

เอกสารประกอบการสอน

วิชา วิศว 214 กลศาสตร์ของแข็ง 2
ME 214 Mechanics of Solids II

14 พ.ย. 2545

โดย
นายบัญชา คังตระกูล

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ องครักษ์
ภาคการศึกษาที่ 1/2544

สารบัญ

	หน้า
ประมวลการสอน	1
สัปดาห์ที่ 1	8
หน่วยที่ 1 ความเค้นดัดในคานโค้ง	9
สัปดาห์ที่ 2	16
หน่วยที่ 2 คานซึ่งไม่สามารถแก้ปัญหาได้ด้วยหลักสถิตศาสตร์	
• วิธี superposition	17
• ทฤษฎี 3 โมเมนต์	28
สัปดาห์ที่ 3	36
• ทฤษฎีของคาสติเกลียโน	37
• การประยุกต์ทฤษฎีของคาสติเกลียโนกับปัญหา ที่ไม่สามารถแก้ด้วยวิธีทางสถิตศาสตร์	44
สัปดาห์ที่ 3(ต่อ)	51
• limit analysis ของคานที่ไม่สามารถแก้ปัญหา ด้วยวิธีทางสถิตศาสตร์	52
สัปดาห์ที่ 4	58
หน่วยที่ 3 การวิเคราะห์ความเค้น ^{วิธี 2 (59-80)} ^{วิธี 3 82}	59
• สถานะของความเค้นที่จุดๆหนึ่ง	65
• กฎของการแปลงความเค้น	72
สัปดาห์ที่ 5	76
• ความเค้นหลัก	77
• วงกลมของโมร์	91

สัปดาห์ที่ 6	109
หน่วยที่ 4 สถานะของความเค้น	110
• ความเค้นภายใต้การดึงหรือการอัดในทิศทางเดียว	110
• ความเค้นภายใต้การดึงหรือการอัดในทิศทางที่ตั้งฉากกันสองทิศทาง	119
• การหาความเค้นหลักในสถานะของความเค้นสองมิติ	124
• สถานะของความเค้นสามมิติ	130
สัปดาห์ที่ 7	137
หน่วยที่ 5 พื้นฐานของความเครียด	138
• กฎของฮุก	158
• ความสัมพันธ์ระหว่าง E , ν และ G	168
• Dilatation และ Bulk Modulus	173
สัปดาห์ที่ 8	182
• การหาความเค้นจากความเครียดโดยการทดลอง	183
- strain roset	
• วงกลมของโมร์สำหรับการวัดความเครียด	197
• การวัดความเครียดสามมิติ	209
สัปดาห์ที่ 9	222
หน่วยที่ 6 การวิเคราะห์ความเครียด	223
• การหาความเครียด ณ จุดๆหนึ่ง	227
• สมการของ compatibility	234
สัปดาห์ที่ 10	239
หน่วยที่ 7 ทฤษฎีความยืดหยุ่น	240
• ปัญหาสองมิติในพิกัดฉาก	240
• หลักของ Saint Venant	247
	182 - 214
	240 - 277
	158 - 172

สัปดาห์ที่ 11	267
หน่วยที่ 8 ทฤษฎีความแข็งแรง	268
• ทฤษฎีความเค้นดึงจากสูงสุด	271
• ทฤษฎีความเครียดดึงจากสูงสุด	274
• ทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุด	277
สัปดาห์ที่ 12	281
• ทฤษฎีพลังงานความเครียดสูงสุด	282
• ทฤษฎีพลังงานความเครียดในการเสียรูปร่างสูงสุด	284
• ทฤษฎีความเค้นเฉือนออกตะฮิดรัลสูงสุด	286
สัปดาห์ที่ 13	288
• ทฤษฎีสถานะของความเค้นจำกัด	289
• การเปรียบเทียบทฤษฎีความแข็งแรงต่างๆ	296
สัปดาห์ที่ 14	299
• สูตรที่ใช้ในการออกแบบ	300
สัปดาห์ที่ 15	313
หน่วยที่ 9 ทรงกระบอกผนังหนาและจานหมุน	314
• กรณีทั่วไปของทรงกระบอกผนังหนาและจานหมุน	314
• กรณีที่ไม่มีการหมุน(ท่อผนังหนา)	316
- การสวมอัด	318
- ความเค้นสูงสุดเมื่อถูกกระทำด้วยความดันภายนอกและภายใน	320
สัปดาห์ที่ 16	324
• กรณีที่ไม่มีความดัน (จานหมุน)	325
• กรณีที่มีทั้งความดันและการหมุน (จานหมุนสวมอัดเข้ากับเพลลา)	325
• ความเค้นเฉือนสูงสุด	328
• ความเครียดสูงสุดและค่าสูงสุดของ $E \epsilon$	329

ประมวลการสอน (Course Syllabus)

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์

มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ องครักษ์

รหัสวิชา วศก 214

ชื่อวิชา กลศาสตร์ของแข็ง 2

3(3-0)

ME 214

Mechanics of Solids II

บรรพวิชา วศก 213 กลศาสตร์ของแข็ง 1

ME 213 Mechanics of Solids I

ผู้สอน อ. บัญชา คังตระกูล

คำอธิบายรายวิชา

การวิเคราะห์ความเครียด วงกลมความเครียดของโมร์ ผลจากการวัดความเครียด กฎของฮุกในสามมิติ ความสัมพันธ์ระหว่างค่าคงที่ของความยืดหยุ่น คานซึ่งไม่สามารถแก้ปัญหได้ด้วยหลักสถิตศาสตร์ ทฤษฎีคานโค้ง ทฤษฎีพลังงานความเครียดของคาสติเกลียโน ทรงกระบอกผนังหนาและแผ่นจานหมุน ทฤษฎีความล้มเหลวของความยืดหยุ่น

วัตถุประสงค์ของรายวิชา

เพื่อให้นิสิตเข้าใจถึงที่มาของนิยาม ที่มาของสูตร สร้างแนวความคิดให้สามารถวิเคราะห์ คำนวณ และออกแบบชิ้นส่วนของโครงสร้างทางวิศวกรรมและเครื่องจักรกลที่ซับซ้อนมากขึ้นได้อย่างถูกต้องตามหลักวิชาการ ทั้งในเรื่องการเลือกใช้วัสดุวิศวกรรมที่เหมาะสมและความปลอดภัย

เมื่อสิ้นสุดการเรียนรู้ นิสิตควรจะสามารถ

1. วิเคราะห์ความเค้นในคานโค้งและคานที่ไม่สามารถแก้ปัญหได้ด้วยหลักสถิตศาสตร์
2. วิเคราะห์ความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นภายในเนื้อวัสดุในสถานะที่ซับซ้อน
3. ประยุกต์ใช้ทฤษฎีความแข็งแรงในการออกแบบที่เหมาะสมและสมเหตุสมผลในแง่ความแข็งแรง ความแข็งแกร่ง และความปลอดภัย
4. วิเคราะห์และออกแบบทรงกระบอกผนังหนาและแผ่นจานหมุน

แผนการสอน

สัปดาห์ที่	หัวข้อ	สาระสำคัญ	จุดประสงค์การเรียนรู้
1	ทฤษฎีของคานโค้ง	1. ความเค้นดัดในคานโค้ง	1. คำนวณหาความเค้นในคานโค้งได้ 2. ออกแบบชิ้นส่วนประเภทคานโค้งได้

2	คานซึ่งไม่สามารถแก้ปัญหาได้ด้วยหลักสถิตศาสตร์ (1)	2.คานซึ่งไม่สามารถแก้ปัญหาได้ด้วยหลักสถิตศาสตร์ -วิธี superposition -ทฤษฎี 3 โมเมนต์	1.คำนวณหาแรงปฏิกิริยาและระยะแอนด้วยวิธี superposition ได้ 2.คำนวณหาแรงปฏิกิริยาและระยะแอนด้วยวิธีทฤษฎี 3 โมเมนต์ได้
3	ทฤษฎีพลังงานความเครียดของคาสติเกลียโน คานซึ่งไม่สามารถแก้ปัญหาได้ด้วยหลักสถิตศาสตร์ (2)	-ทฤษฎีของคาสติเกลียโน -การประยุกต์ทฤษฎีของคาสติเกลียโนกับปัญหาที่ไม่สามารถแก้ด้วยวิธีทางสถิตศาสตร์ -Limit Analysis ของคานที่ไม่สามารถแก้ปัญหาดด้วยวิธีทางสถิตศาสตร์	3.คำนวณหาแรงปฏิกิริยาและระยะแอนด้วยทฤษฎีของคาสติเกลียโนได้ 4.ออกแบบคานซึ่งไม่สามารถแก้ปัญหาได้ด้วยหลักสถิตศาสตร์โดยใช้ทฤษฎีของคาสติเกลียโนได้ 5.ออกแบบคานซึ่งไม่สามารถแก้ปัญหาได้ด้วยหลักสถิตศาสตร์โดยใช้หลักการของ limit analysis ได้
4	การวิเคราะห์ความเครียด (1)	3.การวิเคราะห์ความเค้น -สถานะของความเค้นที่จุดๆหนึ่ง -กฎของการแปลงความเค้น	1.คำนวณสถานะความเค้นที่จุดๆหนึ่งได้ 2.คำนวณการแปลงความเค้นจากพิกัดแกนหนึ่งไปสู่อีกพิกัดแกนหนึ่งได้
5	การวิเคราะห์ความเครียด (2)	-ความเค้นหลัก -วงกลมของโมร์ σ_2	3.คำนวณหาความเค้นหลักได้ 4.ใช้วงกลมของโมร์หาความเค้นได้
6	การวิเคราะห์ความเครียด (3)	4.สถานะของความเค้น -ความเค้นภายใต้การดึงหรือการอัดในทิศทางเดียว -ความเค้นภายใต้การดึงหรือการอัดในทิศทางที่ตั้งฉากกันสองทิศทาง -การหาความเค้นหลักในสถานะของความเค้นสอง	1.วิเคราะห์สถานะของความเค้นภายใต้การดึงหรือการอัดในทิศทางเดียวได้ 2.วิเคราะห์สถานะของความเค้นภายใต้การดึงหรือการอัดในทิศทางที่ตั้งฉากกันสองทิศทางได้ 3.คำนวณหาความเค้นหลักในสถานะของความเค้นสองมิติได้

		มิติ -การหาความเค้นหลักในสถานะของความเค้นสามมิติ	4.คำนวณหาความเค้นหลักในสถานะของความเค้นสามมิติได้
7	การวิเคราะห์ความเครียด (4) กฎของฮุกใน 3 มิติ ความสัมพันธ์ระหว่างค่าคงที่ของความยืดหยุ่น ν กับ E	5. พื้นฐานของความเครียด -กฎของฮุก -ความสัมพันธ์ระหว่าง E , ν และ G -Dilatation และ Bulk Modulus	1.คำนวณและแปลงความเครียดได้ 2.คำนวณหาความเค้นจากความเครียดด้วยกฎของฮุกได้ 3.เขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง E , ν และ G ได้ 4.คำนวณหาการเปลี่ยนแปลงปริมาตรได้
8	ผลจากการวัดความเครียด ν กับ E วงกลมความเครียดของโมร์	-การหาความเค้นและความเครียดโดยการทดลอง: strain rosette -วงกลมของโมร์สำหรับการวัดความเครียด -การวัดความเครียดสามมิติ	5.หาความเค้นจากความเครียดโดยใช้ strain rosette ได้ 6.หาความเครียดบนระนาบโดยใช้วงกลมของโมร์ได้ 7.หาความเครียดสามมิติโดยใช้วงกลมของโมร์ได้
9	การวิเคราะห์ความเครียด (5)	6. การวิเคราะห์ความเครียด -การหาความเครียด ณ จุดๆหนึ่ง -สมการของcompatibility	1.คำนวณหาความเครียด ณ จุดๆหนึ่งได้ 2.เขียนสมการของ compatibility ได้
10	การวิเคราะห์ความเครียด (6)	7. <u>ทฤษฎีความยืดหยุ่น</u> ปัญหาสองมิติ: พิกัดฉาก -หลักของ Saint Venant : พิกัดเชิงขั้ว	1.คำนวณหาความเค้นและความเครียดสองมิติในพิกัดฉากได้ 2.คำนวณหาความเค้นและความเครียดสองมิติในพิกัดเชิงขั้วได้
11	ทฤษฎีความล้มเหลวของความยืดหยุ่น (1)	8. <u>ทฤษฎีความแข็งแรง</u> -ทฤษฎีความเค้นตั้งฉากสูงสุด -ทฤษฎีความเครียดตั้ง	1.คำนวณหาเกณฑ์ในการออกแบบด้วยทฤษฎีความเค้นตั้งฉากสูงสุดได้ 2.คำนวณหาเกณฑ์ในการออกแบบ

		ฉากสูงสุด -ทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุด	แบบด้วยทฤษฎีความเครียดตั้งฉากสูงสุดได้ 3.คำนวณหาเกณฑ์ในการออกแบบด้วยทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุดได้
12	ทฤษฎีความล้มเหลวของความยืดหยุ่น (2)	- ทฤษฎีพลังงานความเครียดสูงสุด - ทฤษฎีพลังงานความเครียดในการเสียรูปร่างสูงสุด -ทฤษฎีความเค้นเฉือนอ็อกตะฮีดรัลสูงสุด	4.คำนวณหาเกณฑ์ในการออกแบบด้วยทฤษฎีพลังงานความเครียดสูงสุดได้ 5.คำนวณหาเกณฑ์ในการออกแบบด้วยทฤษฎีพลังงานความเครียดในการเสียรูปร่างสูงสุดได้ 6.คำนวณหาเกณฑ์ในการออกแบบด้วยทฤษฎีความเค้นเฉือนอ็อกตะฮีดรัลสูงสุดได้
13	ทฤษฎีความล้มเหลวของความยืดหยุ่น (3)	-ทฤษฎีสถานะของความเค้นจำกัด -การเปรียบเทียบทฤษฎีความแข็งแรงต่างๆ	7.คำนวณหาเกณฑ์ในการออกแบบด้วยทฤษฎีสถานะของความเค้นจำกัดได้ 8.เปรียบเทียบเกณฑ์ในการออกแบบด้วยทฤษฎีความแข็งแรงต่างๆได้
14	ทฤษฎีความล้มเหลวของความยืดหยุ่น (4)	-สูตรที่ใช้ในการออกแบบ	9.เขียนสูตรที่ใช้ในการออกแบบจากทฤษฎีความแข็งแรงต่างๆตามสถานะของความเค้นที่กำหนดได้
15	ทรงกระบอกผ้นังหนาและแผ่นจานหมุน (1)	9.ทรงกระบอกผ้นังหนาและจานหมุน -กรณีทั่วไปของทรงกระบอกผ้นังหนาและจานหมุน -กรณีที่ไม่มีจานหมุน (ท่อผ้นังหนา)	1.เขียนสมการทั่วไปสำหรับทรงกระบอกผ้นังหนาและจานหมุนภายใต้ภาระต่างๆได้ 2.เขียนสมการในกรณีเฉพาะที่ไม่มีจานหมุนได้ 3.วิเคราะห์กรณีเฉพาะของท่อผ้นังหนาที่ถูกกระทำด้วยความ

		-การสวมอัด -ความดันสูงสุดเมื่อถูกกระทำด้วยความดันภายนอกและภายใน	ดันในสภาวะต่างๆได้
16	ทรงกระบอกผนังหนาและแผ่นจานหมุน (2)	-กรณีที่ไม่มีความดัน (จานหมุน) -กรณีที่มีทั้งความดันและการหมุน(จานหมุนสวมอัดเข้ากับเพลลา) -ความเค้นเฉือนสูงสุด -ความเครียดสูงสุดและค่าสูงสุดของ $E\epsilon$	4.เขียนสมการสำหรับจานหมุนได้ 5.ออกแบบจานหมุนสวมอัดเข้ากับเพลลาได้ 4.ประยุกต์ใช้ทฤษฎีความแข็งแรงกับการออกแบบท่อผนังหนาได้

วิธีการสอน

การเรียนการสอน เวลาเรียนประมาณ 42 ชั่วโมง โดยสอนสัปดาห์ละ 3 ชั่วโมง เป็นการบรรยาย อภิปรายหน้าชั้น ทำกิจกรรมในกลุ่มย่อย เพื่อให้ได้ความเข้าใจและเกิดทักษะในการคิดหาคำตอบ เวลาในการสอบ 6 ชั่วโมง โดยสอบ 2 ครั้งๆ ละ 3 ชั่วโมง

กิจกรรม นอกเหนือจากการเรียนในชั้นเรียนแล้ว นิสิตจะต้องค้นคว้าเพิ่มเติมนอกชั้นเรียนจากเอกสาร ตำรา อ่านทำความเข้าใจและสามารถหาคำตอบจากเรื่องราวต่างๆ ได้ หรือจากการอ่านหนังสือที่แนะนำให้อ่านเพิ่มเติม ทำการบ้าน ทำงานที่มอบหมายให้ รวมถึงความร่วมมือในการทำกิจกรรมต่างๆ ในชั้นเรียนด้วย

เงื่อนไขการเรียน

1. คะแนนความสนใจ ความร่วมมือในชั้นเรียน ในงานที่มอบหมาย และการทดสอบย่อยเป็นสิทธิ์ของอาจารย์ผู้สอนที่จะกำหนดตามสมควร โดยอยู่ในกรอบเกณฑ์คะแนนที่กำหนด
2. นิสิตต้องปฏิบัติตามข้อบังคับของมหาวิทยาลัยและประกาศของคณะวิศวกรรมศาสตร์อย่างเคร่งครัด
3. นิสิตจะต้องมีเวลาเข้าชั้นเรียนไม่น้อยกว่า 80% ของเวลาเรียนจึงจะมีสิทธิ์เข้าสอบปลายภาค
4. นิสิตจะต้องไม่เข้าชั้นเรียนสายเกิน 5 นาที
5. นิสิตจะต้องไม่เข้าสอบสายเกินกว่า 30 นาที และจะออกจากห้องสอบก่อนเวลา 30 นาทีแรกของการสอบไม่ได้

การวัดผลและการประเมินผล

นิสิตที่ลงทะเบียนตัดเกรดร่วมกัน พิจารณาคัดเกรดจากคะแนนรวมทั้งหมด (ตามหัวข้อการวัดผลการเรียน) ใช้วิธีอิงเกณฑ์ โดยถ้าได้คะแนนรวมต่ำกว่า 41% ผลการเรียนจะได้เกรด E (ไม่ผ่าน) ในกรณีที่เข้าชั้นเรียนต่ำกว่า 80% ของเวลาเรียนจะไม่มีสิทธิ์สอบและได้รับเกรด E

คะแนนเก็บ	ไม่เกิน	20 %
คะแนนสอบ	ไม่น้อยกว่า	80 %
สอบกลางภาค		32%
สอบปลายภาค		48%
รวม		100 %

อุปกรณ์สื่อการสอน

เอกสารประกอบการสอน แผ่นใส สไลด์ วีดิทัศน์ เอกสารภาพประกอบ ตัวอย่างชิ้นส่วนแบบจำลอง และแบบจำลองผ้า ตามความเหมาะสมในแต่ละหัวข้อการสอน

เอกสารประกอบการสอน

1. ตำราเรียนหลัก

1. Boresi, A. P., Schmidt, R. J. and Sidebottom, O. M. (1993) **Advanced Mechanics of Materials**, 4th Ed., John Wiley & Sons, New York.
2. Den Hartog, J. P. (1952) **Advanced Strength of Materials**, McGraw-Hill, New York.
3. Timoshenko, S. P. and Young, D. H. (1977) **Elements of Strength of Materials**, 4th Ed., Affiliated East-West Press, New Delhi.

2. หนังสืออ่านประกอบ

4. Benham, P. P. et al (1996) **Mechanics of Engineering Materials**, 2nd Ed., Longman, London.
5. Budynas, R. G. (1977) **Advanced Strength and Applied Stress Analysis**, 2nd Ed., McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo.

ภาระงานของนิสิต

กิจกรรม	ชั่วโมง
การเรียนการสอนในชั้นเรียน	42
การศึกษด้วยตนเอง	36
การบ้านและการติว	30
งานที่มอบหมาย	30
การสอบ	6
รวม	144

การให้คำแนะนำในด้านการเรียน นอกเวลาเรียน

นิสิตสามารถเข้าพบและปรึกษาปัญหาด้านการเรียนการสอนกับอาจารย์ผู้สอนได้ โดยการพบที่ห้องพัก ในวันจันทร์ – ศุกร์ ในเวลาราชการ ตามเวลาที่กำหนดไว้ในตารางสอน หรือ ตามกำหนดนัดหมายล่วงหน้า

สัปดาห์ที่ 1

หัวข้อเรื่อง ทฤษฎีของคานโค้ง

(3 ชั่วโมง)

ความคิดรวบยอด

1. คานโค้งเป็นชิ้นส่วนทางวิศวกรรมที่สำคัญมากประเภทหนึ่ง ตัวอย่างของชิ้นส่วนประเภทนี้คือ Hook สำหรับรอกและ crane ต่างๆ และ ลำตัวของ C-clamp เป็นต้น
2. การออกแบบชิ้นส่วนประเภทคานโค้งโดยทั่วไปบนหน้าตัดที่พิจารณาจะประกอบด้วยความเค้นที่เกิดจากภาระในแนวแกนและโมเมนต์ดัด ซึ่งการวิเคราะห์หาความเค้นผสมบนหน้าตัดจะสามารถทำได้ง่ายๆ โดยใช้วิธี superposition

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. คำนวณหาความเค้นในคานโค้งได้
2. ออกแบบชิ้นส่วนประเภทคานโค้งได้

สังเขปเนื้อหา

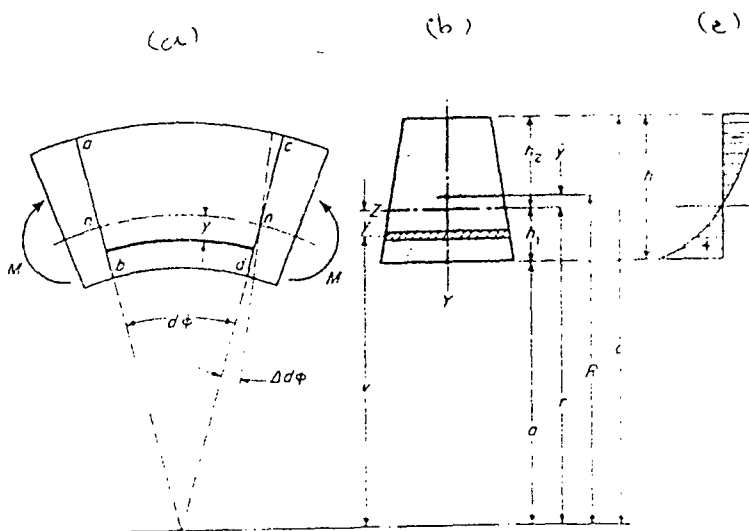
หน่วยที่ 1. ความเค้นดัดในคานโค้ง

หน่วยที่ 1 ความเค้นดัดในคานโค้ง

ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาทฤษฎีของการดัดเพียงอย่างเดียว (Pure Bending) สำหรับแท่งวัตถุโค้งหรือคานโค้งในช่วงขอบเขตความยืดหยุ่น จากรูปที่ 6-6.1 พิจารณาส່วนสั้นๆ ส่วนหนึ่งของคานโค้งซึ่งมีแรงคู่ควบ M กระทำในระนาบของความโค้งดั้งเดิม (Initial Curvature) ของคาน โมเมนต์ดัดที่พยายามทำให้ความโค้งดั้งเดิมลดน้อยลงจะให้เป็นโมเมนต์บวก ให้นำหน้าตัดแต่ละหน้าตัดที่มีแกนสมมาตรวางอยู่บนระนาบของความโค้งดั้งเดิมของคาน ดังนั้นโลกัสของจุดเซนทรอยด์จะอยู่บนระนาบของความโค้งดั้งเดิมและเป็นเส้นโค้ง เราเรียกว่าเป็นเส้นศูนย์กลาง (Center Line) ของคานโค้งและให้รัศมีความโค้งของเส้นศูนย์กลางแทนด้วย R

ในการหาการกระจายความเค้นบนพื้นที่หน้าตัดที่เกิดจากการดัดเพียงอย่างเดียว (Pure Bending) ของคานโค้งเช่นนี้ เราใช้สมมติฐานเช่นเดียวกับคานตรงธรรมดา คือ ระนาบของหน้าตัดคานก่อนถูกดัดตั้งฉากกับเส้นศูนย์กลาง และภายหลังที่ถูกดัดไปแล้วก็ยังคงตั้งฉากอยู่เช่นเดิม ให้ ab และ cd เป็นหน้าตัดคานที่อยู่ติดกัน และมีมุม $d\phi$ เป็นมุมเล็กๆรองรับอยู่ระหว่างหน้าตัดทั้ง 2 ก่อนถูกดัดด้วยโมเมนต์ M เมื่อถูกดัดด้วยโมเมนต์ M จะเกิดการหมุนไปเมื่อเทียบกับ ab เป็นมุมเล็กๆมีขนาดเป็น $\Delta d\phi$ การหมุนนี้จะทำให้เส้นใยด้านนูนของคานถูกอัด ในขณะที่ด้านเว้าถูกดึง ถ้าเราให้ $n-n$ เป็นพื้นผิวระนาบ เส้นใยใดๆที่อยู่ห่างจากพื้นผิวนี้เป็นระยะทาง y จะยืดออกเป็นระยะยืดตัว $y(\Delta d\phi)$ ดังนั้นจะได้ความเครียดเป็น

$$\epsilon = \frac{y(\Delta d\phi)}{(r-y)d\phi} \quad (1)$$



รูปที่ 6-6.1

เมื่อ r เป็นรัศมีของพื้นผิวสะเทิน และตัวส่วนของสมการ(1) ก็คือความยาวของเส้นใยระหว่างหน้าตัดก่อนเกิดการดัด สมมติว่าไม่มีความดันระหว่างชั้นของเส้นใย(ทฤษฎีที่ถูกต้องจริงๆ แล้วมีความดันในแนวรัศมีจำนวนหนึ่ง แต่มีผลต่อความเค้นตามแนวแกนน้อยมากจนสามารถตัดทิ้งไปได้) จะได้ความเค้นดัดที่ระยะทาง y จากพื้นผิวสะเทินเท่ากับ

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{Ey(\Delta d\phi)}{(r-y)d\phi} \quad (2)$$

