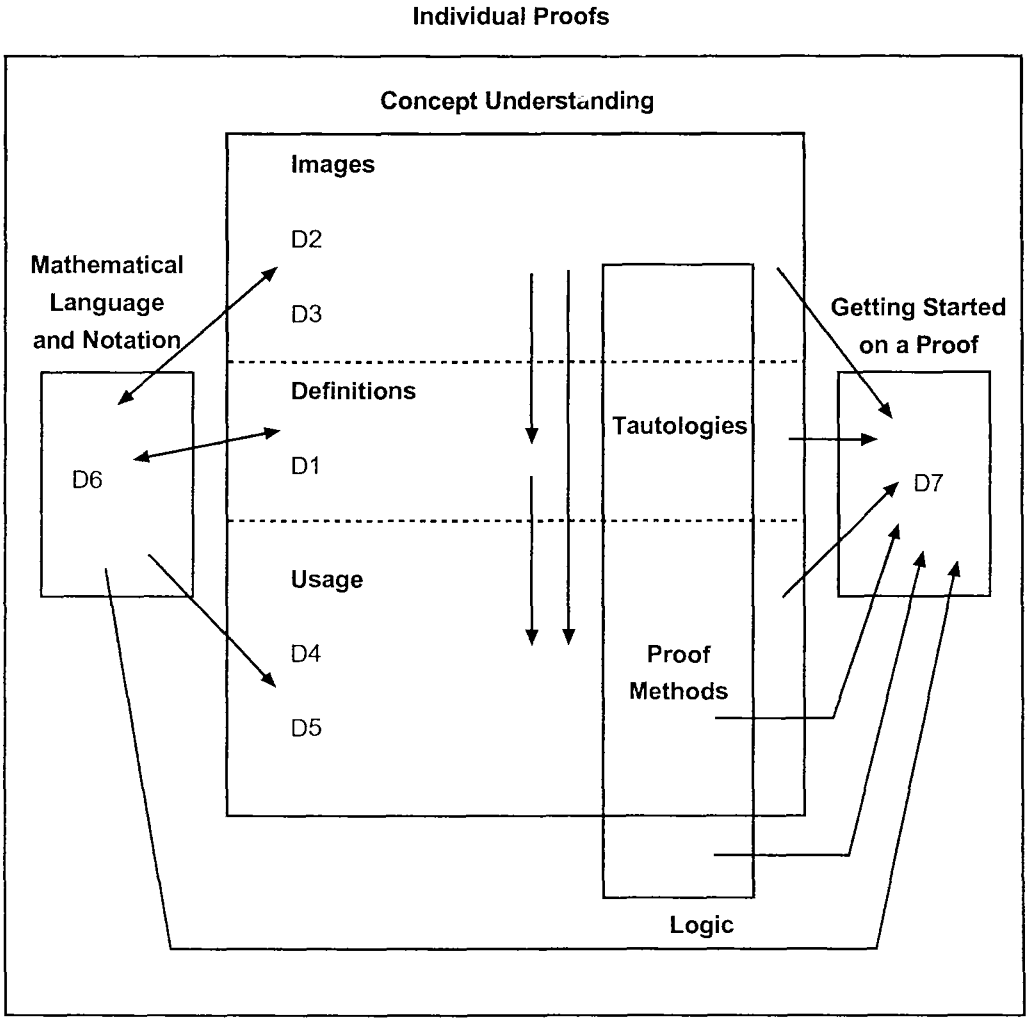
D4 นักศึกษาไม่สามารถหรือไม่มีความตั้งใจในการคิดและการใช้ตัวอย่าง (example)เพื่อช่วยในการพิสูจน์

D5 นักศึกษาไม่ทราบว่าจะใช้บทนิยาม เพื่อแสดงให้เห็นโครงสร้างการพิสูจน์อย่างไร

D6 นักศึกษาไม่เข้าใจและไม่สามารถใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

D7 นักศึกษาไม่ทราบว่าจะเริ่มต้นการพิสูจน์อย่างไร

ซึ่งมัวร์ได้แสดงแผนภาพของปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษา ดังนี้



ภาพประกอบ 1 ภาพประกอบแสดงปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษา

หมายเหตุ หางลูกศร แสดงถึง สาเหตุของปัญหาในด้านหัวลูกศร นั่นคือ ปัญหาในด้านหางลูกศรส่งผลต่อปัญหาในด้านอื่นๆ (หัวลูกศร) ของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

จากแผนภาพ Image → Definition → Usage หมายความว่า ความสามารถในการใช้บทนิยามในการพิสูจน์ ขึ้นอยู่ความรู้ในบทนิยาม ซึ่งความรู้ในบทนิยามขึ้นอยู่กับมโนทัศน์ภาพลักษณ์ นั่นคือ ต้องพัฒนามโนทัศน์ภาพลักษณ์ ก่อนที่จะมีความรู้ความเข้าใจบทนิยาม และต้องรู้บทนิยามก่อนจึงนำไปใช้ได้

จาก Image → Usage หมายความว่า ความสามารถในการใช้บทนิยามขึ้นอยู่กับความเข้าใจพื้นฐานในมโนมติ

ลูกศรจาก Concept Understanding ไปยังกรอบอื่นๆ หมายถึง ลักษณะอื่นๆ ขึ้นอยู่กับความเข้าใจในมโนมติ กล่าวคือ

1. เมื่อมีปัญหาในเรื่องความเข้าใจในมโนมติ ทำให้มีปัญหาในการเริ่มต้นการพิสูจน์
2. เมื่อมีปัญหาในเรื่องความเข้าใจในมโนทัศน์ภาพลักษณ์ ย่อมส่งผลให้ไม่เข้าใจภาษาและสัญลักษณ์ที่จะใช้ในการแสดงมโนมติ

3. เมื่อมีปัญหาในเรื่องการไม่เข้าใจบทนิยาม ก็มีปัญหาในเรื่องภาษาและสัญลักษณ์ที่จะใช้ในการเขียนพิสูจน์

จาก Logic $\rightarrow$ D7 หมายถึง เมื่อมีปัญหาในเรื่องตรรกศาสตร์ ทำให้มีปัญหาในการเริ่มต้นการพิสูจน์

จาก D6 $\rightarrow$ Image หมายถึง เมื่อมีปัญหาในเรื่องภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ทำให้มีปัญหาในเรื่องมโนทัศน์ภาพลักษณ์

จาก D6 $\rightarrow$ Definitions หมายถึง เมื่อมีปัญหาในภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ทำให้มีปัญหาในความเข้าใจบทนิยาม

จาก D6 $\rightarrow$ Usage หมายถึง เมื่อมีปัญหาในภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ทำให้มีปัญหาในเรื่องการนำไปใช้

จาก D6 $\rightarrow$ D7 หมายถึง เมื่อมีปัญหาในภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ทำให้มีปัญหาในการเริ่มต้นการพิสูจน์

เมื่อมีปัญหาในด้านต่างๆ ย่อมส่งผลให้มีปัญหาในการเริ่มต้นการพิสูจน์ (D7)

และผลการวิจัยของมัวร์ สรุปได้ว่า มีหลายสาเหตุที่ทำให้นักศึกษามีปัญหาในการพิสูจน์ และทำการพิสูจน์ไม่ได้ ซึ่งสาเหตุเหล่านี้สอดคล้องกัน เมื่อมีปัญหาในด้านหนึ่งก็ส่งผลให้มีปัญหาในด้านอื่นด้วย

จากงานวิจัยในต่างประเทศดังกล่าว พอจะกล่าวได้ว่า นักเรียนและนักศึกษามีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในหลายๆ ด้าน เช่น ตรรกศาสตร์ ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ความเข้าใจในเนื้อหา การเขียนสมมติฐานการพิสูจน์ การอ้างเหตุผล การเขียนการพิสูจน์ ความเข้าใจในการพิสูจน์ ความสำคัญของการพิสูจน์ เป็นต้น

จากที่กล่าวมาทั้งหมดนี้ ทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาว่า ในการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ ซึ่งมีวิธีการพิสูจน์หลายวิธี เช่น การพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง การพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ เป็นต้น นิสิตมีปัญหาในการพิสูจน์ในด้านใด แต่ละด้านที่เป็นปัญหามีจำนวนนิสิตมากน้อยเพียงใด มีลักษณะข้อผิดพลาดในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เป็นอย่างไร มีจำนวนนิสิตที่ผิดพลาดตามลักษณะนั้นๆ มากน้อยเพียงใด เปรียบเทียบปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์โดยจำแนกตามเพศ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ตลอดจนศึกษาระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตและศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตกับเพศ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. การกำหนดกลุ่มตัวอย่าง
2. การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
3. การเก็บรวบรวมข้อมูล
4. การจัดกระทำและวิเคราะห์ข้อมูล

การกำหนดกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนิสิตการศึกษาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ที่ลงทะเบียนเรียนวิชา คณ 241 หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2543 ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ จำนวน 79 คน

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ประกอบด้วย

1. แบบทดสอบอัตนัยเกี่ยวกับการพิสูจน์ ครอบคลุมปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยแบ่งขั้นตอนในการพิสูจน์เป็น 4 ขั้น ดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นทำความเข้าใจโจทย์เบื้องต้น
ขั้นที่ 2 ขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์
ขั้นที่ 3 ขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์
ขั้นที่ 4 ขั้นการแสดงการพิสูจน์

2. แบบสัมภาษณ์เกี่ยวกับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต ซึ่งแบ่งระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เป็น 4 ขั้น ได้แก่

ขั้นที่ 1 คือ ปัญหาในขั้นทำความเข้าใจโจทย์เบื้องต้น
ขั้นที่ 2 คือ ปัญหาในขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์
ขั้นที่ 3 คือ ปัญหาในขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์
ขั้นที่ 4 คือ ปัญหาในขั้นแสดงการพิสูจน์

การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

ผู้วิจัยดำเนินการสร้างเครื่องมือดังนี้

1. ขั้นตอนในการสร้างเครื่องมือชิ้นที่ 1

เครื่องมือชิ้นที่ 1 เป็นแบบทดสอบอัตนัย ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อศึกษาถึงปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต โดยผู้วิจัยได้ดำเนินการสร้างดังนี้

1.1 ศึกษาเอกสาร งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ แล้วรวบรวมลักษณะที่เป็นปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์สำหรับการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ ได้ลักษณะของปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ แบ่งเป็น 4 ขั้น คือ

1. ขั้นทำความเข้าใจโจทย์เบื้องต้น
2. ขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์
3. ขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์
4. ขั้นการแสดงการพิสูจน์

1.2 ศึกษาเนื้อหาวิชา คณ 241 จากเอกสารประกอบการเรียนการสอน และคู่มืออื่นๆ

1.3 สร้างแบบทดสอบอัตนัย โดยแบ่งเป็น 2 ตอน ตามวิธีการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ ดังนี้

ตอนที่ 1 แบบสอบถามข้อมูลเกี่ยวกับสถานภาพของนิสิต ได้แก่ ชื่อ-นามสกุล เกรดเฉพาะวิชา คณ111 และ คณ 112

ตอนที่ 2 เป็นแบบทดสอบอัตนัย มี 7 ข้อย่อย คือ

1. วิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ จำนวน 3 ข้อย่อย
2. การใช้บทนิยามเพื่อวิเคราะห์สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ จำนวน 2 ข้อย่อย
3. วิธีการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข (Rule of Conditional Proof) จำนวน 2 ข้อย่อย
4. วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ (Contrapositive) จำนวน 5 ข้อย่อย
5. วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง (Contradiction) จำนวน 4 ข้อย่อย
6. วิธีการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$ จำนวน 2 ข้อย่อย
7. แสดงการพิสูจน์ จำนวน 2 ข้อ ให้เลือกแสดงการพิสูจน์ 1 ข้อ

รวมจำนวนข้อทั้งหมด 20 ข้อย่อย

1.4 นำแบบทดสอบที่สร้างขึ้นจำนวน 20 ข้อย่อย ไปให้คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์และผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่าน ตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา ความเหมาะสมของภาษา และความเหมาะสมของแบบทดสอบในการวัดปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ แล้วทำการปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำ

1.5 นำแบบทดสอบที่ปรับปรุงแก้ไขแล้วไปทดลองใช้ (Try out) กับนิสิตระดับปริญญาตรี มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ที่ได้เรียนวิชา คณ 241 แล้วในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2542 จำนวน 50 คน ซึ่งไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง เพื่อตรวจสอบทางด้านภาษา แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไขอีกครั้ง ก่อนนำไปใช้จริง

2. ขั้นตอนในการสร้างเครื่องมือชิ้นที่ 2

เครื่องมือชิ้นที่ 2 เป็นแบบสัมภาษณ์ เป็นเครื่องมือที่สร้างขึ้นเพื่อศึกษาระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต

2.1 ลักษณะของแบบสัมภาษณ์ แบ่งเป็น 3 ตอน ดังนี้

<u>ตอนที่ 1</u> แบบสัมภาษณ์ข้อมูลเกี่ยวกับนิสิต

เป็นแบบสัมภาษณ์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ประกอบด้วยข้อคำถามที่เกี่ยวกับข้อมูลส่วนตัวของนิสิต ได้แก่ ชื่อ เพศ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

ตอนที่ 2 แบบสัมภาษณ์เกี่ยวกับทัศนคติของนิสิตที่มีต่อระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต เป็นแบบสัมภาษณ์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น ประกอบด้วยข้อคำถามที่ใช้วัดระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ใน 4 ขั้น ได้แก่

1. ระดับปัญหาในขั้นทำความเข้าใจโจทย์เบื้องต้น เช่น

ปัญหา	ระดับปัญหา			
	3	2	1	0
0 การอ่านและทำความเข้าใจโจทย์................	....	....	....	....
00 การอ่านและทำความเข้าใจสัญลักษณ์ในโจทย์.	....	....	....	....
000 การแยกแยะระหว่างสิ่งที่โจทย์กำหนดและสิ่งที่ต้องพิสูจน์...	....	....	....	....

2. ระดับปัญหาในขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ เช่น

ปัญหา	ระดับปัญหา			
	3	2	1	0
0 การเขียนเริ่มต้นการพิสูจน์.......................	....	....	....	....
00 การเขียนข้อความแย้งสลับที่.....................	....	....	....	....
000 การเขียนสมมติฐานเริ่มต้นสำหรับการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่................................	....	....	....	....

3. ระดับปัญหาในขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์ เช่น

ปัญหา	ระดับปัญหา			
	3	2	1	0
0 การคิดค้นการพิสูจน์...............................	....	....	....	....
00 การใช้ข้อมูลเพื่อการพิสูจน์.......................	....	....	....	....
000 การใช้เทคนิค กระบวนการแก้ปัญหาหรือวิธีการอื่นๆ มาช่วยในการพิสูจน์..........................	....	....	....	....

4. ระดับปัญหาในขั้นการแสดงการพิสูจน์ เช่น

ปัญหา	ระดับปัญหา			
	3	2	1	0
0 การเขียนการพิสูจน์ให้เป็นขั้นตอนจนได้ผลสรุป..	....	....	....	....
00 การใช้ภาษาและสัญลักษณ์ในการพิสูจน์........	....	....	....	....
000 การเขียนข้อสรุป....................................	....	....	....	....

แบบสัมภาษณ์ในตอนที่ 2 นี้ เป็นแบบสัมภาษณ์ชนิดประมาณค่า (Rating-scale) 4 ระดับ โดยมีเกณฑ์การให้คะแนนดังนี้

3 หมายถึง มีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ด้านนั้นมาก

2 หมายถึง มีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ด้านนั้นปานกลาง

1 หมายถึง มีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ด้านนั้นน้อย

0 หมายถึง ไม่มีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ด้านนั้นเลย

ตอนที่ 3 แบบสัมภาษณ์ปลายเปิด เกี่ยวกับความคิดเห็นของนิสิตที่มีต่อการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ วิธีการแก้ปัญหาเมื่อนิสิตมีปัญหาในการพิสูจน์

2.2 การสร้างแบบสัมภาษณ์

ผู้วิจัยดำเนินการสร้างแบบสัมภาษณ์ ดังนี้

2.2.1 ศึกษาเอกสาร งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ แล้วรวบรวมลักษณะที่เป็นปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เช่นเดียวกับข้อ 1.1

2.2.2 จากข้อ 2.2.1 รวบรวมลักษณะของปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์สำหรับการสร้างแบบสัมภาษณ์ จำแนกปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เป็น 4 ขั้น ได้แก่

1. ปัญหาในขั้นทำความเข้าใจโจทย์เบื้องต้น
2. ปัญหาในขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์
3. ปัญหาในขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์
4. ปัญหาในขั้นการแสดงการพิสูจน์

2.2.3 สร้างแบบสัมภาษณ์ เพื่อศึกษาระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต

2.2.4 หาความเที่ยงตรงเชิงประจักษ์ (Face validity) โดยนำแบบสัมภาษณ์ให้คณะกรรมการควบคุมปริญญานิพนธ์ และผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน ตรวจสอบความเหมาะสม ในด้านเนื้อหาและภาษา เพื่อให้สามารถวัดได้ตรงกับเรื่องที่ต้องการจะศึกษา แล้วนำมาปรับปรุงแก้ไขก่อนการนำไปทดลองใช้

2.2.5 นำแบบสัมภาษณ์ที่ปรับปรุงแก้ไขแล้วไปทดลองใช้ (Try out) กับนิสิตระดับปริญญาตรี มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ที่ได้เรียนวิชา คณ 241 แล้วในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2542 จำนวน 50 คน ซึ่งไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างและเป็นนิสิตกลุ่มเดียวกับนิสิตในข้อ 1.5 เพื่อตรวจสอบทางด้านภาษาแล้วนำมาปรับปรุงแก้ไขอีกครั้งหนึ่งก่อนนำไปใช้จริง

การเก็บรวบรวมข้อมูล

ผู้วิจัยทำการเก็บรวบรวมข้อมูล โดยดำเนินงานเป็นขั้นตอน ดังนี้

1. นำหนังสือจากบัณฑิตวิทยาลัยมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ถึงคณบดีคณะวิทยาศาสตร์ หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์ และอาจารย์ผู้สอนวิชา คณ 241 หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์ คณ 321 ทฤษฎีจำนวน และวิชา คณ 342 ทฤษฎีเซต มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อขอความร่วมมือในการเก็บรวบรวมข้อมูล

2. การดำเนินการทดสอบ หลังจากที่นิสิตได้เรียนวิธีการพิสูจน์แบบต่าง ๆ จากอาจารย์ผู้สอนแล้ว ผู้วิจัยนำแบบทดสอบอัตนัย ไปทำการทดสอบกับกลุ่มตัวอย่าง ใช้เวลาในการทดสอบ 2 ชั่วโมง ในการสอบ ผู้วิจัยชี้แจงวัตถุประสงค์ของการสอบพร้อมทั้งประโยชน์ที่ได้รับ ให้นิสิตเห็นความสำคัญของการสอบและตั้งใจทำข้อสอบอย่างเต็มความสามารถ โดยก่อนลงมือทำข้อสอบผู้วิจัยจะอ่านคำชี้แจงของแบบทดสอบ พร้อมทั้งอธิบายให้นิสิตเข้าใจ ในการสอบครั้งนี้ผู้วิจัยเป็นผู้เก็บข้อมูลด้วยตัวเอง

3. นำผลจากการทำแบบทดสอบมาตรวจเป็นรายข้อแล้วนำไปวิเคราะห์ข้อมูลต่อไป

4. นำแบบสอบถามเกี่ยวกับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ไปสัมภาษณ์นิสิตที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง ในการสัมภาษณ์ผู้วิจัยดำเนินการสัมภาษณ์นิสิตด้วยตนเอง โดยทำการสัมภาษณ์ภายหลังจากที่นิสิตได้ทำการทดสอบ โดยนัดวันเวลาที่จะสัมภาษณ์ไว้ล่วงหน้า สัมภาษณ์วันละประมาณ 10 คนใช้เวลาสัมภาษณ์ประมาณคนละ 10 นาที และข้อมูลที่ได้จากการสัมภาษณ์จะนำไปใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลต่อไป

5. ระยะเวลาในการเก็บข้อมูล 3 สัปดาห์

การจัดกระทำและวิเคราะห์ข้อมูล

1. หาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยของนิสิต เพื่อจัดลำดับของปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

2. วิเคราะห์ลักษณะข้อผิดพลาดในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต โดยการหาจำนวนนิสิตที่ผ่านแต่ละลักษณะปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และวิเคราะห์ระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต โดยหาค่าความถี่

3. หาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ค่าสัมประสิทธิ์ของการแปรผันของคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยของนิสิตจำแนกตามเพศ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

4. ทดสอบสมมติฐานข้อ 1 ที่ว่า เพศที่ต่างกันมีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ต่างกัน ผู้วิจัยดำเนินการดังนี้

4.1 ทดสอบภาวะการแจกแจงปกติของคะแนนนิสิตชาย และนิสิตหญิง โดยใช้การทดสอบลิลลี่ฟอร์ส (Lillifors test)

4.2 ถ้าคะแนนในข้อ 4.1 เป็นการแจกแจงปกติ เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยทั้งสองกลุ่ม โดยใช้ t-test ถ้าคะแนนในข้อ 4.1 ไม่ใช่การแจกแจงปกติ เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยทั้ง 2 กลุ่มโดยใช้การทดสอบแมนวิทนีย์ (Mann-Whitney test)

5. ทดสอบสมมติฐานข้อ 1 ที่ว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ที่ต่างกันมีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ต่างกัน

ผู้วิจัยดำเนินการดังนี้

5.1 ทดสอบภาวะการแจกแจงปกติของคะแนนนิสิตที่จำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ โดยใช้การทดสอบลิลลี่ฟอร์ส (Lilliefors test)

5.2 ทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของคะแนน ที่จำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ โดยใช้ Levene's test

5.3 ถ้าคะแนนในข้อ 5.1 เป็นการแจกแจงปกติ และคะแนนในข้อ 5.2 มีค่าความแปรปรวนเท่ากัน เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยจำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ โดยใช้ F-test แต่ถ้าคะแนนในข้อ 5.1 ไม่ใช่การแจกแจงปกติ และคะแนนในข้อ 5.2 มีค่าความแปรปรวนไม่เท่ากัน เปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยจำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ โดยใช้การทดสอบครัสคาล-วอลลิส (Kruskal-Wallis test)

6. ทดสอบสมมติฐานข้อ 2 ที่ว่า เพศและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์กับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต โดยใช้การทดสอบไคว์สแควร์

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. สถิติพื้นฐาน
   - 1.1 ค่าร้อยละ
   - 1.2 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต
   - 1.3 ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
   - 1.4 ค่าสัมประสิทธิ์ของการแปรผัน
2. สถิติที่ใช้ทดสอบสมมติฐาน
   - 2.1 t-test หรือ Mann-Whitney test
   - 2.2 F-test หรือ Kruskal-Wallis test
   - 2.3 Lilliefors test
   - 2.4 Levene's test
   - 2.5 LSD (Least Significant Difference)
   - 2.6 การทดสอบไคว์สแควร์

บทที่ 4
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษาปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และความสัมพันธ์ระหว่างระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตกับเพศ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้เสนอการวิเคราะห์ ได้แก่หัวข้อ ดังต่อไปนี้

1. การจัดลำดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์
2. ลักษณะข้อผิดพลาดในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์
3. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ค่าสัมประสิทธิ์ของการแปรผันของคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยของนิสิตจำแนกตามเพศ
4. การทดสอบภาวะการแจกแจงปกติของคะแนนนิสิตชายและนิสิตหญิง โดยใช้การทดสอบลิลลี่ฟอร์ส (Lilliefors test)
5. ผลการเปรียบเทียบปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตโดยจำแนกตามเพศ
6. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ค่าสัมประสิทธิ์ของการแปรผันของคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยของนิสิตจำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์
7. การทดสอบภาวะการแจกแจงปกติของคะแนนที่จำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ โดยใช้การทดสอบลิลลี่ฟอร์ส (Lilliefors test)
8. การทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของคะแนนที่จำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ โดยการทดสอบลีเวน (Levene's test)
9. ผลการเปรียบเทียบปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตโดยจำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์
10. ร้อยละของจำนวนนิสิตที่มีทัศนคติต่อระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์
11. ผลการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างเพศกับทัศนคติของนิสิตที่มีต่อระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 4 ขั้น
12. ผลการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์กับทัศนคติของนิสิตที่มีต่อระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 4 ขั้น

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์ในหัวข้อ 1,3,4,5,6,7,8 และ 9 ได้แก่ คะแนนที่ได้จากการทดสอบนิสิตหลักสูตรการศึกษาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ที่ลงทะเบียนเรียนวิชา คณ 241 หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์ ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2543 ด้วยแบบทดสอบอัตนัย จำนวน 20 ข้อย่อย ข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์ในหัวข้อ 2 ได้แก่ความถี่ของลักษณะคำตอบหรือวิธีการพิสูจน์ที่ผิดของนิสิตที่ทำแบบทดสอบอัตนัย และข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์ในหัวข้อ 10,11 และ 12 ได้จากการวัดทัศนคติต่อระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งได้จากการสัมภาษณ์นิสิตด้วยแบบสัมภาษณ์ระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ จำนวน 35 ข้อ ได้ผลการวิเคราะห์ดังต่อไปนี้

1. การจัดลำดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

ในการจัดลำดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ มีข้อตกลงเบื้องต้น ดังนี้

ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) คิดเป็นร้อยละจากคะแนนเต็มมีค่าน้อย หมายความว่า มีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มาก

ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) คิดเป็นร้อยละจากคะแนนเต็มมีค่ามาก หมายความว่า มีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์น้อย

ผลการจัดลำดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ปรากฏผลดังตาราง 1

ตาราง 1 ตารางแสดงการจัดลำดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

ปัญหา	จำนวนนิสิต (คน)	คะแนนเต็ม	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) คิดเป็นร้อยละจากคะแนนเต็ม	การจัดลำดับปัญหา
1. วิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์	**79**	**6**	**4.51**	**75.17**	**5**
1.1 บอกสิ่งที่โจทย์กำหนดให้		3	1.86	62.00	
1.2 บอกสิ่งที่ต้องพิสูจน์		3	2.65	88.33	
2. การใช้บทนิยามเพื่อวิเคราะห์สิ่งที่ต้องพิสูจน์	**79**	**2**	**1.01**	**50.50**	**2**
3. วิธีการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข (Rule of Condition Proof)	**79**	**7**	**6.13**	**87.57**	**7**
3.1 การเขียนสิ่งที่กำหนดให้สำหรับการเริ่มต้นการพิสูจน์		1	0.57	57.00	
3.2 การรู้ข้อสรุปสำหรับการพิสูจน์		1	0.86	86.00	
3.3 การแสดงวิธีการพิสูจน์		5	4.70	93.92	
4. วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ (Contrapositive)	**79**	**11**	**7.66**	**69.64**	**3**
4.1 การเขียนข้อความแย้งสลับที่		3	1.94	64.67	
4.2 การเขียนข้อความที่จะต้องพิสูจน์		1	0.61	61.00	
4.3 การเขียนสิ่งที่กำหนดให้สำหรับการเริ่มต้นการพิสูจน์		1	0.24	24.00	

ตาราง 1 (ต่อ)

ปัญหา	จำนวนนิสิต (คน)	คะแนนเต็ม	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) คิดเป็นร้อยละจากคะแนนเต็ม	ลำดับปัญหา
4. วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ (Contrapositive) (ต่อ)					
4.4 การรู้ข้อสรุปสำหรับการพิสูจน์		1	0.65	65.00	
4.5 การแสดงวิธีการพิสูจน์		5	4.23	84.60	
5. วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง (Contradiction)	**79**	**10**	**4.67**	**46.70**	**1**
5.1 การเขียนนิเสธของข้อความ		3	1.97	65.67	
5.2 การเขียนสิ่งสมมติสำหรับการพิสูจน์ข้อความ P		1	0.06	6.00	
5.3 การเขียนสิ่งสมมติสำหรับการพิสูจน์ข้อความ $P \rightarrow Q$		1	0.62	62.00	
5.4 การแสดงวิธีการพิสูจน์		5	2.01	40.20	
6. การพิสูจน์ข้อความ $P \leftrightarrow Q$	**79**	**14**	**11.14**	**79.57**	**6**
6.1 บอกข้อความที่ต้องพิสูจน์		4	3.30	82.50	
6.2 การแสดงวิธีการพิสูจน์		10	7.84	78.40	
7. การเลือกวิธีการพิสูจน์และแสดงการพิสูจน์	**79**	**6**	**4.33**	**72.71**	**4**
7.1 การเลือกวิธีการพิสูจน์		1	0.95	95.00	
7.2 การแสดงการพิสูจน์		5	3.38	67.60	

จากตาราง 1 พบว่า นิสิตมีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เรียงจากมากไปน้อย ดังนี้

1. วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) คิดเป็นร้อยละจากคะแนนเต็มเท่ากับ 46.70

2. การใช้บทนิยามเพื่อวิเคราะห์การพิสูจน์ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) คิดเป็นร้อยละจากคะแนนเต็มเท่ากับ 50.50

3. วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) คิดเป็นร้อยละจากคะแนนเต็มมีค่าเท่ากับ 69.64

4. การเลือกวิธีการพิสูจน์และการแสดงการพิสูจน์ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) คิดเป็นร้อยละจากคะแนนเต็มเท่ากับ 72.17

5. การวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) คิดเป็นร้อยละจากคะแนนเต็มเท่ากับ 75.17

6. การพิสูจน์ข้อความในรูป P ก็ต่อเมื่อ Q มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) คิดเป็นร้อยละจากคะแนนเต็มเท่ากับ 79.57

7. วิธีการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) คิดเป็นร้อยละจากคะแนนเต็มเท่ากับ 87.57

นอกจากนี้ เมื่อพิจารณาปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ข้างต้น พบว่ามีรายละเอียดของแต่ละปัญหาเรียงลำดับจากมากไปน้อย ดังนี้

วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง การเขียนสิ่งสมมติสำหรับการพิสูจน์ข้อความ P เป็นปัญหามากที่สุด รองลงมาคือ การแสดงการพิสูจน์ การเขียนสิ่งสมมติสำหรับการพิสูจน์ข้อความ $P \rightarrow Q$ และการเขียนนิเสธของข้อความ ตามลำดับ

วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ การเขียนสิ่งที่กำหนดให้สำหรับการเริ่มต้นการพิสูจน์เป็นปัญหามากที่สุด รองลงมาคือ การเขียนข้อความที่ต้องพิสูจน์แทนข้อความที่โจทย์กำหนดให้ การเขียนข้อความแย้งสลับที่ การรู้ข้อสรุปสำหรับการพิสูจน์ และการแสดงการพิสูจน์ ตามลำดับ

การเลือกวิธีการพิสูจน์และการแสดงการพิสูจน์ การแสดงการพิสูจน์ เป็นปัญหามากที่สุด รองลงมาคือ การเลือกวิธีการพิสูจน์ ตามลำดับ

การวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ การบอกสิ่งที่กำหนดให้ เป็นปัญหามากที่สุด รองลงมาคือ การบอกสิ่งที่ต้องพิสูจน์ ตามลำดับ

การพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$ การแสดงการพิสูจน์ เป็นปัญหามากที่สุด รองลงมาคือ การบอกข้อความที่ต้องพิสูจน์ ตามลำดับ

วิธีการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข การเขียนสิ่งที่กำหนดให้สำหรับการเริ่มต้นการพิสูจน์ เป็นปัญหามากที่สุด รองลงมาคือ การรู้ข้อสรุปสำหรับการพิสูจน์ และการแสดงวิธีพิสูจน์ ตามลำดับ

2. ลักษณะข้อผิดพลาดในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

ในการศึกษาลักษณะข้อผิดพลาดในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยตรวจแบบทดสอบอัตนัยที่นิสิตทำ แล้วนำคำตอบของนิสิตที่ผิดมาวิเคราะห์ และจำแนกลักษณะข้อผิดพลาดในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ได้ลักษณะข้อผิดพลาด 7 ลักษณะ ดังนี้

2.1 ลักษณะข้อผิดพลาดในการวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์

ในหัวข้อนี้ต้องการที่จะศึกษาเกี่ยวกับปัญหาในการทำความเข้าใจโจทย์ขั้นต้น ซึ่งแบ่งเป็น 2 ลักษณะ คือ การวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์

โจทย์ที่ใช้ในการศึกษาปัญหาเกี่ยวกับการวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์มี 3 ข้อ ได้แก่

ข้อ 1 สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ n(n+1) เป็นจำนวนเต็มคู่

ข้อ 2 ถ้า m และ n เป็นจำนวนเต็มซึ่ง mn เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว m หรือ n เป็นจำนวนเต็มคู่

ข้อ 3 กำหนด A และ B เป็นเซตใดๆ ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \subset A \cup B$

ความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ปรากฏผลดังตาราง 2

ตาราง 2 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้

ลักษณะข้อผิดพลาด	ความถี่			รวม
	ข้อ 1	ข้อ 2	ข้อ 3	
1. เขียนสิ่งที่กำหนดให้ไม่ชัดเจน	25	1	1	27
2. เขียนสิ่งที่กำหนดให้เกิน	6	4	1	11
3. เขียนสิ่งที่กำหนดให้ไม่ครบ	0	20	32	52
รวม	31	25	34	90

จากตาราง 2 พบว่า ลักษณะข้อผิดพลาดในการวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ มี 3 แบบ คือ เขียนสิ่งที่กำหนดให้ไม่ครบ เป็นลักษณะข้อผิดพลาดที่มากที่สุด (ความถี่ 52) เขียนสิ่งที่กำหนดให้ไม่ชัดเจน (ความถี่ 27) และเขียนสิ่งที่กำหนดให้เกิน (ความถี่ 11)

ความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการวิเคราะห์สิ่งที่ต้องพิสูจน์ ปรากฏผลดังตาราง 3

ตาราง 3 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการวิเคราะห์สิ่งที่ต้องพิสูจน์

ลักษณะข้อผิดพลาด	ความถี่			รวม
	ข้อ 1	ข้อ 2	ข้อ 3	
1. เขียนสิ่งที่ต้องพิสูจน์ผิด	1	7	13	21
2. เขียนสิ่งที่ต้องพิสูจน์เกิน	1	6	12	19
รวม	2	13	25	40

จากตาราง 3 พบว่า ลักษณะข้อผิดพลาดในการวิเคราะห์สิ่งที่ต้องพิสูจน์มี 2 แบบ คือ เขียนสิ่งที่ต้องพิสูจน์ผิด เป็นลักษณะข้อผิดพลาดที่มากที่สุด (ความถี่ 21) และเขียนสิ่งที่ต้องพิสูจน์เกิน (ความถี่ 19)

2.2 ลักษณะข้อผิดพลาดในการใช้บทนิยามเพื่อวิเคราะห์สิ่งที่ต้องการพิสูจน์

ในหัวข้อนี้ต้องการที่จะศึกษาเกี่ยวกับปัญหาในการใช้บทนิยามเพื่อวิเคราะห์สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ โจทย์ที่ใช้ในการศึกษามี 2 ข้อ ได้แก่

ข้อ 1 “ถ้า a เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว a^2 เป็นจำนวนเต็มคู่” จากข้อความดังกล่าว การจะพิสูจน์ว่า a^2 เป็นจำนวนเต็มคู่ จะต้องแสดงให้ได้อะไรเป็นจริง

ข้อ 2 “บทนิยาม กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใดๆ $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $\forall x, x \in A \rightarrow x \in B$” จากบทนิยามดังกล่าว ถ้าจะพิสูจน์ว่า $A \cap B \subset A$ จะต้องแสดงให้ได้อะไรเป็นจริง

ความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการใช้บทนิยามเพื่อวิเคราะห์สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ ปรากฏผลดังตาราง 4

ตาราง 4 ตารางแสดงความถี่ลักษณะข้อผิดพลาดในการใช้บทนิยามเพื่อวิเคราะห์สิ่งที่ต้องการพิสูจน์

ลักษณะข้อผิดพลาด	ความถี่		รวม
	ข้อ 1	ข้อ 2	
1. ไม่เข้าใจบทนิยาม	14	6	20
2. นำบทนิยามมาใช้ไม่เป็น	17	41	58
รวม	31	47	78

จากตาราง 4 พบว่า ลักษณะข้อผิดพลาดในการใช้บทนิยามเพื่อวิเคราะห์สิ่งที่ต้องการพิสูจน์มี 2 แบบ คือ นำบทนิยามมาใช้ไม่เป็น เป็นลักษณะข้อผิดพลาดที่มากที่สุด (ความถี่ 58) และไม่เข้าใจบทนิยาม (ความถี่ 20)

2.3 ลักษณะข้อผิดพลาดในวิธีการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข

การศึกษาปัญหาเกี่ยวกับการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข ผู้วิจัยสนใจศึกษาปัญหาใน 3 ลักษณะ ดังนี้

1. ปัญหาในการเขียนสิ่งที่กำหนดให้สำหรับการเริ่มต้นการพิสูจน์
2. ปัญหาในการรู้ข้อสรุปสำหรับการพิสูจน์
3. ปัญหาในการแสดงวิธีการพิสูจน์โดยกฎของเงื่อนไข

โจทย์ที่ใช้ในการศึกษาปัญหาทั้ง 3 ลักษณะ คือ “ถ้า m เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว 3m เป็นจำนวนเต็มคู่"

ความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการเขียนสิ่งที่กำหนดให้สำหรับการเริ่มต้นการพิสูจน์ การรู้ข้อสรุปสำหรับการพิสูจน์ และการแสดงวิธีการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข ปรากฏผลดังตาราง 5 – 7 ตามลำดับ

ตาราง 5 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการเขียนสิ่งที่กำหนดให้สำหรับการเริ่มต้นการพิสูจน์

ลักษณะข้อผิดพลาด	ความถี่
1. เขียนสิ่งที่กำหนดให้ไม่ครบ	31
2. เขียนสิ่งที่กำหนดให้ผิด	2

จากตาราง 5 พบว่า ลักษณะข้อผิดพลาดในการเขียนสิ่งที่กำหนดให้สำหรับการเริ่มต้นการพิสูจน์มี 2 แบบ คือ เขียนสิ่งที่กำหนดให้ไม่ครบ เป็นลักษณะข้อผิดพลาดที่มากที่สุด (ความถี่ 31) และเขียนสิ่งที่กำหนดให้ผิด (ความถี่ 2)

ตาราง 6 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการรู้ข้อสรุปสำหรับพิสูจน์

ลักษณะข้อผิดพลาด	ความถี่
1. เขียนสิ่งที่ต้องพิสูจน์เกิน	7
2. เขียนสิ่งที่ต้องพิสูจน์ไม่ครบ	1
3. เขียนสิ่งที่ต้องพิสูจน์ผิด	3

จากตาราง 6 พบว่า ลักษณะข้อผิดพลาดในการรู้ข้อสรุปสำหรับพิสูจน์มี 3 แบบ คือ เขียนสิ่งที่ต้องพิสูจน์เกิน เป็นลักษณะข้อผิดพลาดที่มากที่สุด (ความถี่ 7) เขียนสิ่งที่ต้องพิสูจน์ผิด (ความถี่ 3) และเขียนสิ่งที่ต้องพิสูจน์ไม่ครบ (ความถี่ 1)

ตาราง 7 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการแสดงวิธีการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข

ลักษณะข้อผิดพลาด	ความถี่
1. การใช้บทนิยาม มี 2 แบบ ได้แก่	11
1.1 เขียนบทนิยามไม่ครบ หรือไม่อ้างบทนิยาม	4
1.2 นำบทนิยามมาใช้ไม่ถูกต้อง	7
2. การเริ่มต้นการพิสูจน์ มี 2 แบบ ได้แก่	3
2.1 นำสิ่งที่ต้องพิสูจน์มาเขียนเป็นสิ่งสมมติ	1
2.2 เขียนไม่ชัดเจน	2
3. ขาดความระมัดระวัง	1
4. การใช้ภาษา	4
5. สรุปผิด	14

จากตาราง 7 พบว่า ลักษณะข้อผิดพลาดในการแสดงการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข มี 5 แบบ คือ สรุปผิด เป็นลักษณะข้อผิดพลาดที่มากที่สุด (ความถี่ 14) การใช้บทนิยาม (ความถี่ 11) การใช้ภาษา (ความถี่ 4) การเริ่มต้นการพิสูจน์ (ความถี่ 3) และขาดความระมัดระวัง (ความถี่ 1)

2.4 ลักษณะข้อผิดพลาดในวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่

การศึกษาปัญหาเกี่ยวกับการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ ผู้วิจัยสนใจศึกษาปัญหาใน 5 ลักษณะ ดังนี้

1. ปัญหาในการเขียนข้อความแย้งสลับที่
2. ปัญหาในการเขียนข้อความที่จะต้องพิสูจน์แทนข้อความเดิม เมื่อต้องการแสดงการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่
3. ปัญหาในการบอกสิ่งกำหนดให้ในการเริ่มต้นการพิสูจน์โดยใช้ข้อความ

แย้งสลับที่

4. ปัญหาในการรู้ข้อสรุปในการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่

5. ปัญหาในการแสดงวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่

โจทย์ที่ใช้ในการศึกษาปัญหาเกี่ยวกับการเขียนข้อความแย้งสลับที่ มี 3 ข้อ ดังนี้

ข้อ 1 ถ้า $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ แล้ว $2 < 3$

ข้อ 2 ถ้า c เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว สมการ $n^2 + n - c = 0$ ไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มคี่

ข้อ 3 ถ้า p และ q เป็นจำนวนจริงบวก ซึ่ง $\sqrt{pq} \neq (p+q)/2$ แล้ว $p \neq q$

ความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการเขียนข้อความแย้งสลับที่ ปรากฏผลดังตาราง 8

ตาราง 8 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการเขียนข้อความแย้งสลับที่

ลักษณะข้อผิดพลาด	ความถี่			รวม
	ข้อ 1	ข้อ 2	ข้อ 3	
1. ผิดพลาดในเรื่องการใช้นิเสธ	27	24	11	62
2. ไม่เข้าใจวิธีการเขียนข้อความแย้งสลับที่	2	6	5	13
3. เขียนคำตอบไม่ชัดเจน	0	3	0	3
4. ขาดความระมัดระวัง	0	2	5	7
รวม	29	35	21	85

จากตาราง 8 พบว่า ลักษณะข้อผิดพลาดในการเขียนข้อความแย้งสลับที่ มี 4 แบบ คือ ผิดพลาดในเรื่องการใช้นิเสธ เป็นลักษณะข้อผิดพลาดที่มากที่สุด (ความถี่ 62) ไม่เข้าใจวิธีการเขียนข้อความแย้งสลับที่ (ความถี่ 13) ขาดความระมัดระวัง (ความถี่ 7) และเขียนคำตอบไม่ชัดเจน (ความถี่ 3)

ในการศึกษาปัญหาที่เกี่ยวกับการเขียนข้อความที่จะต้องพิสูจน์แทนข้อความเดิม เมื่อต้องการแสดงการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ ปัญหาในการบอกสิ่งกำหนดให้ในการเริ่มต้นการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ และปัญหาในการรู้ข้อสรุปในการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ โจทย์ที่ใช้ คือ "เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ถ้าเส้นตรงคู่นั้นขนานกันแล้วมุมแย้งจะมีขนาดเท่ากัน" ความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาด ปรากฏผลดังตาราง 9 – 11 ตามลำดับ

ตาราง 9 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการเขียนข้อความที่จะต้องพิสูจน์แทนข้อความเดิม เมื่อต้องการแสดงการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่

ลักษณะข้อผิดพลาด	ความถี่
1. ผิดพลาดในเรื่องการใช้นิเสธ	2
2. ผิดพลาดในเรื่องการเขียนความแย้งสลับที่	7
3. เขียนคำตอบไม่ครบ	23

จากตาราง 9 พบว่า ลักษณะข้อผิดพลาดในการเขียนข้อความที่จะต้องพิสูจน์แทนข้อความเดิม เมื่อต้องการแสดงการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ มี 3 แบบ คือ เขียนคำตอบไม่ครบ เป็นลักษณะข้อผิดพลาดที่มากที่สุด (ความถี่ 23) ผิดพลาดในเรื่องการเขียนความแย้งสลับที่ (ความถี่ 7) และผิดพลาดในเรื่องการใช้นิเสธ (ความถี่ 2)

ตาราง 10 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการบอกสิ่งกำหนดให้ในการเริ่มต้นการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่

ลักษณะข้อผิดพลาด	ความถี่
1. ไม่เข้าใจวิธีการเริ่มต้นการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่	20
2. เขียนคำตอบไม่ครบ	40

จากตาราง 10 พบว่า ลักษณะข้อผิดพลาดในการบอกสิ่งกำหนดให้สำหรับการเริ่มต้นการพิสูจน์ เมื่อต้องการแสดงการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ มี 2 แบบ คือ เขียนคำตอบไม่ครบ เป็นลักษณะข้อผิดพลาดที่มากที่สุด (ความถี่ 40) และไม่เข้าใจวิธีการเริ่มต้นการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ (ความถี่ 20)

ตาราง 11 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดการรู้ข้อสรุปในการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่

ลักษณะข้อผิดพลาด	ความถี่
1. ไม่เข้าใจขั้นตอนการสรุปสำหรับการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่	20
2. เขียนคำตอบไม่ครบ	9

จากตาราง 11 พบว่า ลักษณะข้อผิดพลาดการรู้ข้อสรุปในการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ มี 2 แบบ คือ ไม่เข้าใจขั้นตอนการสรุปสำหรับการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ เป็นลักษณะข้อผิดพลาดที่มากที่สุด (ความถี่ 20) และเขียนคำตอบไม่ครบ (ความถี่ 9)

โจทย์ที่ใช้ในการศึกษาปัญหาที่เกี่ยวกับการแสดงวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ คือ "ถ้า a^3 เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว a เป็นจำนวนเต็มคี่" ความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดปรากฏผลดังตาราง 12

ตาราง 12 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการแสดงพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่

ลักษณะข้อผิดพลาด	ความถี่
1. การใช้บทนิยาม มี 2 แบบ ได้แก่	20
1.1 เขียนบทนิยามไม่ครบ หรือไม่อ้างบทนิยาม	4
1.2 นำบทนิยามมาใช้ไม่ถูกต้อง	16
2. การเริ่มต้นการพิสูจน์ มี 4 แบบ ได้แก่	10
2.1 เขียนสิ่งที่ต้องพิสูจน์ไม่ถูกต้อง	1
2.2 เขียนเริ่มต้นการพิสูจน์โดยไม่มีสิ่งสมมติหรือไม่มีการอ้างเหตุ	4
2.3 เขียนสิ่งที่สมมติไม่ถูกต้อง	2
2.4 เขียนโดยไม่มีความระมัดระวัง	3
3. ผิดพลาดในกระบวนการพิสูจน์ มี 2 แบบ ได้แก่	7
3.1 ไม่ระมัดระวังในการคิดคำนวณ	6
3.2 ไม่ระมัดระวังในการแทนค่าตัวแปร	1
4. ความเข้าใจวิธีการพิสูจน์ มี 2 แบบ ได้แก่	8
4.1 เขียนข้อความแย้งสลับที่ผิด	3
4.2 สับสนในรูปแบบการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่กับการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง	5
5. เขียนแสดงไม่เป็นขั้นตอน	23
6. ผิดพลาดในขั้นการสรุป มี 2 แบบ ได้แก่	15
6.1 นำบทนิยามมาใช้ในการสรุปไม่เหมาะสม	8
6.2 เขียนสรุปไม่เป็นขั้นตอน	7
7. ผิดพลาดในเรื่องการใช้ภาษา	4

จากตาราง 12 พบว่า ลักษณะข้อผิดพลาดในการแสดงพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ มี 7 แบบ คือ เขียนแสดงไม่เป็นขั้นตอน เป็นลักษณะข้อผิดพลาดที่มากที่สุด (ความถี่ 23) การใช้บทนิยาม (ความถี่ 20) ผิดพลาดในขั้นการสรุป (ความถี่ 15) การเริ่มต้นการพิสูจน์ (ความถี่ 10) ความเข้าใจวิธีการพิสูจน์ (ความถี่ 8) ผิดพลาดในกระบวนการพิสูจน์ (ความถี่ 7) และผิดพลาดในเรื่องการใช้ภาษา (ความถี่ 4)

2.5 ลักษณะข้อผิดพลาดในวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง

การศึกษาปัญหาเกี่ยวกับการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง ผู้วิจัยสนใจศึกษาปัญหาใน 3 ลักษณะ ดังนี้

1. ปัญหาในการเขียนนิเสธของข้อความ
2. ปัญหาในการเขียนสิ่งสมมติสำหรับการพิสูจน์ข้อความ P และข้อความในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง
3. ปัญหาในการแสดงวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง

โจทย์ที่ใช้ในการศึกษาปัญหาที่เกี่ยวกับการเขียนข้อขัดแย้ง มี 3 ข้อ ดังนี้

ข้อ 1 ไม่มีจำนวนจริงที่เล็กที่สุด

ข้อ 2 ถ้า c เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว สมการ $n^2 + n - c = 0$ ไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มคี่

ข้อ 3 ถ้า x เป็นจำนวนจริงซึ่ง $x=\sqrt{2x+3}$ แล้ว $x \neq 3$

ความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการเขียนนิเสธของข้อความ ปรากฏผลดังตาราง 13

ตาราง 13 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการเขียนนิเสธของข้อความ

ลักษณะข้อผิดพลาด	ความถี่			รวม
	ข้อ 1	ข้อ 2	ข้อ 3	
1. ผิดพลาดในเรื่องการใช้นิเสธ	14	19	0	33
2. ไม่เข้าใจวิธีการเขียนนิเสธของข้อความในรูป $P \rightarrow Q$	0	22	26	48
รวม	14	41	26	81

จากตาราง 13 พบว่าลักษณะข้อผิดพลาดในการเขียนนิเสธของข้อความ มี 2 แบบ คือ ไม่เข้าใจวิธีการเขียนนิเสธของข้อความในรูป $P \rightarrow Q$ เป็นลักษณะข้อผิดพลาดที่มากที่สุด (ความถี่ 48) และผิดพลาดในเรื่องการใช้นิเสธ (ความถี่ 33)

ในการศึกษาปัญหาเกี่ยวกับการเขียนสิ่งสมมติสำหรับการพิสูจน์ข้อความ P และ ข้อความในรูป $P \rightarrow Q$ มีโจทย์ 2 ข้อ คือ

ข้อความ P : สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ 3 หาร $2^{2n} - 1$ ไม่ลงตัว

ข้อความในรูป $P \rightarrow Q$: ถ้า a เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว a+2 เป็นจำนวนอตรรกยะ

ความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการเขียนสิ่งสมมติสำหรับการพิสูจน์ข้อความ P และข้อความในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง ปรากฏผลดังตาราง 14

ตาราง 14 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการเขียนสิ่งสมมติสำหรับการพิสูจน์ข้อความ P และข้อความในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง

ลักษณะข้อผิดพลาด	ความถี่		รวม
	ข้อความ P	ข้อความในรูป $P \rightarrow Q$	
1. ผิดพลาดในเรื่องการใช้นิเสธ	41	0	41
2. ไม่เข้าใจวิธีการเขียนนิเสธของข้อความ P	32	0	32
3. ไม่เข้าใจวิธีการเขียนนิเสธของข้อความในรูป $P \rightarrow Q$	0	30	30
รวม	73	30	103

จากตาราง 14 พบว่า ลักษณะข้อผิดพลาดในการเขียนสิ่งสมมติสำหรับการพิสูจน์ข้อความ P และข้อความในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้ง มี 3 แบบ คือ ผิดพลาดในเรื่องการใช้นิเสธ เป็นลักษณะข้อผิดพลาดที่มากที่สุด (ความถี่ 41) ไม่เข้าใจวิธีการเขียนนิเสธของข้อความในรูป P (ความถี่ 32) และไม่เข้าใจวิธีการเขียนนิเสธของข้อความในรูป $P \rightarrow Q$ (ความถี่ 30)

โจทย์ที่ใช้ในการศึกษาปัญหาที่เกี่ยวกับการแสดงวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง คือ "ถ้า p และ q แทนประพจน์ จะได้ว่า $(p \wedge q) \rightarrow p$ เป็นสัจนิรันดร์" ความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการแสดงการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง ปรากฏผลดังตาราง 15

ตาราง 15 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการแสดงการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง

ลักษณะข้อผิดพลาด	ความถี่
1. การเริ่มต้นการพิสูจน์ มีลักษณะข้อผิดพลาด 6 แบบ ได้แก่	37
1.1 ไม่เข้าวิธีการเขียนเริ่มต้นการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง	9
1.2 เขียนเริ่มต้นการพิสูจน์ไม่ถูกต้อง	6
1.3 เขียนไม่ครบ	8
1.4 เขียนนิเสธของข้อความไม่ถูกต้อง	5
1.5 ใช้นิเสธไม่ถูกต้อง	5
1.6 ใช้ภาษาไม่ถูกต้อง	4
2. ผิดพลาดในกระบวนการพิสูจน์ มี 6 แบบ ได้แก่	53
2.1 นำสิ่งที่ต้องพิสูจน์มาอ้าง	4
2.2 ใช้วิธีการยกตัวอย่างค้านมาพิสูจน์	3
2.3 ไม่เข้าใจวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง	25
2.4 ผิดพลาดในเรื่องสมมูล และการใช้สัญลักษณ์	7

ตาราง 15 (ต่อ)

ลักษณะข้อผิดพลาด	ความถี่
2. ผิดพลาดในกระบวนการพิสูจน์ (ต่อ)	
2.5 เขียนแสดงไม่ระมัดระวัง	8
2.6 เขียนเริ่มต้นการพิสูจน์ได้ แต่ไม่สามารถพิสูจน์ได้	6
3. ขั้นการสรุป มี 2 แบบ ได้แก่	15
3.1 ไม่ทราบข้อขัดแย้ง หรือเมื่อพิสูจน์จนเกิดข้อขัดแย้งแล้วนำไปสรุปไม่ได้	11
3.2 เขียนสรุปไม่ชัดเจน	4
4. ไม่แสดงการพิสูจน์	2

จากตาราง 15 พบว่า ลักษณะข้อผิดพลาดในการแสดงการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง มี 4 แบบ คือ ผิดพลาดในกระบวนการพิสูจน์ เป็นลักษณะข้อผิดพลาดที่มากที่สุด (ความถี่ 53) การเริ่มต้นการพิสูจน์ (ความถี่ 37) ขั้นการสรุป (ความถี่ 15) และไม่แสดงการพิสูจน์ (ความถี่ 2)

2.6 ลักษณะข้อผิดพลาดในการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$

การศึกษาปัญหาเกี่ยวกับการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$ ผู้วิจัยสนใจศึกษาปัญหาใน 2 ลักษณะ ดังนี้

1. ปัญหาในการบอกข้อความที่ต้องพิสูจน์
2. ปัญหาในการแสดงวิธีการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$

โจทย์ที่ศึกษาปัญหาที่เกี่ยวกับการบอกข้อความที่ต้องพิสูจน์ มี 2 ข้อ คือ

ข้อ 1 x เป็นจำนวนเต็มคี่ ก็ต่อเมื่อ x + 3 เป็นจำนวนเต็มคู่

ข้อ 2 ให้ x และ y จำนวนจริงใดๆ จงพิสูจน์ว่า $x^3 = y^3$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

ความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการบอกข้อความที่ต้องพิสูจน์ ปรากฏผลดังตาราง 16

ตาราง 16 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการบอกข้อความที่ต้องพิสูจน์

ลักษณะข้อผิดพลาด	ความถี่		รวม
	ข้อ 1	ข้อ 2	
1. ไม่เข้าใจวิธีการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$	8	4	12
2. ขาดความระมัดระวัง	3	2	5
รวม	11	6	17

จากตาราง 16 พบว่า ลักษณะข้อผิดพลาดในการบอกข้อความที่ต้องพิสูจน์ มี 2 แบบ คือ ไม่เข้าใจวิธีการพิสูจน์ เป็นลักษณะข้อผิดพลาดที่มากที่สุด (ความถี่ 12) และขาดความระมัดระวัง (ความถี่ 5)

ในการศึกษาปัญหาเกี่ยวกับการแสดงวิธีการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$ โจทย์ที่ใช้ คือ "a เป็นจำนวนเต็มคี่ ก็ต่อเมื่อ a^2 เป็นจำนวนเต็มคู่" ความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการแสดงการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$ ปรากฏผลดังตาราง 17

ตาราง 17 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการแสดงการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$

ลักษณะข้อผิดพลาด	ความถี่
1. การเริ่มต้นการพิสูจน์ มี 4 แบบ ได้แก่	13
1.1 เขียนสิ่งที่ต้องพิสูจน์ไม่ถูกต้อง	2
1.2 เขียนเริ่มต้นการพิสูจน์โดยไม่มีสิ่งสมมติหรือไม่มีการอ้างเหตุ	4
1.3 เขียนสิ่งที่สมมติไม่ถูกต้อง	1
1.4 เขียนไม่ชัดเจน	6
2. การใช้บทนิยาม มี 2 แบบ ได้แก่	22
2.1 เขียนบทนิยามไม่ครบ	1
2.2 นำบทนิยามมาใช้ไม่ถูกต้อง	21
3. แสดงวิธีการพิสูจน์ มี 3 แบบ ได้แก่	13
3.1 แสดงวิธีการพิสูจน์ได้เพียงขั้นตอนเดียว	3
3.2 แสดงการพิสูจน์ไม่เป็นขั้นตอน	1
3.3 แสดงวิธีการพิสูจน์ผิด	9
4. ความเข้าใจวิธีการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$ มี 2 แบบ ดังนี้	5
4.1 พิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$ ด้วยการพิสูจน์เพียงข้อความเดียว ในรูป $P \rightarrow Q$	4
4.2 ไม่แสดงการพิสูจน์	1
5. ขั้นการสรุป	6
6. ขาดความระมัดระวัง	11

จากตาราง 17 พบว่า ลักษณะข้อผิดพลาดในการแสดงการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$ มี 6 แบบ คือ การใช้บทนิยาม เป็นลักษณะข้อผิดพลาดที่มากที่สุด (ความถี่ 22) แสดงวิธีการพิสูจน์ (ความถี่ 13) การเริ่มต้นการพิสูจน์ (ความถี่ 13) ขาดความระมัดระวัง (ความถี่ 11) ขั้นการสรุป (ความถี่ 6) และไม่เข้าใจวิธีการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$ (ความถี่ 5)

2.7 ลักษณะข้อผิดพลาดในการเลือกวิธีการพิสูจน์และการแสดงการพิสูจน์

การศึกษาปัญหาในตอนนี้ ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาปัญหาเกี่ยวกับการเลือกวิธีการพิสูจน์และปัญหาในการแสดงการพิสูจน์โดยใช้วิธีการพิสูจน์ที่เลือกด้วยตนเอง จากโจทย์ที่กำหนดให้ 2 ข้อ เลือกทำเพียง 1 ข้อ

โจทย์ที่ใช้ในการศึกษา มีรายละเอียดดังนี้

ข้อ 1 "*บทนิยาม* สำหรับจำนวนเต็ม a, b ใดๆ และ $b \neq 0$, $a|b$ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม c ซึ่ง $b = ac$"

จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a|b$ และ $b|c$ แล้ว $a|c$

ข้อ 2 ถ้า n^2 เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว $n - 3$ เป็นจำนวนเต็มคู่

จากการศึกษา พบว่า ในการเลือกวิธีการพิสูจน์ มีนิสิต 77 คน ที่สามารถเลือกวิธีการพิสูจน์และแสดงวิธีการพิสูจน์ตามที่ตนเองเลือกได้ มีนิสิต 2 คน ที่ไม่เลือกวิธีการพิสูจน์และไม่แสดงการพิสูจน์เลย นอกจากนี้พบว่า โจทย์ข้อ 2 เป็นโจทย์ที่มีนิสิตเลือกทำมากที่สุด มีนิสิตเลือกทำจำนวน 66 คน ส่วนโจทย์ข้อ 1 มีนิสิตเลือกทำเพียง 11 คน ความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการแสดงการพิสูจน์ ปรากฏผลดังตาราง 18

ตาราง 18 ตารางแสดงความถี่ของลักษณะข้อผิดพลาดในการแสดงการพิสูจน์

โจทย์ข้อ	ลักษณะข้อผิดพลาด	ความถี่
1	1. การใช้บทนิยาม มีลักษณะข้อผิดพลาด 2 แบบ ได้แก่	10
	1.1 เขียนบทนิยามไม่ครบ	5
	1.2 นำบทนิยามมาใช้ไม่ถูกต้อง	5
	2. ผิดพลาดในขั้นตอนการแสดงการพิสูจน์	2
2	1. การเริ่มต้นการพิสูจน์ มีลักษณะข้อผิดพลาด 4 แบบ ได้แก่	21
	1.1 เขียนสิ่งที่ต้องพิสูจน์ไม่ถูกต้อง	1
	1.2 เขียนเริ่มต้นการพิสูจน์โดยไม่มีสิ่งสมมติหรือไม่มีการอ้างเหตุ	2
	1.3 เขียนสิ่งที่สมมติไม่ถูกต้อง	8
	1.4 ใช้ข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้องในการเริ่มต้นการพิสูจน์	10
	2. นำบทนิยามมาใช้ไม่ถูกต้อง	16
	3. เขียนสรุปข้ามขั้นตอน	7
	4. ขาดความระมัดระวัง	7

จากตาราง 18 พบว่า ลักษณะข้อผิดพลาดในการแสดงวิธีการพิสูจน์โจทย์ข้อ 1 มี 2 แบบ คือ การใช้บทนิยาม เป็นลักษณะข้อผิดพลาดที่มากที่สุด (ความถี่ 10) และผิดพลาดในขั้นตอนการแสดงการพิสูจน์ (ความถี่ 2)

ลักษณะข้อผิดพลาดในการแสดงวิธีการพิสูจน์โจทย์ข้อ 2 มี 4 แบบ คือ การเริ่มต้นการพิสูจน์ เป็นลักษณะข้อผิดพลาดที่มากที่สุด (ความถี่ 21) นำบทนิยามมาใช้ไม่ถูกต้อง (ความถี่ 16) เขียนสรุปข้ามขั้นตอน (ความถี่ 7) และขาดความระมัดระวัง (ความถี่ 7)

3. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ค่าสัมประสิทธิ์ของการแปรผันของคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยของนิสิตจำแนกตามเพศ ปรากฏผลดังตารางที่ 19

ตาราง 19 ตารางแสดงค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ค่าสัมประสิทธิ์ของการแปรผันของคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยของนิสิตจำแนกตามเพศ

เพศ	จำนวนนิสิต (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$)	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s)	ค่าสัมประสิทธิ์ของการแปรผัน (c.v.)
ชาย	25	79	36.16	9.45	26.13
หญิง	54	79	40.93	8.79	21.48

จากตาราง 19 พบว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของนิสิตชายต่ำกว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของนิสิตหญิง ($\bar{x}$ = 36.16, $\bar{x}$ = 40.93) แต่การกระจายของคะแนนสอบนิสิตชายมากกว่าการกระจายของคะแนนสอบนิสิตหญิง (c.v.= 26.13, c.v.= 21.48)

4. การทดสอบภาวะการแจกแจงปกติของคะแนนนิสิตชายและนิสิตหญิง โดยใช้การทดสอบลิลลี่ฟอร์ส (Lilliefors test) ปรากฏผลดังตาราง 20

ตาราง 20 ตารางแสดงผลการทดสอบสภาวะการแจกแจงปกติของคะแนนนิสิตชายและนิสิตหญิง โดยใช้การทดสอบลิลลี่ฟอร์ส (Lilliefors test)

เพศ	จำนวนนิสิต (คน)	ค่าสถิติ (L)	ค่าวิกฤติที่ระดับนัยสำคัญ .01
ชาย	25	0.0936	0.200
หญิง	54	0.1368	0.140

จากตาราง 20 พบว่า ค่าสถิติ L ที่คำนวณได้มีค่าน้อยกว่าค่าวิกฤตที่ระดับนัยสำคัญ .01 นั่นคือ คะแนนที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยของนิสิตชายมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ และคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยของนิสิตหญิงมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ

5. ผลการเปรียบเทียบปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตโดยจำแนกตามเพศ

เนื่องจากคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยของนิสิตชายมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ และคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยของนิสิตหญิงมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ จึงใช้ t - test เปรียบเทียบปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตโดยจำแนกตามเพศ ปรากฏผลดังตาราง 21

ตาราง 21 ตารางแสดงผลการเปรียบเทียบปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตโดยจำแนกตามเพศ

เพศ	จำนวนนิสิต (คน)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s)	ค่าสถิติ (t)	ค่าวิกฤต
ชาย	25	36.16	9.45	-2.189*	-1.64
หญิง	54	40.93	8.79		

*มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากตาราง 21 ค่าสถิติ (t) ที่คำนวณได้มีค่าน้อยกว่าค่าวิกฤตที่ระดับนัยสำคัญ .05 นั่นคือ คะแนนที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยของนิสิตชาย ต่ำกว่าคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยของนิสิตหญิง หรือนิสิตชายมีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มากกว่านิสิตหญิง ที่ระดับนัยสำคัญ .05

6. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ค่าสัมประสิทธิ์ของการแปรผันของคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยของนิสิตจำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ซึ่งแบ่งเป็น 3 ระดับ คือ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ปานกลาง ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำ ปรากฏผลดังตาราง 22

ตาราง 22 ตารางแสดงค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ค่าสัมประสิทธิ์ของการแปรผันของคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยของนิสิตจำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์	จำนวนนิสิต (คน)	คะแนนเต็ม (คะแนน)	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$)	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s)	ค่าสัมประสิทธิ์ของการแปรผัน (c.v.)
ต่ำ	11	56	36.32	8.13	22.38
ปานกลาง	44	56	37.78	10.07	26.65
สูง	24	56	43.83	6.31	14.40

จากตาราง 22 พบว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของนิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ปานกลาง มีค่าใกล้เคียงกัน ($\bar{x}$ = 36.32, $\bar{x}$ = 37.78) ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของนิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง มีค่ามากที่สุด ($\bar{x}$ = 43.83) การกระจายของคะแนนสอบในกลุ่มนิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ปานกลางกระจายมากที่สุด (c.v.= 26.65) และ

การกระจายของคะแนนสอบในกลุ่มนิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงกระจายน้อยที่สุด (c.v.= 14.40)

7. การทดสอบภาวะการแจกแจงปกติของคะแนนที่จำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ โดยใช้การทดสอบลิลลี่ฟอร์ส (Lilliefors test) ปรากฏผลดังตาราง 23

ตาราง 23 ตารางแสดงผลการทดสอบสภาวะการแจกแจงปกติของคะแนนที่จำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ โดยใช้การทดสอบลิลลี่ฟอร์ส (Lilliefors test)

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์	จำนวนนิสิต (คน)	ค่าสถิติ (L)	ค่าวิกฤติที่ระดับนัยสำคัญ .01
ต่ำ	11	0.0951	0.284
ปานกลาง	44	0.0849	0.155
สูง	24	0.0953	0.206

จากตาราง 23 จะพบว่า ค่าสถิติ L ที่คำนวณได้มีค่าน้อยกว่าค่าวิกฤตที่ระดับนัยสำคัญ .01 นั่นคือ คะแนนที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยของนิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำ ปานกลางและสูง มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ

8. การทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของคะแนนที่จำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ โดยการทดสอบลีเวน (Levene's test) ปรากฏผลดังตาราง 24

ตาราง 24 ตารางแสดงผลการทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของคะแนนที่จำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ โดยการทดสอบลีเวน (Levene's test)

Levene statistic	df_1	df_2	Sig.
3.066	2	76	.052

จากตาราง 24 พบว่า ค่าความแปรปรวนของคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยที่จำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เท่ากัน ที่ระดับนัยสำคัญ .05

9. ผลการเปรียบเทียบปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต จำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

เนื่องจากคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยที่จำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์มาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ และค่าความแปรปรวนของคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยที่จำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เท่ากัน จึงใช้ F-test เปรียบเทียบปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตจำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ปรากฏผลดังตาราง 25

ตาราง 25 ตารางแสดงผลการเปรียบเทียบปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต จำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

แหล่งที่มา	SS	df	MS	F
ระหว่างกลุ่ม	691.047	2	345.523	4.425*
ภายในกลุ่ม	5934.169	76	78.081	
รวม	6625.215	78		

*มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

$F_{(2,76,.05)} = 3.15$

จากตาราง 25 จะเห็นได้ว่า 4.425 > 3.15 แสดงว่า คะแนนที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยของนิสิตที่จำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ แตกต่างกัน หรือปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตที่จำแนกตามผลสัมฤทธ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ แตกต่างกัน ที่ระดับนัยสำคัญ .05

เพื่อให้ทราบค่าความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เป็นรายคู่จึงได้ทำการทดสอบโดยใช้การทดสอบ LSD ปรากฏผลดังตาราง 26

ตาราง 26 ตารางแสดงค่าความแตกต่างของคะแนนเฉลี่ยของระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เป็นรายคู่ โดยใช้การทดสอบ LSD

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$)	ต่ำ 36.32	ปานกลาง 37.78	สูง 43.83
ต่ำ	36.32	-	-1.4659	-7.5152*
ปานกลาง	37.78	-	-	-6.0492*
สูง	43.83	-	-	-

*มีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากตาราง 26 พบว่า คะแนนเฉลี่ยที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยของนิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำ และปานกลาง ต่ำกว่าคะแนนเฉลี่ยที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยของนิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ที่ระดับนัยสำคัญ .05 ส่วนคะแนนเฉลี่ยที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยของนิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำและคะแนนเฉลี่ยที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยของนิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ปานกลางไม่แตกต่างกัน ที่ระดับนัยสำคัญ .05