สมการ (2) นี้แสดงว่าการกระจายความเค้นไม่เป็นเส้นตรงเหมือนในกรณีคานตรงธรรมดา แต่จะเป็นรูปไฮเพอโบลา ดังแสดงไว้ในรูปที่ 6-6.1(c) จากเงื่อนไขที่ว่าผลรวมของแรงในแนวตั้งฉากกับหน้าตัดจะต้องเป็นศูนย์ จะสรุปได้ว่าแกนสะเทินจะเคลื่อนที่ออกจากจุดเซนทรอยด์ไปทางเข้าหาจุดศูนย์กลางความโค้งของคาน

ในกรณีที่หน้าตัดคานเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าพื้นที่ที่แรงงาไว้ในรูปที่ 6-6.1(c) ส่วนที่รับแรงดึงต้องเท่ากับส่วนที่รับแรงอัด ดังนั้นความเค้นดัดสูงสุดจะกระทำกับด้านเว้า ในการที่จะทำให้ความเค้นที่ผิวนอกสุดของด้านดึงและด้านอัดเท่ากัน จำเป็นที่จะต้องให้คานมีหน้าตัดในลักษณะที่จุดเซนทรอยด์อยู่ใกล้กับด้านเว้ามากกว่าด้านนูน

ในสมการ(2) เรามีปริมาณที่ไม่ทราบค่าอยู่ 2 อย่างคือรัศมี r ของพื้นผิวสะเทิน และมุม $\Delta d\phi$ ที่หมุนไปเนื่องจากการดัดของโมเมนต์ การหาปริมาณที่ไม่ทราบค่าเราจะต้องใช้สมการการสมดุลทางสถิตศาสตร์ 2 สมการมาช่วยแก้ปัญหานี้ สมการแรกก็คือเงื่อนไขที่ว่าผลรวมของแรงตลอดหน้าตัดคานเท่ากับศูนย์ และสมการที่ 2 คือโมเมนต์จากความเค้นจะต้องเท่ากับโมเมนต์ M ที่กระทำ ดังนั้น

$$\int \sigma dA = \frac{E(\Delta d\phi)}{d\phi} \int \frac{y dA}{r-y} = 0 \quad (3)$$

$$\int \sigma y dA = \frac{E(\Delta d\phi)}{d\phi} \int \frac{y^2 dA}{r-y} = M \quad (4)$$

การอินทิเกรตสมการทั้ง 2 จะต้องทำตลอดทั้งหน้าตัด

จากสมการ(3)เราจะหา r ได้ ให้ $\bar{y}$ (เป็นบวก)เป็นระยะทางจากแกนเซนทรอยด์ถึงแกนสะเทินของหน้าตัดของคาน ให้ v เป็นระยะทางจากจุดศูนย์กลางความโค้งถึงเนื้อวัสดุอนุพันธ์ (element) dA ที่พิจารณา ดังนั้น $y = r - v$ และสมการ(3)ก็อาจจะเขียนได้เป็น

$$\int \frac{(r-v)}{v} dA = 0$$

จะได้

$$r = \frac{A}{\int \frac{dA}{v}} \quad (6-6.1)$$

หรือ

$$\bar{y} = R - \frac{A}{\int \frac{dA}{v}} \quad (6-6.2)$$

เมื่อ R คือรัศมีมีความโค้งดั้งเดิมของเส้นศูนย์กลางก่อนที่จะถูกตัด

สมการ (4) ใช้หาความเค้นในทอมของโมเมนต์ดัด ส่วนที่อยู่ในเครื่องหมายอินทิกรัลสามารถเขียนออกมาในรูปที่ง่าย ๆ คือ

$$\int \frac{y^2 dA}{r-y} = \left(y - \frac{ry}{r-y} \right) dA = - \int y dA + r \int \frac{y dA}{r-y} \quad (5)$$

อินทิกรัลแรกทางด้านขวามือของสมการ(5)เป็นโมเมนต์ของพื้นที่หน้าตัดรอบแกนสะเทิน และทอมที่ 2 จะเห็นได้จากสมการ(3)ว่ามีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$\frac{y^2 dA}{r-y} = - \left[A(-\bar{y}) \right] = A\bar{y} \quad (6)$$

สมการ(4)จะกลายเป็น

$$\frac{E(\Delta d\phi)}{d\phi} = \frac{M}{A\bar{y}}$$

แทนค่าลงไปในสมการ(2)จะได้

$$\sigma = \frac{My}{A\bar{y}(r-y)} \quad (7)$$

ความเค้นที่ผิวนอกสุดจะเป็นความเค้นสูงสุดและมีค่าเป็น

$$\sigma_{\max} = \frac{Mh_1}{A\bar{y}a} \quad \text{และ} \quad \sigma_{\min} = \frac{Mh_2}{A\bar{y}c} \quad (6-6.3)$$

เมื่อ h_1 และ h_2 เป็นระยะทางจากแกนสะเทินถึงผิวนอกสุด a และ c เป็นรัศมีภายในและภายนอกของคานโค้งตามลำดับ

เนื่องจากกรณีทั่วไปแล้วคานโค้งจะรับแรงในแนวขวางกระทำในระนาบสมมาตรของคาน ซึ่งเราสามารถแปลงเป็นแรงคู่ควบกับแรง ๆ หนึ่งกระทำที่จุดศูนย์กลางของพื้นที่หน้าตัด ความเค้นจากโมเมนต์คู่ควบจะสามารถหาตามวิธีที่เพิ่งจะพิจารณาผ่านมา ส่วนแรงนั้นเราสามารถแยกออกเป็น 2 องค์ประกอบคือแรงในแนวแกน N ซึ่งมีทิศทางตั้งฉากกับพื้นที่หน้าตัดของคานและแรงเฉือน V มีทิศทางขนานกับพื้นที่หน้าตัดของคาน แรงในแนวแกน N จะทำให้เกิดความเค้นดึงหรือความเค้นอัดแผ่กระจายอย่างสม่ำเสมอตลอดทั้งพื้นที่หน้าตัด มีขนาดเป็น N/A เมื่อต้องการหาความเค้นตั้งฉากรวมก็รวมแบบพีชคณิตธรรมดา ส่วนแรงเฉือน V จะทำให้เกิดความเค้นเฉือน และการแผ่กระจายความเค้นเฉือนจะสามารถหาได้เหมือนกับคานตรงธรรมดา

ตัวอย่าง 6-6.1 จงหาค่าเป็นตัวเลขของอัตราส่วน $\sigma_{\max} / \sigma_{\min}$ สำหรับกรณีของคานโค้งที่มีหน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งถูกกระทำด้วยการดัดเพียงอย่างเดียว ถ้า $R = 150 \text{ mm}$ และ $h = 100 \text{ mm}$

วิธีทำ จากสมการ(6-6.3)

$$\sigma_{\max} / \sigma_{\min} = (h_1 c) / (h_2 a) \quad (8)$$

เมื่อ $h_1 = h/2 - \bar{y}$ และ $h_2 = h/2 + \bar{y}$ (ดูรูปที่ 6-6.1(2)) การคำนวณหา $\bar{y}$ เราใช้สมการ (6-6.2) ซึ่ง

$$\int \frac{dA}{v} = \int_a^c \frac{bdv}{v} = b \ln(c/a) = b \ln(200/100) = 0.693 b$$

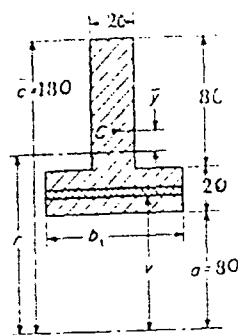
ดังนั้น

$$\bar{y} = R - \frac{bh}{0.693b} = 150 - 144.3 = 5.7 \text{ mm}$$

ดังนั้น $h_1 = 50 - 5.7 = 44.3 \text{ mm}$ และ $h_2 = 50 + 5.7 = 55.7 \text{ mm}$ จากค่าของ h_1 และ h_2 สมการ(8)จะกลายเป็น

$$\sigma_{\min} / \sigma_{\max} = 44.3 \times 200 / (55.7 \times 100) = 1.59$$

ตัวอย่างที่ 6-6.2 คานโค้งซึ่งมีเส้นศูนย์กลางเป็นวงกลมมีหน้าตัดเป็นรูปตัว T กลับหัว ดังแสดงไว้ในรูป E6-6.2 และถูกกระทำด้วย Pure Bending ในระนาบที่สมมาตรของคาน จงหาขนาด b_1 ที่จะทำให้ความเค้นดึงและความเค้นอัดที่ผิวนอกสุดของคานมีค่าเท่ากัน



รูป E 6-6.2

วิธีทำ เนื่องจากต้องการให้ $|\sigma_{\max}| = |\sigma_{\min}|$, จากสมการ(6-6.3)จะได้

$$h_1 / a = h_2 / c$$

ซึ่งจะได้

$$h_1 / h_2 = a / c = 80 / 180$$

เนื่องจาก $h_1 + h_2 = 100 \text{ mm}$ ซึ่งจะได้ $h_1 = 30.8 \text{ mm}$, $h_2 = 69.2 \text{ mm}$ จากอัตราส่วนทั้ง 2 นี้ จะหาตำแหน่งของแกนสะเทินของหน้าตัดได้ และรัศมีของแกนสะเทิน $r = a + h_1 = 80 + 30.8 = 110.8 \text{ mm}$ รัศมีของแกนสะเทินจะหาจากสมการ(6-6.1)ได้อีกด้วย คือ

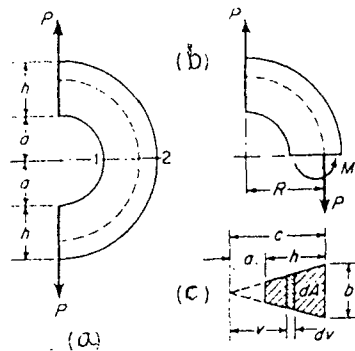
$$\int \frac{dA}{v} = \int_{80}^{100} \frac{b_1 dv}{v} + \int_{100}^{180} \frac{20 dv}{v} = b_1 \ln (100/80) + 20 \ln (180/100) = 0.223b_1 + 11.76$$

ดังนั้น

$$r = \frac{A}{\int \frac{dA}{v}} = \frac{20b_1 + (80)(20)}{0.223b_1 + 11.76} = 110.8 \text{ mm}$$

ซึ่งจะได้ $b_1 = 63.06 \text{ mm}$

ตัวอย่างที่ 6-6.3 คานโค้งครึ่งวงกลมถูกภาระกระทำดังแสดงไว้ในรูป E6-6.3a และมีหน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ดังแสดงไว้ในรูป E6-6.3c จงคำนวณหาความเค้นดึง ที่จุด 1 ถ้า $a = b = h = 20 \text{ mm}$ และ $P = 5000 \text{ N}$



รูป E6-6.3

วิธีทำ พิจารณาคานส่วนที่อยู่เหนือหน้าตัด 1-2 (ดูรูป E6-6.3b) เราจะได้เห็นว่าแรงลัพธ์ของความเค้นบนหน้าตัดนี้ประกอบด้วยแรง P กระทำที่เส้นทแยงของหน้าตัด และโมเมนต์ดัด $M = PR$ เมื่อ R คือรัศมีของแกนเส้นทแยง ความเค้นที่ผิวนอกสุดตรงจุด 1 เนื่องจากโมเมนต์ดัด M จะหาได้จากเทอมแรกของสมการ(6-6.3) และความเค้นที่เกิดจากแรง P คือ P/A ดังนั้นความเค้นรวมทั้งหมดที่จุด 1 คือ

$$\sigma_1 = PR h_1 / (A \bar{y}_a) + P/A \quad (9)$$

จากหน้าตัดที่กำหนดให้ (ดูรูป E6-6.3c) เราจะได้

$$A = \frac{b + b/2}{2} h = \frac{3}{4} bh = 300 \text{ mm}^2$$

$$R = \frac{\int_A v dA}{A} = \frac{\frac{b}{c} \int_a^c v^2 dv}{\frac{3}{4}bh} = \frac{4(c^3 - a^3)}{9ch} = 31.11 \text{ mm}$$

$$\int_A \frac{dA}{v} = \frac{b}{c} \int_a^c dv = (b/c)(c - a) = 10 \text{ mm}$$

$$\bar{y} = R - \frac{A}{\int \frac{dA}{v}} = 31.11 - \frac{(3/4)(20)(20)}{10} = 1.11 \text{ mm}$$

$$h_1 = R - a - \bar{y} = 31.11 - 20 - 1.11 = 10 \text{ mm}$$

แทนค่าตัวเลขเหล่านี้ลงในสมการ(9) จะได้

$$\sigma_1 = \frac{(5000)(31.11)(10)}{(300)(1.11)(20)} + \frac{5000}{300} = 250 \text{ mm}^2$$

แบบฝึกหัด 6-6

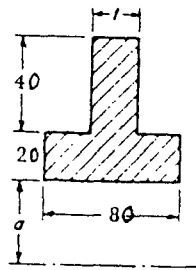
1. จงหาค่าเป็นตัวเลขของ $\sigma_{\max} / \sigma_{\min}$ สำหรับกรณีเกิดการดัดอย่างเดียวยของคานโค้งที่มีหน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $25 \times 25 \text{ mm}$ ถ้ารัศมีความโค้งของแกนเส้นทรวงอยด์คือ $R = 37.5 \text{ mm}$ (ตอบ $\sigma_{\max} / \sigma_{\min} = 1.59$)

2. จงหาค่าเป็นตัวเลขของอัตราส่วน $\sigma_{\max} / \sigma_{\min}$ สำหรับกรณีของคานโค้งซึ่งมีหน้าตัดเป็นวงกลมตัน รับการดัดอย่างเดียวย ถ้า $R = 120 \text{ mm}$ และเส้นผ่าศูนย์กลาง d ของหน้าตัดเท่ากับ 100 mm (ตอบ $\sigma_{\max} / \sigma_{\min} = 1.97$)

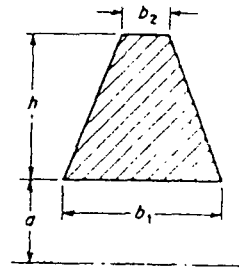
3. คานโค้งอันหนึ่งมีเส้นศูนย์กลางเป็นวงกลม มีหน้าตัดเป็นรูปตัว T ดังแสดงไว้ในรูป และถูกกระทำด้วยการดัดอย่างเดียวยในระนาบสมมาตรของมัน รัศมีความโค้งของผิวด้านเว้าคือ $a = 60 \text{ mm}$ มิติต่างๆของหน้าตัดถูกกำหนดไว้ตายตัวดังแสดงไว้ในรูป ยกเว้นความหนา t จงหาค่าที่ถูกต้องของความหนา t เพื่อที่จะทำให้ความเค้นในการดัดที่ผิวนอกสุดของคานมีค่าเท่ากับทั้ง2ด้าน (ตอบ $t = 31.8 \text{ mm}$)

4. คานโค้งซึ่งมีเส้นศูนย์กลางเป็นวงกลมอันหนึ่งมีหน้าตัดเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูดังแสดงไว้ในรูป และถูกกระทำด้วยPure Bendingในระนาบสมมาตรของคาน ผิวด้าน b_1 เป็นด้านเว้า

ของคาน ถ้า $b_1 = 100 \text{ mm}$, $h = 100 \text{ mm}$, และ $a = 100 \text{ mm}$ จงหาค่าที่ถูกต้องของ b_2 ที่จะทำให้ความเค้นในผิวนอกสุดของคานด้านที่เกิดการดึงและการอัดมีค่าเป็นตัวเลขเท่ากัน (ตอบ $b_2 = 16.2 \text{ mm}$)

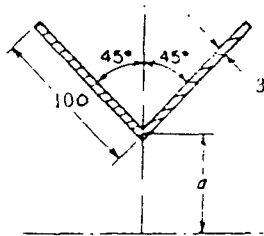


P3

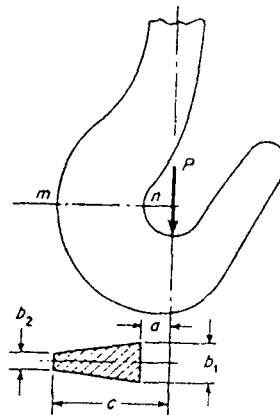


P4

5. วงแหวนรูปวงกลมมีหน้าตัดเป็นรูปตัว V ดังแสดงไว้ในรูป ซึ่งเป็นเหล็กฉากขนาด L 100x100x3 mm โมเมนต์ดัดที่อนุญาตให้กระทำกับวงแหวนมีค่าเป็นเท่าใด ถ้าความเค้นอัดที่ผิวนอกสุดของLegs มีค่าไม่เกิน 112.5 N/mm^2 และ $a = 75 \text{ mm}$ (ตอบ $M = 944 \text{ N.m}$)



P5



P6

6. Hook ของ Crane ทำด้วยเหล็กกล้า รับภาระ $P = 20 \text{ kN}$ ดังแสดงไว้ในรูป หน้าตัด mn ของ Hook เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ดังแสดงไว้ในรูป จงหาความเค้นรวม และ ที่จุด m และ n ตามลำดับ กำหนดข้อมูลเป็นตัวเลขให้ ดังต่อไปนี้ $b_1 = 40 \text{ mm}$, $b_2 = 10 \text{ mm}$, $a = 30 \text{ mm}$, และ $c = 120 \text{ mm}$ (ตอบ $\sigma_m = -26.4 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_n = 70.4 \text{ N/mm}^2$)

7. ห่วงกลมกลวง(Torus)รูปวงกลมซึ่งมีรัศมีเฉลี่ย R มีหน้าตัดเป็นรูปวงกลมผ้นบางซึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางเฉลี่ย d จงหารัศมี r ของแกนสะเก็นสำหรับกรณีเฉพาะ เมื่อ $R = d$ (ตอบ $r = 0.866 d$)

สัปดาห์ที่ 2

หัวข้อเรื่อง คานซึ่งไม่สามารถแก้ปัญหาได้ด้วยหลักสถิติศาสตร์ (1)

(3 ชั่วโมง)

ความคิดรวบยอด

1. คานซึ่งไม่สามารถแก้ปัญหาได้ด้วยหลักสถิติศาสตร์คือคานซึ่งมีจุดรองรับมากเกินไป จนสมการสมดุลไม่เพียงพอที่จะหาแรงปฏิกิริยาได้ครบทั้งหมด จึงต้องหาสมการจากการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง คือ สมการของระยะแอ่นมาเพิ่ม เพื่อให้เพียงพอในการแก้สมการหาค่าของแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับได้ทั้งหมด
2. เมื่อได้แรงปฏิกิริยาครบทั้งหมดแล้ว จะสามารถคำนวณหา แรงเฉือน, โมเมนต์ดัด, ความเค้น และระยะแอ่น ได้ด้วยวิธีเดียวกันกับคานซึ่งสามารถแก้ปัญหาได้ด้วยหลักสถิติศาสตร์ธรรมดา

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. คำนวณหาแรงปฏิกิริยาและระยะแอ่นด้วยวิธี superposition ได้
2. คำนวณหาแรงปฏิกิริยาและระยะแอ่นด้วยวิธีทฤษฎี 3 โมเมนต์ได้

สังเขปเนื้อหา

หน่วยที่ 2. คานซึ่งไม่สามารถแก้ปัญหาได้ด้วยหลักสถิติศาสตร์

- วิธี superposition
- ทฤษฎี 3 โมเมนต์

หน่วยที่ 2 คานซึ่งไม่สามารถแก้ปัญหได้ด้วยหลักสถิตศาสตร์

9-1 วิธี Superposition

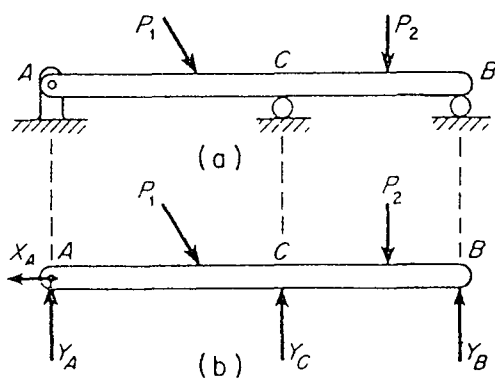
ในรูป 9-1.1 คาน AB มีสลักใส่ไว้ตรงปลาย A มีลูกกลิ้งรองรับที่ E และ C ภาระที่กระทำบนคาน P_1, P_2 กระทำในระนาบสมมาตรของคาน ภาระเหล่านี้จะทำให้มีแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับทุกอัน จากไดอะแกรมวัตถุอิสระของคานที่แสดงไว้ในรูป 9-1.1b. แรงปฏิกิริยาที่ B และ C คือ Y_B และ Y_C ทั้งสองต้องอยู่ในแนวตั้ง เพราะลูกกลิ้งรับแรงในแนวนอนไม่ได้ ส่วนแรงปฏิกิริยาที่ A ซึ่งเรายังไม่ทราบทิศทางก็แตกให้ไปอยู่ในแนวตั้ง และแนวนอนเป็น X_A และ Y_A

จากสมการสมดุลของ free-body ระบบแรงในระนาบจะมีสมการสมดุลอยู่สามสมการ คือ

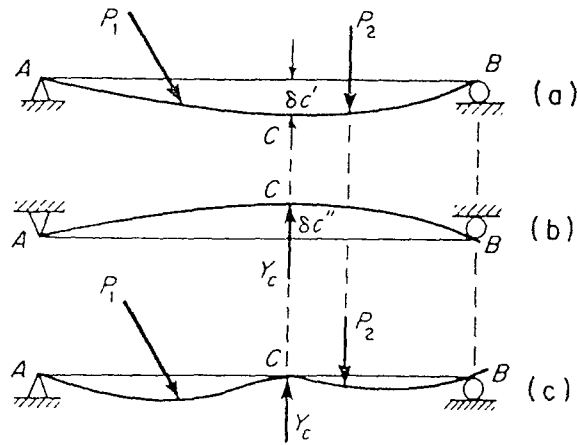
$$\sum X_i = 0 \quad \sum Y_i = 0 \quad \sum M_i = 0 \quad (1)$$

เรามีตัวไม่ทราบค่าถึง 4 ตัว แต่มีสมการสมดุลอยู่สามสมการ ดังนั้นเราจะแก้สมการหาตัวไม่ทราบค่าเหล่านี้ไม่ได้ คานที่มีตัวไม่ทราบค่าเกินกว่าสมการสมดุล เราเรียกว่า “คานที่ไม่สามารถแก้ปัญหทางสถิตศาสตร์ได้” เราจะใช้สมการสมดุลเพื่อหาแรงปฏิกิริยาเหล่านี้ยังไม่พอ ต้องใช้คุณสมบัติทางด้านความยืดหยุ่นเข้ามาช่วยจึงจะหาได้

ถ้าเราเอาลูกกลิ้งตรง C ออกไปก็จะเหลือคาน AB มีฐานรองรับที่ปลายทั้งสองข้าง ตอนนี้คานจะยังคงรับน้ำหนักได้ เราเรียกฐาน C ว่าจุดรองรับส่วนเกิน ในทำนองเดียวกันถ้าเราเอาฐาน B ออกไปคานก็ยังคงอยู่ในภาวะสมดุลอยู่ B ก็จะเป็นจุดรองรับส่วนเกิน แต่ถ้าเราเอาฐาน A ออกไปคานจะไม่สมดุล เพราะมันจะวิ่งไปเลย เนื่องจากแรงย่อยในแนวนอนของ P_1 และเนื่องจากลูกกลิ้งไม่รับแรงในแนวนอนด้วย แบบนี้เราไม่เรียกว่า A เป็นจุดรองรับส่วนเกิน นั่นคือ ฐานใดที่ปลดออกจากโครงสร้างโดยที่โครงสร้างนั้นยังคงอยู่ในภาวะสมดุลอยู่ได้ เราจะเรียกฐานนั้นว่าเป็นจุดรองรับส่วนเกิน



รูป 9-1.1

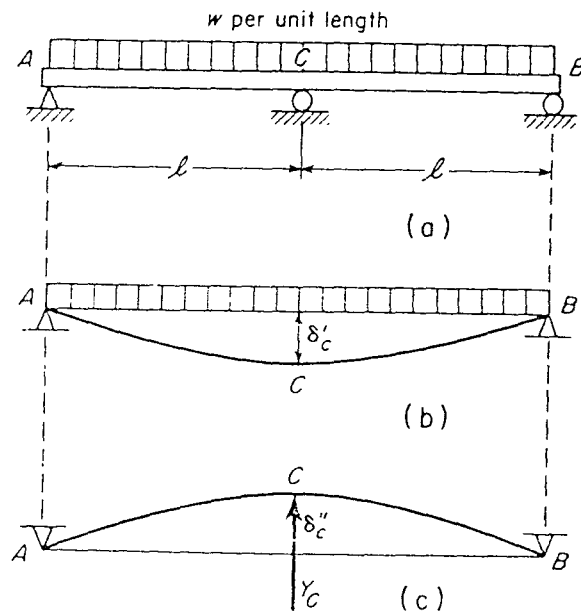


รูป 9-1.2

ถ้าเราเลือก C เป็นจุดรองรับส่วนเกิน กานที่ปลด C ออกไปแล้วนี้เรียกว่าระบบปฐมภูมิ ในรูป 9-1.2 เราแยกพิจารณาเส้นโค้งการแอ่นตัวของคานเป็นสองกรณี ในรูป 9-1.2a หากระยะเยื้อง δ'_c (แอ่นลง) ของจุด C เนื่องจากน้ำหนักบรรทุกทุก P_1 และ P_2 ตอนนี้เราคิดว่าเอาลูกกลิ้งออกไปแล้ว คราวนี้เอาใหม่ ดูรูป 9-1.2b ถ้าเราเอาภาระออกไปแล้ว เอาแรงปฏิกิริยาที่จุด C คือ Y_c มากระทำตรงจุด C ได้ระยะเยื้อง δ''_c (โก่งขึ้น) ค่าระยะเยื้อง ทั้งสองนี้เราหาได้ง่าย ๆ โดยวิธีในบทที่ 8 วิธีไหนก็ได้ เนื่องจากจริงๆ เราไม่ได้เอาจุด C ออกไป สมมติว่าจุด C สูงขึ้น หรือทรุดลง δ_c เราจะได้ว่า $\delta_c = \delta'_c - \delta''_c$ แต่ถ้าฐาน C ไม่มีการเปลี่ยนระดับเลยหรือ $\delta_c = 0$ เราจะได้ว่า

$$\delta'_c - \delta''_c = 0 \quad (2)$$

เนื่องจากเราหา δ'_c ออกมาในเทอมของ P_1, P_2 และ δ''_c อยู่ในเทอมของ Y_c ดังนั้นเราก็จะแก้สมการ (2) หา Y_c ออกมาได้ แทนค่า Y_c ลงในสมการสมดุลหรือสมการ (1) ก็จะหา X_A, Y_A และ Y_B ได้ง่ายมาก