10. ร้อยละของจำนวนนิสิตที่มีทัศนคติต่อระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ปรากฏผลดังตาราง 27

ระดับปัญหาแต่ละระดับ มีความหมาย ดังนี้

3 หมายถึง มีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในด้านนั้นมาก

2 หมายถึง มีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในด้านนั้นปานกลาง

1 หมายถึง มีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในด้านนั้นน้อย

0 หมายถึง ไม่มีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในด้านนั้น

ตาราง 27 ตารางแสดงร้อยละจำนวนนิสิตที่มีทัศนคติต่อระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

ปัญหา	ระดับปัญหา								รวม	
	3		2		1		0			
	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
ขั้นที่ 1 ขั้นทำความเข้าใจโจทย์เบื้องต้น										
1. การอ่านและทำความเข้าใจโจทย์	9	11.4	56	70.9	12	15.2	2	2.5	79	100
2. การอ่านและทำความเข้าใจสัญลักษณ์ที่โจทย์กำหนดให้	11	13.9	35	44.3	31	39.2	2	2.5	79	100
3. การแยกแยะระหว่างสิ่งที่โจทย์กำหนดและสิ่งที่ต้องพิสูจน์	14	17.7	40	50.6	21	26.6	4	5.1	79	100
4. รู้ความหมายของสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ และรู้ว่าจะต้องแสดงสิ่งใดจึงจะได้สิ่งที่ต้องการพิสูจน์	13	16.5	39	49.4	24	30.4	3	3.8	79	100
5. ความเข้าใจในเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับโจทย์	15	19.0	36	45.6	25	31.6	3	3.8	79	100
ค่าเฉลี่ยของร้อยละในขั้นที่ 1	-	15.7	-	52.2	-	28.6	-	3.5	79	100
ขั้นที่ 2 ขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์										
6. การเลือกวิธีการพิสูจน์	19	24.1	36	45.6	18	22.8	6	7.6	79	100
7. การเขียนเริ่มต้นการพิสูจน์ (เขียนสิ่งที่กำหนดให้และเขียนสิ่งที่ต้องการพิสูจน์)	7	8.9	33	41.8	31	39.2	8	10.1	79	100
8. การเขียนสมมติฐานสำหรับการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข	9	11.4	33	41.8	27	34.2	10	12.7	79	100

ตาราง 27 (ต่อ)

ปัญหา	ระดับปัญหา								รวม	
	3		2		1		0			
	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
ขั้นที่ 2 ขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ (ต่อ)										
9. รู้ข้อสรุปของการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข	3	3.8	37	46.8	31	39.2	8	10.1	79	100
10. การเขียนข้อความแย้งสลับที่	6	7.6	27	34.2	30	38.0	16	20.3	79	100
11. การเขียนสมมติฐานสำหรับการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่	5	6.3	36	45.6	29	36.7	9	11.4	79	100
12. รู้ข้อสรุปของการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่	8	10.1	30	38.0	32	40.5	9	11.4	79	100
13. การเขียนนิเสธของข้อความ	13	16.5	29	36.7	31	39.2	6	7.6	79	100
14. การเขียนสมมติฐานสำหรับการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง	13	16.5	39	49.4	21	26.6	6	7.6	79	100
15. รู้ข้อสรุปของการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง	12	15.2	31	39.2	28	35.4	8	10.1	79	100
ค่าเฉลี่ยของร้อยละในขั้นที่ 2	-	12.0	-	42.0	-	35.2	-	11.0	79	100
ขั้นที่ 3 ขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์										
16. การค้นหาแนวทางการพิสูจน์	25	31.6	39	49.4	13	16.5	2	2.5	79	100
17. ความเข้าใจในบทนิยาม	15	19.0	47	59.5	15	19.0	2	2.5	79	100
18. การจำบทนิยาม และเขียนบทนิยาม	23	29.1	38	48.1	13	16.5	5	6.3	79	100
19. การนำบทนิยามมาช่วยวิเคราะห์แนวทางการการพิสูจน์	25	31.6	38	48.1	14	17.1	2	2.5	79	100
20. การนำบทนิยาม ทฤษฎีบทมาช่วยในขั้นตอนการพิสูจน์	20	25.3	38	48.1	20	25.3	1	1.3	79	100
21. การใช้ข้อมูลเพื่อการพิสูจน์	17	21.5	40	50.6	20	25.3	2	2.5	79	100
22. การนำสิ่งที่มีอยู่หรือสิ่งที่ทราบมาช่วยในการพิสูจน์	13	16.5	39	49.4	25	31.6	2	2.5	79	100

ตาราง 27 (ต่อ)

ปัญหา	ระดับปัญหา								รวม	
	3		2		1		0			
	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
ขั้นที่ 3 ขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์ (ต่อ)										
23. การใช้เทคนิค กระบวนการแก้ปัญหาหรือวิธีการอื่นๆ มาช่วยในการพิสูจน์	31	39.2	27	34.2	21	26.6	0	0	79	100
ค่าเฉลี่ยของร้อยละในขั้นที่ 3	-	26.7	-	48.5	-	22.3	-	2.5	79	100
ขั้นที่ 4 ขั้นแสดงการพิสูจน์										
24. การใช้ภาษาและสัญลักษณ์ในการพิสูจน์	18	22.8	40	50.6	18	22.8	3	3.8	79	100
25. การใช้ตรรกศาสตร์ การอ้างเหตุผล หรือสัจนิรันดร์	25	31.6	36	45.6	16	20.3	2	2.5	79	100
26. การเขียนการพิสูจน์ให้เป็นขั้นตอนจนได้ผลสรุป	16	20.3	43	54.4	18	22.8	2	2.5	79	100
27. การเขียนสรุปการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข	7	8.9	29	36.7	31	39.2	12	15.2	79	100
28. การเขียนสรุปการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่	6	7.6	30	38.0	33	41.8	10	12.7	79	100
29. การเขียนสรุปการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง	16	20.3	29	36.7	27	34.2	7	8.9	79	100
30. รู้ข้อขัดแย้งที่เกิดจากการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง	17	21.5	43	54.4	15	19.0	4	5.1	79	100
31. การระมัดระวังในการแสดงการพิสูจน์	30	38.0	30	38.0	16	20.3	3	3.8	79	100
ค่าเฉลี่ยของร้อยละในขั้นที่ 4	-	21.4	-	44.3	-	27.6	-	6	79	100

จากตาราง 27 ซึ่งเป็นข้อมูลที่เป็นร้อยละจำนวนนิสิตที่มีทัศนคติต่อระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ พบว่า ขั้นที่ 1 ปัญหาในขั้นทำความเข้าใจโจทย์เบื้องต้น นิสิตส่วนใหญ่มีทัศนคติต่อปัญหาในขั้นนี้ในระดับปานกลาง

ขั้นที่ 2 ปัญหาในขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ นิสิตส่วนใหญ่มีทัศนคติต่อปัญหาในขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ในระดับปานกลาง ยกเว้นทัศนคติต่อปัญหาในเรื่องความเข้าใจในวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ การเขียนข้อความแย้งสลับที่ รู้ข้อสรุปของการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ และการเขียนนิเสธของข้อความ นิสิตมีทัศนคติต่อปัญหาในระดับน้อย

ขั้นที่ 3 ปัญหาในขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์ นิสิตส่วนใหญ่มีทัศนคติต่อปัญหาในขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์ในระดับปานกลาง ยกเว้นทัศนคติต่อปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในเรื่องการใช้เทคนิค กระบวนการแก้ปัญหาหรือวิธีการอื่นๆ มาช่วยในการพิสูจน์ นิสิตมีทัศนคติต่อปัญหาในในระดับมาก

ขั้นที่ 4 ปัญหาในขั้นแสดงการพิสูจน์ นิสิตส่วนใหญ่มีทัศนคติต่อปัญหาในขั้นแสดงการพิสูจน์ในระดับปานกลาง ยกเว้นทัศนคติต่อปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในเรื่องการระมัดระวังในการแสดงการพิสูจน์ นิสิตมีทัศนคติต่อปัญหาในระดับมากและระดับปานกลาง และทัศนคติต่อปัญหาในเรื่องการเขียนสรุปการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข และการเขียนสรุปการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ นิสิตมีทัศนคติต่อปัญหาในระดับน้อย

11. ผลการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างเพศกับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 4 ขั้น ในการศึกษาผู้วิจัยแบ่งปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เป็น 4 ขั้น ดังนี้

ขั้นที่ 1 คือ ปัญหาในขั้นทำความเข้าใจโจทย์เบื้องต้น

ขั้นที่ 2 คือ ปัญหาในขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 3 คือ ปัญหาในขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์

ขั้นที่ 4 คือ ปัญหาในขั้นแสดงการพิสูจน์

ปรากฏผลดังตาราง 28

ตาราง 28 ตารางแสดงผลการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างเพศกับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 4 ขั้น

ปัญหาขั้นที่	เพศ	ระดับปัญหา			รวม	ค่าสถิติ (χ^2)	ค่าวิกฤต
		น้อย	ปานกลาง	มาก			
1	ชาย	1	15	9	25		
	หญิง	6	35	13	54	1.911	
	รวม	7	50	22	79		
2	ชาย	2	16	7	25		
	หญิง	15	27	12	54	3.956	
	รวม	17	43	19	79		5.991
3	ชาย	0	12	13	25		
	หญิง	6	22	26	54	3.308	
	รวม	6	34	39	79		
4	ชาย	1	17	7	25		
	หญิง	9	29	16	54	2.781	
	รวม	10	46	23	79		

<u>เกณฑ์การแปลความหมาย</u>

ในเรื่องระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ แปลความหมายดังนี้ (วิเชียร เกตุสิงห์. 2538 : 9)

ระดับปัญหาน้อย หมายถึง ค่าเฉลี่ยของระดับปัญหาที่มีค่า 0.00 – 1.00

ระดับปัญหาปานกลาง หมายถึง ค่าเฉลี่ยของระดับปัญหาที่มีค่า 1.01 – 2.00

ระดับปัญหามาก หมายถึง ค่าเฉลี่ยของระดับปัญหาที่มีค่า 2.01 – 3.00

จากตาราง 28 พบว่า ระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 4 ขั้น ค่าสถิติ (χ^2) น้อยกว่าค่าวิกฤต นั่นคือ เพศไม่มีความสัมพันธ์กับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 4 ขั้น ที่ระดับนัยสำคัญ .05

12. ผลการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์กับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 4 ขั้น

ในการศึกษาผู้วิจัยแบ่งปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เป็น 4 ขั้น ดังนี้

ขั้นที่ 1 คือ ปัญหาในขั้นทำความเข้าใจโจทย์เบื้องต้น

ขั้นที่ 2 คือ ปัญหาในขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์

ขั้นที่ 3 คือ ปัญหาในขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์

ขั้นที่ 4 คือ ปัญหาในขั้นแสดงการพิสูจน์

ปรากฏผลดังตาราง 29

ตาราง 29 ตารางแสดงผลการศึกษาความผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์กับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 4 ขั้น

ปัญหาขั้นที่	ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์	ระดับปัญหา			รวม	ค่าสถิติ (χ^2)	ค่าวิกฤต
		น้อย	ปานกลาง	มาก			
1	ต่ำ	2	7	1	10		9.488
	ปานกลาง	1	32	12	45	8.920	
	สูง	4	11	9	24		
	รวม	7	50	22	79		
2	ต่ำ	1	6	3	10		
	ปานกลาง	8	27	10	45	3.717	
	สูง	8	10	6	24		
	รวม	17	43	19	79		
3	ต่ำ	0	3	7	10		
	ปานกลาง	4	22	19	45	3.240	
	สูง	2	9	13	24		
	รวม	6	34	39	79		
4	ต่ำ	0	6	4	10		
	ปานกลาง	6	26	13	45	2.141	
	สูง	4	14	6	24		
	รวม	10	46	23	79		

จากตาราง 30 พบว่า ระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 4 ขั้น ค่าสถิติ (χ^2) น้อยกว่าค่าวิกฤต นั่นคือ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ไม่มีความสัมพันธ์กับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 4 ขั้น ที่ระดับนัยสำคัญ .05

บทที่ 5
สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

สังเขปความมุ่งหมาย สมมุติฐาน และวิธีดำเนินงานวิจัย

ความมุ่งหมาย

1. เพื่อศึกษา วิเคราะห์และจัดลำดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตการศึกษาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชา คณ 241 หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2543
2. เพื่อศึกษาลักษณะข้อผิดพลาดในการพิสูจน์คณิตศาสตร์ของนิสิต
3. เพื่อเปรียบเทียบปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตจำแนกตามเพศ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์
4. เพื่อศึกษาระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต
5. เพื่อศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต กับตัวแปรทางด้านเพศ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

สมมติฐานของงานวิจัย

1. เพศ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ที่ต่างกัน มีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์แตกต่างกัน
2. เพศ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ มีความสัมพันธ์กับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต

วิธีดำเนินการวิจัย

1. เลือกกลุ่มตัวอย่างเป็นนิสิตหลักสูตรการศึกษาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ที่ลงทะเบียนเรียนวิชา คณ 241 หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2543 ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร จำนวน 79 คน
2. ดำเนินการวิจัย

    2.1 เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ประกอบด้วย

    1. แบบทดสอบอัตนัยเกี่ยวกับการพิสูจน์ แบ่งเป็น 2 ตอน ดังนี้

        ตอนที่ 1 แบบสอบถามข้อมูลเกี่ยวกับสถานภาพของนิสิต ได้แก่ ชื่อ-นามสกุล เกรดเฉพาะวิชา คณ111 และ คณ 112

        ตอนที่ 2 เป็นแบบทดสอบอัตนัย มี 7 ข้อย่อย คือ

        1. วิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ จำนวน 3 ข้อย่อย
        2. การใช้บทนิยามเพื่อวิเคราะห์สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ จำนวน 2 ข้อย่อย
        3. วิธีการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข (Rule of Conditional Proof) จำนวน 2 ข้อย่อย

4. วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ (Contrapositive) จำนวน 5 ข้อย่อย
5. วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง (Contradiction) จำนวน 4 ข้อย่อย
6. วิธีการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$ จำนวน 2 ข้อย่อย
7. แสดงการพิสูจน์ จำนวน 2 ข้อ ให้เลือกแสดงการพิสูจน์ 1 ข้อย่อย

รวมจำนวนข้อสอบทั้งหมด 20 ข้อย่อย

2.1.2 แบบสัมภาษณ์เกี่ยวกับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ แบ่งปัญหาเป็น 4 ขั้น ได้แก่

1. ปัญหาในขั้นทำความเข้าใจโจทย์เบื้องต้น มีข้อคำถาม 5 ข้อ
2. ปัญหาในขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ มีข้อคำถาม 10 ข้อ
3. ปัญหาในขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์ มีข้อคำถาม 8 ข้อ
4. ปัญหาในขั้นการแสดงการพิสูจน์ มีข้อคำถาม 8 ข้อ

รวมข้อคำถามทั้งหมด 31 ข้อ

3. การเก็บรวบรวมข้อมูล

3.1 ผู้วิจัยทำการทดสอบนิสิตกลุ่มตัวอย่างที่ได้เรียนวิธีการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ แล้ว ด้วยแบบทดสอบอัตนัยเกี่ยวกับการพิสูจน์ ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้นที่ได้วิเคราะห์แล้ว จำนวน 20 ข้อย่อย ใช้เวลาในการทดสอบ 2 ชั่วโมง หลังจากทำการทดสอบผู้วิจัยตรวจให้คะแนน แล้วนำคะแนนที่ได้ไปวิเคราะห์ข้อมูล และอภิปรายผลต่อไป

3.2 ผู้วิจัยนำคำตอบที่ผิดของนิสิตจากการทำแบบทดสอบ มาวิเคราะห์คำตอบที่ผิดมีลักษณะข้อผิดพลาดอย่างไร

3.3 นำแบบสัมภาษณ์เกี่ยวกับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้วิจัยสร้างไปสัมภาษณ์นิสิต จำนวน 79 คน ใช้เวลาในการสัมภาษณ์ประมาณคนละ 10 นาที ระยะเวลาในการสัมภาษณ์ 14 วัน แล้วนำผลที่ได้ไปวิเคราะห์ข้อมูลและอภิปรายผลต่อไป

สรุปผลการวิจัย

1. ผลการวิเคราะห์และจัดลำดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตหลักสูตรการศึกษาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ พบว่าในการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ นิสิตมีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเรียงลำดับจากปัญหามากไปน้อย และในแต่ละปัญหามีรายละเอียด ดังนี้

1.1 วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง เป็นปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มากที่สุด มีรายละเอียดดังนี้ การเขียนสิ่งสมมติสำหรับการพิสูจน์ข้อความ P เป็นปัญหามากที่สุด รองลงมาเป็นการแสดงวิธีการพิสูจน์ การเขียนสิ่งสมมติสำหรับการพิสูจน์ข้อความ $P \rightarrow Q$ และการเขียนนิเสธของข้อความ ตามลำดับ

1.2 การใช้บทนิยามเพื่อวิเคราะห์การพิสูจน์ เป็นปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในลำดับที่ 2

1.3 วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ เป็นปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ในลำดับที่ 3 มีรายละเอียดดังนี้ การเขียนสิ่งที่กำหนดให้สำหรับการเริ่มต้นการพิสูจน์ เป็นปัญหามากที่สุด รองลงมาเป็นการเขียนข้อความที่ต้องพิสูจน์แทนข้อความที่โจทย์กำหนดให้ การเขียนข้อความแย้งสลับที่ การรู้ข้อสรุปสำหรับการพิสูจน์ และการแสดงวิธีการพิสูจน์ ตามลำดับ

1.4 การเลือกวิธีการพิสูจน์และการแสดงการพิสูจน์ เป็นปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในลำดับที่ 4 มีรายละเอียดดังนี้ การแสดงวิธีการพิสูจน์เป็นปัญหามากที่สุด รองลงมาเป็นการเลือกวิธีการพิสูจน์ ตามลำดับ

1.5 การวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ เป็นปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ในลำดับที่ 5 มีรายละเอียดดังนี้ การบอกสิ่งที่กำหนดให้เป็นปัญหามากที่สุด รองลงมาเป็นการบอกสิ่งที่ต้องพิสูจน์ ตามลำดับ

1.6 การพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$ เป็นปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ในลำดับที่ 6 มีรายละเอียดดังนี้ การแสดงการพิสูจน์เป็นปัญหามากที่สุด รองลงมาการบอกข้อความที่ต้องพิสูจน์

1.7 วิธีการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข เป็นปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์น้อยที่สุด มีรายละเอียดดังนี้ การเขียนสิ่งที่กำหนดให้สำหรับการเริ่มต้นการพิสูจน์ เป็นปัญหามากที่สุด รองลงมาเป็นการรู้ข้อสรุปสำหรับการพิสูจน์ และการแสดงวิธีพิสูจน์ ตามลำดับ

2. ลักษณะข้อผิดพลาดในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

จากผลการวิจัย พบว่า มีลักษณะข้อผิดพลาดในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์แต่ละปัญหา ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.1 การวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ มีลักษณะข้อผิดพลาดในการวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เรียงลำดับจากมากไปน้อยดังนี้ เขียนสิ่งที่กำหนดให้ไม่ครบ เขียนสิ่งที่กำหนดให้ไม่ชัดเจน และเขียนสิ่งที่กำหนดให้เกิน ตามลำดับ และลักษณะข้อผิดพลาดในการวิเคราะห์สิ่งที่ต้องพิสูจน์ เรียงลำดับจากมากไปน้อยดังนี้ เขียนสิ่งที่ต้องพิสูจน์ผิด และเขียนสิ่งที่ต้องพิสูจน์เกิน ตามลำดับ

2.2 การใช้บทนิยามเพื่อวิเคราะห์สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ มีลักษณะข้อผิดพลาดเรียงลำดับจากมากไปน้อยดังนี้ นำบทนิยามมาใช้ไม่เป็น และไม่เข้าใจบทนิยาม ตามลำดับ

2.3 วิธีการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข ผู้วิจัยแบ่งปัญหาเป็น 3 ลักษณะ คือ

2.3.1 ปัญหาในการการเขียนสิ่งที่กำหนดให้สำหรับการเริ่มต้นการพิสูจน์ มีลักษณะข้อผิดพลาดเรียงลำดับจากมากไปน้อยดังนี้ เขียนสิ่งที่กำหนดให้ไม่ครบ และเขียนสิ่งที่กำหนดให้ผิด ตามลำดับ

2.3.2 ปัญหาในการเขียนสิ่งที่ต้องพิสูจน์ มีลักษณะข้อผิดพลาดเรียงลำดับจากมากไปน้อยดังนี้ เขียนสิ่งที่ต้องพิสูจน์เกิน เขียนสิ่งที่ต้องพิสูจน์ผิด และเขียนสิ่งที่ต้องพิสูจน์ไม่ครบ ตามลำดับ

2.3.3 ปัญหาในการแสดงวิธีการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข มีลักษณะข้อผิดพลาดในด้านต่าง ๆ เรียงลำดับจากมากไปน้อยดังนี้ ด้านการสรุป การใช้บทนิยาม การใช้ภาษา การเริ่มต้นการพิสูจน์ และขาดความระมัดระวัง ตามลำดับ

2.4 วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ ผู้วิจัยแบ่งปัญหาเป็น 5 ลักษณะ คือ

2.4.1 ปัญหาในการเขียนข้อความแย้งสลับที่ มีลักษณะข้อผิดพลาดเรียงลำดับจากมากไปน้อยดังนี้ ผิดพลาดในเรื่องการใช้นิเสธ ไม่เข้าใจวิธีการเขียนข้อความแย้งสลับที่ ขาดความระมัดระวัง และเขียนคำตอบไม่ชัดเจน ตามลำดับ

2.4.2 ปัญหาในการการเขียนข้อความที่จะต้องพิสูจน์แทนข้อความเดิม มีลักษณะข้อผิดพลาดเรียงลำดับจากมากไปน้อยดังนี้ เขียนคำตอบไม่ครบ ผิดพลาดในเรื่องการเขียนข้อความแย้งสลับที่ และผิดพลาดในเรื่องการใช้นิเสธ ตามลำดับ

2.4.3 ปัญหาในการบอกสิ่งกำหนดให้สำหรับการเริ่มต้นการพิสูจน์ มีลักษณะข้อผิดพลาดเรียงลำดับจากมากไปน้อยดังนี้ เขียนคำตอบไม่ครบ และไม่เข้าใจวิธีการเริ่มต้นการพิสูจน์ ตามลำดับ

2.4.4 ปัญหาในการรู้ข้อสรุปสำหรับพิสูจน์ เมื่อต้องการแสดงการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ มีลักษณะข้อผิดพลาดเรียงลำดับจากมากไปน้อยดังนี้ ไม่เข้าใจขั้นตอนการสรุปสำหรับการพิสูจน์ และเขียนคำตอบไม่ครบ ตามลำดับ

2.4.5 ปัญหาในการแสดงวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ มีลักษณะข้อผิดพลาดเรียงลำดับจากมากไปน้อยดังนี้ เขียนแสดงไม่เป็นขั้นตอน การใช้บทนิยาม ผิดพลาดในขั้นการสรุป การเริ่มต้นการพิสูจน์ ความเข้าใจวิธีการพิสูจน์ ผิดพลาดในกระบวนการพิสูจน์ และผิดพลาดในเรื่องการใช้ภาษา ตามลำดับ

2.5 วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง ผู้วิจัยแบ่งปัญหาเป็น 3 ลักษณะ คือ

2.5.1 ปัญหาในการเขียนนิเสธของข้อความ มีลักษณะข้อผิดพลาดเรียงลำดับจากมากไปน้อยดังนี้ ไม่เข้าใจวิธีการเขียนนิเสธของข้อความในรูป $P \rightarrow Q$ และผิดพลาดในเรื่องการใช้นิเสธ ตามลำดับ

2.5.2 ปัญหาในการเขียนสิ่งสมมติสำหรับการพิสูจน์ข้อความ P และข้อความในรูป $P \rightarrow Q$ มีลักษณะข้อผิดพลาดเรียงลำดับจากมากไปน้อยดังนี้ ผิดพลาดในเรื่องการใช้นิเสธ ไม่เข้าใจวิธีการเขียนนิเสธของข้อความในรูป P และไม่เข้าใจวิธีการเขียนนิเสธของข้อความในรูป $P \rightarrow Q$ ตามลำดับ

2.5.3 ปัญหาในการแสดงวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง มีลักษณะข้อผิดพลาดเรียงลำดับจากมากไปน้อยดังนี้ ผิดพลาดในกระบวนการพิสูจน์ การเริ่มต้นการพิสูจน์ ขั้นการสรุป และไม่แสดงการพิสูจน์ ตามลำดับ

2.6 วิธีการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$ ผู้วิจัยแบ่งปัญหาเป็น 2 ลักษณะ คือ

2.6.1 ปัญหาในการบอกข้อความที่ต้องพิสูจน์ มีลักษณะข้อผิดพลาดเรียงลำดับจากมากไปน้อยดังนี้ ไม่เข้าใจวิธีการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$ และขาดความระมัดระวัง ตามลำดับ

2.6.2 ปัญหาในการแสดงวิธีการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$ มีลักษณะข้อผิดพลาดเรียงลำดับจากมากไปน้อยดังนี้ การใช้บทนิยาม แสดงวิธีการพิสูจน์ การเริ่มต้นการพิสูจน์ ขาดความระมัดระวัง ผิดพลาดในขั้นการสรุป และไม่เข้าใจวิธีการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$ ตามลำดับ

2.7 การเลือกวิธีการพิสูจน์และแสดงวิธีการพิสูจน์ ในการศึกษาผู้วิจัยให้นิสิตเลือกวิธีการพิสูจน์ และแสดงการพิสูจน์โดยใช้วิธีการพิสูจน์ที่เลือกด้วยตนเอง จากโจทย์ที่กำหนดให้ 2 ข้อ เลือกทำเพียง 1 ข้อ

สำหรับการเลือกวิธีการพิสูจน์ พบว่า มีนิสิต 77 คน ที่สามารถเลือกวิธีการพิสูจน์และแสดงวิธีการพิสูจน์ตามที่ตนเองเลือกได้ มีนิสิต 2 คนที่ไม่เลือกวิธีการพิสูจน์และไม่แสดงการพิสูจน์เลย นอกจากนี้พบว่า โจทย์ข้อ 2 เป็นโจทย์ที่มีนิสิตเลือกทำมากที่สุด มีนิสิตเลือกทำ จำนวน 66 คน ส่วนโจทย์ข้อ 1 มีนิสิตเลือกทำเพียง 11 คน

ปัญหาในการแสดงการพิสูจน์โจทย์ข้อที่ 1 มีลักษณะข้อผิดพลาดในการแสดงวิธีการพิสูจน์ เรียงลำดับจากมากไปน้อยดังนี้ การใช้บทนิยาม และผิดพลาดในขั้นตอนการแสดงการพิสูจน์ ตามลำดับ

ปัญหาในการแสดงการพิสูจน์โจทย์ข้อที่ 2 มีลักษณะข้อผิดพลาดในการแสดงวิธีการพิสูจน์ เรียงลำดับจากมากไปน้อยดังนี้ การเริ่มต้นการพิสูจน์ นำบทนิยามมาใช้ไม่ถูกต้อง เขียนสรุป

ข้ามขั้นตอน และขาดความระมัดระวัง ตามลำดับ

3. การเปรียบเทียบปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตจำแนกตามเพศ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ได้ผลสรุปดังนี้

3.1 การเปรียบเทียบปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตจำแนกตามเพศ พบว่า คะแนนเฉลี่ยที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยของนิสิตชาย ต่ำกว่าคะแนนเฉลี่ยที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยของนิสิตหญิง ที่ระดับนัยสำคัญ .05 หรือนิสิตชายมีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มากกว่านิสิตหญิง ที่ระดับนัยสำคัญ .05

3.2 การเปรียบเทียบปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตจำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ พบว่า คะแนนเฉลี่ยที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยของนิสิตที่จำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์แตกต่างกัน ที่ระดับนัยสำคัญ .05 หรือนิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์แตกต่างกัน มีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์แตกต่างกัน ที่ระดับนัยสำคัญ .05

นอกจากนี้จากการเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยของระดับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เป็นรายคู่ พบว่า คะแนนเฉลี่ยที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยของนิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำ และนิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ปานกลาง ต่ำกว่าคะแนนเฉลี่ยที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยของนิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ที่ระดับนัยสำคัญ .05 ส่วนคะแนนเฉลี่ยที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยของนิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำและคะแนนเฉลี่ยที่ได้จากแบบทดสอบอัตนัยของนิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ปานกลางไม่แตกต่างกัน ที่ระดับนัยสำคัญ .05 หรือกล่าวได้ว่า นิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำ และนิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ปานกลาง มีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มากกว่านิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ที่ระดับนัยสำคัญ .05 แต่นิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำมีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างจากนิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ปานกลาง ที่ระดับนัยสำคัญ .05

4. ผลการศึกษาระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

ในการศึกษาผู้วิจัยใช้วิธีการสัมภาษณ์เพื่อวัดทัศนคติของนิสิตที่มีต่อระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งแบ่งเป็น 4 ขั้น ในแต่ละขั้นได้ผลสรุปดังนี้

ขั้นที่ 1 ปัญหาในขั้นทำความเข้าใจโจทย์เบื้องต้น มี 5 ข้อย่อย คือ การอ่านและทำความเข้าใจโจทย์ การอ่านและทำความเข้าใจสัญลักษณ์ที่โจทย์กำหนดให้ การแยกแยะระหว่างสิ่งที่โจทย์กำหนดและสิ่งที่ต้องพิสูจน์ รู้ความหมายของสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ และรู้ว่าจะต้องแสดงสิ่งใดจึงจะได้สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ และความเข้าใจในเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับโจทย์ พบว่านิสิตมีทัศนคติต่อปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 5 ข้อย่อยในระดับปานกลาง

ขั้นที่ 2 ปัญหาในขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ มี 10 ข้อย่อย พบว่า ใน 7 ข้อย่อย ซึ่งได้แก่ การเลือกวิธีการพิสูจน์ การเขียนเริ่มต้นการพิสูจน์ (เขียนสิ่งที่กำหนดให้และเขียนสิ่งที่ต้องการพิสูจน์) การเขียนสมมติฐานสำหรับการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข รู้ข้อสรุปของการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข การเขียนสมมติฐานสำหรับการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ การเขียนสมมติฐานสำหรับการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง และรู้ข้อสรุปของการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง นิสิตมีทัศนคติต่อปัญหาในระดับปานกลาง ส่วนอีก 3 ข้อย่อย ได้แก่ การเขียนข้อความแย้งสลับที่ รู้ข้อสรุปของการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ และการเขียนนิเสธของข้อความ นิสิตมีทัศนคติต่อปัญหาในระดับน้อย และโดยภาพรวมนิสิตส่วนใหญ่มีทัศนคติต่อปัญหาในขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ในระดับปานกลาง

ขั้นที่ 3 ปัญหาในขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์ มี 8 ข้อย่อย พบว่า ใน 7 ข้อย่อย ซึ่งได้แก่ การค้นหาแนวทางการพิสูจน์ ความเข้าใจในบทนิยาม การจำบทนิยาม และเขียนบทนิยาม การนำบทนิยามมาช่วยวิเคราะห์แนวทางการพิสูจน์ การนำบทนิยาม ทฤษฎีบทมาช่วยในขั้นตอนการพิสูจน์ การใช้ข้อมูลเพื่อการพิสูจน์ และการนำสิ่งที่มีอยู่หรือสิ่งที่ทราบมาช่วยในการพิสูจน์ นิสิตมีทัศนคติต่อปัญหาในระดับปานกลาง ส่วนอีก 1 ข้อย่อย คือ การใช้เทคนิค กระบวนการแก้ปัญหาหรือวิธีการอื่นๆ มาช่วยในการพิสูจน์ นิสิตมีทัศนคติต่อปัญหาในระดับมาก และโดยภาพรวมนิสิตส่วนใหญ่มีทัศนคติต่อปัญหาในขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์ในระดับปานกลาง

ขั้นที่ 4 ปัญหาในขั้นแสดงการพิสูจน์ มี 8 ข้อย่อย พบว่า ใน 5 ข้อย่อย ซึ่งได้แก่ การใช้ภาษาและสัญลักษณ์ในการพิสูจน์ การใช้ตรรกศาสตร์ การอ้างเหตุผล หรือสัจนิรันดร์ การเขียนการพิสูจน์ให้เป็นขั้นตอนจนได้ผลสรุป การเขียนสรุปการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง และรู้ข้อขัดแย้งที่เกิดจากการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง นิสิตมีทัศนคติต่อปัญหาในระดับปานกลาง ส่วนการระมัดระวังในการแสดงการพิสูจน์ นิสิตมีทัศนคติต่อปัญหาในระดับในระดับมากและปานกลาง และอีก 2 ข้อย่อย ได้แก่ การเขียนสรุปการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข การเขียนสรุปการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ นิสิตมีทัศนคติต่อปัญหาในระดับน้อย และโดยภาพรวมนิสิตส่วนใหญ่มีทัศนคติต่อปัญหาในขั้นแสดงการพิสูจน์ในระดับปานกลาง

5. การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างเพศ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์กับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 4 ขั้น ได้ผลสรุปดังนี้

5.1 การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างเพศกับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 4 ขั้น ได้แก่ ขั้นทำความเข้าใจโจทย์เบื้องต้น ขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ ขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์ และขั้นแสดงการพิสูจน์ พบว่า เพศไม่มีความสัมพันธ์กับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 4 ขั้น ที่ระดับนัยสำคัญ .05

5.2 การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์กับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 4 ขั้น ได้แก่ ขั้นทำความเข้าใจโจทย์เบื้องต้น ขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ ขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์ และขั้นแสดงการพิสูจน์ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ไม่มีความสัมพันธ์กับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 4 ขั้น ที่ระดับนัยสำคัญ .05

อภิปรายผล

1. จากผลการศึกษาปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตหลักสูตรการศึกษาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ ที่ลงทะเบียนเรียนวิชา คณ 241 หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2543 ตลอดจนศึกษาลักษณะข้อผิดพลาดในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยอภิปรายผลดังนี้

1.1 การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง เป็นปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มากที่สุดเป็นลำดับที่หนึ่ง เมื่อพิจารณาในรายละเอียดการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง พบว่าปัญหาในการเขียนสิ่งสมมติสำหรับการพิสูจน์ข้อความ P เป็นปัญหามากที่สุด รองลงมาเป็นปัญหาในการแสดงการพิสูจน์ ปัญหาในการเขียนสิ่งสมมติสำหรับการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \rightarrow Q$ และปัญหาในการเขียนนิเสธของข้อความ ตามลำดับ

สำหรับปัญหาในการเขียนสมมติฐานเริ่มต้นสำหรับการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง พบว่า การเขียนสิ่งสมมติสำหรับการพิสูจน์ข้อความ P มีลักษณะข้อผิดพลาดในเรื่องการใช้นิเสธ ซึ่งอาจมีสาเหตุจากนิสิตไม่เข้าใจเรื่องการใช้นิเสธ ไม่เข้าใจวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง ไม่เข้าใจวิธีการเขียนสิ่งสมมติสำหรับการพิสูจน์ข้อความ P ไม่สามารถตีความจากประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ เพราะการตีความจาก

ประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์มีความเกี่ยวข้องกับการเขียนนิเสธของข้อความ โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปประโยคหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับตัวบ่งปริมาณ เช่น สำหรับ x ทุกตัว หรือสำหรับ x บางตัว ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้ $\forall x$ และ $\exists x$ ตามลำดับ ถ้านิสิตสามารถเปลี่ยนโจทย์ปัญหาให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ จะทำให้สามารถใช้ความรู้เรื่องนิเสธได้ง่ายขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของดิกสัน บราวน์ และกิ๊บสัน (ยงยศ พุทธให้. 2543 : 74 ; อ้างอิงมาจาก Dickson brown and gibsom. 1984 : 25) ที่ทำการวิจัยถึงความผิดพลาดในการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียนเกรด 7 พบว่า นักเรียนที่มีผลการเรียนต่ำมีความผิดพลาดในเรื่องการแปลงโจทย์ให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ และความคลาดเคลื่อนในการทำความเข้าใจโจทย์มากที่สุด และยงยศ พุทธให้ (2543 : 74) ได้ศึกษาความคิดรวบยอดที่ผิดพลาดทางคณิตศาสตร์เรื่องเซต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนสายปัญญา สรุปว่า นักเรียนที่ไม่สามารถแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้ความรู้เรื่องเซต เนื่องจากนักเรียนไม่เข้าใจในข้อความที่เป็นโจทย์ปัญหา ทำให้ไม่สามารถคำนวณตามที่โจทย์ต้องการได้ และตีความจากประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ไม่ได้ ดังนั้นจึงเป็นไปได้ว่า นิสิตอ่านโจทย์ไม่เข้าใจ และไม่สามารถตีความจากประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ทำให้นิสิตมีปัญหาในเรื่องการใช้นิเสธ ซึ่งเป็นเรื่องสำคัญสำหรับวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง และทำให้มีปัญหาในการเขียนสิ่งสมมติสำหรับการพิสูจน์ข้อความ P นอกจากนี้ผู้วิจัย พบว่านิสิตไม่มีความระมัดระวังในการเขียนคำตอบ เขียนคำตอบไม่ครบ ทำให้เกิดข้อผิดพลาดขึ้น

ส่วนปัญหาในการเขียนสิ่งสมมติสำหรับการเริ่มต้นการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อขัดแย้งของนิสิต สาเหตุอาจเกิดจากการที่นิสิตอาจไม่เข้าใจวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง นิสิตไม่เข้าใจรูปแบบการเขียนสิ่งสมมติสำหรับการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \rightarrow Q$ นิสิตบางส่วนมักจะเขียนเริ่มต้นว่า “จะพิสูจน์ว่า P และ $\sim$Q” แทนที่จะเขียนว่า “สมมติ P และ $\sim$Q” ซึ่งอาจเกิดจากความไม่ระมัดระวังของนิสิตหรือปัญหาในด้านภาษาและวิธีการเขียนแสดงของนิสิต ผลการวิจัยสอดคล้องกับทอมสัน (Thompson. 1996 : 476-479 ; citing Thompson. 1992) ที่พบว่ามีนักเรียนเพียง 28% เท่านั้นที่สามารถเขียนสิ่งสมมติสำหรับการพิสูจน์ข้อความที่เป็นประโยคเงื่อนไขหรือข้อความในรูป $P \rightarrow Q$ ได้

ผู้วิจัยสรุปว่า นิสิตมีปัญหาในขั้นเริ่มต้นการพิสูจน์สำหรับวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง สอดคล้องกับผลการวิจัยของมอร์แกน (Morgan. 1972 : 4081B) ที่สรุปว่านักศึกษามีปัญหาในการเขียนสมมติฐานสำหรับการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง

นอกจากนี้วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งมีนิสิตเพียง 18.99% เท่านั้นที่แสดงวิธีการพิสูจน์ได้คะแนนเต็ม มี 32.91% ที่ได้คะแนน 0 คะแนน และมี 2.53% ที่ไม่พยายามแสดงวิธีการพิสูจน์ ลักษณะข้อผิดพลาดของนิสิตคือ ผิดพลาดในกระบวนการพิสูจน์ ผิดพลาดในการเริ่มต้นการพิสูจน์ ผิดพลาดในขั้นการสรุป สาเหตุอาจเกิดจากการที่นิสิตไม่เข้าใจวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง ไม่เข้าใจวิธีการเขียนเริ่มต้นหรือตั้งสมมติฐานสำหรับการพิสูจน์ มีนิสิตบางส่วนแสดงการพิสูจน์โดยใช้การยกตัวอย่างค้าน หรือใช้การอุปนัยมาพิสูจน์ ซึ่งเป็นเหตุที่ไม่เพียงพอในการที่จะสรุปว่าเกิดข้อขัดแย้งในการพิสูจน์ได้ นิสิตบางส่วนนำสิ่งที่ต้องพิสูจน์มาอ้างในขั้นตอนการพิสูจน์ แล้วสรุปว่าเกิดข้อขัดแย้ง ซึ่งไม่ถูกต้อง นิสิตบางส่วนไม่เข้าใจว่าเมื่อพิสูจน์จนเกิดข้อขัดแย้ง จะทำให้สมมติฐานที่ตั้งขึ้นเป็นเท็จ และพบว่าการอ้างเหตุผลในการแสดงการพิสูจน์ มีนิสิตบางส่วนอ้างเหตุผลไม่ถูกต้อง จะเห็นว่ามีหลายสาเหตุที่ทำให้นิสิตมีปัญหาในการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง ผลการวิจัยนี้สอดคล้องกับผลการวิจัยของทอมสัน (Thompson. 1996 : 476-479 ; citing Thompson. 1992) และวิลเลียม (Thompson. 1996 : 476-478 ; citing William. 1979) ที่พบว่า การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง เป็นเรื่องที่เป็นปัญหาสำหรับนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

ส่วนปัญหาในการเขียนข้อนิเสธของข้อความ พบว่า การเขียนนิเสธของข้อความเดี่ยว (P) นิสิตส่วนใหญ่มีปัญหาในเรื่องการใช้การใช้นิเสธ และการเขียนนิเสธของข้อความในรูป $P \rightarrow Q$ นิสิตส่วนใหญ่ไม่เข้าใจวิธีการเขียนนิเสธของข้อความในรูป $P \rightarrow Q$ นิสิตมักเขียนนิเสธของข้อความในรูป $\sim P \rightarrow \sim Q$ หรือ $P \rightarrow \sim Q$ หรือ $Q \rightarrow P$ แทนที่จะเขียนในรูป $P \wedge \sim Q$ นอกจากนี้นิสิตยังมีปัญหาในเรื่องการใช้นิเสธ เมื่อพิจารณาลำดับของปัญหาของการเขียนสิ่งสมมติสำหรับการเริ่มต้นการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งกับการเขียนนิเสธของข้อความ พบว่ามีลำดับของปัญหาต่างกัน ทั้งที่การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งต้องเริ่มด้วยการเขียนนิเสธของข้อความที่ต้องพิสูจน์ ซึ่งอาจมีสาเหตุจาก นิสิตไม่คุ้นเคยกับโจทย์ในลักษณะนี้ หรือไม่เข้าใจว่าการเขียนสิ่งสมมติเริ่มต้นสำหรับการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง คือการเขียนนิเสธของข้อความที่ต้องพิสูจน์ ผลที่ได้นี้สอดคล้องกับผลการวิจัยของทอมสัน (Thompson. 1996 : 476-479 ; citing Thompson. 1992) ที่พบว่า มีนักเรียนเพียง 19% ที่เขียนนิเสธของข้อความได้ แต่มีนักเรียน 91% ที่สามารถเขียนสิ่งสมมติเริ่มต้นสำหรับการพิสูจน์ได้

1.2 การใช้บทนิยามเพื่อวิเคราะห์สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ เป็นปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในลำดับที่ 2 มีลักษณะข้อผิดพลาด 2 แบบ คือนำบทนิยามมาใช้ไม่เป็น และไม่เข้าใจบทนิยาม นิสิตมีปัญหาในการใช้บทนิยามเพื่อวิเคราะห์สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ในเรื่องเซตมากกว่าเรื่องจำนวนเต็ม ทั้งนี้อาจมีสาเหตุจากภาษาและสัญลักษณ์ในบทนิยามเรื่องสับเซตมีความซับซ้อนมากกว่าในเรื่องจำนวนเต็ม สาเหตุที่นิสิตมีปัญหาในการใช้บทนิยามเพื่อวิเคราะห์สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ เนื่องมาจากนิสิตนำบทนิยามมาใช้โดยไม่คำนึงถึงเงื่อนไขต่าง ๆ ของบทนิยาม สับสนระหว่างสิ่งที่กำหนดกับสิ่งที่ต้องพิสูจน์ ไม่เข้าใจว่าบทนิยามคือกฎหรือข้อตกลงที่เป็นจริง โดยไม่ต้องพิสูจน์ นิสิตบางส่วนรู้บทนิยามแต่ไม่สามารถที่จะนำมาใช้วิเคราะห์ว่า เมื่อต้องการพิสูจน์ข้อความที่กำหนดให้ จะต้องแสดงให้ได้ว่าข้อความใดเป็นจริง นั่นคือไม่สามารถนำบทนิยามมาช่วยในการวิเคราะห์แนวทางในการพิสูจน์ นอกจากนี้บทนิยามส่วนใหญ่มักอยู่ในรูปภาษาหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ อาจทำให้นิสิตมีปัญหาในการอ่านและทำความเข้าใจ ทำให้นิสิตมีปัญหาในการทำความเข้าใจหรือมีปัญหาในการนำไปใช้ ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของเฟอร์กูสัน (Ferguson. 1982 : 121A) ที่พบว่า การใช้เครื่องหมาย สัญลักษณ์และความหมายของสัญลักษณ์ ตัวแปร ค่าคงตัว ประพจน์ที่ซับซ้อน ตรรกศาสตร์ เป็นสาเหตุที่ทำให้นักศึกษามีปัญหาในการอ่านและทำความเข้าใจบทนิยาม ทฤษฎีบท การเขียนประโยค การอ่านโจทย์ปัญหา และทำให้นักเรียนมีปัญหาในการพิสูจน์ และสอดคล้องกับผลการวิจัยของมัวร์ (Moore. 1990 : 137-144) ที่พบว่า นักศึกษาไม่ทราบว่าจะใช้บทนิยาม เพื่อแสดงให้เห็นโครงสร้างการพิสูจน์อย่างไร ซึ่งความสามารถในการใช้บทนิยาม ขึ้นอยู่กับความรู้ในเรื่องเกี่ยวกับบทนิยาม ซึ่งความรู้ในบทนิยามก็ขึ้นอยู่กับมโนทัศน์ภาพลักษณ์ (Concept image) ซึ่งหมายถึงความสามารถในการใช้บทนิยาม ขึ้นอยู่กับมโนทัศน์ภาพลักษณ์ด้วย เมื่อมีปัญหาในเรื่องความเข้าใจบทนิยาม ก็ทำให้มีปัญหาในเรื่องภาษาและสัญลักษณ์ที่จะใช้ในการเขียนพิสูจน์ นอกจากนี้เมื่อมีปัญหาในเรื่องภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ก็ทำให้มีปัญหาในเรื่องความเข้าใจในบทนิยาม