รูป 9-1.3

ดูตัวอย่างในรูป 9-1.3 ถ้าเราให้ฐาน C เป็นจุดรองรับส่วนเกินกาน AB ก็จะเป็นระบบปฐมภูมิของเรา กานมีช่วงยาว $2l$ มีการสม่ำเสมอ หาระยะเยื้องของ C ว่าเอนลงไปเท่าใด จากกรณีที่ 8 ในตาราง 8.1 เราจะได้ว่า

$$\delta'_c = \frac{500(2l)^4}{384EI} = \frac{500l^4}{24EI}$$

ในทำนองเดียวกันเมื่อมีแรง Y_c กระทำที่จุด C จากกรณีที่ 6 ในตาราง 8.1 เราหาระยะเอนขึ้นได้

$$\delta''_c = \frac{Y_c(2l)^3}{48EI} = \frac{Y_cl^3}{6EI}$$

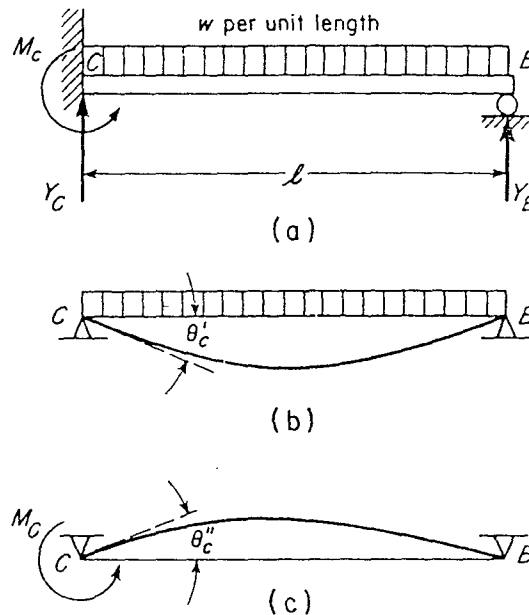
เนื่องจากฐาน C ไม่มีการทรุดตัวหรือ $\delta'_c - \delta''_c = 0$ ตามเงื่อนไข (2)

$$\frac{5wl^4}{24EI} - \frac{Y_cl^3}{6EI} = 0$$

แก้สมการได้

$$Y_c = \frac{5}{4}wl$$

พอหา Y_c ได้แล้วให้ใช้สมการสมดุลหาแรงปฏิกิริยาของฐาน A และ B ได้ $Y_A = Y_B = \frac{3}{8}wl$



รูป 9-1.4

ตัวอย่างที่ผ่านมานี้อาจจะเกิดอีกวิธีหนึ่ง ที่จุด C จะเห็นว่าที่ตรงนี้เส้นสัมผัสกับเส้นความยืดหยุ่นจะขนานกับแนวนอน เนื่องจากความสมมาตรของภาระ และตัวกานเอง เราสามารถพิจารณาเพียงครึ่งเดียวได้ โดยคิดว่าเป็นกานชนิดปลายฝัง โดยปลาย C ฝังติดกับผนังแล้วมีฐานรองรับตรงปลายขวาดังรูป 9-1.4 เราเรียกกานแบบนี้ว่า "Propped cantilever" เราพิจารณาในช่วง BC เท่านั้น เมื่อ

ความแอ่นโค้งเนื่องมาจากน้ำหนักที่บรรทุกอยู่จะมีโมเมนต์ M_c ที่จุด C บิดด้านมิให้เส้นสัมผัสที่ C หมุนไป ถ้าให้โมเมนต์นี้เป็น จูรรองรับส่วนเกิน เราจะได้คาน CB เป็น ระบบปจุมภูมิ ภาระจะทำให้เส้นสัมผัสที่ C บิดไปเป็นมุม θ'_c (ดูรูป 9-1.4c) และถ้ามีโมเมนต์ M_c กระทำที่ปลาย C ก็จะทำให้ปลาย C บิดไปในทิศทางตรงข้ามกับ θ'_c สมมติว่าเป็น θ''_c (ดูรูป 9-1.4c) แต่ปลาย C ไม่บิดหรือ $\theta'_c - \theta''_c = 0$ จากกรณีที่ 8 ในตาราง 8.1 จะได้ว่า

$$\theta'_c = \frac{wl^3}{24EI}$$

และจากกรณีที่ 9 ในตาราง 8.1 ได้

$$\theta''_c = \frac{M_c l}{3EI}$$

แทนค่าลงในสมการ $\theta'_c - \theta''_c = 0$ ได้

$$M_c = \frac{wl^2}{8} \quad (3)$$

การที่ได้เครื่องหมายของโมเมนต์ออกมาเป็นบวกนั้น แสดงว่าที่เราสมมติทิศทางของโมเมนต์ในรูป นั้นถูกต้อง จากข้อกำหนดเกี่ยวกับเครื่องหมายของโมเมนต์คัต แสดงว่าที่ปลาย C มีโมเมนต์เป็นลบ กลับไปดูรูป 9-1.4a ผลรวมของโมเมนต์ของแรงทุกแรงรอบจุด C จะได้

$$Y_B l - \frac{wl^2}{2} + M_C = 0$$

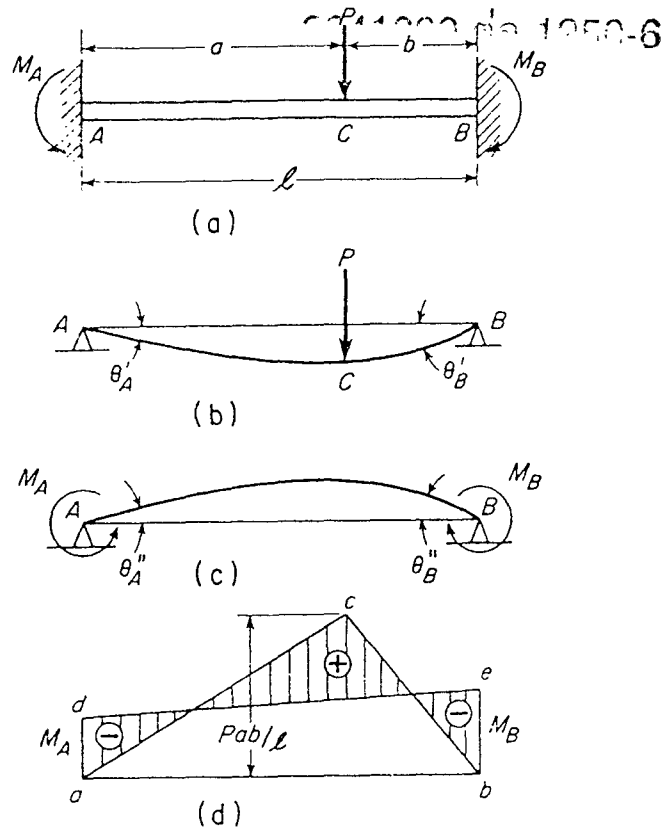
แทนค่า M_C จากสมการ (3) จะได้

$$Y_B = \frac{3}{8} wl$$

ซึ่งเหมือนกับที่เราหามาได้ในวิธีแรก

คราวนี้ลองมาพิจารณารูป 9-1.5 คูบัวง คานที่ปลายทั้งสองตรง A และ B ต่างตั้งแน่นกับผนังที่จุด C มีแรงกระทำเท่ากับ P ถ้าให้โมเมนต์ตรงปลายทั้งสองเป็น จูรรองรับส่วนเกิน ตอนแรกคิดว่าเป็นคานธรรมดา ค่อยไปค่อยเอา จูรรองรับส่วนเกิน M_A และ M_B ใส่ที่ปลายคาน รูป 9.5b เป็นระบบปจุมภูมิ จากกรณีที่ 7 ในตาราง 8.1 หามุมที่ปลายทั้งสองได้

$$\theta'_A = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6EI} \quad \text{และ} \quad \theta'_B = \frac{Pab(2l - b)}{6EI}$$



รูป 9-1.5

จากรูป 9-1.5 c มีโมเมนต์ M_A และ M_B กระทำที่ปลายทั้งสองหามุมที่ปลายทั้งสองหมุนไปโดยใช้กรณีที่ 9 ในตาราง 8.1

$$\theta''_A = \frac{M_A l}{3EI} + \frac{M_B l}{6EI} \quad \text{และ} \quad \theta''_B = \frac{M_B l}{3EI} + \frac{M_A l}{6EI}$$

แต่ที่ปลายทั้งสองตรงแนบกับผนังจึงไม่มีการหมุนเด็ดขาด เราจะได้ว่า $\theta'_A - \theta''_A = 0$ และ $\theta'_B - \theta''_B = 0$ แทนค่ามุมลงไปในสมการเงื่อนไขทั้งสองนี้

$$\frac{Pb(l^2 - b^2)}{6EI} - \frac{M_A l}{3EI} - \frac{M_B l}{6EI} = 0$$

$$\frac{Pab(2l - b)}{6EI} - \frac{M_B l}{3EI} - \frac{M_A l}{6EI} = 0$$

แก้สมการทั้งสองหาค่า M_A และ M_B ได้

$$M_A = \frac{Pab^2}{l^2} \quad M_B = \frac{Pa^2b}{l^2} \quad (4)$$

เมื่อทราบค่าโมเมนต์ M_A และ M_B ที่ปลายทั้งสองแล้ว เราแยกโมเมนต์ไดอะแกรมเป็นส่วน ๆ ไปแล้วรวมเข้าด้วยกันที่หลังดังรูป 9-1.5 สามเหลี่ยม acb เป็นโมเมนต์บวกจากน้ำหนักบรรทุก P ส่วนสี่เหลี่ยม

กางหนู abdc เป็นโมเมนต์ลบเนื่องจากโมเมนต์ตรงปลายคาน ส่วนที่ทับกันอยู่ก็จะหักล้างกันไปเอง ส่วนที่เหลือ (ตามที่เรานำเอาไว้) ก็จะเป็นโมเมนต์โคจรตามต้องการ

สมมติว่า $b < a$ โมเมนต์ลบ M_B จะมีค่ามากที่สุด ถ้าดูตามสมการที่สองในสมการ (4) ค่าสูงสุดจะได้เมื่อ $b = l/3$ ซึ่ง $|M_B|_{\max} = 4Pl/27$ ส่วนโมเมนต์บวกตรงจุดที่ P กระทำอยู่ (ตามรูป 9-1.5 d) จะมีค่าเท่ากับ

$$M_C = \frac{Pab}{l} - \frac{M_A + M_B}{2} = \frac{Pab}{2l}$$

ซึ่งโมเมนต์นี้จะมีค่าสูงสุด เมื่อ $a = b = l/2$ ได้ $|M_C|_{\max} = Pl/8$ แต่ก็ยังคงน้อยกว่า $|M_B|_{\max}$ อยู่แน่นอน

EXAMPLE 1. Two wood beams cut from the same timber are arranged as shown in Fig. 9.6a, the free end of the cantilever DC being supported at the middle of the simple beam AB . Both beams are horizontal and at right angles to one another. Find the vertical deflection δ_c at the point of contact due to a vertical load P applied to the end of the cantilever as shown.

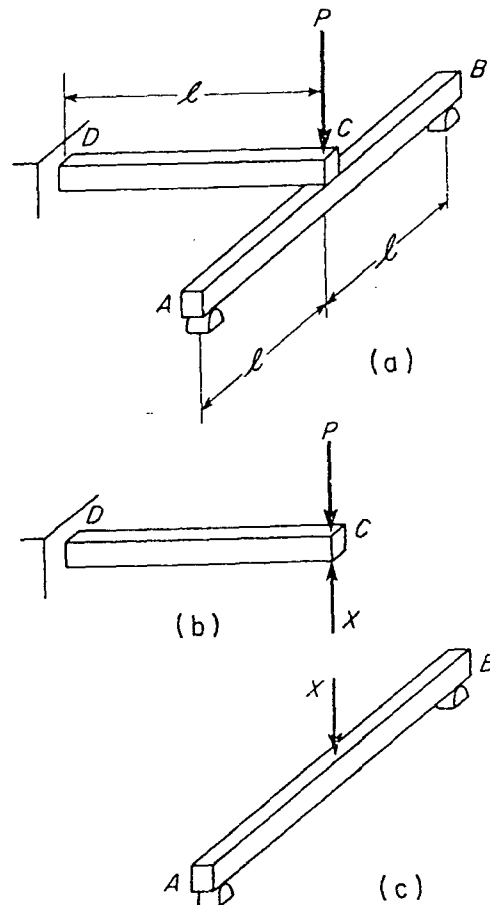


FIG. 9.6

SOLUTION. Let X represent the magnitude of the force with which the two beams interact as the point of contact. Then the cantilever has a net load $P - X$ at its end, Fig. 9.6b, and the deflection of this point, from Case 1 of Table 8.1, becomes

$$\delta'_c = \frac{(P - X)l^3}{3EI}.$$

At the same time the mid-point of the beam AB is subjected to a downward force X and deflects by the amount

$$\delta''_c = \frac{X(2l)^3}{48EI},$$

by Case 6 of Table 8.1. Since these two deflections must be equal, we obtain

$$\frac{P}{3} - \frac{X}{3} = \frac{X}{6},$$

from which

$$X = \frac{2}{3}P.$$

Substituting this back into either of the deflection expressions gives

$$\delta'_c = \delta''_c = \delta_c = \frac{Pl^3}{9EI}.$$

This assumes, of course, that there was contact but no pressure between the two beams at C prior to the application of the load P .

EXAMPLE 2. A cantilever beam ABC is built-in at A , propped at B , and carries a load P at the free end as shown in Fig. 9.7. Find the magnitude of the redundant reaction at B .

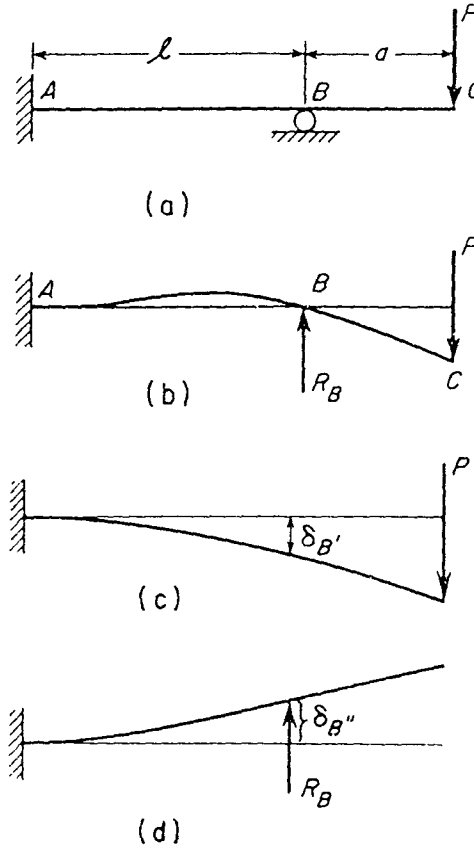


FIG. 9.7

SOLUTION. Replacing the support at B by the reactive force R_B , we obtain as our primary system, the cantilever beam AC loaded at B and C as shown in Fig. 9.7b. From Case 1 of Table 8.1, the downward deflection of point B due to the load P is

$$\delta'_B = \frac{Pl^2}{6EI} [3(l + a) - l].$$

Likewise, from Case 1, the upward deflection of point B due to the force R_B is

$$\delta''_B = \frac{R_B l^3}{3EI}.$$

Since the net deflection $\delta'_B - \delta''_B = 0$, we obtain

$$\frac{Pl^2}{6EI} (2l + 3a) - \frac{R_B l^3}{3EI} = 0,$$

from which

$$R_B = P \left(1 + \frac{3a}{2l} \right).$$

Using this value for R_B , we find for the positive bending moment at the built-in end of the beam

$$M_A = R_B l - P(a + l) = \frac{Pa}{2}.$$

PROBLEMSET 9.1

1. Find the redundant reaction R_B for the beam AB uniformly loaded as shown in Fig. A by taking the cantilever built-in at A and free at B as the primary system. *Ans.* $R_B = \frac{3}{8}wl$.

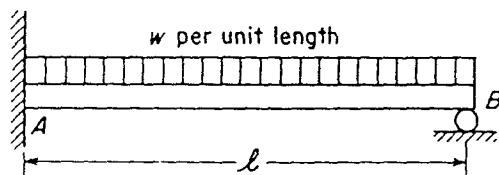


FIG. A

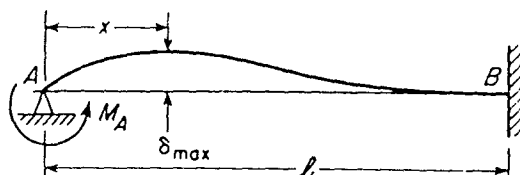


FIG. B

2. A propped cantilever beam is subjected to the action of a couple of moment M_A at the end A as shown in Fig. B. What reactive moment M_B will be induced at the built-in end B ? *Ans.* $M_B = M_A/2$.

3. Referring again to the propped cantilever beam in Fig. B, find the maximum deflection produced by the applied couple M_A . *Ans.* $\delta_{\max} = M_A l^2 / 27EI$ at $x = l/3$.

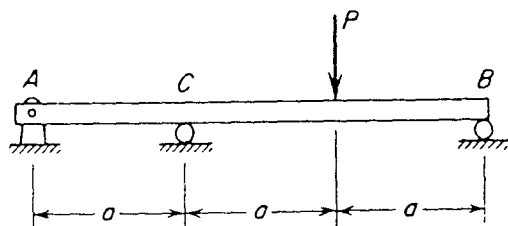


FIG. C

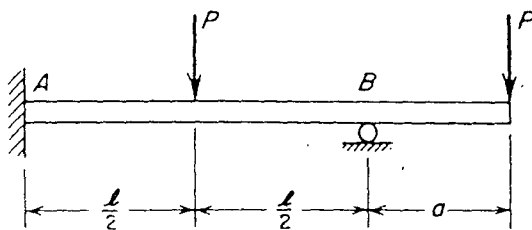


FIG. D

4. Find the redundant reaction R_A at the support A of the statically indeterminate beam supported and loaded as shown in Fig. C. *Ans.* $R_A = P/4$.

5. Find the redundant moment M_A at the built-in end A of the statically indeterminate beam supported and loaded as shown in Fig. D. *Ans.* $M_A = P(8a - 3l)/16$.

6. Find the redundant reaction R_A at the support A of the statically indeterminate beam supported and loaded as shown in Fig. E. The beam is continuous at C and its flexural rigidity is constant throughout. *Ans.* $R_A = 3Pa/2l$.

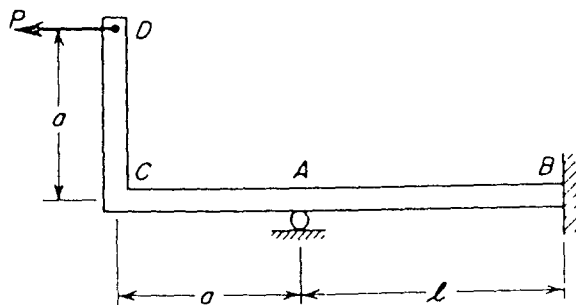


FIG. E

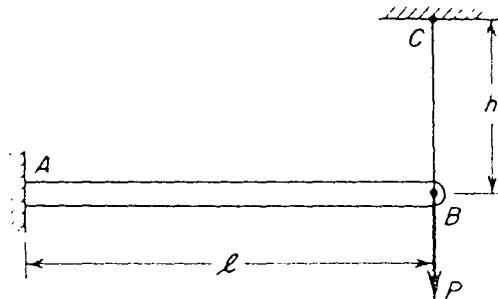


FIG. F

7. A cantilever steel beam AB is built-in at A and supported at B by a vertical steel tie-rod BC as shown in Fig. F. Before the load P is applied at B , the tie-rod is just taut but without initial tension. Find the tension S in the tie-rod after the load P is applied at B . The beam has flexural rigidity EI and the tie-rod has tensile rigidity AE . *Ans.*

$$S = \frac{P}{1 + (3hI/A^3)}.$$

8. Referring again to Fig. F, assume that the load P at B is removed and that the system is free from stress at temperature $T = 21^\circ\text{C}$. Then if the temperature drops to -18°C , what tension S will exist in the vertical tie-rod? The beam has a rectangular cross-section 7.5 cm wide by 2.5 cm deep and the tie-rod has a circular cross-section of diameter $d = 0.5$ cm. The coefficient of thermal expansion for the tie-rod is $\alpha = 12(10)^{-6}$ cm/cm/ $^\circ\text{C}$, $E = 2(10)^6$ kg/cm 2 , for both beam and tie-rod, and $l = h = 25$ cm. *Ans.* $S = 35.5$ kg.

9. Referring to the system shown in Fig. 9.6a, assume that the concentrated force P at C is replaced by a uniformly distributed load of intensity w between D and C . In such case, find the force X transmitted from one beam to the other at C . Both beams have the same flexural rigidity EI . *Ans.* $X = wl/4$.

10. Find the reaction R_A at the support A of the continuous prismatic beam supported and loaded as shown in Fig. G. *Ans.* $R_A = P/4$, up.

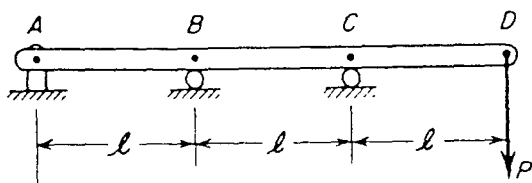


FIG. G

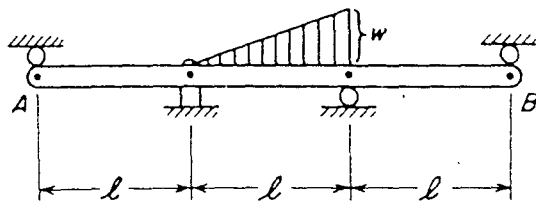


FIG. H

11. Find the reactions R_A and R_B at the two ends of the continuous prismatic beam supported and loaded as shown in Fig. H. *Ans.* $R_A = wl/45$; $R_B = wl/36$.

12. The continuous frame ABC shown in Fig. I is built-in at A , redundantly supported by a roller at C , and subjected to the action of a horizontal force P at B . Find the reaction R_C at C , neglecting axial extension of the vertical member AB . The flexural rigidity EI is constant throughout. *Ans.* $R_C = 3P/8$.

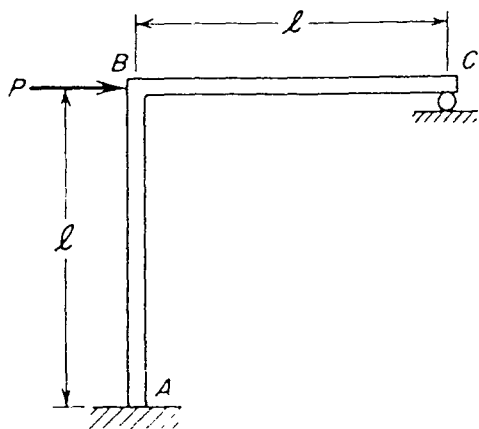


FIG. I

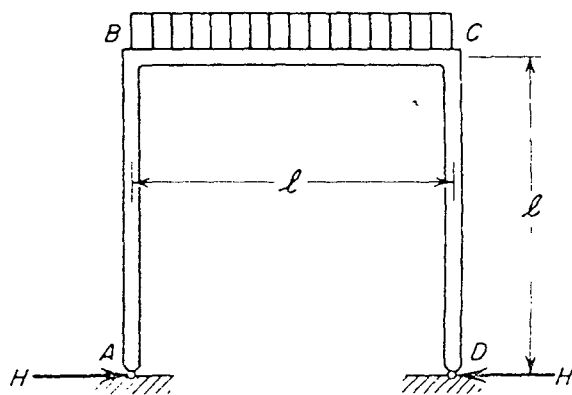


FIG. J

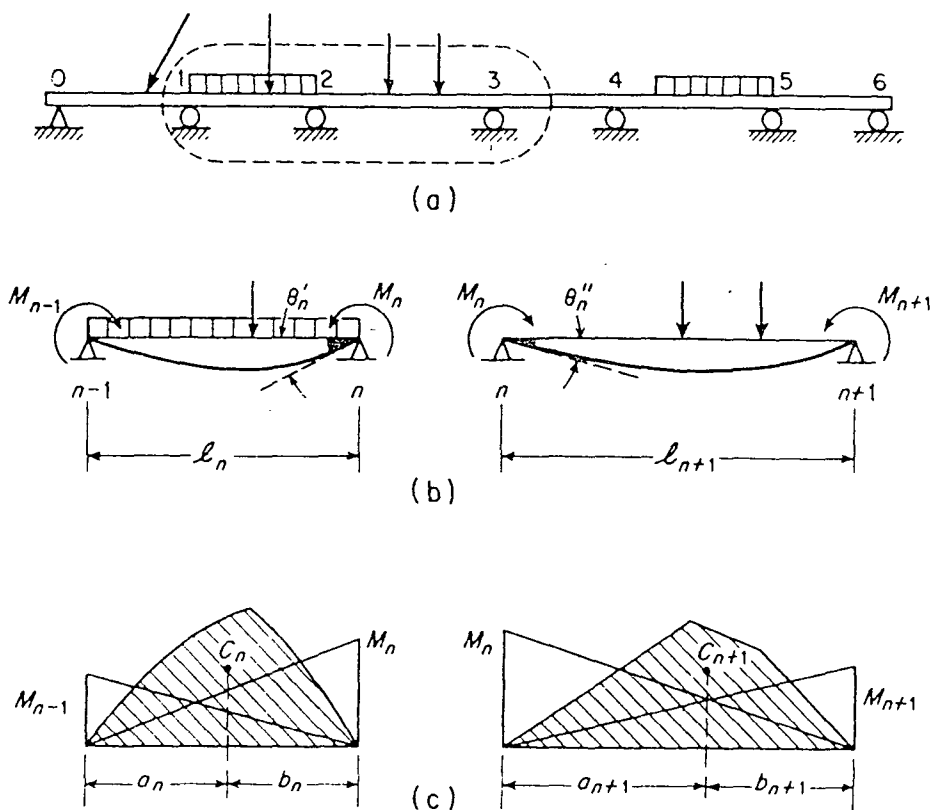
13. Solve the preceding problem if the concentrated force P at B in Fig. I is replaced by a uniformly distributed load of intensity w along the vertical member between A and B . *Ans.* $R_C = wl/8$.