นอกจากนี้ในขั้นตอนการแสดงการพิสูจน์ พบว่า การใช้บทนิยามเป็นเรื่องที่เป็นปัญหาสำหรับการพิสูจน์ทุกรูปแบบ ลักษณะที่ผิดพลาดได้แก่ การนำบทนิยามไปใช้ไม่ถูกต้อง เกิดจากการที่นิสิตนำบทนิยามไปใช้โดยไม่คำนึงถึงเงื่อนไขของบทนิยาม เขียนโดยอ้างบทนิยามไม่ครบ นำบทนิยามมาใช้อ้างอย่างไม่สมเหตุสมผล ซึ่งอาจเกิดจากความไม่ระมัดระวังหรือความไม่รู้ของนิสิตเอง มีนิสิตรู้บทนิยามแต่นำมาประยุกต์ใช้ไม่ถูกต้อง เช่น นิสิตเขียนแสดงว่า “n=4(2k) , 2k เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น n เป็นจำนวนเต็มคู่ (จาก

บทนิยาม)" ซึ่งบทนิยามของจำนวนเต็มคู่ คือ x เป็นจำนวนเต็มคู่ ก็ต่อเมื่อ มี k เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง x = 2k นิสิตควรเขียนแสดงว่า "n=2(4k) , 4k เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น n เป็นจำนวนเต็มคู่ (จากบทนิยาม)" เป็นต้น มีนิสิตบางส่วนนำบทนิยามที่ไม่เกี่ยวข้องมาใช้ ซึ่งเกิดจากการที่นิสิตไม่มีความเข้าใจในบทนิยาม ขาดมโนมติในเรื่องนั้นๆ ไม่รู้ว่าจะนำบทนิยามใดหรือความรู้ใดมาใช้เพื่อแสดงว่าข้อความหรือสิ่งที่ต้องพิสูจน์เป็นจริง นอกจากนี้ยังมีลักษณะข้อผิดพลาดในเรื่อง การไม่อ้างบทนิยามหรือเหตุผลที่นำมาใช้ในขั้นตอนการพิสูจน์ ซึ่งอาจเกิดจากความไม่ระมัดระวังในการเขียนของนิสิต สอดคล้องกับผลการวิจัยของ พรัส-วิสนิโอว์สกา (Prus-Wisniowska. 1996 : 614A-615A) ที่สรุปว่าสาเหตุหนึ่งที่ทำให้นักศึกษามีปัญหาในการพิสูจน์ คือ เรื่องเกี่ยวกับการนำบทนิยามไปใช้ จะเห็นได้ว่าการที่นิสิตจะสามารถนำบทนิยามไปใช้ได้ถูกต้องและเหมาะสมขึ้นอยู่กับองค์ประกอบหลายประการ ได้แก่ ความรู้ความเข้าใจในเนื้อหานั้น ความเข้าใจในมโนมติในแต่ละเรื่อง ความสามารถที่จะมองภาพ จินตนาการหรือมองเห็นตัวอย่างที่เป็นรูปธรรมจากบทนิยามซึ่งเป็นนามธรรม ความเข้าใจในภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ เป็นต้น

1.3 วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ พบว่าเป็นปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในลำดับที่ 3 เมื่อพิจารณาในรายละเอียด พบว่า การบอกสิ่งกำหนดให้สำหรับการเริ่มต้นการพิสูจน์ เป็นปัญหามากที่สุด รองลงมาเป็นการเขียนข้อความที่จะต้องพิสูจน์แทนข้อความเดิม การเขียนข้อความแย้งสลับที่ การรู้ข้อสรุปสำหรับพิสูจน์ และการแสดงวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ ตามลำดับ

ในการเขียนข้อความแย้งสลับที่ มีลักษณะข้อผิดพลาดในเรื่องการใช้นิเสธ ไม่เข้าใจวิธีการเขียนข้อความแย้งสลับที่ เขียนคำตอบไม่ชัดเจน เขียนคำตอบไม่ครบ ขาดความไม่ระมัดระวังในการเขียนคำตอบ ส่วนการเขียนเริ่มต้นการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ มีลักษณะข้อผิดพลาด คือ เขียนคำตอบไม่ครบ เขียนคำตอบเกิน ซึ่งอาจมีสาเหตุมาจากนิสิตไม่คำนึงถึงเงื่อนไขของโจทย์ปัญหานั้นๆ จึงทำให้เกิดข้อผิดพลาด หรืออาจเกิดจากความไม่ระมัดระวังในการเขียน นอกจากนี้ การที่นิสิตไม่เข้าใจรูปแบบการเขียนข้อความแย้งสลับที่ ทำให้นิสิตมีปัญหาในการเขียนเริ่มต้นการพิสูจน์ เช่น เมื่อต้องพิสูจน์ข้อความ $P \rightarrow Q$ โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ จะต้องเขียนเริ่มต้นการพิสูจน์โดยสมมติข้อความ $\sim Q$ และต้องพิสูจน์ให้ได้ $\sim P$ นิสิตบางส่วนจะเริ่มต้นการพิสูจน์โดยสมมติข้อความ $\sim P$ หรือ Q หรือ P เป็นต้น สอดคล้องกับผลการวิจัยของ เซอิด (Saeed. 1997 : 4300A) ที่พบว่า นักศึกษาส่วนใหญ่ไม่เข้าใจกฎของข้อความแย้งสลับที่ และมอร์แกน (Morgan. 1972 : 4081B) พบว่า นักศึกษาที่เรียนคณิตศาสตร์มากกว่า 30 ชั่วโมง เขียนสมมติฐานสำหรับการพิสูจน์วิธีนี้ได้เพียง 37% ส่วนในกลุ่มที่เรียนคณิตศาสตร์น้อยกว่า 30 ชั่วโมง มีนักศึกษาที่เขียนสมมติฐานสำหรับการพิสูจน์สำหรับวิธีนี้ได้เพียง 15% เท่านั้น

ส่วนการแสดงวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ พบว่ามีลักษณะข้อผิดพลาดคือ เขียนแสดงไม่เป็นขั้นตอน ซึ่งอาจมีสาเหตุจากนิสิตไม่เข้าใจวิธีพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ นิสิตมีปัญหาในเรื่องการใช้ภาษา หรือขาดทักษะในการเขียนแสดงการพิสูจน์ ในการใช้บทนิยาม พบว่า นิสิตบางส่วนนำบทนิยามมาใช้ไม่ถูกต้อง เขียนบทนิยามไม่ครบ หรือลืมเขียนอ้างบทนิยามที่นำมาใช้ ในการเริ่มต้นการพิสูจน์ นิสิตเขียนเริ่มต้นการพิสูจน์โดยไม่มีการสมมติหรือการอ้างเหตุ ซึ่งอาจเกิดจากความไม่ระมัดระวังในการเขียน หรือไม่รู้ว่าจะเริ่มต้นการพิสูจน์อย่างไร ในขั้นการสรุป พบว่านิสิตบางส่วนเลือกบทนิยามที่มาช่วยในขั้นตอนการสรุปไม่ถูกต้อง รวมทั้งเขียนสรุปไม่เป็นขั้นตอน อาจมีสาเหตุมาจาก นิสิตไม่เข้าใจวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ มีนิสิตบางส่วนสับสนในวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ กับวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง ในกระบวนการพิสูจน์ นิสิตบางส่วนมีข้อผิดพลาดในเรื่องการคิดคำนวณ การแทนค่าตัวแปร ซึ่งเกิดจากความไม่ระมัดระวัง และขาดการตรวจทานในการแสดงการพิสูจน์ ผู้วิจัยพบว่า นิสิต

ส่วนใหญ่มีปัญหาในการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ คล้ายคลึงกับวิธีการพิสูจน์แบบอื่นๆ เช่น ปัญหาในการเริ่มต้นการพิสูจน์ ปัญหาในนำบทนิยามไปใช้ ปัญหาในขั้นตอนการแสดงการพิสูจน์ ปัญหาในขั้นการสรุป เป็นต้น

1.4 การเลือกพิสูจน์และแสดงวิธีการพิสูจน์ด้วยวิธีที่เลือก เป็นปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในลำดับที่ 4 พบว่า นิสิตส่วนใหญ่สามารถเลือกวิธีการพิสูจน์และแสดงวิธีการพิสูจน์ตามที่ตนเองเลือกได้ และโจทย์ที่มีนิสิตเลือกทำมากที่สุดคือ โจทย์ข้อ 2 ซึ่งเป็นเรื่องจำนวนเต็ม ส่วนโจทย์ข้อ 1 เป็นเรื่องการหารลงตัว เมื่อพิจารณาโจทย์แต่ละข้อพบว่า โจทย์ข้อ 1 สามารถแสดงการพิสูจน์โดยกฎของเงื่อนไข ซึ่งเป็นวิธีพิสูจน์ที่นิสิตมีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์น้อยที่สุด ส่วนโจทย์ข้อ 2 นิสิตต้องแสดงการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ หรือพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง ซึ่งเป็นวิธีที่นิสิตมีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในลำดับต้นๆ แต่จากการศึกษา พบว่ามีนิสิตเลือกทำโจทย์ข้อ 1 น้อยที่สุด คือมีนิสิตที่เลือกทำเพียง 11 คน ส่วนโจทย์ข้อ 2 มีนิสิตเลือกทำ 66 คน สาเหตุที่นิสิตเลือกทำโจทย์ข้อ 2 มากกว่าข้อ 1 อาจเป็นเพราะบทนิยาม ซึ่งในแบบทดสอบอัตนัยผู้วิจัยได้แสดงบทนิยามของจำนวนเต็ม และบทนิยามของการหารลงตัวไว้ในแบบทดสอบ แต่เมื่อพิจารณาจะพบว่าบทนิยามเรื่องการหารลงตัว ค่อนข้างจะมีเงื่อนไข และตัวแปรมากกว่าบทนิยามในเรื่องจำนวนเต็ม เลยทำให้นิสิตมีปัญหาในการทำความเข้าใจบทนิยาม และการนำบทนิยามไปใช้ และนิสิตคุ้นเคยกับบทนิยามเรื่องจำนวนเต็ม มากกว่าบทนิยามเรื่องการหารลงตัว

สำหรับวิธีการพิสูจน์ จากการศึกษาพบว่า โจทย์ข้อ 2 วิธีการพิสูจน์ที่นิสิตเลือกมากที่สุด คือ วิธีพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ มีนิสิตเลือกวิธีนี้ 58 คน ส่วนวิธีพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง มีนิสิตเลือกวิธีนี้ 8 คน สาเหตุที่นิสิตเลือกวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่มากกว่าวิธีพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง อาจมาจากวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่เป็นวิธีที่นิสิตมีปัญหาน้อยกว่าวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ เมื่อสามารถเขียนข้อความแย้งสลับที่ของข้อความที่ต้องพิสูจน์ได้ ก็สามารถพิสูจน์ข้อความนั้นต่อไปโดยใช้กฎของเงื่อนไขพิสูจน์ ซึ่งเป็นวิธีพิสูจน์ที่นิสิตมีปัญหาน้อยที่สุด ส่วนการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งเป็นวิธีที่สำหรับนิสิตมีปัญหามากที่สุด นิสิตมีปัญหาในการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งตั้งแต่ขั้นการเริ่มต้นการพิสูจน์ ขั้นการพิสูจน์จนเกิดข้อขัดแย้ง จนถึงขั้นการสรุปการพิสูจน์ และเป็นวิธีพิสูจน์ที่ยุ่งยากซับซ้อนมากกว่าวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ ซึ่งน่าจะเป็นเหตุผลที่นิสิตเลือกวิธีพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่มากกว่าวิธีพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง

นอกจากนี้ในขั้นตอนการแสดงการพิสูจน์ พบว่า นิสิตมีปัญหาในการแสดงการพิสูจน์เช่นเดียวกับปัญหาในการแสดงการพิสูจน์ที่ได้อภิปรายมาแล้ว เช่น มีปัญหาในการเริ่มต้นการพิสูจน์ มีปัญหาในการนำบทนิยามไปใช้ มีปัญหาในการเขียนสรุป ขาดความระมัดระวังในการเขียน เป็นต้น

ส่วนนิสิตที่ไม่สามารถเลือกวิธีการพิสูจน์ได้ อาจมีสาเหตุจากการที่นิสิตไม่สามารถวิเคราะห์โจทย์ได้ว่าจะต้องพิสูจน์ไปในแนวทางใด ไม่สามารถนำบทนิยามมาช่วยในการวิเคราะห์แนวทางหรือโครงสร้างการพิสูจน์ ว่าเมื่อต้องพิสูจน์ข้อความนี้ จะต้องแสดงให้ได้ว่าอะไรเป็นจริง โดยจะเริ่มต้นการพิสูจน์อย่างไร และต้องสรุปให้ได้อย่างไร จะเห็นได้ว่านิสิตขาดทักษะในการนำบทนิยามไปใช้ นอกจากนี้อาจมีสาเหตุจากนิสิตไม่มีความพยายามในการพิสูจน์ ไม่คุ้นเคยกับการใช้กระบวนการคิด การลองผิดลองถูกเพื่อหาแนวทางการพิสูจน์ จากการสัมภาษณ์นิสิตพบว่า เมื่อนิสิตมีปัญหาในการแสดงการพิสูจน์ หรือไม่สามารถพิสูจน์ข้อความใดๆ ต่อไปได้ นิสิตจำนวนไม่น้อยจะถามเพื่อน ถามรุ่นพี่ และอาจารย์ผู้สอนมากกว่าการที่จะแสวงหาวิธีพิสูจน์ด้วยตนเอง ด้วยการลองใช้วิธีการพิสูจน์หลายๆ วิธี จนกว่าได้ผลสำเร็จ หรือค้นคว้าตำราเพื่อหาแนวทางการพิสูจน์ แต่ก็มีนิสิตบางส่วนที่มีความพยายาม โดยค้นคว้าตำรา หนังสือเรียน ดูตัวอย่าง

แบบฝึกหัด ลองใช้วิธีการพิสูจน์หลาย ๆ วิธีด้วยตนเอง และมีนิสิตส่วนน้อยที่ตอบว่าไม่เขียนอะไรเลย หรือเขียนเฉพาะเท่าที่เขียนได้

1.5 การวิเคราะห์สิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ พบว่าเป็นปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในลำดับที่ 5 มีลักษณะข้อผิดพลาดคือ นิสิตเขียนคำตอบไม่ชัดเจนและผิดพลาด เขียนคำตอบไม่ครบ เขียนคำตอบเกิน สาเหตุอาจมาจากการที่นิสิตไม่สามารถวิเคราะห์แยกแยะภาคเหตุและผลของโจทย์ได้ ตลอดจนไม่คำนึงถึงเงื่อนไขต่าง ๆ ของโจทย์ ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของกรองทิพย์ พงษ์ลิมศรี (2535 : 3) ที่พบว่า นักเรียนไม่สามารถแยกแยะภาคเหตุและภาคผลของโจทย์ได้ เขียนแล้วไม่ครอบคลุมตามที่ควรจะเป็นดังที่ระบุในภาคเหตุ เมื่อกำหนดเหตุมาให้ นักเรียนบอกไม่ได้ว่าผลที่ตามมาคืออะไร หรือเมื่อกำหนดผลมาให้ นักเรียนบอกไม่ได้ว่ามาจากเหตุใดบ้าง ปัญหาเหล่านี้ทำให้นักเรียนไม่สามารถลำดับเหตุและผลของการพิสูจน์ได้อย่างเป็นระบบ สอดคล้องกับงานวิจัยของบัสเวลล์ และเคอร์ช (พัชรา ทัศนวิจิตรวงศ์. 2540 : 23 ; อ้างอิงมาจาก Buswell and Kersh. 1956 : 63-148) ได้ศึกษาเกี่ยวกับความสามารถในการแยกแยะสิ่งที่จะใช้ในการแก้ปัญหา 3 ชนิด ได้แก่ ข้อเท็จจริงที่เกี่ยวข้อง ข้อเท็จจริงทีไม่เกี่ยวข้อง และรายละเอียดที่จำเป็น ผลการวิจัยสรุปว่า นักเรียนส่วนใหญ่ขาดความสามารถในการแยกแยะสิ่งที่จำเป็นในการแก้ปัญหา เนื่องจากนักเรียนได้รับการฝึกฝนการแก้ปัญหาโดยเน้นเฉพาะด้านทักษะ นอกจากนี้ผู้วิจัยพบว่า การวิเคราะห์สิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์เป็นปัญหาสำหรับวิธีการพิสูจน์ในหลาย ๆ วิธี ทำให้นิสิตมีปัญหาในการเริ่มต้นการพิสูจน์ และมีปัญหาในขั้นการสรุปการพิสูจน์แต่ละวิธีด้วย

1.6 การแสดงการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$ เป็นปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในลำดับที่ 6 มีลักษณะข้อผิดพลาดในเรื่องต่อไปนี้ คือ การใช้บทนิยาม การเริ่มต้นการพิสูจน์ การแสดงการพิสูจน์ ขั้นตอนการสรุป ขาดความระมัดระวัง ความเข้าใจวิธีการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$ ผิดพลาดในเรื่องการคิดคำนวณ และผิดพลาดในเรื่องการใช้ภาษา สาเหตุของความผิดพลาดอาจเกิดจากการที่นิสิตไม่มีความรู้ความสามารถที่เพียงพอหรือมีปัญหาในการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \rightarrow Q$ มาก่อนแล้ว ทำให้นิสิตไม่สามารถเลือกวิธีการพิสูจน์ได้ นอกจากนี้อาจเกิดจากการที่นิสิตไม่สามารถวิเคราะห์โจทย์ปัญหาได้ ไม่สามารถที่จะนำความรู้บทนิยามที่เกี่ยวข้องกับโจทย์มาช่วยในการพิสูจน์ได้ ทำให้นิสิตมีปัญหาในการเลือกวิธีการพิสูจน์ และแสดงการพิสูจน์

1.7 วิธีการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข พบว่าเป็นปัญหาน้อยที่สุด ผู้วิจัยแบ่งปัญหาเป็น 3 ลักษณะ คือ ปัญหาในการเขียนสิ่งที่กำหนดให้สำหรับการเริ่มต้นการพิสูจน์ซึ่งเป็นปัญหามากที่สุดสำหรับการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข รองลงมาคือปัญหาในการเขียนสิ่งที่ต้องพิสูจน์ และปัญหาในการแสดงวิธีการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข ตามลำดับ

ในการเขียนสิ่งที่กำหนดให้หรือการเขียนสมมติฐานเริ่มต้นสำหรับการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข พบว่ามีลักษณะข้อผิดพลาดคือ เขียนไม่ครบ และเขียนคำตอบผิด สาเหตุอาจเกิดจากความไม่ระมัดระวัง ไม่คำนึงถึงเงื่อนไขต่าง ๆ ของโจทย์ ไม่สามารถแยกแยะภาคเหตุและผลของโจทย์ได้ และเมื่อเปรียบเทียบระหว่างวิธีการพิสูจน์ทั้ง 3 วิธี ได้แก่ การพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง และการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ พบว่าการเขียนสมมติฐานเริ่มต้นสำหรับการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งเป็นเรื่องที่เป็นปัญหามากที่สุด รองลงมาเป็นการเขียนสมมติฐานเริ่มต้นสำหรับการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ และการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไขตามลำดับ สอดคล้องกับผลการวิจัยของมอร์แกน (Morgan. 1972 : 4081B) ที่สรุปว่า นักศึกษามีปัญหาในการเขียนสมมติฐานสำหรับวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งมากที่สุด

รองลงมาคือวิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ ปัญหาในการเขียนสมมติฐานสำหรับวิธีการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไขเป็นปัญหาน้อยที่สุด

2. จากผลการเปรียบเทียบปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์โดยจำแนกตามเพศ ผลปรากฏว่า ปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ระหว่างนิสิตชายและนิสิตหญิงแตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานข้อที่ 1 ที่ว่าเพศที่ต่างกันมีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ต่างกัน โดยนิสิตชายมีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มากกว่านิสิตหญิง ผลการวิจัยครั้งนี้สอดคล้องกับงานวิจัยของยุพิน กรณ์ทอง (2533 : 63-64) พบว่า ความคิดรวบยอดที่ผิดพลาดระหว่างนักเรียนชายและนักเรียนหญิงที่ศึกษาในโรงเรียนขนาดใหญ่พิเศษแตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และ วนิดา มณีวรรณ (2534 : 39-40) พบว่า นักเรียนชายและนักเรียนหญิงที่ศึกษาในโรงเรียนขนาดใหญ่พิเศษมีความคิดรวบยอดที่ผิดพลาดทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่อง อสมการ แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 โดยนักเรียนชายมีความคิดรวบยอดที่ผิดพลาดมากกว่านักเรียนหญิง ผู้วิจัยพบว่าผลการวิจัยนี้ไม่สอดคลองกับงานวิจัยของเซ็ง (Senk. 1983 : 417A ; Senk. 1985 : 448-456) เซ็ง และยูซิสคิน (Senk and Usiskin. 1983 : 187-201) ที่พบว่า ความสามารถในการเขียนการพิสูจน์ไม่มีความแตกต่างกันระหว่างเพศ

3. จากผลการเปรียบเทียบปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์โดยจำแนกตามผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ผลปรากฏว่า ปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ระหว่างนิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำ ปานกลาง และสูงแตกต่างกัน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานข้อที่ 1 ที่ว่าผลลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ที่ต่างกันมีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ต่างกัน โดยนิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำ และนิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ปานกลางมีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มากกว่านิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง แต่นิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ปานกลางมีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างกับนิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำ ผลการวิจัยครั้งนี้สอดคล้องกับงานวิจัยของลิวอิส (Lewis. 1987 : 3345A) ที่พบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนมีความสัมพันธ์กับความเข้าใจในการพิสูจน์ สโตนวอเตอร์ (หัสยา เถียรวิทวัส. 2537 : 38 ; อ้างอิงมาจาก Stonewater. 1977 : 2602A) พบว่า ความสามารถทางด้านการคิดแก้ปัญหา และความสามารถทางคณิตศาสตร์ต่างมีความสัมพันธ์กันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ ยงยศ พุทธให้ (2543 : 77) พบว่า นักเรียนที่มีความคิดรวบยอดที่ผิดพลาดทางคณิตศาสตร์มากคือ นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำ นักเรียนที่มีความคิดรวบยอดที่ผิดพลาดทางคณิตศาสตร์น้อยคือนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง พัชรา ทัศนวิจิตรวงศ์ (2540. 112) พบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์กับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .001

4. จากผลการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างเพศกับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ผลปรากฏว่า เพศกับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 4 ขั้น ไม่มีความสัมพันธ์กัน ซึ่งไม่สอดคล้องกับสมมติฐานในข้อ 2 ที่ว่าเพศมีความสัมพันธ์กับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ทั้งนี้จากการศึกษาทัศนคติของนิสิตที่มีต่อระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 4 ขั้น ได้แก่ ปัญหาในขั้นทำความเข้าใจโจทย์เบื้องต้น ปัญหาในขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ ปัญหาในขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์ และปัญหาในขั้นแสดงการพิสูจน์ พบว่า นิสิตส่วนใหญ่มีทัศนคติต่อระดับปัญหาในการพิสูจน์ทาง