14. The continuous frame $ABCD$ shown in Fig. J is pin-supported at the lower end of each leg and carries a uniformly distributed load of intensity w on the horizontal member BC . Each member has length l and flexural rigidity EI . Find the horizontal thrust H at each support. *Ans.* $H = wl/20$.

15. Referring to Fig. 9.6a, assume that the cantilever beam extends beyond C with an overhang of length a and that the load P is applied to the free end of this overhang as in Fig. 9.7a. In such case, find the force X transmitted to the lower beam AB at its mid-point C . Both beams have the same flexural rigidity EI . *Ans.* $X = P(2l + 3a)/3l$.

9-2 ทฤษฎี 3 โมเมนต์

ถ้าคานาสามเสาต่อเนื่องกันบนจุดรองรับหลาย ๆ ตัว (ดูรูป 9-2.1a) โดยสมมติว่าจุดรองรับหนึ่งถูกใส่สลักไว้ และจุดอื่น ๆ เป็นลูกกลิ้ง ถ้าเราให้แรงของจุดตรงช่วงกลางคานาเป็นจุดรองรับส่วนเกิน คานาที่แสดงในรูป 9-2.1 ก็จะเป็นคานาที่ไม่สามารถแก้ปัญหาลักษณะทางสถิตศาสตร์ได้ ที่มีอันดับหลาย ๆ อันดับ ตามจำนวนของจุดในช่วงกลางนั้น (เพราะว่าคานามีสมการสมดุลเพียงสามสมการ ฐานที่ถูกใส่สลัก จะรับไปสมการหนึ่งที่เหลืออีกสองสมการสำหรับจุดหัวท้าย) อย่างเช่นในรูป 9-2.1a เป็นคานาที่ไม่สามารถแก้ปัญหาลักษณะทางสถิตศาสตร์ได้ 5 อันดับ เลือก $R_1, R_2, \dots, R_5$ เป็น จุดรองรับส่วนเกินจากนั้นหาระยะเชิง $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_5$ ของแต่ละจุดจัดให้เท่ากับศูนย์ ได้สมการ 5 สมการรวมกับสมการสมดุลอีก 3 สมการ แก่สมการทั้ง 8 เพื่อหาตัวไม่ทราบค่า 8 ตัวได้ ที่ยุ่งยากมากที่สุดคือตอนหาสมการทั้ง 5 สมการจะเสียเวลามาก แต่เราจะแสดงวิธีง่าย ๆ โดยสมมติว่าตรงจุดที่อยู่ระหว่างกลางของปลายทั้งสองมีโมเมนต์ภายในเป็น $M_1, M_2, \dots, M_5$ เราสามารถแบ่งคานาออกเป็นคานาชนิดธรรมดารองรับอย่างง่าย 6 ตัว โดยจะมีน้ำหนักบรรทุกที่คานารับอยู่เดิมกับโมเมนต์ภายใน ซึ่งเป็นจุดรองรับส่วนเกินอยู่สองข้าง เอาคานาธรรมดาอย่างง่ายสองตัวมาเข้าคู่กันตามวิธีที่จะอธิบายต่อไป เราก็จะวิเคราะห์คานาชนิดนี้ได้ง่ายกว่าเดิมมาก



รูป 9-2.1

ในรูป 9-2.1b พิจารณาคานตรงจุดเลขที่ $n-1$, n และ $n+1$ ให้ I_n และ I_{n+1} เป็นความยาวของคานทั้งสองช่วง M_{n-1} , M_n และ M_{n+1} แทนโมเมนต์ ซึ่งเป็นจุดรองรับส่วนเกินภายในที่จุดทั้งสามไม่ว่าโมเมนต์จริง ๆ จะมีเครื่องหมายเป็นบวก หรือลบ เราก็จะสมมติให้เป็นบวกทั้งหมด เวลาคำนวณออกมาเครื่องหมายจะบอกเราเองว่าโมเมนต์นั้นเป็นบวก หรือลบ

ภาระต่าง ๆ ที่แสดงไว้ในรูป 9-2.1b จะทำให้เกิดโมเมนต์คัตในคาน I_n และ I_{n+1} ปลายคานจะบิดหมุนไป สมมติว่าที่จุด n คานหมุนไป θ'_n ที่ปลายซ้าย และที่ปลายขวาคานหมุนไป θ''_n เราให้เครื่องหมายของมุมที่บิดไปนี้เป็นบวก เมื่อทิศทางการหมุนเหมือนกับทิศทางของโมเมนต์ เนื่องจากคานนี้ต่อเนื่องกัน เส้นความยืดหยุ่นจะไม่มีการหักงอตรงจุด n แน่นนอน เราจะได้ว่า

$$\theta'_n = -\theta''_n \quad (1)$$

ผลลัพธ์ที่ได้นี้จะ เป็นกฎที่สำคัญที่จะใช้ในการหาสูตรต่อไป

หาค่า θ'_n และ θ''_n ในเทอมของโมเมนต์และน้ำหนัก และโมเมนต์ภายในปลายคาน โดยหาแยกกัน ใช้ทฤษฎีเรื่อง วิธี moment area ตามที่อธิบายในหัวข้อ 8-2 ในรูป 9-2.1c โค้ดอะแกรมของโมเมนต์คัตจะเป็นรูปสามเหลี่ยม ส่วนของภาระแสดงเป็นรูปที่เรงา เอาไว้สมมติว่าพื้นที่นี้เป็น A_n และ A_{n+1} ตามลำดับ จุดศูนย์กลางของพื้นที่อยู่ตรงจุด C_1 และ C_{n+1} มีระยะห่างจากปลายคานเท่ากับ a_n , b_n และ a_{n+1} , b_{n+1} ดังรูป พิจารณาคานช่วงซ้ายซึ่งยาว I_n

$$\theta'_n = \frac{M_n I_n}{3EI} + \frac{M_{n-1} I_n}{6EI} + \frac{A_n a_n}{I_n EI} \quad (2)$$

พิจารณาคานช่วงขวาซึ่งยาว I_{n+1} จะได้

$$\theta''_n = \frac{M_n I_{n+1}}{3EI} + \frac{M_{n+1} I_{n+1}}{6EI} + \frac{A_{n+1} b_{n+1}}{I_{n+1} EI} \quad (3)$$

แทนค่าจาก (2) และ (3) ลงใน (1) ได้

$$M_{n-1} I_n + 2 M_n (I_n + I_{n+1}) + M_{n+1} I_{n+1} = - \frac{6 A_n a_n}{I_n} - \frac{6 A_{n+1} b_{n+1}}{I_{n+1}} \quad (9-2.1)$$

สมการที่ได้นี้เรียกว่าสมการสามโมเมนต์เราจะเขียนสมการแบบนี้สำหรับคานทีละช่วงเรียงกันไปเรื่อย ๆ ก็ จะหาโมเมนต์คัตที่จุดฝัองของคานได้

โดยปกติแล้วปลายคานทั้งสองข้างจะเป็นลูกกลิ้ง หรือเป็นยึดสลัก แต่ถ้าในกรณีที่ปลายใดปลายหนึ่ง เกิดตรึงแน่น ซึ่งมีผลให้จุดรองรับส่วนเกินมีจำนวนมากกว่าจำนวนจุดที่อยู่ระหว่างปลายคานทั้งสอง เรา ต้องหาสมการเพิ่มเข้าไปอีกสมการหนึ่งสำหรับปลายที่ตรึงนี้โดยเฉพาะ ตามรูป 9-2.1b ถ้าปลายซ้ายสุด ตรึงแน่น ให้ $n = 1$ ได้

$$\theta_0 = \frac{M_0 I_1}{3EI} + \frac{M_1 I_1}{6EI} + \frac{A_1 b_1}{I_1 EI} \quad (4)$$

เมื่อ θ_0 เป็นมุมที่ปลายซ้ายหมุนไปสัมพันธ์กับแนวจุดด้านซ้าย เมื่อปลายซ้ายตรึงแน่นมุมนี้จะเท่ากับศูนย์

$$M_0 = -\frac{M_1}{2} - \frac{3A_1 b_1}{l_1^2} \quad (9-2.2)$$

เมื่อเราหาโมเมนต์ภายในตรงจุดที่ฝั่งเรียบร้อยแล้วก็ไม่ใช่เรื่องลำบากที่จะหาแรงปฏิกิริยาตรงจุดที่ฝั่ง ลองพิจารณาคานสองช่วงเหมือนรูป 9-2.1 ให้ R'_n เป็นแรงปฏิกิริยาตรงจุด n ซึ่งเกิดจากการที่กระทำบนคานในช่วง l_n และให้ R''_n เป็นแรงปฏิกิริยาของจุด n เนื่องจากการที่กระทำบนช่วง l_{n+1} นอกจากนี้ยังมีแรงปฏิกิริยาเนื่องจากโมเมนต์ปลายคาน M_{n-1} , M_n และ M_{n+1} ให้ทิศทางของโมเมนต์เหมือนกับรูป 9-2.1b แรงปฏิกิริยาที่รวมเข้าไปในจุด n จะเท่ากับ

$$\frac{M_{n-1} - M_n}{l_n} + \frac{-M_n + M_{n+1}}{l_{n+1}}$$

ส่วนแรกได้จากคานช่วง l_n และส่วนหลังได้จากคานช่วง l_{n+1} เอาแรงที่ได้นี้รวมเข้ากับ R'_n และ R''_n ดังนั้น แรงปฏิกิริยาทั้งหมดที่จุด n เท่ากับ

$$R_n = R'_n + R''_n + \frac{M_{n-1} - M_n}{l_n} + \frac{-M_n + M_{n+1}}{l_{n+1}} \quad (9-2.3)$$

เมื่อทราบแรงปฏิกิริยาและโมเมนต์คัดภายในที่จุดทุกจุดแล้ว เราก็สามารถเขียนไดอะแกรมของแรงเฉือนและโมเมนต์คัดได้

EXAMPLE 1. Construct bending moment and shearing force diagrams for the continuous three-span beam under uniform load of intensity w as shown in Fig. 9.9a. The three spans are equal and the beam is of constant cross-section.

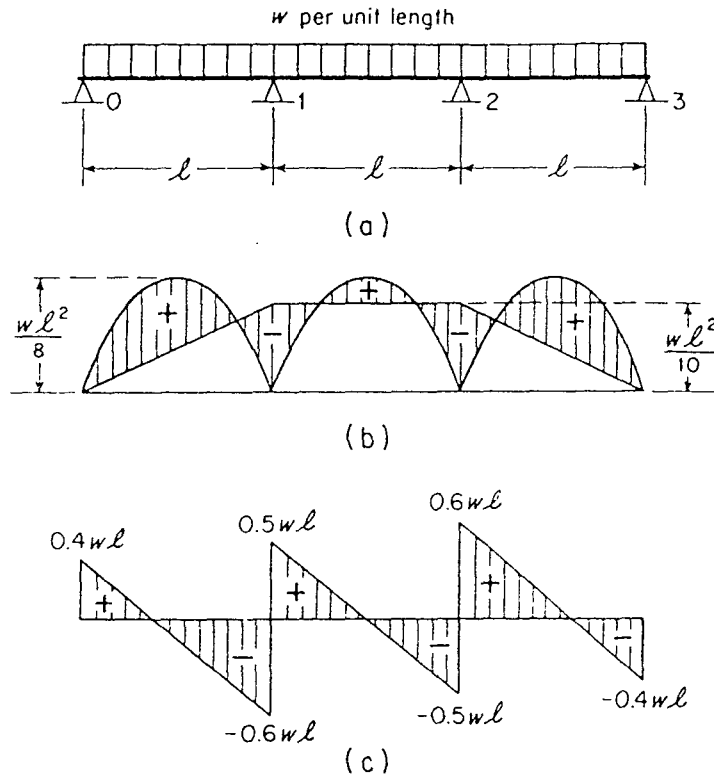


FIG. 9.9

SOLUTION. For a simple beam under uniform load, the bending moment diagram is a parabola with maximum ordinate $wl^2/8$. The area of the parabolic segment is

$$A = \frac{2}{3}l \frac{wl^2}{8} = \frac{wl^3}{12},$$

and its centroid is at mid-span, so that $a = b = l/2$. Considering now the first two spans on the left and noting that $M_0 = 0$, eq. 9-2.1 becomes

$$0 + 2M_1(2l) + M_2l = -\frac{wl^3}{4} - \frac{wl^3}{4}. \quad (e)$$

From conditions of symmetry, it is evident that $M_1 = M_2$, and eq. (e) gives $M_1 = -wl^2/10 = M_2$. The complete bending moment diagram as shown in Fig. 9.9b can now be drawn.

From eq. 9-2.3 the reaction at support 1 becomes

$$R_1 = \frac{wl}{2} + \frac{wl}{2} + \frac{wl}{10} = \frac{11wl}{10}.$$

From symmetry, we conclude that $R_2 = R_1$ while $R_0 = R_3$. Then since $R_0 + R_1 + R_2 + R_3 = 3wl$, $R_0 = R_3 = 4wl/10$. Having the reactions, the shear diagram is constructed as shown in Fig. 9.9c.

EXAMPLE 2. Construct bending moment and shearing force diagrams for the continuous three-span beam loaded as shown in Fig. 9.10a.

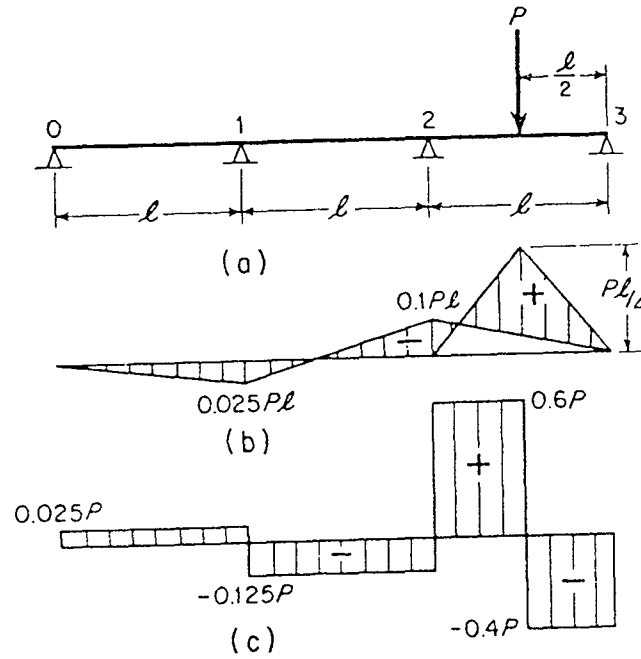


FIG. 9.10

and its centroid is at mid-span so that $a = b = l/2$.

Writing eq. 4-2.1, once for the first two spans on the left and again for the last two spans on the right, we have

$$\left. \begin{aligned} 0 + 2M_1(2l) + M_2l &= 0, \\ M_1l + 2M_2(2l) + 0 &= 0 - \frac{3Pl^2}{8} \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

These simultaneous equations are easily solved for the bending moments M_1 and M_2 and we find

$$M_1 = +\frac{Pl}{40}, \quad M_2 = -\frac{Pl}{10}.$$

The corresponding bending moment diagram for the entire beam is shown in Fig. 9.10b. The maximum bending moment occurs under the load P and has the value

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4} - \frac{Pl}{20} = \frac{Pl}{5}.$$

Using eq. 4-2.3, the reactions R_1 and R_2 at the intermediate supports are found as follows

$$R_1 = 0 + 0 - \frac{P}{40} - \frac{P}{40} - \frac{P}{10} = -\frac{3P}{20},$$

$$R_2 = 0 + \frac{P}{2} + \frac{P}{40} + \frac{P}{10} + \frac{P}{10} = +\frac{29}{40}P.$$

Then with the entire beam as a free body, we find $R_0 = +P/40$ and $R_3 = +16P/40$. The shearing force diagram may now be constructed as shown in Fig. 9.10c.

EXAMPLE 3. Construct bending moment and shearing force diagrams for the continuous beam shown in Fig. 9.11a, which overhangs the right-hand support and carries a load P at the free end.

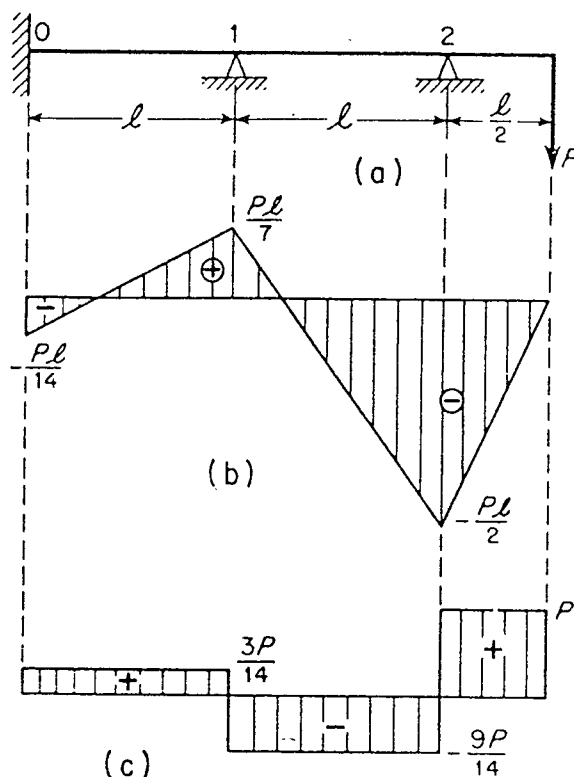


FIG. 9.11

SOLUTION. Writing eq. 9-2.1 for the two adjacent spans 01 and 12, we have

$$M_0 l + 2M_1(2l) + M_2 l = 0. \quad (g)$$

Then since the left hand support is built-in and there are no external loads on the first span, eq. 9-2.2 gives $M_0 = -M_1/2$. It must be noted also that $M_2 = -Pl/2$ since the beam freely overhangs the last support on the right. Substituting these values into eq. (g), we find $M_1 = +Pl/7$. Then $M_0 = -Pl/14$ and $M_2 = -Pl/2$. The corresponding bending moment diagram is shown in Fig. 9.11b. From statics, the reactions are now found to be $R_0 = +3P/14$, $R_1 = -12P/14$, $R_2 = +23P/14$, and the shear diagram is as shown in Fig. 9.11c.

PROBLEMSET 9.2

1. Find the bending moments M_1 and M_2 at the supports 1 and 2 of the three-span continuous beam loaded as shown in Fig. A. Ans. $M_1 = -22Pl/405$, $M_2 = -32Pl/405$.

2. A uniform three-span continuous beam with overhanging ends carries a uniformly distributed load as shown in Fig. B. Find the ratio a/l in order to make the bending moments at the three supports all equal. Ans. $a/l = 1/\sqrt{6} = 0.408$.

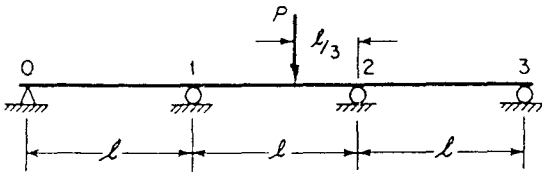


FIG. A

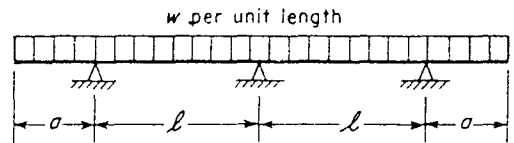


FIG. B

3. Referring again to the beam in Fig. B, find the ratio a/l in order to make the reactions at the three supports equal. Ans. $a/l = 0.44$.

4. A two-span continuous beam with overhang at the right hand end is loaded as shown in Fig. C. Calculate the reactions at the three points of support. Ans. $R_0 = 416.7$ kg, up; $R_1 = 1,375$ kg, down; $R_2 = 458.3$ kg, up.

5. A two-span continuous beam built-in at the left end is loaded as shown in Fig. D. Calculate the bending moments at the three supports. Ans. $M_0 = +857$ kg-m; $M_1 = -1,714$ kg-m; $M_2 = 0$.

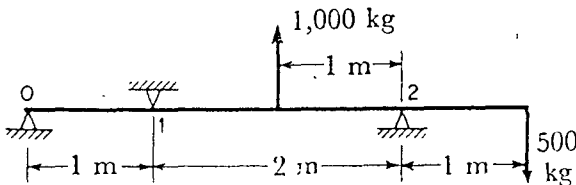


FIG. C

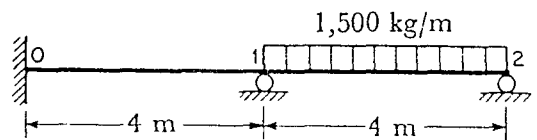


FIG. D

6. The right-hand span of a continuous beam carries a uniform load of intensity w over half its length as shown in Fig. E. Find the bending moments at the two intermediate supports. Ans. $M_1 = 7wl^2/960$; $M_2 = -28wl^2/960$.

7. Construct bending moment and shear force diagrams for the continuous beam shown in Fig. F. Ans. $M_1 = M_2 = +532.5$ kg-m; $R_0 = R_3 = 5,355$ kg, $R_1 = R_2 = -1,905$ kg.

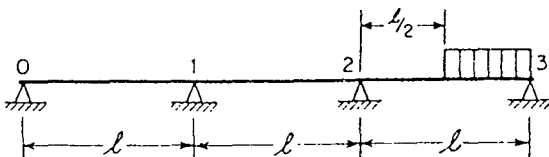


FIG. E

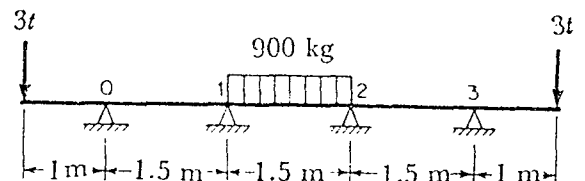


FIG. F

8. Calculate the bending moments and reactions at each support of the continuous beam in Fig. G. *Ans.* $M_1 = -193.1 \text{ kg-m}$; $M_2 = -467.4 \text{ kg-m}$; $M_3 = -206.5 \text{ kg-m}$; $R_0 = -193.1 \text{ kg}$; $R_1 = +1,343.5 \text{ kg}$; $R_2 = +3,110.5 \text{ kg}$; $R_3 = +1,876.8 \text{ kg}$; $R_4 = -137.7 \text{ kg}$.

9. Calculate the bending moment M_0 and the reaction R_0 at the built-in end of the continuous beam shown in Fig. H. *Ans.* $M_0 = -1,649 \text{ kg-m}$; $R_0 = 1,545 \text{ kg}$.