คณิตศาสตร์ในแต่ละขั้นในระดับปานกลาง จึงทำให้เพศกับทัศนคติของนิสิตที่มีต่อระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 4 ขั้นไม่มีความสัมพันธ์กัน

5. จากผลการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์กับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ผลปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์กับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ไม่มีความสัมพันธ์กัน ซึ่งไม่สอดคล้องกับสมมติฐานในข้อ 2 ที่ว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์กับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต ทั้งนี้จากการศึกษาทัศนคติของนิสิตที่มีต่อระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์พบว่า นิสิตส่วนใหญ่มีทัศนคติต่อระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในแต่ละขั้นในระดับปานกลาง จึงทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์กับทัศนคติของนิสิตที่มีต่อระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 4 ขั้นไม่มีความสัมพันธ์กัน

ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัย

1. ควรทำการศึกษาในเรื่องเดียวกันนี้กับประชากรกลุ่มอื่นๆ เพื่อจะได้เปรียบเทียบผลการวิจัยว่าแตกต่างกันหรือไม่ อย่างไร

2. ควรทำการวิจัยปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในเชิงคุณภาพ (Qualitative Research) อาจจะทำการศึกษาด้วยการใช้การสังเกต การสัมภาษณ์ การจดบันทึก การตรวจแบบฝึกหัด หรือการศึกษาเป็นรายกรณีซึ่งวิธีการนี้ จะทำให้ผู้วิจัยสามารถรับรู้ข้อมูลได้ครบถ้วนยิ่งขึ้น

3. ควรทำการศึกษาปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในเนื้อหาอื่นๆ ของวิชาคณิตศาสตร์นอกเหนือจากที่ศึกษาไว้แล้ว เพื่อจะได้ผลการวิจัยที่ชัดเจน และครอบคลุมยิ่งขึ้น

4. ควรทำการวิจัยเรื่องปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์นี้อีก โดยศึกษาปัญหาที่ได้จากการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในแต่ละวิธี เช่น วิธีพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข วิธีพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง วิธีพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ เป็นต้น เพื่อจะได้เห็นปัญหาและจุดที่ควรปรับปรุงในการเรียนการสอนการพิสูจน์ของแต่ละวิธีได้ชัดเจนมากขึ้น

5. ควรทำการวิจัยเพื่อหาวิธีแก้ปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต

6. ควรทำการศึกษาหรือวิจัยเกี่ยวกับวิธีการสอน เพื่อช่วยพัฒนานิสิตในด้านการเรียนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

7. ควรทำการวิจัยปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในวิธีการพิสูจน์แบบอื่นๆ เช่น การพิสูจน์แบบการมีอยู่ (Proof of Existence) การพิสูจน์โดยการแจงนับ (Proof by Enumeration) การพิสูจน์โดยกรณี (Proof by case) การพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Proof by mathematical induction)

ข้อเสนอแนะเพื่อการเรียนการสอน

1. ปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นปัญหาที่มีความสำคัญต่อการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ในระดับสูง ดังนั้นนิสิตควรหมั่นฝึกฝนการพิสูจน์ด้วยตนเองอย่างสม่ำเสมอ อาจารย์ผู้สอนควรฝึกให้นิสิตได้พิสูจน์ ตอบคำถาม ทำโจทย์การพิสูจน์โดยใช้ภาษาทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง มีโอกาสได้ตรวจการพิสูจน์ของนิสิต เพื่อแก้ไขข้อผิดพลาดและพัฒนาความสามารถในการพิสูจน์ของนิสิต

2. ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ผู้สอนควรจะเน้นเรื่องบทนิยาม กฎ ทฤษฎีบท และควรเน้นในเรื่องเงื่อนไขของบทนิยาม กฎ ทฤษฎีบท ให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจ เห็นความสำคัญ ตลอดจนนำบทนิยาม กฎ ทฤษฎีบทไปใช้ในการพิสูจน์ได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม

3. ในการเรียนการพิสูจน์ให้ได้ผลดีควรฝึกให้ผู้เรียนเข้าใจ เห็นความสำคัญในเรื่องตรรกศาสตร์ ข้อความที่สมมูล การใช้นิเสธ การแปลความจากโจทย์ภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ เพื่อนำไปประยุกต์ใช้ในการพิสูจน์

4. นิสิตควรศึกษาและทำความเข้าใจมโนมติของวิธีการพิสูจน์แต่ละวิธีอย่างถ่องแท้ เพื่อจะได้นำไปประยุกต์ใช้สำหรับพิสูจน์ในเนื้อหาอื่นๆ

5. ควรส่งเสริมให้มีตำราและงานวิจัยทางด้านคณิตศาสตร์ที่เน้นกระบวนการคิดการวิเคราะห์เพื่อที่นิสิตจะสามารถฝึกเรียนรู้ คิดวิเคราะห์แก้ปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และทำความเข้าใจด้วยตนเองได้

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

กมล เอกไทยเจริญ. *เอกสารประกอบการเรียนวิชา คณ 241 หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์.* กรุงเทพฯ : คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2541.

กรรณิกา คล่องกิจกล. *การศึกษาประสิทธิภาพแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่องฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2527. อัดสำเนา.

กรองทิพย์ พงษ์ลิมศรี. *การสอนการพิสูจน์เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยเน้นกระบวนการแก้ปัญหา.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2535. อัดสำเนา.

กาญจนา สนธิโพธิ์. *การศึกษาประสิทธิภาพแบบเรียนที่เน้นการวิเคราะห์กระบวนการคิดเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2527. อัดสำเนา.

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. *คู่มือปริญญาบัตร.* กรุงเทพฯ : คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2541.

ดารณี คำแหง. *การศึกษาข้อบกพร่องทางการเรียนคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5.* วิทยานิพนธ์ ค.ม. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2532. อัดสำเนา.

ธนูชัย ภูอุดม. *การศึกษาสมรรถภาพในการพิสูจน์ว่าข้อความเป็นเท็จโดยการยกตัวอย่างค้านของนิสิตปีที่ 4 วิชาเอกคณิตศาสตร์ หลักสูตรการศึกษาบัณฑิต.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2524. อัดสำเนา.

ประเสริฐ เสียงดี. *การศึกษาปรัชญาทางคณิตศาสตร์และการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์.* วิทยานิพนธ์ วท.ม. เชียงใหม่ : มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 2527. อัดสำเนา.

พัชรา ทัศนวิจิตรวงศ์. *การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างปัจจัยบางประการกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2540. อัดสำเนา.

พิชากร แปลงประสพโชค. *การศึกษาผลสัมฤทธิ์ในการเรียนโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2518. อัดสำเนา.

มหาวิทยาลัยนเรศวร. *คู่มือนิสิตปริญญาตรีมหาวิทยาลัยนเรศวร.* พิษณุโลก : มหาวิทยาลัยฯ, 2539

มหาวิทยาลัยบูรพา. *คู่มือการศึกษานิสิตปริญญาตรีภาคปกติ ปีการศึกษา 2542.* ชลบุรี : มหาวิทยาลัยฯ, 2542.

มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ. *คู่มือและหลักสูตรการศึกษาปริญญาตรี.* กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยฯ, 2526.

มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์. *คู่มือการศึกษาระดับปริญญาตรี 2541 มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์.* สงขลา : มหาวิทยาลัยฯ, 2541.

ยงยศ พุทธให้. *การศึกษาความคิดรวบยอดที่ผิดพลาดทางคณิตศาสตร์เรื่อง เซต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนสายปัญญา.* สารนิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2543. อัดสำเนา.

ยุพิน กรณ์ทอง. *การศึกษาความคิดรวบยอดที่ผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มที่ 1 ในเขตกรุงเทพมหานคร.* วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ : บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2533. อัดสำเนา.

ยุพิน พิพิธกุล. *การสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา.* กรุงเทพฯ : กรุงเทพการพิมพ์, 2519.

วนิดา มณีวรรณ. *มโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 กลุ่มที่ 4 ในเขตกรุงเทพมหานคร.* วิทยานิพนธ์ ศศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2534 อัดสำเนา.

วิเชียร เกตุสิงห์. "ค่าเฉลี่ยกับการแปลความหมาย เรื่องง่ายที่บางครั้งก็พลาดได้," *ข่าวสารการศึกษา.* 18(3) : 9 กุมภาพันธ์ - มีนาคม 2538.

สถาบันราชภัฏจันทรเกษม. *คู่มือการศึกษา '39 สถาบันราชภัฏจันทรเกษม.* กรุงเทพฯ : สถาบันฯ, 2539.

สถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา. *คู่มือการศึกษาสถาบันราชภัฏบ้านสมเด็จเจ้าพระยา.* กรุงเทพฯ : สถาบันฯ, 2541.

สุจินดา อภิชาติวัฒนะ. *การศึกษาปัญหาและความต้องการในการเรียนวิชาภาษาอังกฤษบังคับพื้นฐานของนิสิตมหาวิทยาลัยนเรศวร.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. พิษณุโลก : มหาวิทยาลัยนเรศวร, 2536.

สุเทพ จันทร์สมศักดิ์. *คณิตศาสตร์เบื้องต้น.* กรุงเทพฯ, 2521.

สุเทพ ทองอยู่. "ปัญหาทางคณิตศาสตร์," ใน *เอกสารประกอบการอบรมครูคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 6 วันที่ 9-10 พฤษภาคม 2533.* หน้า 1-23. กรุงเทพฯ : คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2533.

สุวัฒนา อุทัยรัตน์. *การนำเสนอรูปแบบการพัฒนากำลังคนด้านการศึกษาคณิตศาสตร์ : รายงานผลการวิจัย.* กรุงเทพฯ : ฝ่ายวิจัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2539.

หัสยา เถียรวิทวัส. *การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถด้านเหตุผลกับความสามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3.* ปริญญานิพนธ์ กศ.ม. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2537. อัดสำเนา.

Bell, A.W. "A Study of pupils' proof of explanations in mathematics situation," *Educational Studies in Mathematics.* 7(1/2) : 23-40 ; July, 1976.

Bittinger, M.L. *Logic and Proof.* Massachusetts : Addison-Wesley, 1972.

-------. "The Effect of a Unit in Mathematical Proof on the Performance of College Mathematics Majors in Future Mathematics Course," *Dissertation Abstracts.* 29(11) : 3906A ; May,1969.

Borasi, R. "Algebraic Exploration of the Error," *The Mathematics Teacher.* 79(4) : 246-248 ; April, 1989.

Cook-Bax, Janice Elaine. "An Investigation of the Differential effect of Mira Manipulative use on Secondary Students' development of geometric Proofs involving perpendicular bisectors in polygons," *Dissertation Abstracts.* 57(12) : 5088-A ; June, 1997.

Ferguson, David L. "The language of mathematics: how calculus students cope with it," *Dissertation Abstracts.* 42(1) : 121-A ; July, 1981.

Hersh, Reuben. "Proving is Convincing and Explaining," *Educational Studies in Mathematics.* 24(4) : 389-399, 1993.

Ireland, Sam Howard. " The Effect of a One-Semester Geometry Course which Emphasizes the Nature of Proof on Student Comprehension of Deductive Processes," *Dissertation Abstracts.* 35(1) : 102A-103A ; July, 1974.

James and James. *Mathematics Dictionary.* 4th ed. New York, 1976.

John Glenn, Graham Littler. *A Dictionary of Mathematics.* Harper and Row : London, 1987.

Lewis, Scott Meredith. "University Mathematics Students' Perception of Proof and Its Relationship to Achievement," *Dissertation Abstracts.* 47(9) : 3345A ; March, 1987.

Markel, William D. "The Role of Proof in Mathematics Education," *School Science and Mathematics.* 94(6) : 291 – 295 ; October, 1994.

Moore, R.C. *College Students' difficulties in learning to do Mathematical Proofs.* Dissertation Thesis Ed.D. Athens : The University of Georgia. Photocopied, 1990.

-------. "Making the Transition to Formal Proof," *Educational Studies in Mathematics.* 27(3) : 249 - 266, 1994.

Morah, Ronald P. *Bridge to Abstract Mathematics : Mathematical Proof and Structures.* 2nd ed. New York : McGraw-Hill, 1991.

Morgan, William Horace. (1972). "A Study of the Ability of College Mathematics Student in Proof Related Logic," *Dissertation abstracts.* 32(7) : 4081B ; January, 1972.

Prus-Wisniowska, Ewa Anna. "Cognitive, Metacognitive, and Social Aspects of Mathematical Proof with Respect to Calculus," *Dissertation abstracts.* 57(2) : 614A-615A ; August, 1996.

Reid, David Alexander. "The Need to Prove," *Dissertation abstracts.* 57(3) : 1067A ; September, 1996.

Saeed, R.M. "An Exploratory Study of College Students' understanding of Mathematical Proof and the Relationship of this Understanding to their Attitude toward Mathematics," *Dissertation abstracts.* 57(10) : 4300-A ; April, 1997.

Senk, Sharon L. "How Well Do Students Write Geometry Proofs?," *Mathematics Teacher.* 78(6) : 448 - 456 ; September, 1985.

-------. "Proof-Writing Achievement and Van Hiele Levels among Secondary School Geometry Students," *Dissertation abstracts.* 44(2) : 417A ; August, 1983.

Senk, Sharon L., Zalman Usiskin. "Geometry Proof Writing : A New View of Sex Differences in Mathematics Ability," *American Journal of Education.* 91(2) : 187-201 ; February, 1983.

Solow, D. *How to Read and do Proofs.* New York : Wiley, 1982.

Thompson, Denisse R. "Learning and Teaching Indirect Proof," *The Mathematics Teacher.* 89(6) : 474-482 ; September, 1996.

-------. "Reasoning and Proof in Precalculus an Discrete Mathematics," (CD-ROM). Avariable : ERIC (1985-June 1997). Acc.No. ED338496 ; April, 1991.

Willson, Patricia S. *Research Idea for The Classroom : High School Mathematics.* New York : NCTM, 1993

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

แบบทดสอบอัตนัย

แบบทดสอบอัตนัย

แบบทดสอบฉบับนี้มีความมุ่งหมายที่จะศึกษาปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตระดับปริญญาตรี

<u>คำชี้แจง</u>

1. ข้อสอบมีทั้งหมด 2 ตอน ดังนี้

   <u>ตอนที่ 1</u> ข้อมูลเกี่ยวกับสถานภาพของนิสิต

   <u>ตอนที่ 2</u> เป็นแบบทดสอบอัตนัย มี 7 ข้อย่อย คือ

   1. วิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ จำนวน 3 ข้อย่อย
   2. การใช้บทนิยามเพื่อวิเคราะห์สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ จำนวน 2 ข้อย่อย
   3. วิธีการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข (RCP) จำนวน 2 ข้อย่อย
   4. วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ (Contrapositive) จำนวน 5 ข้อย่อย
   5. วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง (Contradiction) จำนวน 4 ข้อย่อย
   6. วิธีการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$ จำนวน 2 ข้อย่อย
   7. แสดงการพิสูจน์ จำนวน 2 ข้อ ให้เลือกแสดงการพิสูจน์ 1 ข้อ
2. ข้อสอบมีทั้งแบบเติมคำตอบลงในช่องว่าง และแบบแสดงการพิสูจน์ ข้อสอบมีทั้งหมด 20 ข้อย่อย
3. เวลาที่ใช้ในการทำแบบทดสอบ 2 ชั่วโมง

ขอขอบคุณนิสิตทุกคนที่ให้ความร่วมมือในการทำแบบทดสอบ

<u>ตอนที่ 1</u> ข้อมูลเกี่ยวกับสถานภาพของนิสิต

โปรดกรอกข้อความลงในช่องว่าง

1. ชื่อ-สกุล ....
2. ชั้นปีที่ ....
3. เกรดเฉพาะวิชา คณ 111 และ คณ 112

   3.1 คณ 111 .....

   3.2 คณ 112 .....

<u>บทนิยาม</u> สำหรับจำนวนเต็ม x ใดๆ

(i) x เป็นจำนวนเต็มคู่ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $x = 2k$

(ii) x เป็นจำนวนเต็มคี่ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม s ซึ่ง $x = 2s + 1$

(iii) x เป็นจำนวนเต็มคี่ ก็ต่อเมื่อ x ไม่ใช่จำนวนเต็มคู่

1. วิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์

จงเติมคำตอบให้ถูกต้อง

1.2 "สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ n(n + 1) เป็นจำนวนเต็มคู่"

จากข้อความดังกล่าว

สิ่งที่กำหนดให้คือ...

สิ่งที่ต้องพิสูจน์คือ...

1.2 "ถ้า m และ n เป็นจำนวนเต็มซึ่ง mn เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว m หรือ n เป็นจำนวนเต็มคู่"

จากข้อความดังกล่าว

สิ่งที่กำหนดให้คือ...

สิ่งที่ต้องพิสูจน์คือ...

1.3 "กำหนด A และ B เป็นเซตใดๆ ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \subset A \cup B$"

จากข้อความดังกล่าว

สิ่งที่กำหนดให้คือ...

สิ่งที่ต้องพิสูจน์คือ...

2. การใช้บทนิยามเพื่อวิเคราะห์สิ่งที่ต้องการพิสูจน์

จงตอบคำถามให้ถูกต้อง

1. "ถ้า a เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว a^2 เป็นจำนวนเต็มคู่"

จากข้อความดังกล่าว การจะพิสูจน์ว่า a^2 เป็นจำนวนเต็มคู่ จะต้องแสดงให้ได้อะไรเป็นจริง

....

2. "<u>บทนิยาม</u> กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใดๆ

$A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $\forall x, x \in A \rightarrow x \in B$"

จากบทนิยามดังกล่าว ถ้าจะพิสูจน์ว่า $A \cap B \subset A$ จะต้องแสดงให้ได้อะไรเป็นจริง

....

3. วิธีการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข (RCP)

1. "ถ้า m เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว 3m เป็นจำนวนเต็มคู่"
ถ้าจะพิสูจน์ข้อความดังกล่าว โดยใช้กฎของเงื่อนไข
จะต้องเริ่มต้นการพิสูจน์ด้วยการกำหนดให้................................
และต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า...

2. จากข้อ (1) ให้พิสูจน์ข้อความดังกล่าวโดยใช้กฎของเงื่อนไข
<u>พิสูจน์</u> ....
....
....
....

4. วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ (Contrapositive)

1. จงเขียนข้อความแย้งสลับที่ของข้อความต่อไปนี้

   1.1 ถ้า $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ แล้ว $2 < 3$

....

   1.2 ถ้า c เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว สมการ $n^2 + n - c = 0$ ไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มคี่

....

   1.3 สำหรับ p และ q ซึ่งเป็นจำนวนจริงบวกใดๆ ถ้า $\sqrt{pq} \neq (p+q)/2$ แล้ว $p \neq q$

....

2. "เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ถ้าเส้นตรงคู่นั้นขนานกันแล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน"
ถ้าจะพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ จะต้องพิสูจน์ข้อความใดแทนข้อความดังกล่าว
....

3. จากข้อ (2) ถ้าพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่
ต้องเริ่มการพิสูจน์ด้วยการกำหนดให้......................................
และต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า..

4. "ถ้า a^3 เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว a เป็นจำนวนเต็มคี่"
จงพิสูจน์ข้อความดังกล่าว โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่
<u>พิสูจน์</u> ....
....
....
....
....
....

5. วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง (Contradiction)

1. จงเขียนนิเสธของข้อความต่อไปนี้

1.1 $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

....

1.2 ถ้า c เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว สมการ $n^2 + n - c = 0$ ไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มคี่

....

1.3 ถ้า x เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $x = \sqrt{2x+3}$ แล้ว $x = 3$

....

2. "สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n ใดๆ, 3 หาร $2^{2n} - 1$ ไม่ลงตัว"
ถ้าจะพิสูจน์ข้อความดังกล่าวโดยใช้ข้อขัดแย้ง
จะต้องสมมติว่า..

3. "ถ้า a เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว a + 2 เป็นจำนวนอตรรกยะ"
ถ้าจะพิสูจน์ข้อความดังกล่าวโดยใช้ข้อขัดแย้ง
จะต้องสมมติว่า..

4. "ถ้า p และ q แทนประพจน์ จะได้ว่า $(p \wedge q) \rightarrow p$ เป็นสัจนิรันดร์"
จงพิสูจน์ข้อความดังกล่าว โดยใช้ข้อขัดแย้ง
<u>พิสูจน์</u>..

....

....

....

....

....

6. วิธีการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$

1. ถ้าจะพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ จะต้องพิสูจน์กี่ตอน อะไรบ้าง

1.1 " x เป็นจำนวนเต็มคี่ ก็ต่อเมื่อ x + 3 เป็นจำนวนเต็มคู่"

....

....

1.2 " ให้ x และ y จำนวนจริงใดๆ จงพิสูจน์ว่า $x^3 = y^3$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$ "
ถ้าจะพิสูจน์ข้อความดังกล่าว จะต้องพิสูจน์กี่ตอน อะไรบ้าง

....

....

2. “ a เป็นจำนวนเต็มคี่ ก็ต่อเมื่อ a^2 เป็นจำนวนเต็มคี่”
จงพิสูจน์ข้อความดังกล่าว
พิสูจน์..
....
....
....
....
....
....
....
....

7. แสดงการพิสูจน์

จงแสดงการพิสูจน์ โดยเลือกพิสูจน์เพียง 1 ข้อ ให้ระบุด้วยว่าเลือกวิธีการพิสูจน์วิธีใด

1. บทนิยาม สำหรับจำนวนเต็ม a, b ใดๆ และ $b \neq 0$

   $a \mid b$ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม c ซึ่ง $b = ac$

จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid c$ แล้ว $a \mid c$

2. ถ้า n^2 เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว $n - 3$ เป็นจำนวนเต็มคู่

ข้อ..... วิธีการพิสูจน์......................................
พิสูจน์..
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

ภาคผนวก ข

แบบสัมภาษณ์ระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

แบบสัมภาษณ์ระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

ตอนที่ 1 แบบสัมภาษณ์ข้อมูลส่วนตัวของนิสิต

ชื่อ ....

เพศ ☐ ชาย ☐ หญิง

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

1. เกรดวิชา คณ 111 ...
2. เกรดวิชา คณ 112 ...

ตอนที่ 2 แบบสัมภาษณ์ระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

ปัญหา	ระดับปัญหา			
	3	2	1	0
ขั้นที่ 1 ขั้นทำความเข้าใจโจทย์เบื้องต้น				
1. การอ่านและทำความเข้าใจโจทย์................................	....	....	....	....
2. การอ่านและทำความเข้าใจสัญลักษณ์ที่โจทย์กำหนดให้....	....	....	....	....
3. การแยกแยะระหว่างสิ่งที่โจทย์กำหนดและสิ่งที่ต้องพิสูจน์..	....	....	....	....
4. รู้ความหมายของสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ และรู้ว่าจะต้องแสดงสิ่งใดจึงจะได้สิ่งที่ต้องการพิสูจน์....................................	....	....	....	....
5. ความเข้าใจในเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับโจทย์.....................	....	....	....	....
ขั้นที่ 2 ขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์				
6. การเลือกวิธีการพิสูจน์...	....	....	....	....
7. การเขียนเริ่มต้นการพิสูจน์ (เขียนสิ่งที่กำหนดให้และเขียนสิ่งที่ต้องการพิสูจน์)...	....	....	....	....
8. การเขียนสมมติฐานสำหรับการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข..	....	....	....	....
9. รู้ข้อสรุปของการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข..............	....	....	....	....
10. การเขียนข้อความแย้งสลับที่..................................	....	....	....	....
11. การเขียนสมมติฐานสำหรับการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่..	....	....	....	....
12. รู้ข้อสรุปของการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่..........	....	....	....	....
13. การเขียนนิเสธของข้อความ..................................	....	....	....	....
14. การเขียนสมมติฐานสำหรับการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง....	....	....	....	....
15. การรู้ข้อสรุปของการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง................	....	....	....	....