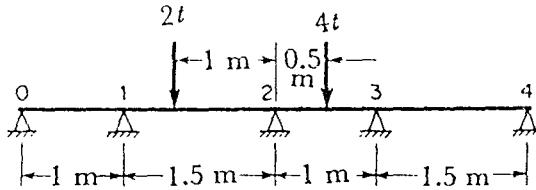


FIG. G

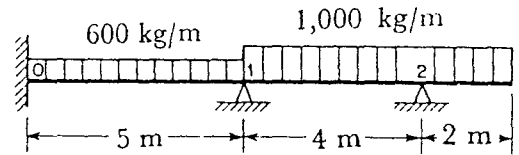


FIG. H

สัปดาห์ที่ 3

หัวข้อเรื่อง ทฤษฎีพลังงานความเครียดของคาสติเกลียโน

(2 ชั่วโมง)

ความคิดรวบยอด

1. ทฤษฎีของคาสติเกลียโนเป็นวิธีหาระยะแอ่นโดยวิเคราะห์หาจากพลังงานความเครียดของการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ซึ่งมีความสัมพันธ์กับภาระ และระยะโก่งจะมีค่าเท่ากับอนุพันธ์ของพลังงานความเครียดเทียบกับภาระ
2. ทฤษฎีของคาสติเกลียโนถูกนำมาประยุกต์ใช้กับคานซึ่งไม่สามารถแก้ปัญหาได้ด้วยหลักสถิตศาสตร์ เช่น โดยรู้วาระยะแอ่นตรงจตุรรองรับมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นอนุพันธ์ของพลังงานความเครียดเทียบกับแรงปฏิกิริยาตรงจตุรรองรับก็จะมีค่าเท่ากับศูนย์ด้วย
3. โดยการสร้างสมการดังกล่าวให้เท่ากับจำนวนตัวที่ไม่ทราบค่าก็จะสามารถแก้ปัญหาคานซึ่งไม่สามารถแก้ปัญหาได้ด้วยหลักสถิตศาสตร์ โดยใช้ทฤษฎีของคาสติเกลียโนได้

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. คำนวณหาแรงปฏิกิริยาและระยะแอ่นด้วยทฤษฎีของคาสติเกลียโนได้
2. ออกแบบคานซึ่งไม่สามารถแก้ปัญหาได้ด้วยหลักสถิตศาสตร์โดยใช้ทฤษฎีของคาสติเกลียโนได้

สังเขปเนื้อหา

หน่วยที่ 2. คานซึ่งไม่สามารถแก้ปัญหาได้ด้วยหลักสถิตศาสตร์ (ต่อ)

- ทฤษฎีของคาสติเกลียโน
- การประยุกต์ทฤษฎีของคาสติเกลียโนกับปัญหาที่ไม่สามารถแก้ด้วยวิธีทางสถิตศาสตร์

9-3 ทฤษฎีของคาสติเกลียโน

จากบทที่ผ่านมาเราได้ศึกษาสมการพลังงานความเครียดที่สะสมในแท่งวัตถุยืดหยุ่น โดยแท่งวัตถุ นั้นรับแรงดึง , โมเมนต์บิด , โมเมนต์คด ความรู้เกี่ยวกับเรื่องนี้จะมิมีประโยชน์ในการศึกษาระยะแอ่นของจุดต่าง ๆ ในโครงสร้างอย่างเช่นในรูป 2-4.1a แท่งวัตถุที่รับแรงดึงจะมีพลังงานความเครียดตามสมการ (2-4.2) ว่า

$$U = \frac{P^2 l}{2AE} \quad (1)$$

หาอนุพันธ์เทียบกับภาระ P ได้

$$\frac{dU}{dP} = \frac{Pl}{AE} = \delta$$

ดังนั้นอนุพันธ์ของพลังงานความเครียดเทียบกับการะ P ที่กระทำจะเท่ากับยืดยาวของจุดที่แรงนั้นกระทำ

ลองดูอีกตัวอย่าง กรณีที่แท่งรับโมเมนต์บิดดังรูป 4-3.2 จะมีพลังงานความเครียดตามสมการ (4-3.2') ว่า

$$U = \frac{T^2 l}{2GJ} \quad (2)$$

หาอนุพันธ์เทียบกับโมเมนต์บิด T ได้

$$\frac{dU}{dT} = \frac{Tl}{GJ} = \phi$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าค่านี้เท่ากับมุมที่ปลายเหลาบิดไปเทียบกับอีกปลายหนึ่ง ถ้าเราให้โมเมนต์บิดเป็น “แรงทั่ว ๆ ไป” และมุมที่บิดไปเป็นการเปลี่ยนตำแหน่งจากแรงนั้นเราก็สรุปได้ว่าการเปลี่ยนตำแหน่ง คือ อนุพันธ์อันดับแรกของ พลังงานความเครียดเทียบกับ “แรง”

ถ้าเป็นคานชนิดชนิดปลายฝังมีแรง P ตรงปลายอิสระดังรูป 8-4.3a พลังงานความเครียดเนื่องจากโมเมนต์คดคือ

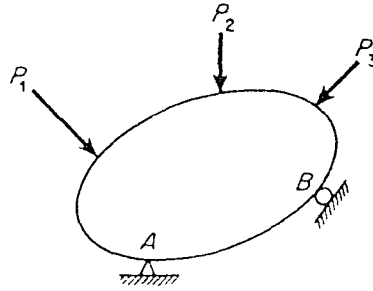
$$U = \frac{P^2 l^3}{6EI} \quad (3)$$

หาอนุพันธ์เทียบกับแรง P จะได้

$$\frac{dU}{dP} = \frac{Pl^3}{3EI} = \delta$$

ซึ่งก็คือระยะแอ่นของปลายคานในทิศทางที่แรง P กระทำ

ตัวอย่างที่อธิบายนี้เป็นทฤษฎีทั่ว ๆ ไปเรียกว่าทฤษฎีของ castigliano ต่อไปจะเป็นการหาทฤษฎีแบบทั่วไป ในรูป 9-3.1 AB เป็นวัตถุที่มีความยืดหยุ่นหรือเป็นโครงสร้างในที่ว่าง ซึ่งรับแรง $P_1, P_2, P_3, \dots$ ถ้าวัสดุของวัตถุเป็นไปตามกฎของ Hooke และการเปลี่ยนรูปมีขนาดเล็กมากการเปลี่ยนตำแหน่ง



รูป 9-3.1

ตรงจุดที่แรงกระทำจะเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของภาระ ซึ่งทฤษฎี superposition ใช้กับกรณีเช่นนี้ได้ พลังงานความเครียด ที่สะสมในระบบของภาระนี้จะเท่ากับงานที่แรงนั้นกระทำและไม่ขึ้นกับว่าแรงใดจะกระทำต่อคานก่อนหลัง งานจากแรงที่กระทำเท่ากับ

$$U = \frac{1}{2} (P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + P_3 \delta_3 + \dots) \quad (9-3.1)$$

เมื่อ $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ เป็นระยะการแอ่นของจุด 1, 2, 3, ในทิศทางของแรง $P_1, P_2, P_3, \dots$ ตามลำดับ และต้องเข้าใจด้วยว่า $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ ไม่จำเป็นต้องเป็นการแอ่นทั้งหมดของจุด 1, 2, 3, เราคิดเฉพาะในทิศทางของแรงเท่านั้น เนื่องจากเราสมมติว่า $\delta_1, \delta_2, \dots$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ $P_1, P_2, P_3, \dots$ ดังนั้นถ้าเราแทน $\delta_1, \delta_2, \dots$ ในเทอมของ $P_1, P_2, P_3, \dots$ สมการ 9-3.1 ก็จะเป็น homogeneous quadratic function ของแรงเหล่านั้น

สมมติว่าหลังจากที่น้ำหนัก P_n กระทำต่อคานแล้ว และค่าของพลังงานความเครียดที่สะสมอยู่ในคานเท่ากับ U ตามสมการ (9-3.1) เราเพิ่มแรง P_n ขึ้นขนาด dP_n ซึ่งจะทำให้คานเปลี่ยนรูปมากขึ้น ค่าของพลังงานความเครียดที่สะสมไว้ก็จะมากขึ้นตามไปด้วย ขนาดที่เพิ่มนี้จะเท่ากับอัตราการเปลี่ยนของ U เทียบกับ P_n คูณกับส่วนเพิ่มของ P_n พลังงานความเครียดใหม่ก็จะเท่ากับ

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_n} \cdot dP_n \quad (4)$$

เนื่องจากพลังงานความเครียดในตอนสุดท้ายไม่ขึ้นอยู่กับว่าจะเอาแรงใดกระทำก่อนหลัง เราสมมติใหม่ว่าเอาแรง dP_n กระทำก่อนแล้วค่อยเอาแรง $P_1, P_2, P_3, \dots$ กระทำทีหลัง เมื่อ dP_n กระทำเสียก่อนระยะการแอ่นที่เกิดขึ้นจะมีค่าน้อยมาก ๆ พลังงานความเครียดใน second order จึงตัดทิ้งไปได้ เมื่อเราเอาแรง $P_1, P_2, P_3, \dots$ กระทำต่อโครงสร้างจะไม่มีผลจาก dP_n หรือพลังงานความเครียดจะเท่ากับ U เหมือนที่เริ่มต้น อย่างไรก็ตามระหว่างที่เราเอาแรง $P_1, P_2, P_3, \dots$ กระทำตรงจุดที่มีแรง dP_n กระทำอยู่ก่อนแล้วจะมีระยะการเปลี่ยนตำแหน่ง δ_n ที่เกิดจาก $P_1, P_2, P_3, \dots$ เพิ่มขึ้นอีก งานที่เพิ่มขึ้นจะเท่ากับ $dP_n \cdot \delta_n$ พลังงานความเครียดในกรณีนี้จะเท่ากับ

$$U + dP_n \cdot \delta_n \quad (5)$$

ซึ่งจะมีค่าเท่ากับพลังงานความเครียดใน (4) นั่นคือ

$$U + dP_n \cdot \delta_n = U + \frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n$$

จะได้ว่า

$$\delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n} \quad (9-3.2)$$

สมการที่ได้เป็นทฤษฎีของ castigliano ซึ่งอาจจะกล่าวได้ว่า “ในระบบความยืดหยุ่นที่เป็นไปตามกฎของ superposition แล้วอนุพันธ์ย่อยของ พลังงานความเครียด(ซึ่งเป็นฟังก์ชันกำลังสองของแรง) เทียบกับแรงใดแรงหนึ่งในแรงเหล่านั้น จะเท่ากับค่าของระยะการเปลี่ยนตำแหน่งของจุดที่แรงกระทำในทิศทางของแรงนั้น คำว่า“แรง”อาจจะหมายถึงแรงจริง ๆ หรือโมเมนต์คัตหรือโมเมนต์บิด ขณะเดียวกัน “ระยะการเปลี่ยนตำแหน่ง” ก็อาจจะหมายถึงระยะการแอ่นหรือมุมที่บิดไปก็ได้โดยให้มีทิศทางตามแรงนั้น ๆ และแรงที่เรากล่าวถึงนี้จะเป็นแรงอิสระที่ไม่ขึ้นกับแรงอื่น ๆ เลย ส่วนแรงปฏิกิริยานั้นจะขึ้นอยู่กับภาระดั่งนั้นแรงปฏิกิริยาจะไม่เกี่ยวกับเรื่องนี้เลย

EXAMPLE 1. A simply supported beam with overhang is loaded as shown in Fig. 9.13a. Using the theorem of Castigliano, find the vertical deflection of point C.

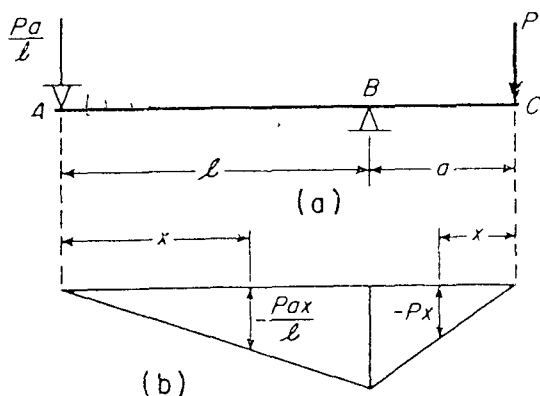


FIG. 9.13

SOLUTION. The bending moment diagram for the beam is shown in Fig. 9.13b. Between A and B, a general expression for bending moment at any distance x to the right of A is

$$M_x = -\frac{Pax}{l}. \quad (f)$$

Between B and C, the bending moment at any distance x to the left of C is

$$M_x = -Px. \quad (g)$$

Using the first of eqs. 9-4.2, the strain energy of bending in the beam becomes

$$U = \int_0^l \frac{P^2 a^2 x^2}{2EI l^2} dx + \int_0^a \frac{P^2 x^2 dx}{2EI} = \frac{P^2 a^2}{6EI} (l + a). \quad (h)$$

Then from eq. 9-3.2

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{Pa^2}{3EI} (l + a).$$

EXAMPLE 2. The axis of a cantilever ring, built-in at B and loaded at the free end A , forms a horizontal quarter circular arc of radius R , Fig. 9.14. Find the vertical deflection δ of the free end A , assuming the ring to have a circular cross-section the diameter of which is small compared with the radius R of its center line.

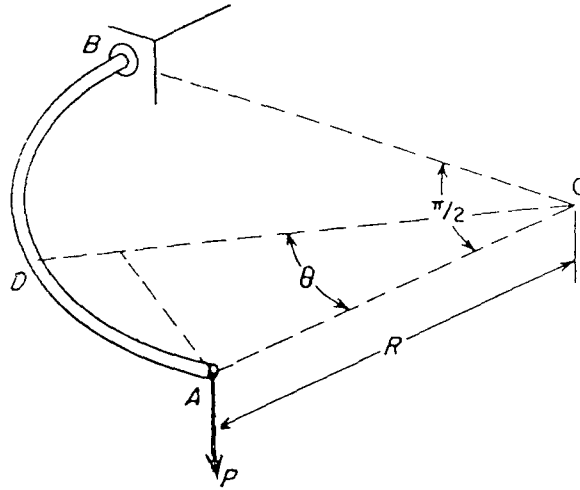


FIG. 9.14

SOLUTION. Such a curved cantilever is subjected to torsion as well as bending. At any cross-section D , defined by the angle θ , we see that the bending moment is

$$M_{\theta} = PR \sin \theta, \quad (i)$$

while the twisting moment on the same cross-section is

$$T_{\theta} = PR (1 - \cos \theta). \quad (j)$$

The total strain energy due to the combined bending and torsion of the ring is

$$U = \int_0^{\pi/2} \frac{M_{\theta}^2 R d\theta}{2EI} + \int_0^{\pi/2} \frac{T_{\theta}^2 R d\theta}{2GJ}.$$

Then by eq. (9.5)

$$\delta_v = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^{\pi/2} \frac{M_{\theta} \left(\frac{\partial M_{\theta}}{\partial P} \right) R d\theta}{EI} + \int_0^{\pi/2} \frac{T_{\theta} \left(\frac{\partial T_{\theta}}{\partial P} \right) R d\theta}{GJ}, \quad (k)$$

where, from eqs. (i) and (j),

$$\frac{\partial M_{\theta}}{\partial P} = R \sin \theta, \quad (i')$$

$$\frac{\partial T_{\theta}}{\partial P} = R (1 - \cos \theta). \quad (j')$$

Substituting (i), (j), (i'), (j'), into eq. (k) and performing the indicated integrations, we find

$$\delta_v = \frac{\pi PR^3}{4EI} + \frac{(3\pi - 8) PR^3}{4GJ}.$$

EXAMPLE 3. A simple truss composed of two bars each of length l carries a vertical load P at joint A as shown in Fig. 9.15. Find the horizontal and vertical components of the total deflection δ of point A . The bars are of the same material, AB having a cross-sectional area A and AC , a cross-sectional area $A_1 = 2A$.

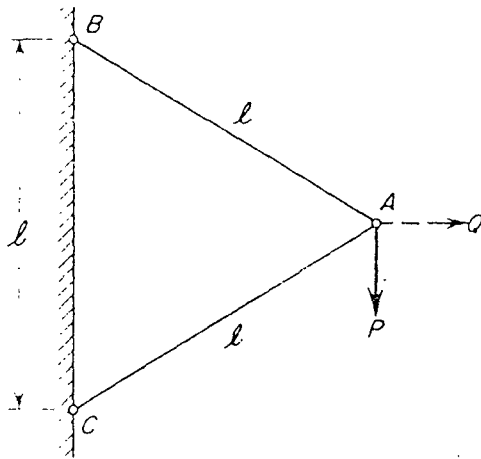


FIG. 9.15

SOLUTION. From statics, we see that the tensile force in the bar AB and the compressive force in the bar AC are each equal to P . Hence the strain energy in the system is

$$U = \frac{P^2 l}{2AE} + \frac{P^2 l}{2A_1 E} = \frac{3P^2 l}{4AE}.$$

Then, for the vertical component of the deflection of A , we have

$$\delta_v = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{3Pl}{2AE}.$$

To find the horizontal component of the deflection of joint A , we introduce at A a fictitious horizontal force Q with respect to which we can differentiate the strain energy expression. With this force acting in addition to P , the strain energy becomes

$$U = \frac{(Q/\sqrt{3} + P)^2 l}{2AE} + \frac{(Q/\sqrt{3} - P)^2 l}{2(2A)E}.$$

Then from eq. (9.5)

$$\delta_h = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{(Q + P/\sqrt{3})l}{2AE}.$$

For the case in which we are interested, $Q = 0$ and the horizontal component of deflection becomes

$$\delta_h = \frac{Pl}{2\sqrt{3}AE}.$$

9-4 การประยุกต์ทฤษฎีของ Castigliano กับปัญหาที่ไม่สามารถแก้ด้วย

วิธีทางสถิตศาสตร์

ทฤษฎีของ Castigliano มีประโยชน์มากในการแก้ปัญหาที่ไม่สามารถใช้วิธีทางสถิตศาสตร์แก้ได้ด้วยอย่างเช่น คานต่อเนื่องหลาย ๆ ช่วงที่มีแรงที่จุดรองรับส่วนเกินที่จุดเป็น $X, Y, Z, \dots$ พลังงานความเครียดในคานจะเป็นฟังก์ชันของแรงเหล่านี้กับระยะการเปลี่ยนตำแหน่งตรงจุดที่แรงกระทำโดยเขียนออกมาในรูป $dU/dX, dU/dY, dU/dZ, \dots$ แต่เราทราบว่ระยะการเปลี่ยนตำแหน่งของจุดต่าง ๆ เหล่านี้เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial Z} = 0, \dots \quad (9-4.1a)$$

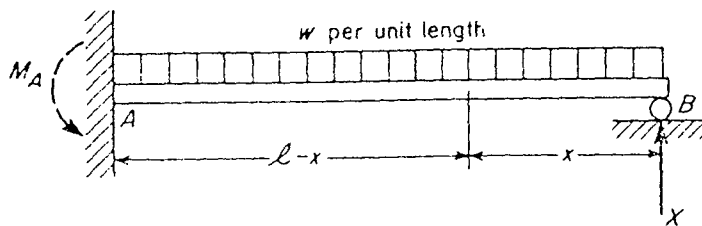
เขียนสมการให้ได้เท่ากับจำนวนของจุดรองรับส่วนเกินแล้วแก้สมการหาแรงปฏิกิริยาเหล่านี้ได้

ถ้าเราให้โมเมนต์ตรงรองรับเป็นจุดรองรับส่วนเกินแล้วพลังงานความเครียดก็จะเขียนได้เป็นฟังก์ชันของโมเมนต์คัต $M_1, M_2, M_3, \dots$ ในแต่ละกรณีอนุพันธ์ย่อยของ $\partial U / \partial M_1, \partial U / \partial M_2, \partial U / \partial M_3, \dots$ ก็จะเป็นการหมุนสัมพันธ์กันระหว่างเส้นอิลาสติกของคานตรงจุดฐานรองรับนั้น แต่เราทราบว่าคานมีความต่อเนื่องกัน หรือเส้นสัมผัสทางซ้ายและทางขวาของฐานทับกัน มุมระหว่างเส้นตรงที่สัมผัสกับเส้นอิลาสติกสองข้างฐานจะเท่ากับศูนย์ หรือ

$$\frac{\partial U}{\partial M_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial M_2} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial M_3} = 0, \dots \quad (9-4.1b)$$

โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว ถ้าเป็นปัญหาแบบใช้วิธีทางสถิตศาสตร์แก้ไม่ได้เราจะปลดจุดที่ต้องการหาแรงออกแล้วเอาแรงใส่ไว้แทน หาพลังงานความเครียดในทอมของแรงเหล่านี้แล้วใช้ทฤษฎีของ Castigliano ตามสมการ (9-4.1) เราก็จะหาแรงที่จุดรองรับส่วนเกินที่ต้องการได้

พิจารณา propped cantilever ในรูป 9-4.1 ระบบเกนนี้มีแรงปฏิกิริยาที่ไม่ทราบอยู่หนึ่งตัว มีแรงปฏิกิริยา X ตรง B เป็นแรงที่จุดรองรับส่วนเกิน โมเมนต์คัตตรงจุดใด ๆ ในคานจะเท่ากับ



รูป 9-4.1

$$M_x = X_x - \frac{\omega x^2}{2} \quad (1)$$

พลังงานความเครียดที่สะสมไว้เท่ากับ

$$U = \int_0^l \frac{M_x^2 dx}{2EI}$$

ซึ่งจะติดออกมาเป็นฟังก์ชันของ X ดังนั้น M_x เป็นฟังก์ชันของ X หาอนุพันธ์ภายใต้เครื่องหมายอินทิกรัล จะได้

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \int_0^l \frac{M_x \frac{\partial M_x}{\partial X} dx}{EI} = 0 \quad (2)$$

จากสมการ (1)

$$\frac{\partial M_x}{\partial X} = x \quad (3)$$

แทนค่าจากสมการ (1) และ(3) ลงในสมการ (2)

$$\frac{1}{EI} \int_0^l \left(Xx - \frac{\omega x^2}{2} \right) (x) dx = 0$$

อินทิเกรตได้

$$\frac{Xl^3}{3} - \frac{\omega l^4}{8} = 0$$

ได้ $X = \frac{3}{8} \omega l$ เหมือนกับข้อ 1 แบบฝึกหัด 9.1

ถ้าเลือกโมเมนต์ M_A ตรงปลายที่ฝังในผนังเป็นจุดรองรับส่วนเกินได้โมเมนต์ที่หน้าตัดใด ๆ เท่ากับ

$$M_x = \frac{\omega x}{2} - \frac{M_A x}{l} - \frac{\omega x^2}{2} \quad (4)$$

แต่ตรงจุด A แนวเส้นสัมผัสไม่เปลี่ยนหรือไม่มีการหมุน จากทฤษฎีของ castigliano จะได้ว่า

$$\frac{\partial U}{\partial M_A} = \int_0^l \frac{M_x \frac{\partial M_x}{\partial M_A} dx}{EI} = 0 \quad (5)$$

จากสมการ (4)

$$\frac{\partial M_x}{\partial M_A} = -\frac{x}{l} \quad (6)$$

แทนค่าลงในสมการ (2) จะได้

$$\frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{wx}{2} - \frac{M_A x}{1} - \frac{wx^2}{2} \right) \left(-\frac{x}{1} \right) dx = 0$$

ได้ $M_A = wl^2/8$ เหมือนกับที่เคยหามาแล้ว

EXAMPLE 1. Three bars each of length l and pinned at their ends are arranged in a vertical plane as shown in Fig. 9.17. The vertical bar has a cross-sectional area A and each inclined bar has cross-sectional area A_1 . A vertical load P acts at joint C and it is desired to find the ratio A_1/A of cross-sectional areas to make the tension in DC numerically equal to the compressive forces in AC and BC .

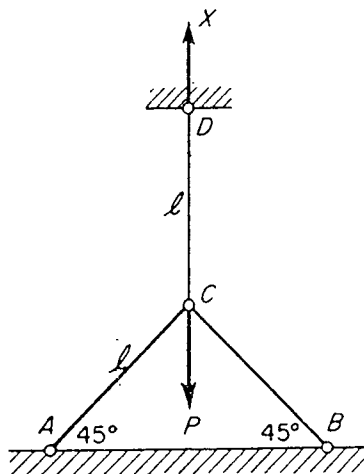


FIG. 9.17 -

SOLUTION. Let X represent the tensile force in DC , chosen as the redundant bar. Then the compressive force in each inclined bar is $(P - X)/\sqrt{2}$. Thus the strain energy of the system becomes

$$U = \frac{X^2 l}{2AE} + \frac{(P - X)^2 l}{2A_1 E}$$

In this case, the end D of the vertical bar must have a displacement equal to zero. Hence, from the Castigliano theorem,

$$\frac{dU}{dX} = \frac{Xl}{AE} - \frac{(P - X)l}{A_1 E} = 0,$$

from which

$$X = \frac{P}{1 + \frac{A_1}{A}} \quad (g)$$

The statement of the problem requires that

$$X = \frac{P - X}{\sqrt{2}} \quad (h)$$

Eliminating X between eqs. (g) and (h), we find $A_1/A = \sqrt{2}$.

EXAMPLE 2. Two wood beams of identical cross-section are supported at their ends and cross at their mid-points as shown in Fig. 9.18. When unloaded, they are just in contact at C . What interactive force X will exist between the two beams at C when a vertical load P is applied to the upper beam as shown?

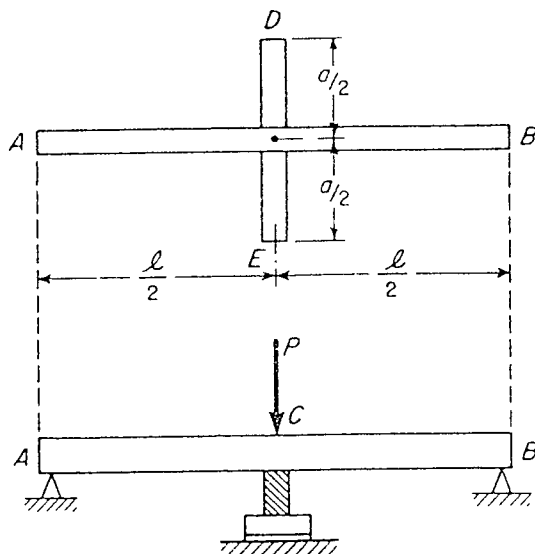


FIG. 9.18

SOLUTION. The net downward load on the beam AB is $P - X$; that on the beam DE is X . The total strain energy in a simple beam loaded at the middle by a force Q is, from eq. (h), p. 222,

$$U = \frac{Q^2 l^3}{96EI}$$

Thus the strain energy in the two beams becomes

$$U = \frac{(P - X)^2 l^3}{96EI} + \frac{X^2 a^3}{96EI}. \quad (i)$$

Regarding the pair of interactive forces X as a generalized force and observing that the corresponding displacement is the relative displacement between the mid-points of the two beams, which is zero because they remain in contact at C , we have by the Castigliano theorem

$$\frac{dU}{dX} = -\frac{(P - X)l^3}{48EI} + \frac{Xa^3}{48EI} = 0,$$

from which

$$X = \frac{Pl^3}{l^3 + a^3}.$$

EXAMPLE 3. To reduce deflection, a simply supported wood beam AB , loaded at the middle, is trussed by steel cables AD and BD and a post CD arranged as shown in Fig. 9.19. Neglecting axial shortening of both the beam and the post, find the compressive force X induced in the post. The beam has flexural rigidity EI and the cables have cross-sectional area A_1 and modulus of elasticity E_1 .

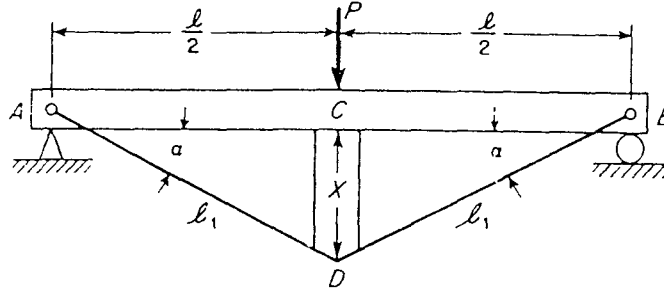


FIG. 9.19

SOLUTION. The net downward load on the middle of the beam is $Q = P - X$ and the tension in each cable is $S_1 = X/2 \sin \alpha$. Hence, neglecting strain energy of compression in the beam and post, the strain energy of the system is

$$U = \frac{Q^2 l^3}{96EI} + 2 \left(\frac{S_1^2 l_1}{2A_1 E_1} \right).$$

Substituting for Q and S_1 and noting that $l_1 = \frac{1}{2}l \sec \alpha$, this becomes

$$U = \frac{(P - X)^2 l^3}{96EI} + \frac{X^2 l \sec \alpha}{8A_1 E_1 \sin^2 \alpha}.$$

Now shortening of the post is the generalized displacement corresponding to the compressive forces X and we have specified that this is to be neglected, i.e., that it is to be taken as zero. Hence, the Castigliano theorem gives

$$\frac{dU}{dX} = -\frac{(P - X)l^3}{48EI} + \frac{Xl \sec \alpha}{4A_1 E_1 \sin^2 \alpha} = 0,$$

from which

$$X = \frac{P}{1 + \frac{12 \sec \alpha}{l^2 \sin^2 \alpha} \frac{EI}{A_1 E_1}}$$

Taking $\alpha = 20^\circ$ and $EI/A_1 E_1 l^2 = 0.01$, this gives $X = 0.478P$. In such case the deflection of the beam will be reduced by approximately 50 per cent.

PROBLEMSET 9.4

1. A prismatic beam AB with built-in ends and span l carries a single concentrated load P at the middle. Using the theorem of Castigliano, find the bending moments M_A and M_B at the ends of the beam. *Ans.* $M_A = M_B = -Pl/8$.

2. Repeat the solution of the preceding problem for the case where the beam carries a uniformly distributed load of intensity w over the full span. *Ans.* $M_A = M_B = -wl^2/12$.

3. A continuous prismatic beam having two equal spans l carries a uniformly distributed load of intensity w over one span only, as shown in Fig. A. Find the reaction X at the middle support by using the theorem of Castigliano. *Ans.* $X = 5wl/8$.

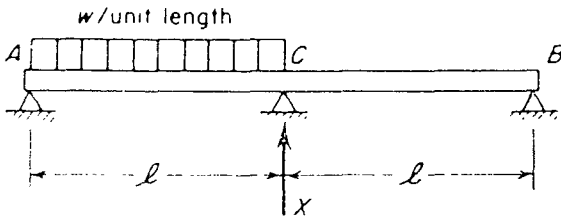


FIG. A

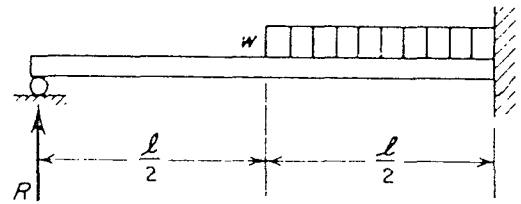


FIG. B

4. Using the theorem of Castigliano, find the bending moment M_C at the middle support of the two-span continuous beam loaded as shown in Fig. A. *Ans.* $M_C = wl^2/16$.

5. A propped-cantilever beam of uniform cross-section carries a uniformly distributed load of intensity w over the right-hand half of the span as shown in Fig. B. Using the theorem of Castigliano, find the magnitude of the reaction R at the propped end of the beam. *Ans.* $R = 7wl/128$.

6. A thin semicircular arch ring of mean radius R is pin-supported on unyielding foundations at its ends A and B and carries a vertical load P at the crown C , as shown in Fig. C. Using the theorem of Castigliano, find the horizontal components H of the reactions at A and B . *Ans.* $H = P/\pi$.

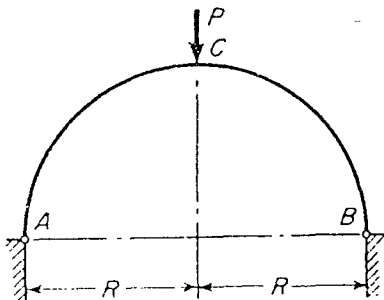


FIG. C

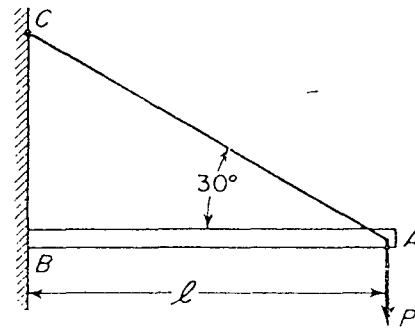


FIG. D

7. A thin circular ring of uniform cross-section and mean radius R is subjected to the action of two equal and opposite forces P pulling along a diameter AB . Using the theorem of Castigliano, find the bending moments M induced in the ring at the ends of the diameter which is perpendicular to AB . *Ans.* $M = 0.182PR$.

8. In Example 3, the strain energy of compression in the beam and post were neglected in calculating the compressive force X in the post. Calculate this compressive force X more exactly by taking account of the additional strain energy of

compression. Use the data given in Example 3 and assume, in addition, that the post is cut from the same piece of timber as the beam with $AE = 4A_1E_1$. *Ans.* $X = 0.427P$.

9. A wood cantilever beam 1.5m long and having a rectangular cross-section 10 cm wide by 15 cm deep is built-in at B and supported at A by an inclined guy wire, as shown in Fig. D. The beam has modulus of elasticity $14(10)^4 \text{ kg/cm}^2$, and the guy wire has modulus of elasticity $21(10)^5 \text{ kg/cm}^2$ and cross-sectional area $A_1 = 0.333 \text{ sq cm}$. Find the tensile force S induced in the guy wire due to the vertical load P applied at A . *Ans.* $S = 1.48P$.

สัปดาห์ที่ 3

หัวข้อเรื่อง คานซึ่งไม่สามารถแก้ปัญหาได้ด้วยหลักสถิตศาสตร์ (2)

(1 ชั่วโมง)

ความคิดรวบยอด

1. Limit Analysis เป็นวิธีที่นำ plastic design มาใช้กับคานซึ่งไม่สามารถแก้ปัญหาได้ด้วยหลักสถิตศาสตร์
2. หลักการของ limit analysis ก็คือ เมื่อภาระทำให้จุดใดจุดหนึ่งมีโมเมนต์ดัดสูงสุดตรงจุดนั้นจะเกิดการหักงอ เรียกว่าเป็น plastic hinge เมื่อภาระเพิ่มค่าขึ้นจนเป็น limit load โมเมนต์ดัดจะมีค่าเป็น plastic moment คานจะแอ่นลงและพังไปในที่สุดโดยไม่ต้องเพิ่มภาระอีกเลย
3. ในการใช้งาน จะคำนวณหา limit load โดยสมมติว่าเกิด plastic hinge โดยมี plastic moment ตรงจุดนั้น จากนั้นจึงคำนวณหาค่าของ limit load ที่จะทำให้อยู่ในสภาวะสมดุล

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. ออกแบบคานซึ่งไม่สามารถแก้ปัญหาได้ด้วยหลักสถิตศาสตร์ โดยใช้หลักการของ limit analysis ได้

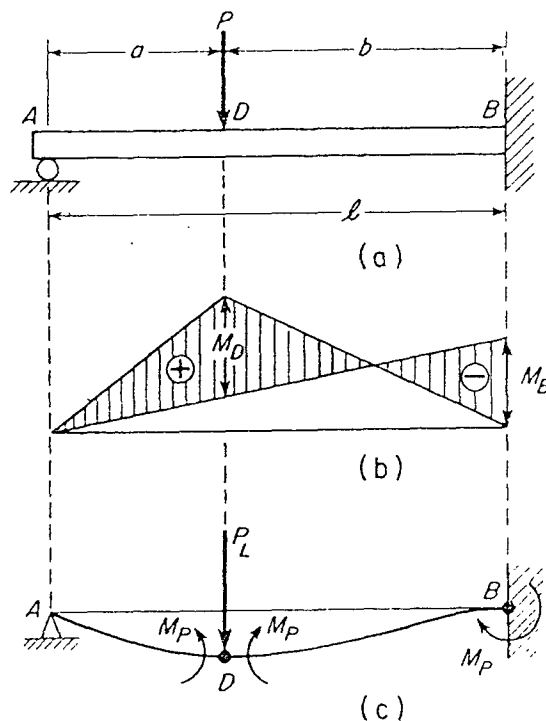
สังเขปเนื้อหา

หน่วยที่ 2. คานซึ่งไม่สามารถแก้ปัญหาได้ด้วยหลักสถิตศาสตร์ (ต่อ)

- Limit Analysis ของคานที่ไม่สามารถแก้ปัญหาด้วยวิธีทางสถิตศาสตร์

9-5 Limit Analysis ของคานที่ไม่สามารถแก้ปัญหได้ด้วยวิธีทางสถิตศาสตร์

ในตอนที่ผ่านมาเราพิจารณาคานที่ทำด้วยวัสดุยืดหยุ่นเท่านั้น แต่ในหัวข้อนี้เราจะดูใบกรณีที่เกิดอาการล้า คือวัสดุที่ใช้ทำคานอยู่ในสภาพยืดหยุ่นคล้อย ๆ กับที่เลขอธิบายในหัวข้อ 6-1 กองพิจารณาคานเหล็ก ซึ่งเป็นแบบ propped cantilever มีแรง P กระทำดังรูป 9-5.1a ถ้าแรง P_L เป็นแรงที่ทำให้วัสดุอยู่ในช่วงยืดหยุ่น โมเมนต์ไคอะแกรมจะเป็นไปตามรูป 9-5.1b ซึ่งเราจะเห็นได้ว่าตรงจุด B และ D เป็นตำแหน่งที่มีโมเมนต์คัตสูงสุด ถ้าเราเพิ่ม P ให้มากกว่า P_L ตรงจุดใดจุดหนึ่งในสองจุดดังกล่าวจะทำให้คานหักลงมาเรียกจุดที่หักนั้นว่าเป็น plastic hinged จุดไหนจะเป็น plastic hinged ก่อนก็ขึ้นอยู่กับว่า M_D กับ M_B ไครมากกว่ากัน ซึ่งก็ต้องแล้วแต่ตำแหน่งของ P ที่อยู่บนคาน โดยเทียบจาก b/a ว่าถ้า $b/a < \sqrt{2}$ เราจะได้ M_D มีค่ามากกว่า M_B จุด D ก็จะเกิด plastic hinged ก่อน พอเกิด plastic hinged เต็มที่คานก็สามารถวิเคราะห์โดยใช้ทฤษฎีสมคูลได้ทั้งนี้เราจะแบ่งคานออกเป็นสองส่วน คาน ADB มีจุด D เป็นจุดแบ่งน้ำหนัก P_L และโมเมนต์ M_p กระทำคราวนี้ถ้าเพิ่ม P ขึ้นเรื่อย ๆ โมเมนต์ M_B จะค่อย ๆ เพิ่มขึ้นจนเป็น M_p คานจะแอ่นลง และพังไปในที่สุด โดยที่เราไม่ต้องเพิ่มแรงขึ้นอีกเลย เราเรียกลักษณะเช่นนี้ว่าคานเป็น mechanisms มี hinged ที่ A, D และ B แรง P_L ที่ทำให้คานเกิดเป็นสภาพแบบนี้เรียกว่า Limit Load P_L ตามรูปที่ 9-5.1c



รูป 9-5.1

ในการคำนวณหา limit load เราไม่จำเป็นต้องติดตามลำดับดังที่กล่าวมานั้น แต่จะคิดว่าเกิด hinged ที่ B และ D โดยโมเมนต์ M_p กระทำที่จุดทั้งสอง จำนวนค่า P_L ที่ทำให้อยู่ในภาวะสมดุล จากรูป 9-5.1c จะได้แรงปฏิกิริยาที่ A เท่ากับ

$$R_A = \frac{P_L b}{l} - \frac{M_p}{l}$$

โมเมนต์ดัดที่ D เท่ากับ

$$M_D = R_A a = \frac{P_L ab}{l} - \frac{M_p a}{l} = M_p$$

แก้สมการได้

$$P_L = \frac{M_p (l + a)}{a(l - a)} \quad (1)$$

โดยที่ $b = l - a$ ถ้าต้องการหาน้ำหนักบรรทุกที่คานรับได้โดยปลอดภัยก็เอาตัวประกอบความปลอดภัย n หารเข้าไปได้ $P_w = P_L/n$

จาก (1) เราจะสังเกตได้ว่า P_L เป็นฟังก์ชันของอัตราส่วน a/l ซึ่งจะบอกตำแหน่งของแรงบนคาน ในการหาตำแหน่งที่วิกฤตที่สุด โดยหาค่าของ a/l ที่ทำให้ P_L น้อยที่สุด เราให้ $dP_L/da = 0$ จะได้

$$a^2 + 2la - l^2 = 0$$

จากสมการกำลังสองแก้สมการได้

$$\frac{a}{l} = \sqrt{2} - 1 = 0.414$$

แทนค่าที่ได้ลงในสมการ (1) จะได้ $(P_L)_{\min} = 5.84 M_p/l$

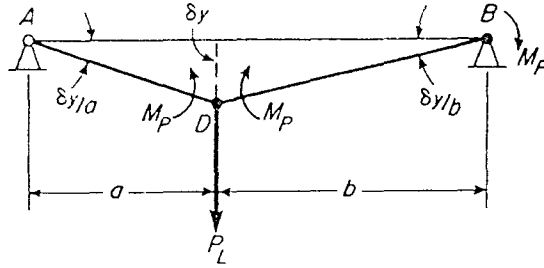
เรามีวิธีหา limit load P_L อีกวิธีหนึ่ง จาก mechanisms ในรูป 9-5.1c ใช้ทฤษฎีงานเสมือนตามรูป 9-5.2 ตรง B และ D เป็น plastic hinges (แสดงเป็นห่วงสีดำทึบ) ส่วนที่ A เป็น hinged ธรรมดา (แสดงด้วยห่วงขาว) แรง P_L และโมเมนต์ plastic ที่ B และ D เราให้เป็นแรงกิริยา (active forces) ของระบบนี้ สมมติว่าจุด D เคลื่อนที่ลงมา δy ขณะเดียวกัน AD และ BD จะหมุนไปเป็นมุม $\delta y/a$ และ $\delta y/b$ เรเดียนรอบ A และ B ตามลำดับ แรง P_L จะเกิดงานเสมือน $P_L \delta y$ มีเครื่องหมายเป็นบวก ส่วน M_p ตรง B จะทำงานเสมือน $M_p \delta y/b$ มีเครื่องหมายลบ และที่ D ทำงาน $M_p (\delta y/a + \delta y/b)$ เป็นลบ จากสภาพสมดุลของระบบจะได้ผลรวมของงานเสมือนเท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$P_L \delta y - M_p \delta y/b - M_p (\delta y/a + \delta y/b) = 0$$

ได้

$$P_L = \frac{2M_p}{b} + \frac{M_p}{a} \quad (2)$$

ถ้าแทนค่า $b = l - a$ จะได้เหมือนกับสมการ (1)



รูป 9-5.2

วิธีที่กล่าวมานี้จะเห็นว่ายากกว่าการวิเคราะห์แบบขีดยุ่นทำให้วิศวกรโครงสร้างนิยมใช้กันมาก เพราะทุ่นเวลาในการออกแบบดี แต่ถ้าเจอโครงสร้างยุ่ง ๆ แล้ว เราอาจจะไม่ทราบว่าจะจุดใดอ่อนแอที่สุดก็จำเป็นต้องตัดสินใจเอาเอง ความจริงเราก็จะมีวิธีเลือกจุดอ่อนแอเหมือนกัน แต่เราจะไม่กล่าวในหนังสือเล่มนี้

EXAMPLE 1. A two-span continuous beam simply supported at A and B and built-in at C carries a uniformly distributed load of intensity w over its entire length (Fig. 9.22a). The beam has an ISMB 300 section for which the plastic section modulus $Z_P = 648.9 \text{ cm}^3$. Calculate the limit intensity w_L of the load for complete collapse of the system.

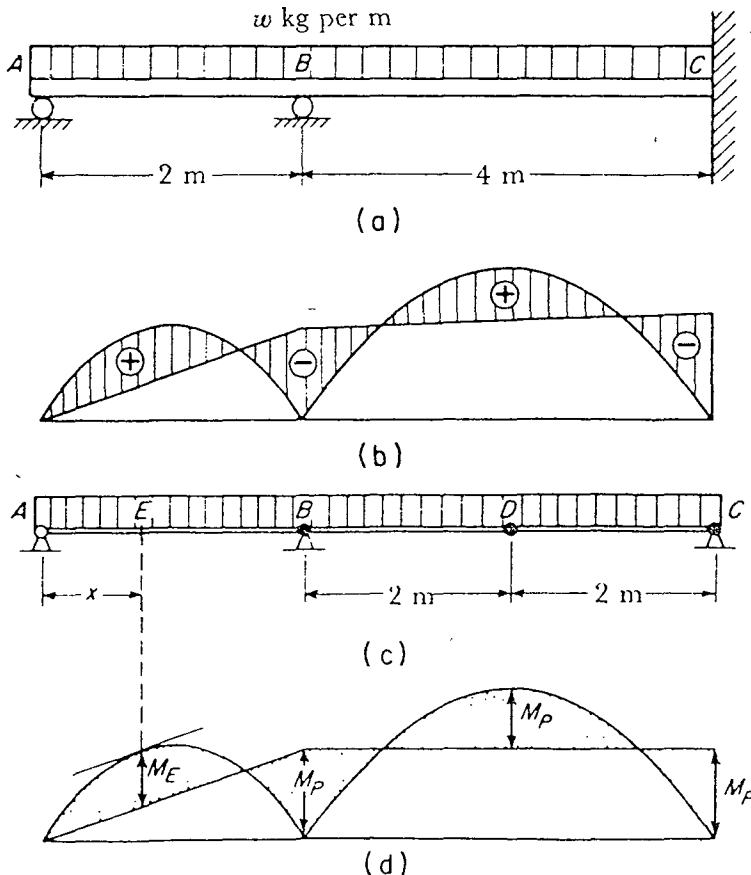


FIG. 9.22

SOLUTION.

Assuming a yield stress $\sigma_{y.p.} = 2,500 \text{ kg/cm}^2$, the corresponding plastic bending moment becomes

$$M_P = \frac{2,500 \times 648.9}{100} = 16,222 \text{ kg-m.}$$

In the completely elastic condition, the bending moment diagram for the beam will be as shown in Fig. 9.22b. From this, we see that plastic hinges are likely to form first at the supports C and B . After these hinges form, the system, on further increase in load, behaves as two simply supported beams AB and BC , until another plastic hinge forms, either at D or at E . Let us assume that D will become the next plastic hinge. Then the right-hand span becomes a mechanism and the limit load has been reached. At such time, we have for equilibrium

$$M_D = \frac{w_L l^2}{8} - M_P = M_P,$$

from which

$$w_L = \frac{16M_P}{l^2} = \frac{16 \times 16,222}{4 \times 4} = 16,222 \text{ kg/m.}$$

With a plastic hinge at B , the reaction at A will be $wl/2 - M_P/l$ and the shear force at any section distance x to the right of A becomes

$$V_x = \frac{wl}{2} - \frac{M_P}{l} - wx.$$

Then to find the section of maximum bending moment in the span AB , we set this expression equal to zero and obtain

$$x = \frac{l}{2} - \frac{M_P}{wl}. \quad (c)$$

The corresponding bending moment at E is

$$M_E = \left(\frac{wl}{2} - \frac{M_P}{l} \right) x - \frac{wx^2}{2} \quad (d)$$

Substituting the value of x from eq. (c) into eq. (d), we obtain

$$M_E = \frac{wl^2}{8} - \frac{M_P}{2} \left(1 - \frac{M_P}{wl^2} \right).$$

Taking $w = 16,222 \text{ kg per m}$, $l = 2 \text{ m}$, and $M_P = 16,222 \text{ kg-m}$, this gives $M_E = 2,028 \text{ kg-m}$. Since this is less than $M_P = 16,222 \text{ kg-m}$, we conclude that the right-hand span does collapse first and that $w_L = 16,222 \text{ kg/m}$ is the limit load intensity for the continuous beam.

PROBLEMSET 9.5

1. A two-span continuous beam carries a uniformly distributed load as shown in Fig. A. If M_P is the plastic moment for the cross-section, find the intensity w_L of the limit load. *Ans.* $w_L = 11.66M_P/l^2$.

2. The continuous beam in Fig. A has a rectangular cross-section 5 cm. wide by 10 cm deep, and $l = 2$ m. The material is structural steel with a yield stress $\sigma_{y.p.} = 2,500$ kg/cm². What is the numerical value of w_L ? *Ans.* $w_L = 9,110$ kg/m.

3. Calculate the limit value P_L for the statically indeterminate beam shown in Fig. B, if the plastic moment M_P for the section is given. *Ans.* $P_L = 6M_P/l$.

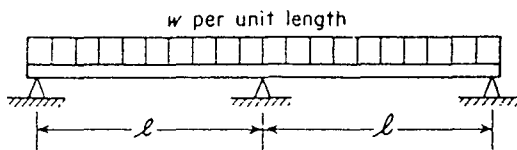


FIG. A

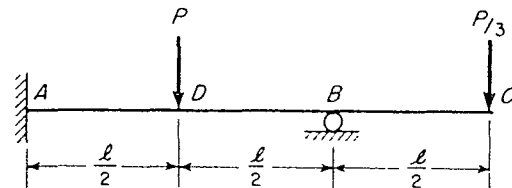


FIG. B

4. Calculate the limiting value P_L for the beam in Fig. B if the load at the end of the overhang is $P/6$ instead of $P/3$. *Ans.* $P_L = 7.2M_P/l$.

5. If the statically indeterminate beam in Fig. B carries a load P at D as shown and a load αP at C , what is the value of α to make the limit value of P a maximum and what is this maximum value? *Ans.* $P_L = 8M_P/l$ when $\alpha = \frac{1}{4}$.

6. A cantilever beam AB built-in at B is supported at A by a tie-rod and loaded with a force P as shown in Fig. C. The beam has a rectangular cross-section 5 cm wide by 2 cm deep, and the tie-rod has a circular cross-section of diameter d . Find the minimum diameter d of the tie-rod required to develop the full collapse load P_L for the beam. Both beam and tie-rod are made of structural steel with a yield stress of 2,500 kg/cm². *Ans.* $d = 0.252$ cm.

7. If the load P in Fig. C is applied at A instead of at C , what will be its limit value to produce collapse of the system? The tie-rod has diameter $d = 0.2$ cm, and all other data are the same as given in the preceding problem. *Ans.* $P_L = 141$ kg.

8. Calculate the collapse load P_L for a beam with built-in ends and loaded at the middle as shown in Fig. D. The beam has a depth of 20 cm, web thickness 0.54 cm, flanges 9.42 cm wide and 0.81 cm thick and a span $l = 3$ m. The material is structural steel with a yield stress of 2,500 kg/cm². *Ans.* $P_L = 9,933$ kg.

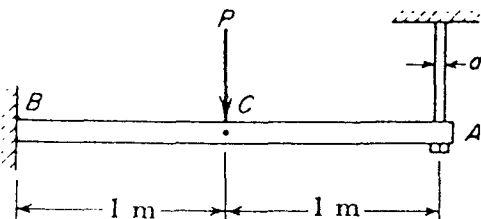


FIG. C

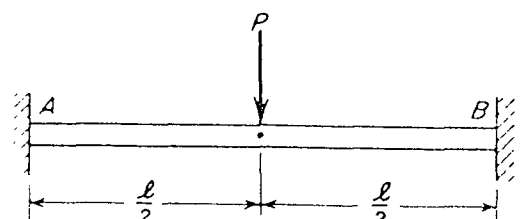


FIG. D

9. If the beam shown in Fig. D carries a uniformly distributed load of intensity w instead of the concentrated load P , find the limit value of w . Use all data as given in the preceding problem. *Ans.* $w_L = 6,622 \text{ kg/m}$.

10. A continuous frame ABC built-in at A and supported by a roller at C is subjected to the action of a horizontal force P at B as shown in Fig. E. Calculate the limit value P_L of this force if the uniform section of the frame can develop a plastic moment M_P . *Ans.* $P_L = 2M_P/l$.

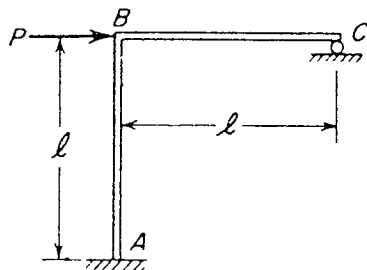


FIG. E

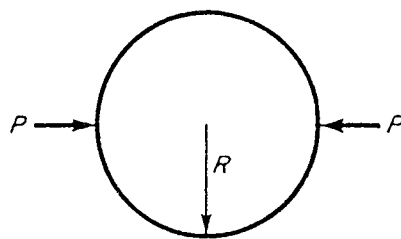


FIG. F

11. Referring to the continuous frame shown in Fig. E, assume that instead of the concentrated force P at B there is a uniformly distributed horizontal load of intensity w acting to the right on the vertical member AB . In such case, find the limit value of w necessary to produce complete collapse of the frame. *Ans.* $w_L = 4M_P/l^2$.

12. A thin steel ring of mean radius R is subjected to the action of two forces P as shown in Fig. F. The cross-section of the ring is such that the plastic moment is M_P . Find the limit load P_L for the ring. *Ans.* $P_L = 4M_P/R$.

13. If the horizontal force P in Fig. E acts at a height h above the ground level A instead of at B as shown, what will be its limit value? *Ans.* $P_L = 2M_P/h$.

14. In Fig. 9.19, p. 256, the beam AB is a steel bar with a $2\text{-cm} \times 2\text{-cm}$ -square cross-section, the post CD is the same, and the cable ADB is a steel wire having diameter $d = 0.2 \text{ cm}$. The angle $\alpha = 20^\circ$ and the span $l = 2 \text{ m}$. Calculate the limit value of the load P if both beam and cable have a yield stress of $2,500 \text{ kg/cm}^2$. *Ans.* $P_L = 153.8 \text{ kg}$.