ปัญหา	ระดับปัญหา			
	3	2	1	0
ขั้นที่ 3 ขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์				
16. การค้นหาแนวทางการพิสูจน์................................	....	....	....	....
17. ความเข้าใจในบทนิยาม..	....	....	....	....
18. การจำบทนิยาม และเขียนบทนิยาม........................	....	....	....	....
19. การนำบทนิยามมาช่วยวิเคราะห์แนวทางการการพิสูจน์...	....	....	....	....
20. การนำบทนิยาม ทฤษฎีบทมาช่วยในขั้นตอนการพิสูจน์...	....	....	....	....
21. การใช้ข้อมูลเพื่อการพิสูจน์..................................	....	....	....	....
22. การนำสิ่งที่มีอยู่หรือสิ่งที่ทราบมาช่วยในการพิสูจน์........	....	....	....	....
23. การใช้เทคนิค กระบวนการแก้ปัญหาหรือวิธีการอื่นๆ มาช่วยในการพิสูจน์..	....	....	....	....
ขั้นที่ 4 ขั้นแสดงการพิสูจน์				
24. การใช้ภาษาและสัญลักษณ์ในการพิสูจน์....................	....	....	....	....
25. การใช้ตรรกศาสตร์ การอ้างเหตุผล หรือสัจนิรันดร์........	....	....	....	....
26. การเขียนการพิสูจน์ให้เป็นขั้นตอนจนได้ผลสรุป...........	....	....	....	....
27. การเขียนสรุปการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข.............	....	....	....	....
28. การเขียนสรุปการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่........	....	....	....	....
29. การเขียนสรุปการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง...................	....	....	....	....
30. รู้ข้อขัดแย้งที่เกิดจากการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง..........	....	....	....	....
31. การระมัดระวังในการแสดงการพิสูจน์........................	....	....	....	....

ตอนที่ 3 แบบสัมภาษณ์ปลายเปิด

1. ความคิดเห็นต่อการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์

....

....

....

....

2. เมื่อนิสิตมีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เช่น ไม่ทราบว่าจะเขียนการพิสูจน์อย่างไร ไม่ทราบว่าจะเลือกวิธีการพิสูจน์แบบใด หรือมีปัญหาอื่นๆ นิสิตแก้ไขปัญหาอย่างไร

....

....

....

....

ภาคผนวก ค

เฉลยแบบทดสอบอัตนัย

เฉลยแบบทดสอบอัตนัย

1. วิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์

จงเติมคำตอบให้ถูกต้อง

1. "สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ n(n + 1) เป็นจำนวนเต็มคู่"

จากข้อความดังกล่าว
สิ่งที่กำหนดให้ คือ *n เป็นจำนวนนับ*
สิ่งที่ต้องพิสูจน์ คือ *n(n + 1) เป็นจำนวนเต็มคู่*

2. "ถ้า m และ n เป็นจำนวนเต็มซึ่ง mn เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว m หรือ n เป็นจำนวนเต็มคู่"

จากข้อความดังกล่าว
สิ่งที่กำหนดให้ คือ *m และ n เป็นจำนวนเต็มซึ่ง mn เป็นจำนวนเต็มคู่*
สิ่งที่ต้องพิสูจน์ คือ *m หรือ n เป็นจำนวนเต็มคู่*

3. "กำหนด A และ B เป็นเซตใดๆ ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \subset A \cup B$"

จากข้อความดังกล่าว
สิ่งที่กำหนดให้คือ *A และ B เป็นเซตใดๆ และ* $A \subset B$
สิ่งที่ต้องพิสูจน์คือ $A \subset A \cup B$

2. การใช้บทนิยามเพื่อวิเคราะห์สิ่งที่ต้องการพิสูจน์

จงตอบคำถามให้ถูกต้อง

1. "ถ้า a เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว a^2 เป็นจำนวนเต็มคู่"

จากข้อความดังกล่าว การจะพิสูจน์ว่า a^2 เป็นจำนวนเต็มคู่ จะต้องแสดงให้ได้อะไรเป็นจริง

มีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $a^2 = 2k$ *หรือ* $a^2 = 2k$ *เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม*

2. "<u>บทนิยาม</u> กำหนดให้ A และ Bเป็นเซตใดๆ

$A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $\forall x, x \in A \rightarrow x \in B$"

จากบทนิยามดังกล่าว ถ้าจะพิสูจน์ว่า $A \cap B \subset A$ จะต้องแสดงให้ได้อะไรเป็นจริง

$\forall x, x \in A \cap B \rightarrow x \in A$

3. วิธีการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข (RCP)

1. "ถ้า m เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว 3m เป็นจำนวนเต็มคู่"

ถ้าจะพิสูจน์ข้อความดังกล่าว โดยใช้กฎของเงื่อนไข
จะต้องเริ่มต้นการพิสูจน์ด้วยการกำหนดให้ *m เป็นจำนวนเต็มคู่*
และต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า *3m เป็นจำนวนเต็มคู่*

2. จากข้อ (1) ให้พิสูจน์ข้อความดังกล่าวโดยใช้กฎของเงื่อนไข

<u>พิสูจน์</u> *ให้ m เป็นจำนวนเต็มคู่*

ดังนั้น จะมีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $m=2k$ (บทนิยาม i)

$$3m=3(2k)=2(3k)$$

จะเห็นว่า $3k$ เป็นจำนวนเต็ม (สมบัติปิดของการคูณ)

ดังนั้น $3m$ เป็นจำนวนเต็มคู่ (บทนิยาม i) #

4. วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่

1. จงเขียนข้อความแย้งสลับที่ของข้อความต่อไปนี้

1.1 ถ้า $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ แล้ว $2 < 3$

ถ้า $2 \geq 3$ แล้ว $\sqrt{2} \geq \sqrt{3}$

1.2 ถ้า c เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว สมการ $n^2 + n - c = 0$ ไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มคี่

ถ้าสมการ $n^2 + n - c = 0$ มีคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว c ไม่เป็นจำนวนเต็มคี่ หรือ

ถ้าสมการ $n^2 + n - c = 0$ มีคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว c เป็นจำนวนเต็มคู่

1.3 สำหรับ p และ q ซึ่งเป็นจำนวนจริงบวกใดๆ ถ้า $\sqrt{pq} \neq (p+q)/2$ แล้ว $p \neq q$

สำหรับ p และ q ซึ่งเป็นจำนวนจริงบวกใดๆ ถ้า $p = q$ แล้ว $\sqrt{pq} = (p + q)/2$

2. "เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ถ้าเส้นตรงคู่นั้นขนานกันแล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน"
ถ้าจะพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ จะต้องพิสูจน์ข้อความใดแทนข้อความดังกล่าว

เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ถ้ามุมแย้งมีขนาดไม่เท่ากันแล้ว เส้นตรงคู่นั้นไม่ขนานกัน

3. จากข้อ (2) ถ้าพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่
ต้องเริ่มการพิสูจน์ด้วยการกำหนดให้ *เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง และมุมแย้งมีขนาดไม่เท่ากัน*
ต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า *เส้นตรงคู่นั้นไม่ขนานกัน*

4. "ถ้า a^3 เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว a เป็นจำนวนเต็มคี่"
จงพิสูจน์ข้อความดังกล่าว โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่

<u>พิสูจน์</u> จะพิสูจน์ว่า *ถ้า a ไม่เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว a^3 ไม่เป็นจำนวนเต็มคี่*

ให้ a ไม่เป็นจำนวนเต็มคี่

นั่นคือ a เป็นจำนวนเต็มคู่

ดังนั้น จะมีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $a = 2k$ (บทนิยาม i)

$$a^3 = (2k)^3 = 2(4k^3)$$

เพราะว่า $4k^3$ เป็นจำนวนเต็ม (สมบัติปิดของการคูณ)

ดังนั้น a^3 เป็นจำนวนเต็มคู่ (บทนิยาม i)

นั่นคือ a^3 ไม่เป็นจำนวนเต็มคี่ #

5. วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง

1. จงเขียนนิเสธของข้อความต่อไปนี้

   1.1 $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

   $\sqrt{3}$ ไม่เป็นจำนวนอตรรกยะ หรือ $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนตรรกยะ.

   1.2 ถ้า c เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว สมการ $n^2 + n - c = 0$ ไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มคี่

   c เป็นจำนวนเต็มคี่และ สมการ $n^2 + n - c = 0$ มีคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มคี่

   1.3 ถ้า x เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $x = \sqrt{2x+3}$ แล้ว x = 3

   x เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $x = \sqrt{2x+3}$ และ $x \neq 3$

2. "สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n ใดๆ, 3 หาร $2^{2n} - 1$ ไม่ลงตัว"
   ถ้าจะพิสูจน์ข้อความดังกล่าวโดยใช้ข้อขัดแย้ง จะต้องสมมติว่า *มีจำนวนเต็มบวก n บางจำนวนที่ 3 หาร $2^{2n} - 1$ ลงตัว*

3. "ถ้า a เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว a + 2 เป็นจำนวนอตรรกยะ"
   ถ้าจะพิสูจน์ข้อความดังกล่าวโดยใช้ข้อขัดแย้ง จะต้องสมมติว่า *a เป็นจำนวนอตรรกยะ และ a + 2 เป็นจำนวนตรรกยะ*

4. "ถ้า p และ q แทนประพจน์ จะได้ว่า $(p \wedge q) \rightarrow p$ เป็นสัจนิรันดร์"

จงพิสูจน์ข้อความดังกล่าว โดยใช้ข้อขัดแย้ง

<u>พิสูจน์</u> *สมมติให้ p และ q แทนประพจน์ และ $(p \wedge q) \rightarrow p$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์*

จะได้ว่า $\sim((p \wedge q) \rightarrow p)$ เป็นสัจนิรันดร์

เนื่องจาก $\sim((p \wedge q) \rightarrow p)$ สมมูลกับ $(p \wedge q) \wedge \sim p$

ดังนั้น $(p \wedge q) \wedge \sim p$ เป็นสัจนิรันดร์

จะได้ p และ q และ ~p มีค่าความจริงเป็นจริง

เกิดข้อขัดแย้ง เพราะเป็นไปไม่ได้ที่ p และ ~p มีค่าความจริงเป็นจริง

นั่นคือที่สมมติให้ p และ q แทนประพจน์ และ $(p \wedge q) \rightarrow p$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์ เป็นไปไม่ได้

ดังนั้น $(p \wedge q) \rightarrow p$ เป็นสัจนิรันดร์ #

6. วิธีการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$

1. ถ้าจะพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ จะต้องพิสูจน์กี่ตอน อะไรบ้าง

1.1 " x เป็นจำนวนเต็มคี่ ก็ต่อเมื่อ x + 3 เป็นจำนวนเต็มคู่"

มี 2 ตอน คือ 1) พิสูจน์ว่า ถ้า x เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว x + 3 เป็นจำนวนเต็มคู่

2) พิสูจน์ว่า ถ้า x + 3 เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว x เป็นจำนวนเต็มคี่

1.2 " ให้ x และ y จำนวนจริงใดๆ จงพิสูจน์ว่า $x^3 = y^3$ ก็ต่อเมื่อ x = y"

มี 2 ตอน คือ 1) พิสูจน์ว่า ให้ x และ y จำนวนจริงใดๆ ถ้า $x^3 = y^3$ แล้ว x = y

2) พิสูจน์ว่า ถ้า x = y แล้ว $x^3 = y^3$

14. " a เป็นจำนวนเต็มคี่ ก็ต่อเมื่อ a^2 เป็นจำนวนเต็มคี่"

จงพิสูจน์ข้อความดังกล่าว

<u>พิสูจน์</u> 1) *จะพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว a^2 เป็นจำนวนเต็มคี่*

ให้ a เป็นจำนวนเต็มคี่

ดังนั้น จะมีจำนวนเต็ม k ซึ่ง a = 2k + 1 (บทนิยาม ii)

$$a^2 = (2k+1)^2 = 2((2k)^2 + 2k) + 1$$

เพราะว่า $(2k)^2 + 2k$ *เป็นจำนวนเต็ม (สมบัติปิดของการคูณ)*

ดังนั้น a^2 เป็นจำนวนเต็มคี่ (บทนิยาม ii)

2) *จะพิสูจน์ว่า ถ้า a^2 เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว a เป็นจำนวนเต็มคี่*

พิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ จะต้องพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว a^2 เป็นจำนวนเต็มคู่

ให้ a เป็นจำนวนเต็มคู่

ดังนั้น จะมีจำนวนเต็ม k ซึ่ง a = 2k *(บทนิยาม i)*

$$a^2 = 2(2k)^2$$

เพราะว่า $(2k)^2$ *เป็นจำนวนเต็ม (สมบัติปิดของการคูณ)*

ดังนั้น a^2 เป็นจำนวนเต็มคู่ (บทนิยาม i)

จากทั้ง 2 กรณี จะได้ว่า a เป็นจำนวนเต็มคี่ ก็ต่อเมื่อ a^2 เป็นจำนวนเต็มคี่ #

7. การเลือกและแสดงการพิสูจน์

จงแสดงการพิสูจน์ โดยเลือกพิสูจน์เพียง 1 ข้อ ให้ระบุด้วยว่าเลือกวิธีการพิสูจน์วิธีใด

1. บทนิยาม สำหรับจำนวนเต็ม a, b ใดๆ และ $a \neq 0$

$a \mid b$ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม c ซึ่ง $b = ac$

จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid c$ แล้ว $a \mid c$

<u>พิสูจน์</u> *ให้ a,b และ c เป็นจำนวนเต็มใดๆ และ $a \neq 0$, $b \neq 0$*

ให้ $a \mid b$ และ $b \mid c$

จะมีจำนวนเต็ม s และ t ที่ทำให้ $b = as$ และ $c = bt$

จะได้ว่า $c = (as)t = a(st)$, st เป็นจำนวนเต็ม โดยสมบัติปิดของการคูณ

ดังนั้น $a \mid c$ #

2. ถ้า n^2 เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว n - 3 เป็นจำนวนเต็มคู่

<u>พิสูจน์</u> *วิธีที่ 1 (พิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่)*

จะพิสูจน์ว่า ถ้า n - 3 เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว n^2 เป็นจำนวนเต็มคู่

ให้ n - 3 เป็นจำนวนเต็มคี่

ดังนั้น จะมีจำนวนเต็ม k เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $n - 3 = 2k + 1$ *(บทนิยาม ii)*

$$n = 2k + 4$$

$$n^2 = 2(2k^2 + 8k + 8)$$

เพราะว่า $(2k^2 + 8k + 8)$ *เป็นจำนวนเต็ม (สมบัติปิดของการคูณ)*

ดังนั้น n^2 *เป็นจำนวนเต็มคู่* #

วิธีที่ 2 (พิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง)

สมมติให้ n^2 *เป็นจำนวนเต็มคี่และ n - 3 เป็นจำนวนเต็มคี่*

จะมีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n - 3 = 2k + 1$ *(บทนิยาม ii)*

$$n = 2k + 4$$

$$n^2 = 2(2k^2 + 8k + 8)$$

เพราะว่า $(2k^2 + 8k + 8)$ *เป็นจำนวนเต็ม (สมบัติปิดของการคูณ)*

ดังนั้น n^2 *เป็นจำนวนเต็มคู่*

เกิดข้อขัดแย้ง n^2 *เป็นจำนวนเต็มคี่และเป็นจำนวนเต็มคู่ไม่ได้*

ดังนั้นที่สมมติให้ n^2 *เป็นจำนวนเต็มคี่และ n - 3 เป็นจำนวนเต็มคี่ เป็นเท็จ*

นั้นคือ n - 3 เป็นจำนวนเต็มคู่ #

ภาคผนวก ง

รายนามผู้เชี่ยวชาญ

รายนามผู้เชี่ยวชาญ

รายนามผู้เชี่ยวชาญ

1. รองศาสตร์จารย์ กมล เอกไทยเจริญ

    อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

2. อาจารย์ สุภาลักษณ์ พงษ์สุธรรม

    อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ ชื่อสกุล	นางสาวขจรศรี วรรณสถิตย์
วันเดือนปีเกิด	21 มกราคม พุทธศักราช 2517
สถานที่เกิด	อำเภอเดชอุดม จังหวัดอุบลราชธานี
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	18/2 ถนนส่งศรี อำเภอเดชอุดม จังหวัดอุบลราชธานี 34160
ตำแหน่งหน้าที่การงานในปัจจุบัน	ไม่ได้ทำงาน
ประวัติการศึกษา	
พ. ศ. 2534	มัธยมศึกษาปีที่ 6 จาก ศูนย์การศึกษานอกโรงเรียนจังหวัดอุบลราชธานี
พ.ศ. 2538	การศึกษาบัณฑิต (คณิตศาสตร์) จาก มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
พ.ศ. 2544	การศึกษามหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์) จาก มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์ ระดับปริญญาตรี

บทคัดย่อ

ของ

ขจรศรี วรรณสถิตย์

เสนอต่อมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์

มีนาคม 2544

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อ วิเคราะห์และจัดลำดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต ศึกษาลักษณะข้อผิดพลาดในการพิสูจน์คณิตศาสตร์ของนิสิต เปรียบเทียบปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตจำแนกตามเพศและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ศึกษาระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต และศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต กับตัวแปรทางด้านเพศ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

กลุ่มตัวอย่างเป็นนิสิตหลักสูตรการศึกษาบัณฑิต วิชาเอกคณิตศาสตร์ที่ลงทะเบียนเรียนวิชา คณ 241 หลักและวิธีการของคณิตศาสตร์ ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2543 ของมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร จำนวน 79 คน

เครื่องมือที่ใช้ในการรวบรวมข้อมูล ประกอบด้วย 1) แบบทดสอบอัตนัยเกี่ยวกับการพิสูจน์ จำนวน 20 ข้อย่อย 2) แบบสัมภาษณ์เกี่ยวกับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ จำนวน 31 ข้อ ผู้วิจัยรวบรวมข้อมูลโดย หลังจากที่นิสิตได้เรียนวิธีการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ แล้ว ผู้วิจัยทำการทดสอบนิสิต โดยใช้แบบทดสอบอัตนัยเกี่ยวกับการพิสูจน์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น หลังจากนั้นทำการสัมภาษณ์นิสิตด้วยแบบสัมภาษณ์เกี่ยวกับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ใช้เวลาในการสัมภาษณ์คนละประมาณ 10 นาที

ผลการวิจัย พบว่า

1. ผลการวิเคราะห์ และจัดลำดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิต ในการพิสูจน์ข้อความในรูป $P \rightarrow Q$ และ $P \leftrightarrow Q$ พบว่า วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง เป็นปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตเป็นลำดับที่หนึ่ง ปัญหารองลงมาตามลำดับ ได้แก่ การใช้บทนิยามเพื่อวิเคราะห์การพิสูจน์ วิธีการพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่ การเลือกวิธีการพิสูจน์และการแสดงการพิสูจน์ การวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่ต้องพิสูจน์ การพิสูจน์ข้อความในรูป $P \leftrightarrow Q$ และวิธีการพิสูจน์โดยใช้กฎของเงื่อนไข

2. การเปรียบเทียบปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของนิสิตจำแนกตามเพศ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ได้ผลสรุปดังนี้

2.1 นิสิตชายมีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มากกว่านิสิตหญิงที่ระดับนัยสำคัญ .05

2.2 นิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์แตกต่างกัน มีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์แตกต่างกัน ที่ระดับนัยสำคัญ .05

เมื่อเปรียบเทียบเป็นรายคู่ พบว่า นิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำ และนิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ปานกลาง มีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มากกว่านิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ที่ระดับนัยสำคัญ .05 แต่นิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำมีปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ไม่แตกต่างจากนิสิตที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ปานกลาง ที่ระดับนัยสำคัญ .05

3. ผลการศึกษาระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ โดยวัดทัศนคติของนิสิตที่มีต่อปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ได้ผลสรุปว่า ใน 4 ขั้น ซึ่งได้แก่ ขั้นทำความเข้าใจโจทย์เบื้องต้น ขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ ขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์ และขั้นแสดงการพิสูจน์ พบว่านิสิตมีทัศนคติต่อปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 4 ขั้นดังกล่าว ในระดับปานกลาง

4. การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างเพศ และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์กับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 4 ขั้น ได้แก่ ขั้นทำความเข้าใจโจทย์เบื้องต้น ขั้นวิเคราะห์แนวการพิสูจน์ ขั้นค้นหาเครื่องมือเพื่อใช้ในการพิสูจน์ และขั้นแสดงการพิสูจน์ ได้ผลสรุปดังนี้

4.1 เพศไม่มีความสัมพันธ์กับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 4 ขั้น ที่ระดับนัยสำคัญ .05

4.2 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ไม่มีความสัมพันธ์กับระดับปัญหาในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ทั้ง 4 ขั้น ที่ระดับนัยสำคัญ .05

UNIVERSITY MATHEMATICS STUDENTS' PROBLEM IN MATHEMATICAL PROOF

AN ABSTRACT

BY

KAJONSRI WANNASATHIT

Presented in partial fulfillment of the requirements

for the Master of Education degree in Mathematics

at Srinakharinwirot University

March 2001

This study focused on skills in mathematical proofs, which have been considered as important tools in learning mathematics. The first purpose of this study was to classify student errors or problems in doing mathematical proofs. Secondly, this study explored the difference in proving skills based on gender and previous mathematical achievements. Student attitudes towards mathematical proofs with emphasis on their inadequacies were analyzed into specified levels. Finally, these levels of inadequacies were studied according to gender and previous achievements in mathematics.

The subjects of this study composed of 79 mathematics majors who were taking MA 241: Principle of Mathematics in the first semester of the 2000 academic year at SWU.

After learning various techniques on mathematical proofs, the subjects were tested on their skills by completing 20 proof questions. This was followed by the administration of an attitude test for determining the level of difficulties with which they encountered about mathematical proofs. The attitude part was based on a questionnaire of 31 items.

The findings can be summarized as follows:

1. Students problems in mathematical proofs are classified from major to minor as follows: (1) contradiction (2) the use of definition in proof (3) contrapositive (4) decision in choosing appropriate proof for a particular problem and carrying out that decision (5) problem analysis in terms of the given and conclusion (6) if-and-only-if statements.

2. When students' scores were analyzed according to gender and mathematical achievements, it was found that:

2.1 male students had more problems than female students at the 0.05 level.

2.2 students with differing achievements exhibited different problems in mathematical proofs; higher achievers had less problems then the middle and lower achievers, whereas the latter two showed no significant difference. The test was performed at .05 level.

3. From the questionnaires, it was found that students had difficulty in the following areas: understanding the mathematics problem, analysis of proof, search of appropriate techniques, and presentation of proof. But this difficulty was considered moderate.

4. When gender and mathematical achievements were studied with the four levels of difficulty as discussed in (3) it was found that:

4.1 there were no significant relationship between gender and the four levels.

4.2 there were no significant relationship between mathematical achievements and the four levels.