สัปดาห์ที่ 4

หัวข้อเรื่อง การวิเคราะห์ความเครียด (1)

(3 ชั่วโมง)

ความคิดรวบยอด

1. ก่อนที่จะศึกษาการวิเคราะห์ความเครียด ควรจะเริ่มต้นจากการวิเคราะห์ความเค้นก่อน เพราะการวิเคราะห์ความเครียดในที่สุดก็จะได้ผลเป็นความเค้นนั่นเอง และสมการที่ได้จากการวิเคราะห์ความเครียดจะเทียบเคียงกับการวิเคราะห์ความเค้นได้ ทำให้เห็นความสัมพันธ์ที่มีต่อกันได้ง่ายขึ้น
2. หลักการวิเคราะห์ความเครียดในหัวข้อนี้จะแตกต่างจากที่นิสิตได้ศึกษามาแล้วก่อนหน้านี้ ซึ่งจะเป็นการหาความเค้นอย่างง่ายที่เกิดจากภาระชนิดต่างๆ เป็นอิสระแยกออกจากกัน
3. ในหัวข้อนี้จะเป็นการศึกษาสถานะของความเค้นที่ซับซ้อนกว่า เป็นแบบทั่วไปมากกว่า โดยศึกษาความเค้นที่จุดๆ หนึ่ง ในเนื้อวัสดุ และ การแปลง (transformation) ความเค้นที่จุดๆ หนึ่ง ในระบบพิกัดหนึ่ง ไปสู่อีกระบบพิกัดหนึ่ง

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. คำนวณสถานะความเค้นที่จุดๆ หนึ่งได้
2. คำนวณการแปลงความเค้นจากพิกัดแกนหนึ่งไปสู่อีกพิกัดแกนหนึ่งได้

สังเขปเนื้อหา

หน่วยที่ 3. การวิเคราะห์ความเค้น

- สถานะของความเค้นที่จุดๆ หนึ่ง
- กฎของการแปลงความเค้น

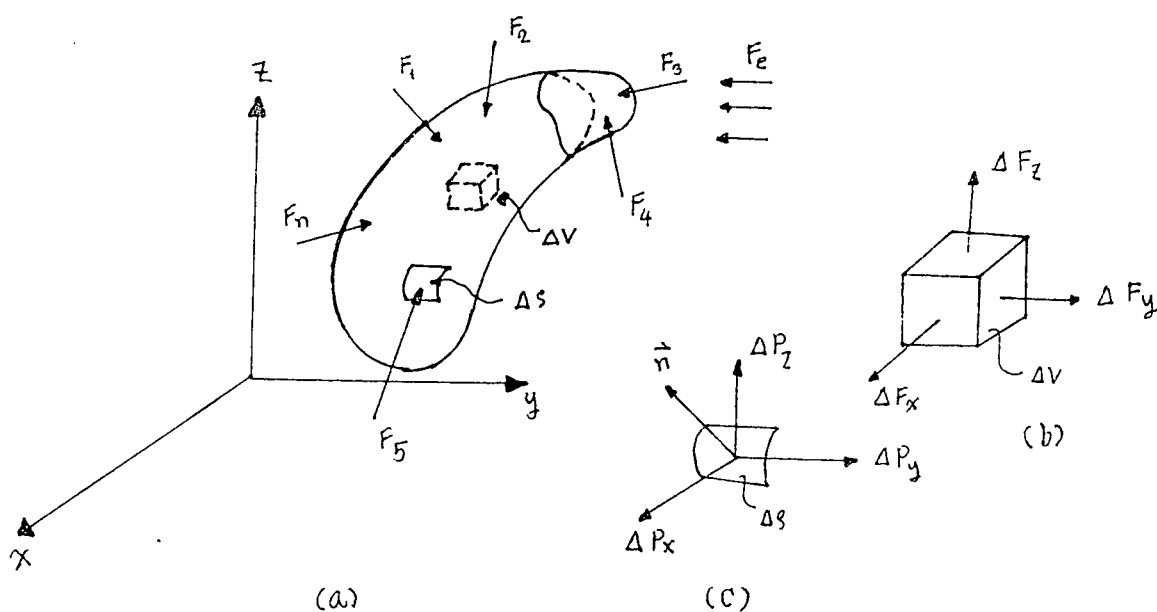
หน่วยที่ 3 การวิเคราะห์ความเค้น

1-1 คำจำกัดความของความเค้น

จุดประสงค์ของหัวข้อนี้ก็เพื่อให้คำอธิบายและคำจำกัดความของแรงต่างๆที่มากระทำต่อวัตถุยืดหยุ่น (elastic body) ตลอดจนแรงต่างๆที่เกิดขึ้นภายในวัตถุนี้หลังจากที่ถูกแรงมากระทำแล้ว ทั้งนี้ก็เพื่อที่จะได้แทนแรงต่างๆทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้อง แรงเหล่านี้คือ body force, surface force, ความเค้นดัดงอ (normal stress) และ ความเค้นเฉือน (shear stress)

Body force Body force เป็นแรงต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร แรงนี้กระทำตลอดทั่ววัตถุยืดหยุ่นทั้งก้อน และไม่ได้เป็นแรงที่เกิดจากการสัมผัสทางกายภาพ (physical contact) กับวัตถุอื่นๆ ตัวอย่างเช่น แรงเนื่องจาก แม่เหล็กไฟฟ้า (electromagnetic force field) และ แรงเฉื่อย (inertia force field) เป็นต้น

พิจารณาวัตถุยืดหยุ่นรูปร่างใดๆ ซึ่งถูกกระทำด้วยแรง $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ ตามรูป 1-1.1 a สมมุติว่าวัตถุยืดหยุ่นนี้เป็นวัตถุที่มีเนื้อเดียวกัน (continuum) นั่นคือ ถ้าเราให้ปริมาตรเล็กๆ ΔV ภายในวัตถุมีขนาดเล็กลงไปเรื่อยๆ เราจะไม่พบการเปลี่ยนคุณลักษณะ (character) ของวัตถุ ให้ F_e เป็นสนามแม่เหล็กไฟฟ้า เราตัดปริมาตร ΔV ออกมาจะพบว่า มีแรงลัพธ์ซึ่งกระทำต่อปริมาตร ΔV ในทิศทาง x, y และ z คือ $\Delta F_x, \Delta F_y, \Delta F_z$ ตามลำดับ ดังในรูป 1-1.1b



รูป 1-1.1

คำจำกัดความของ Body force ทางคณิตศาสตร์ คือ

$$X = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta V}$$

$$Y = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta V}$$

$$Z = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta V}$$

X, Y และ Z นี้คือ องค์ประกอบ (component) ของ body force ในทิศทาง x, y และ z ตามลำดับ

Surface force เป็นแรงที่กระทำต่อพื้นผิวของวัตถุยืดหยุ่น ดังเช่นแรง $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ ในรูป 1-1.1a โดยทั่วไปแล้วเราให้ surface force เป็นแรงต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ตัวอย่างของแรงประเภทนี้ คือ แรงเนื่องจากความดันของก๊าซในหม้อความดัน แรงเนื่องจากน้ำหนักที่กระทำต่อคานที่รองรับ เป็นต้น surface force ยังมีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า applied stress หรือ surface traction

ให้เราพิจารณาพื้นที่ขนาดเล็ก ΔS ที่ผิวหน้าของวัตถุยืดหยุ่นในรูป 1-1.1c สมมติว่าบน ΔS นี้มีแรงลัพธ์ในทิศทาง x, y, z เป็น $\Delta P_x, \Delta P_y, \Delta P_z$ ดังในรูปที่ 1-1.1 c ให้เวกเตอร์ $\hat{n}$ เป็น unit outward normal (vector ความยาวหนึ่งหน่วย ตั้งฉากกับ ΔS โดยมีทิศออกจาก ΔS) คำจำกัดความของ surface force บนพื้นผิว ΔS ซึ่งมี unit outward normal เวกเตอร์ $\hat{n}$ คือ

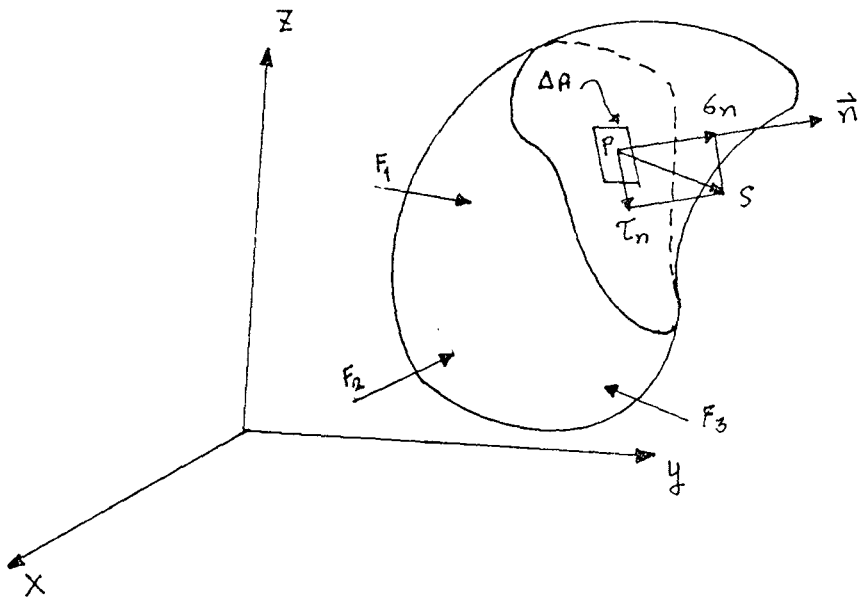
$$\bar{X} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta S}$$

$$\bar{Y} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta S}$$

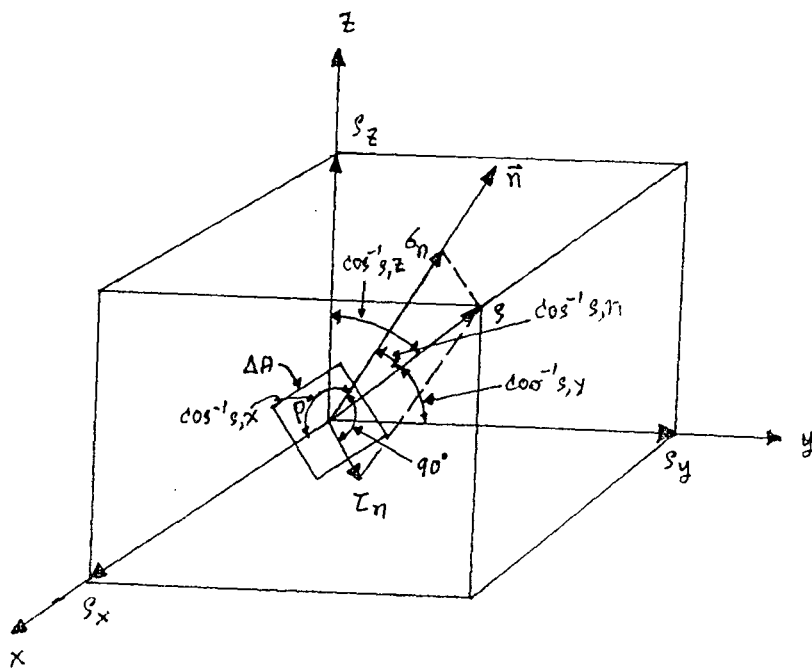
$$\bar{Z} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta S}$$

โดยที่ $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ เป็นองค์ประกอบในแนว x, y, z ของ surface force

ความเค้นตั้งฉาก และ ความเค้นเฉือน ให้เราพิจารณา surface force อีกชนิดหนึ่งซึ่งเนื่องมาจาก imaginary cut ในวัตถุยืดหยุ่นผ่านจุด P ซึ่งถูกล้อมรอบด้วยพื้นที่เล็กๆ ΔA ตามรูป 1-1.2 surface force ที่เกิดขึ้นที่จุด P นี้ เนื่องมาจาก applied load และ body force มีชื่อเรียกว่า internal stress หรือ induced stress หรือที่เรียกกันทั่วไปคือ ความเค้น (stress)



រូប 1-1.2



រូប 1-1.3

ให้เราพิจารณาความเค้นที่เกิดขึ้นที่จุด P ในรูป 1-1.2 โดยการวางแผนตามรูป 1-1.3 S_x , S_y , และ S_z เป็นองค์ประกอบในแนว x, y และ z หรือ projection ของ stress vector S ซึ่งเกิดขึ้นที่จุด P บน ΔA ที่มี เวกเตอร์ $\vec{n}$ เป็น unit outward normal กำหนดให้ $\cos(A,B)$ แทนค่า cosine ของมุมระหว่าง vector A และ B โดยวัดจากทิศทางบวกของ vector A ไปยังทิศทางบวกของ vector B ฉะนั้น

$$\begin{aligned}\cos(S, x) &= S_x/S \\ \cos(S, y) &= S_y/S \\ \cos(S, z) &= S_z/S \\ \text{และ} \quad S^2 &= S_x^2 + S_y^2 + S_z^2\end{aligned}\tag{1-1.1}$$

แทนที่เราจะแยก stress vector S ออกเป็น 3 องค์ประกอบ S_x , S_y , S_z เราก็อาจจะแยก stress vector S ออกเป็นองค์ประกอบที่ตั้งฉากและขนานกับ ΔA มีชื่อเรียกว่า ความเค้นตั้งฉาก (normal stress) σ_n ส่วนองค์ประกอบที่มีทิศทางกับ ΔS มีชื่อเรียกว่า ความเค้นเฉือน (shear stress) τ_n จากรูป 1-1.3 จะได้ว่า

$$\tau_n^2 + \sigma_n^2 = S^2\tag{1-1.2}$$

$$\text{และ} \quad \sigma_n = S \cos(S, n)\tag{1-1.3}$$

กฎของ cosine ซึ่งแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างมุมในรูป 1-1.3 คือ

$$\cos(S, n) = \cos(S, x)\cos(n, x) + \cos(S, y)\cos(n, y) + \cos(S, z)\cos(n, z)\tag{1-1.4}$$

แทนค่า $\cos(S, n)$ ลงในสมการ (1-1.3) แล้วใช้ความสัมพันธ์ (1-1.1) จะได้ว่า

$$\sigma_n = S_x \cos(n, x) + S_y \cos(n, y) + S_z \cos(n, z)\tag{1-1.5a}$$

ให้ l , m และ n เป็น direction cosine ของ unit outward normal นั่นคือ

$$l = \cos(n, x) \quad , \quad m = \cos(n, y) \quad , \quad n = \cos(n, z)$$

ฉะนั้น (1-1.5a) จะกลายเป็น

$$\sigma_n = l S_x + m S_y + n S_z\tag{1-1.5b}$$

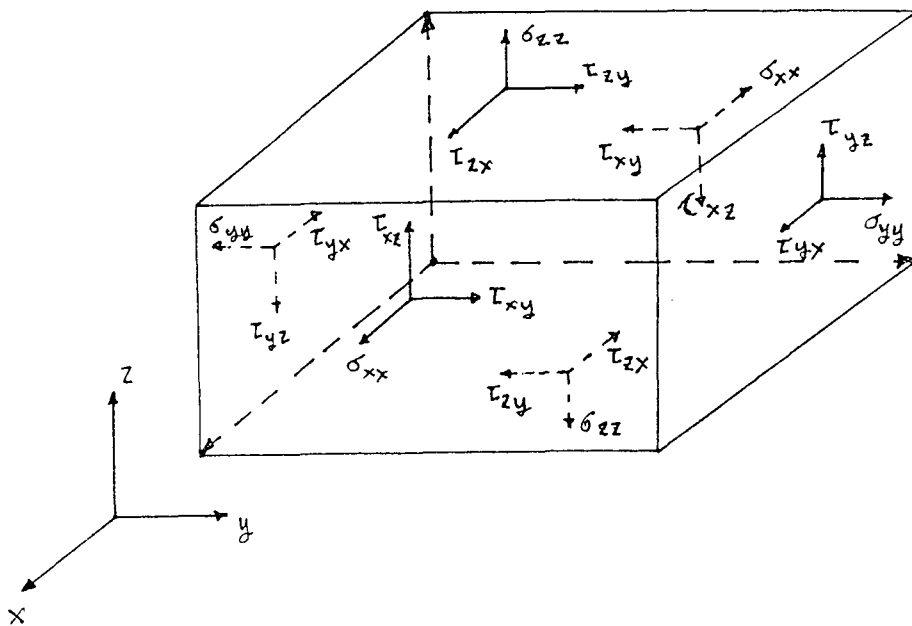
จากรูป 1-1.3 จะเห็นว่า τ_n ยังสามารถถูกแตกออกไปเป็นองค์ประกอบ 2 องค์ประกอบที่ตั้งฉากกันบนระนาบของ ΔA ฉะนั้นความเค้นที่เกิดขึ้นบนระนาบ(plane)ใดๆ จะสามารถแทนได้ด้วยความเค้นจำนวน 3 องค์ประกอบที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน คือ ความเค้นตั้งฉากหนึ่งองค์ประกอบ และ ความเค้นเฉือนสององค์ประกอบ

ข้อตกลงเกี่ยวกับเครื่องหมาย จากหัวข้อที่แล้วเราได้แสดงให้เห็นแล้วว่าความเค้นที่เกิดขึ้นบนระนาบใดๆจะสามารถแทนได้ด้วยความเค้นตั้งฉาก 1 องค์ประกอบและความเค้นเฉือน 2 องค์ประกอบ ในกรณีของวัตถุสามมิติโดยทั่วไปแล้วจะมีความเค้นทั้งหมด 9 องค์ประกอบ ฉะนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องมียุทธวิธีการแทนความเค้นเหล่านี้ให้รัดกุม เพื่อที่จะได้ไม่สับสนในเวลาคำนวณ

ให้พิจารณารูปสี่เหลี่ยมซึ่งมีด้านขนานกับแนวแกน x, y, z บนแต่ละระนาบจะมีความเค้นอยู่สามองค์ประกอบ ดังที่แสดงอยู่ในรูป 1-1.4 โดยที่ σ เป็น ความเค้นตั้งฉาก และ τ เป็น ความเค้นเฉือน ความหมายของ Subscript มีดังต่อไปนี้

Subscript ตัวแรกบอกถึงทิศทางของ normal vector ของระนาบที่ Stress Component นั้นกระทำอยู่ ส่วน Subscript ตัวที่สองบอกถึงทิศทางของ Stress Component บนระนาบนั้น ตัวอย่างเช่น τ_{yx} หมายถึง ความเค้นเฉือนที่มีทิศทางขนานกับแนวแกน x และกระทำอยู่บนระนาบซึ่งมี normal vector ขนานกับแกน y ทิศทางของ Stress ที่แสดงอยู่ในรูป 1-1.4 เป็น ทิศทางบวกทั้งหมด กฎในการคิดเครื่องหมายมีดังต่อไปนี้

สำหรับความเค้นตั้งฉาก ให้ถือเป็นบวกเมื่อมีทิศทางออกจากระนาบ และเป็นลบเมื่อมีทิศทางเข้าสู่ระนาบ ความเค้นตั้งฉากที่มีค่าเป็นบวกเรียกว่า ความเค้นดึง (tensile stress) และที่มีค่าเป็นลบเรียกว่า ความเค้นอัด (compressive stress)



รูป 1-1.4

ความเค้นเฉือน τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{xz} , τ_{zx} , τ_{yz} และ τ_{zy} มีค่าเป็นบวก เมื่อมีทิศทางเดียวกับทิศทางบวกของแกน ในขณะที่กระทำอยู่บนระนาบซึ่งมี unit outward normal ในทิศทางบวกของแกน ถ้า unit outward normal ของระนาบที่ความเค้นเฉือนกระทำมีทิศทางตรงกันข้ามกับทิศบวกของแกน ทิศทางบวกของความเค้นเฉือนก็จะมีทิศทางตรงกันข้ามกับทิศบวกของแกนด้วย ความเค้นเฉือนจะมีค่าเป็นลบเมื่อมีทิศทางกลับกันกับที่ได้กล่าวมาแล้ว

องค์ประกอบของความเค้นทั้ง 9 นี้รวมกันมีชื่อเรียกว่า Stress tensor และใช้เขียนแทนด้วย

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

1-2 สถานะของความเค้นที่จุด ๆ หนึ่ง

ความเค้นที่จุด ๆ หนึ่ง ค่าของความเค้นที่จุดๆหนึ่งจะมีค่าแตกต่างกันออกไป แล้วแต่ลักษณะการเอียงของระนาบที่ผ่านจุดนั้น ด้วยเหตุนี้เราจึงจะหาความเค้นที่จุดๆหนึ่งแต่เพียงอย่างเดียวไม่ได้ แต่เราสามารถที่จะหาความเค้นบนระนาบที่ผ่านจุดนั้นได้ โดยการใช unit outward normal แสดงถึงลักษณะการเอียงของระนาบหรือที่เราเรียกว่าสถานะของความเค้นที่จุดนั้น ทั้งนี้เราต้องทราบค่าของความเค้นซึ่งกระทำบนระนาบที่ขนานกับแกน x, y และ z ที่ผ่านจุดนั้นก่อน

พิจารณารูป tetrahedron ABCP ซึ่งมีระนาบ APC, BPC และ APB ขนานกับระนาบ xz, yz และ xy ตามลำดับ h เป็นระยะตั้งฉากจากจุด P ถึงระนาบ ABC ซึ่งมี unit outward normal โดยที่

$$\cos (n,x) = l, \cos (n,y) = m, \cos (n,z) = n$$

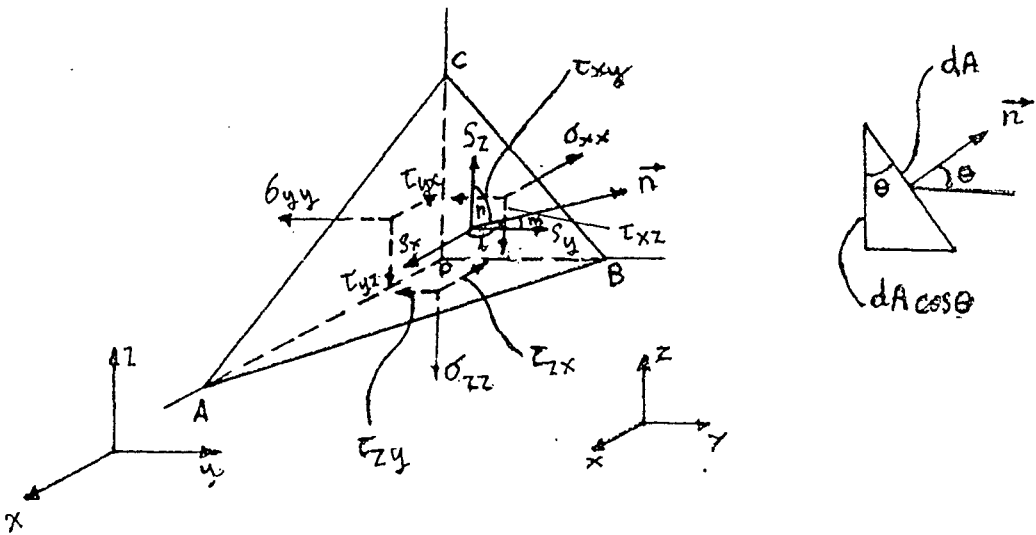
ถ้ารูป tetrahedron นี้มีขนาดเล็กลงโดยที่ h มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ เราจะได้ความเค้นที่กระทำบนระนาบเอียง ABC ผ่านจุด P

ให้ S_x, S_y, S_z เป็นองค์ประกอบของ stress vector บนระนาบ ABC ในทิศทาง x, y และ z ตามลำดับ X, Y และ Z เป็น body force และ dA เป็นพื้นที่ของระนาบ ABC พื้นที่ของระนาบอื่นๆมีความสัมพันธ์กับพื้นที่ของระนาบ ABC ดังนี้

$$\text{ระนาบ BPC} = dA_x = l dA$$

$$\text{ระนาบ APC} = dA_y = m dA$$

$$\text{ระนาบ APB} = dA_z = n dA$$



รูป 1-2.1

ปริมาตรของ tetrahedron เท่ากับ $h \, dA/3$ เนื่องจาก tetrahedron นี้อยู่ในภาวะสมดุลฉะนั้นสมมูลแรงในทิศ x ต้องเป็นศูนย์ นั่นคือ

$$[\sum F_x = 0] \quad S_x \, dA + \frac{X \, h \, dA}{3} = \sigma_{xx} l \, dA + \tau_{yx} m \, dA + \tau_{zx} n \, dA$$

หารตลอดด้วย dA เราจะได้ว่า

$$S_x - X \, h/3 = l \, \sigma_{xx} + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n$$

เนื่องจากว่า $h \rightarrow 0$

$$S_x = l \, \sigma_{xx} + m \, \tau_{yx} + n \, \tau_{zx}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเรารวมแรงในทิศ y และ z เราก็จะได้รับความสัมพันธ์คล้ายคลึงกันอีก 2 สมการ ดังนั้นสมการซึ่งแสดงถึงสถานะของความเค้นที่จุด P คือ

$$\begin{aligned} S_x &= l \, \sigma_{xx} + m \, \tau_{yx} + n \, \tau_{zx} \\ S_y &= l \, \tau_{xy} + m \, \sigma_{yy} + n \, \tau_{zy} \\ S_z &= l \, \tau_{xz} + m \, \tau_{yz} + n \, \sigma_{zz} \end{aligned} \quad (1-2.1)$$

ตัวอย่าง 1-2.1 กำหนดให้ stress tensor

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \times c \, \text{N/mm}^2$$

โดยที่ c เป็นค่าคงที่

(1) จงหาความเค้นบนระนาบ ซึ่ง direction cosine ของ unit outward normal เป็น

$$(l = 1/\sqrt{3}, m = 1/\sqrt{3}, n = -1/\sqrt{3})$$

(2) จงหาความเค้นตั้งฉาก σ_n และความเค้นเฉือน τ_n บนระนาบนี้

วิธีทำ(1) ในที่นี้ $l = 1/\sqrt{3}, m = 1/\sqrt{3}, n = -1/\sqrt{3}$ จากสมการ (1-2.1)

$$S_x = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)(3) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)(1) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)(4) \right] c = 0 \, \text{N/mm}^2$$

$$S_y = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)(1) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)(2) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)(-5) \right] c = 8c/\sqrt{3} \, \text{N/mm}^2$$

$$S_z = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)(4) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)(-5) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)(0) \right] c = -c/\sqrt{3} \, \text{N/mm}^2$$

$$S = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = 65c^2/3 \, \text{N/mm}^2$$

ตอบ

(2) จากสมการ (1-1.5b)

$$\sigma_n = 1 S_x + m S_y + n S_z$$

$$\sigma_n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(0) - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{8c}{3}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{c}{\sqrt{3}}\right) = -3c \text{ N/mm}^2 \quad \text{ตอบ}$$

จากสมการ (1-1.2)

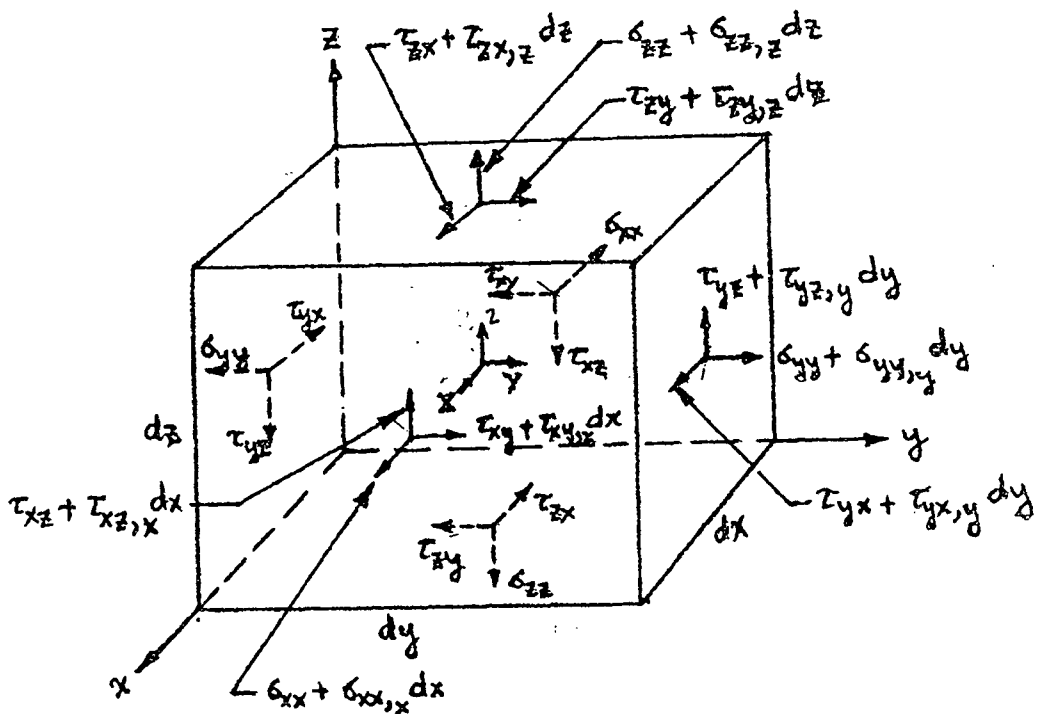
$$\tau_n^2 + \sigma_n^2 = S^2$$

$$\tau_n^2 + (3c)^2 = \frac{65}{3} c^2$$

$$\tau_n = \sqrt{\frac{38}{3}} c \text{ N/mm}^2 \quad \text{ตอบ}$$

สมการของการสมดุลของวัตถุยืดหยุ่น ในการที่จะหาสมการสมดุลซึ่งทุกๆส่วนของวัตถุยืดหยุ่นจะต้องสอดคล้อง (satisfy) นั้น ให้เราพิจารณาปริมาตรสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาดเล็กที่มีขอบขนานกับแกน x , y , และ z และมีขนาด dx , dy , dz , โดยให้เราคิดเสียว่าปริมาตรนี้ถูกตัดออกมาจากส่วนหนึ่งของวัตถุยืดหยุ่น ตามรูป 1-2.2 ให้เราใช้เครื่องหมายลูกน้ำ (,) แทน partial derivative เช่น

$$\sigma_{xx,x} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}, \quad \tau_{xy,x} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}$$



รูป 1-2.2

โดยทั่วไปแล้ว เมื่อเราเคลื่อนที่จากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งบนวัตถุยืดหยุ่น องค์ประกอบของความเค้นก็ย่อมจะมีค่าเปลี่ยนไปด้วย ส่วนเปลี่ยนขององค์ประกอบของความเค้นจากระนาบด้านหนึ่งไปยังอีกด้านหนึ่งนั่นคือ เทอมซึ่งเป็น partial derivative ในรูป 1-2.2 เช่นระนาบที่มี unit outward normal ในทิศ y จะมีส่วนเปลี่ยนเป็น $\tau_{yx} dy$, $\sigma_{yy} dy$ และ $\tau_{yz} dy$ เป็นต้น

เงื่อนไขในการอยู่ในภาวะสมดุลมี 6 เงื่อนไขคือ แรงรวมในทิศ x, y และ z ต้องเท่ากับศูนย์ และการสมดุลโมเมนต์รอบแกนทั้งสามต้องเป็นศูนย์ หรือ

$$\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = \sum M_x = \sum M_y = \sum M_z = 0$$

ถ้าเราใช้เงื่อนไขแรกเราจะได้ว่า

$$[\sum F_x = 0] \quad (\sigma_{xx} + \sigma_{xx} dx) dy dz - \sigma_{xx} dy dz + (\tau_{yx} + \tau_{yx} dy) dx dz - \tau_{yx} dx dz - (\tau_{xz} + \tau_{xz} dz) dx dy - \tau_{xz} dx dy - X dx dy dz = 0$$

หลังจากรวมเทอมต่างๆแล้วหารตลอดด้วย $dx dy dz$ เราจะได้

$$\sigma_{xx} + \tau_{yx} + \tau_{xz} + X = 0$$

ในทำนองเดียวกัน เงื่อนไข $\sum F_x = 0$ และ $\sum F_y = 0$ ก็จะทำให้สมการการสมดุลที่ได้จากการสมดุลแรงทั้ง 3 ทิศทาง คือ

$$\sigma_{xx} + \tau_{yx} + \tau_{xz} + X = 0 \quad (1-2.2a)$$

$$\tau_{yx} + \sigma_{yy} + \tau_{yz} + Y = 0 \quad (1-2.2b)$$

$$\tau_{xz} + \tau_{yz} + \sigma_{zz} + Z = 0 \quad (1-2.2c)$$

เพื่อความสะดวกในการที่จะรวมโมเมนต์ ให้เราเลื่อนแกน x y z มาอยู่ตรงศูนย์กลางของปริมาตรสี่เหลี่ยมผืนผ้าตรง Body force กระทำ

$$[\sum M_x = 0] \quad (\tau_{yz} + \tau_{yz} dy)(dx dz)(dy/2) + \tau_{yx}(dx dz)(dy/2) - (\tau_{xz} + \tau_{xz} dz)(dx dy)(dz/2) + \tau_{xy}(dx dy)(dz/2) = 0$$

รวมเทอมต่างๆ แล้วหารตลอดด้วย $dx dy dz$ เราจะได้

$$\tau_{yz} + \tau_{yz}(dy/2) - \tau_{xz} - \tau_{xz}(dz/2) = 0$$

เนื่องจากขนาด $dx dy dz$ มีขนาดเล็กมาก ฉะนั้นเทอมที่คูณด้วย dy และ dz จะมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับค่าของเทอมอื่นๆ ดังนั้น

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

ต่อมา ถ้าเราใช้ $\Sigma M_y = 0$ และ $\Sigma M_z = 0$ เราก็จะได้ผลทำนองเดียวกันนี้ สรุปผลที่ได้จากการสมดุลโมเมนต์คือ

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (1-2.2d)$$

ฉะนั้นองค์ประกอบของความเค้นทั้ง 9 ของ stress tensor จะมีค่าต่างกันเพียง 6 ค่าเท่านั้น เราเรียกคุณสมบัติของ stress tensor ตามสมการ (1-2.2d) ว่าเป็น symmetric stress tensor

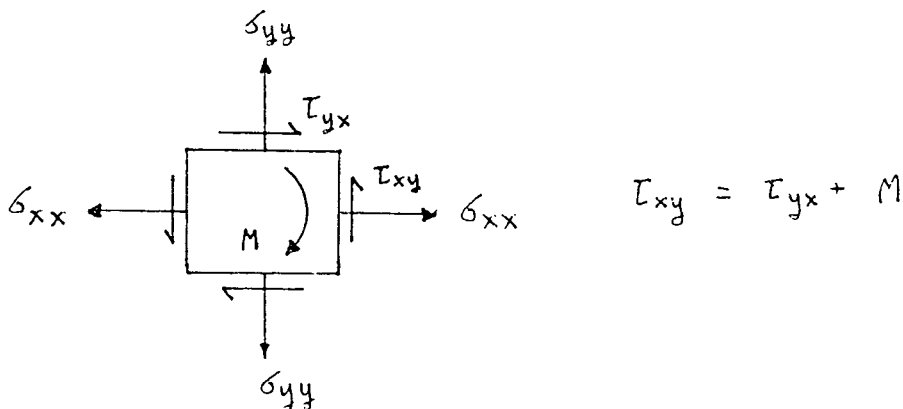
Body moment หมายถึงโมเมนต์ต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร body moment นี้กระทำตลอดทั่ววัตถุยืดหยุ่นทั้งก้อน และไม่ได้เกิดขึ้นเนื่องมาจากการสัมผัสทางกายภาพ ทำนองเดียวกับ body force ตัวอย่างเช่น วัตถุยืดหยุ่นที่ประกอบขึ้นด้วยอนุภาคแม่เหล็กซึ่งกระจายออกไปโดยไม่สม่ำเสมอ เมื่อวัตถุนี้ไปอยู่ในสนามแม่เหล็กก็ย่อมจะเกิด body moment ขึ้น ในกรณีซึ่งมี body moment มากระทำต่อวัตถุยืดหยุ่น ถ้าเราใช้ $\Sigma M_x = 0, \Sigma M_y = 0$, และ $\Sigma M_z = 0$ เราจะเห็นได้ว่า stress tensor จะไม่ symmetric คือ

$$\begin{aligned} [\Sigma M = 0] \quad & (\tau_{yx} + \tau_{xy,x} dy) dx dy/2 dz + \tau_{yx} dx dy/2 dz + \\ & (\tau_{xy} + \tau_{xy,x} dx) dx/2 dy dz - \tau_{xy} dx/2 dy dz + M dx dy dz = 0 \\ & 2 \tau_{yx} dx dy/2 dz + \tau_{xy,x} dx dy dz/2 - \\ & 2 \tau_{xy} dx dy dz/2 - \tau_{xy,x} dx dy dz/2 + M dx dy dz = 0 \end{aligned}$$

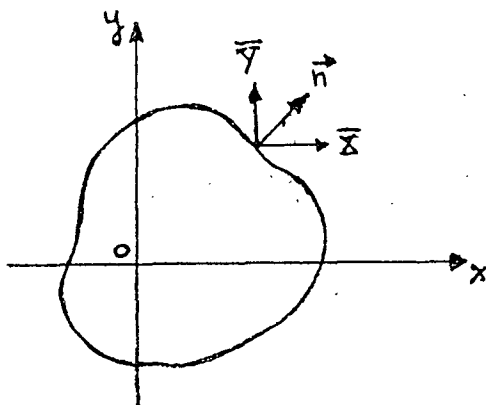
ตัดเทอมที่มี $dx dy dz$ ที่มีอันดับสูงกว่า เพราะว่ามีย่าน้อยมาก จะได้

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} + M$$

ซึ่งเป็น unsymmetrical shear stress ดังแสดงในรูป 1-2.3



รูป 1-2.3



รูป 1-2.4

เงื่อนไขขอบเขตของความเค้น (Stress Boundary Conditions) เมื่อวัตถุยืดหยุ่นถูกกระทำด้วยแรงภายนอกและอยู่ในภาวะสมดุล เราได้แสดงให้เห็นแล้วว่าองค์ประกอบของความเค้นจะต้องสอดคล้องกับสมการ (1-2.2a, b, c) ณ ทุกๆ จุดตลอดทั่วทั้งก้อนวัตถุนั้น ความเค้นเหล่านี้จะมีค่าเปลี่ยนไปตามตลอดทั่ววัตถุยืดหยุ่นและเมื่อมาถึงผิวนอกหรือขอบเขตของวัตถุยืดหยุ่น องค์ประกอบของความเค้นก็ต้องอยู่ในภาวะสมดุลกับแรงภายนอกที่ขอบเขตด้วย เงื่อนไขของการสมดุลที่ขอบเขตเรียกว่า **เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions)**

ให้ $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ เป็น surface force ณ จุดซึ่งกำลังพิจารณา จากสมการ (1-2.1) เราจะเห็นได้ว่าที่ขอบเขต

$$\begin{aligned}\bar{X} &= l\sigma_{xx} + m\tau_{xy} - n\tau_{xz} \\ \bar{Y} &= l\tau_{xy} - m\sigma_{yy} - n\tau_{yz} \\ \bar{Z} &= l\tau_{xz} - m\tau_{yz} - n\sigma_{zz}\end{aligned}\quad (1-2.3a)$$

ในกรณีของ 2 มิติ $\tau_{xx} = \tau_{yy} = \sigma_{zz} = 0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\bar{X} &= l\sigma_{xx} + m\tau_{xy} \\ \bar{Y} &= l\tau_{xy} - m\sigma_{yy}\end{aligned}\quad (1-2.3b)$$

ตัวอย่าง 1-2.2 กำหนดให้ stress tensor

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & xy & xz \\ xy & y^2 + z^2 & yz \\ xz & yz & x^2 + z^2 \end{pmatrix} \quad \text{N/mm}^2$$

จงหา body force ซึ่งจะทำให้ stress field นี้สอดคล้องกับเงื่อนไขของการสมดุล

วิธีทำ จากสมการ (1-2.2 a, b, c)

$$\sigma_{xx,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{zx,z} + X = 0$$

$$\tau_{yx,x} + \sigma_{yy,y} + \tau_{zy,z} + Y = 0$$

$$\tau_{zx,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{zz,z} + Z = 0$$

ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$2x - x + x - X = 0$$

$$y - 2y + y - Y = 0$$

$$z - z + 2z - Z = 0$$

หรือ

$$X = -4x$$

$$Y = -4y$$

$$Z = -4z$$

ตอบ

1-3 กฎของการแปลงความเค้น

ในหัวข้อ 1-2.1 เราได้แสดงถึงวิธีการหาค่าประกอบของ Stress vector (S_x , S_y , S_z) ซึ่งกระทำบน ระนาบ ABC ใดๆผ่านจุด P แต่อาจมีกรณีหลายกรณีที่เรากำลังต้องการที่จะแปลงองค์ประกอบของความเค้นจากระบบแกนชุดหนึ่งไปยังระบบแกนอีกชุดหนึ่ง เพื่อประโยชน์ในการวิเคราะห์ความเค้น และนำไปใช้ในการคำนวณออกแบบ เช่น ต้องการหา ความเค้นหลัก (principal stress) เพื่อนำไปใช้ในทฤษฎีของการเสียหาย (Theory of failures) หรือ ทฤษฎีความแข็งแรง เป็นต้น ดังนั้นในหัวข้อนี้ เราจะแสดงวิธีการแปลงองค์ประกอบของความเค้นจากระบบแกนเดิม (x, y, z) ไปยังระบบแกนใหม่ (x', y', z')

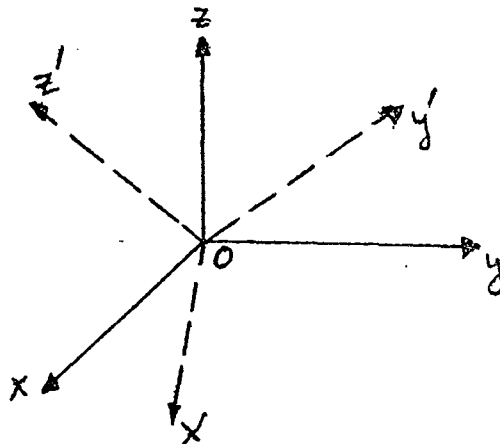
ให้พิจารณาระบบแกนแบบ orthogonal coordinate system 2 ชุด คือ $oxyz$ และ $ox'y'z'$ ดังในรูป 1-3.1 ให้ direction cosine ของมุมทั้ง 9 ระหว่างแกน 2 ชุดนี้ แทนด้วยอักษรตามตารางที่ 1-3.1 เช่น

$$l_1 = \cos(x', x), \quad m_1 = \cos(x', z), \quad n_1 = \cos(y', y), \quad l_2 = \cos(y', x), \quad m_2 = \cos(y', z), \quad n_2 = \cos(z', z),$$

เป็นต้น

ตารางที่ 1-3.1

	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3



รูป 1-3.1

ความสัมพันธ์ระหว่าง direction cosine ทั้ง 9 ซึ่งเราจะต้องใช้ในภายหลังคือ

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$$

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

$$l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 = 0$$

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0 \quad (1-3.1)$$

$$n_1 l_1 + n_2 l_2 + n_3 l_3 = 0$$

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

$$l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0$$

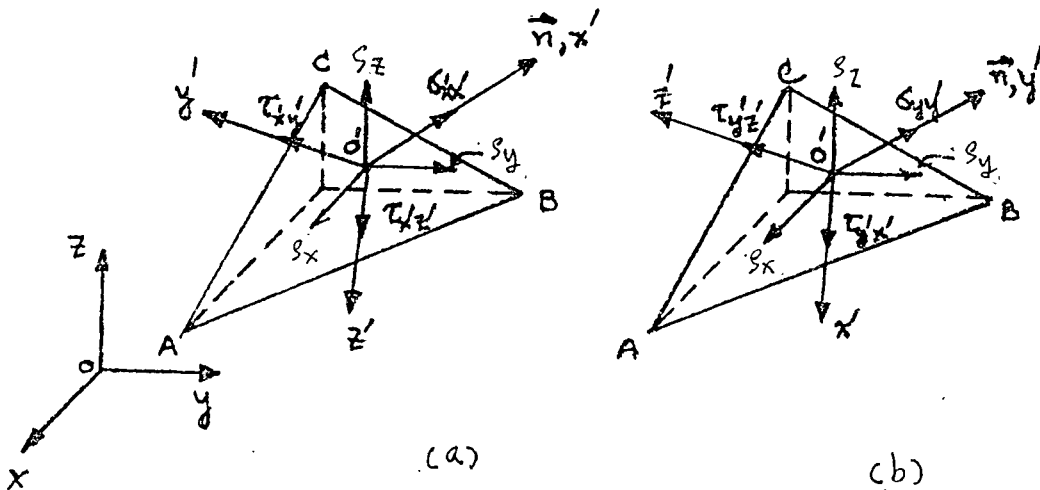
$$l_3 l_1 + m_3 m_1 + n_3 n_1 = 0$$

ในขั้นแรกของการแปลงองค์ประกอบของความเค้นนี้ให้เราพิจารณารูป 1-3.2a ให้แกน $o'x'y'z'$ มีแกน x' อยู่ในทิศทางเดียวกันกับ unit outward normal $\vec{n}$ ฉะนั้นองค์ประกอบของความเค้นบนระนาบ ABC ในแนวแกน $o'x'y'z'$ คือ $\sigma_{x'x'} \tau_{x'y'} \tau_{x'z'}$ เนื่องจากว่า x' และ n มีทิศทางเดียวกัน ฉะนั้น

$$\cos(n, x) = \cos(x', x)$$

$$\cos(n, y) = \cos(x', y)$$

$$\cos(n, z) = \cos(x', z)$$



รูป 1-3.2

จากสมการ (1-2.1) เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} S_x &= I_1 \sigma_{xx} + m_1 \tau_{yx} + n_1 \tau_{zx} \\ S_y &= I_1 \tau_{xy} + m_1 \sigma_{yy} + n_1 \tau_{zy} \\ S_z &= I_1 \tau_{xz} + m_1 \tau_{yz} + n_1 \sigma_{zz} \end{aligned} \quad (1-3.2)$$

นอกจากนี้ $\sigma_n = \sigma_{x'x'}$ ดังนั้นจากสมการ (1-1.5 b)

$$\sigma_n = \sigma_{x'x'} = I_1 S_x + m_1 S_y + n_1 S_z \quad (1-3.3a)$$

นั่นคือ $\sigma_{x'x'}$ เท่ากับ ผลรวมของ projection ของ S_x, S_y, S_z ลงบนแกน x' ในทำนองเดียวกัน $\tau_{x'y'}$ และ $\tau_{x'z'}$ ก็เท่ากับผลรวมของ projection ของ S_x, S_y, S_z ลงบนแกน y' และ z' ตามลำดับ

$$\tau_{xy'} = \tau_{x'y'} = I_2 S_x + m_2 S_y + n_2 S_z \quad (1-3.3b)$$

$$\tau_{xz'} = \tau_{x'z'} = I_3 S_x + m_3 S_y + n_3 S_z \quad (1-3.3c)$$

แทนค่าสมการ (1-3.2) ลงใน (1-3.3 a , b , c) เราจะได้ว่า

$$\sigma_{x'x'} = I_1^2 \sigma_{xx} + m_1^2 \sigma_{yy} + n_1^2 \sigma_{zz} + 2I_1 m_1 \tau_{xy} + 2m_1 n_1 \tau_{yz} + 2n_1 I_1 \tau_{zx} \quad (1-3.4a)$$

$$\begin{aligned} \tau_{x'y'} &= I_1 I_2 \sigma_{xx} + m_1 m_2 \sigma_{yy} + n_1 n_2 \sigma_{zz} + (I_1 m_2 + m_1 I_2) \tau_{xy} + \\ &\quad (m_1 n_2 + n_1 m_2) \tau_{yz} + (n_1 I_2 + I_1 n_2) \tau_{zx} \end{aligned} \quad (1-3.4b)$$

$$\begin{aligned} \tau_{x'z'} &= I_3 I_1 \sigma_{xx} + m_3 m_1 \sigma_{yy} + n_3 n_1 \sigma_{zz} + (I_3 m_1 + m_3 I_1) \tau_{xy} + \\ &\quad (m_3 n_1 + n_3 m_1) \tau_{yz} + (n_3 I_1 + I_3 n_1) \tau_{zx} \end{aligned} \quad (1-3.4c)$$

ถ้าเราพิจารณารูป tetrahedron อีกรูปหนึ่ง โดยให้แกน y' อยู่ในทิศเดียวกันกับ n ดังรูป 1-3.2 b เราก็จะได้ว่า

$$\begin{aligned} S_x &= I_2 \sigma_{xx} + m_2 \tau_{yx} + n_2 \tau_{zx} \\ S_y &= I_2 \tau_{xy} + m_2 \sigma_{yy} + n_2 \tau_{zy} \\ S_z &= I_2 \tau_{xz} + m_2 \tau_{yz} + n_2 \sigma_{zz} \end{aligned} \quad (1-3.5)$$

และผลรวมของ projection ของ S_x, S_y, S_z ลงบนแกน x', y', z' คือ

$$\begin{aligned} \tau_{yx'} &= I_1 S_x + m_1 S_y + n_1 S_z \\ \tau_{yy'} &= I_2 S_x + m_2 S_y + n_2 S_z \\ \tau_{yz'} &= I_3 S_x + m_3 S_y + n_3 S_z \end{aligned} \quad (1-3.6)$$

ถ้าเราแทนค่าสมการ (1-3.5) ลงในสมการ (1-3.6) เราก็จะได้ความสัมพันธ์ในลักษณะเดียวกันกับสมการ (1-3.4) ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราพิจารณารูป tetrahedron อีกรูปหนึ่ง โดยให้แกน z' อยู่ในแนว n เราก็จะได้สมการสำหรับการแปลงองค์ประกอบของความเค้นจากระบบแกนชุดหนึ่งไปยังระบบแกนอีกชุดหนึ่งโดยครบถ้วน ดังที่ได้รวบรวมเอาไว้ต่อไปนี้

$$\sigma_{x'x'} = l_1^2 \sigma_{xx} + m_1^2 \sigma_{yy} + n_1^2 \sigma_{zz} + 2l_1m_1\tau_{xy} + 2m_1n_1\tau_{yz} + 2n_1l_1\tau_{zx} \quad (1-3.7a)$$

$$\sigma_{y'y'} = l_2^2 \sigma_{xx} + m_2^2 \sigma_{yy} + n_2^2 \sigma_{zz} + 2l_2m_2\tau_{xy} + 2m_2n_2\tau_{yz} + 2n_2l_2\tau_{zx} \quad (1-3.7b)$$

$$\sigma_{z'z'} = l_3^2 \sigma_{xx} + m_3^2 \sigma_{yy} + n_3^2 \sigma_{zz} + 2l_3m_3\tau_{xy} + 2m_3n_3\tau_{yz} + 2n_3l_3\tau_{zx} \quad (1-3.6c)$$

$$\begin{aligned} \tau_{x'y'} &= l_1l_2\sigma_{xx} + m_1m_2\sigma_{yy} + n_1n_2\sigma_{zz} + (l_1m_2 + m_1l_2)\tau_{xy} + (m_1n_2 + n_1m_2)\tau_{yz} \\ &\quad + (n_1l_2 + l_1n_2)\tau_{zx} \end{aligned} \quad (1-3.7d)$$

$$\begin{aligned} \tau_{y'z'} &= l_2l_3\sigma_{xx} + m_2m_3\sigma_{yy} + n_2n_3\sigma_{zz} + (l_2m_3 + m_2l_3)\tau_{xy} + (m_2n_3 + n_2m_3)\tau_{yz} \\ &\quad + (n_2l_3 + l_2n_3)\tau_{zx} \end{aligned} \quad (1-3.7e)$$

$$\begin{aligned} \tau_{z'x'} &= l_3l_1\sigma_{xx} + m_3m_1\sigma_{yy} + n_3n_1\sigma_{zz} + (l_3m_1 + m_3l_1)\tau_{xy} + (m_3n_1 + n_3m_1)\tau_{yz} \\ &\quad + (n_3l_1 + l_3n_1)\tau_{zx} \end{aligned} \quad (1-3.7f)$$

สัปดาห์ที่ 5

หัวข้อเรื่อง การวิเคราะห์ความเครียด (2)

(3 ชั่วโมง)

ความคิดรวบยอด

1. สถานะของความเครียดต่างๆจะมีสถานะของความเครียดที่สำคัญคือ สถานะที่ความเครียดมีค่าสูงสุด เรียกว่าความเครียดหลัก โดยจะเกิดบนระนาบที่ความเครียดนี้มีค่าเป็นศูนย์เสมอ
2. สถานะของความเครียดที่สำคัญอีกสถานะหนึ่งก็คือ สถานะที่ความเครียดนี้มีค่าสูงสุด โดยบนระนาบที่เกิดความเครียดสูงสุดนี้จะมีค่าความเครียดตั้งฉากเกิดขึ้นร่วมหรือไม่ก็ได้
3. การหาความเครียดหลักในสถานะความเครียดต่างๆที่กำหนดจะหาได้อย่างง่ายโดยใช้วงกลมของโมร์ ซึ่งเป็นความสัมพันธ์เชิงกราฟของความเครียดตั้งฉากกับความเครียด หัวข้อนี้จะเป็นประโยชน์อย่างยิ่งในการศึกษาเรื่องทฤษฎีความแข็งแรง

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. คำนวณหาความเครียดหลักได้
2. ใช้วงกลมของโมร์หาความเครียดได้

สังเขปเนื้อหา

หน่วยที่ 3. การวิเคราะห์ความเค้น (ต่อ)

- ความเค้นหลัก
- วงกลมของโมร์

1-4 ความเค้นหลัก

ความเค้นหลัก (Principal Stress) คือความเค้นที่กระทำบนระนาบหนึ่งซึ่งไม่มีความเค้นเฉือนเกิดขึ้นเลย เราเรียกระนาบนี้ว่า ระนาบหลัก (principal plane) และ unit outward normal ซึ่ง direction cosine ของมันแสดงลักษณะการเอียงของระนาบนี้เรียกว่า ทิศทางหลัก (principal direction)

ในการหาความเค้นหลัก ให้เราพิจารณารูป 1-4.1 ให้ σ เป็นความเค้นหลัก และ l, m, n เป็น direction cosine ของระนาบที่ σ เกิดขึ้น ดังนั้น องค์ประกอบในแนว x, y, z ของ σ ต้องมีค่าเท่ากับ S_x, S_y, S_z ตามลำดับ นั่นคือ

$$\begin{aligned} S_x &= l \sigma \\ S_y &= m \sigma \\ S_z &= n \sigma \end{aligned} \quad (1-4.1)$$

แทนค่าสมการ (1-4.1) ลงในสมการ (1-2.1) ดังนั้น

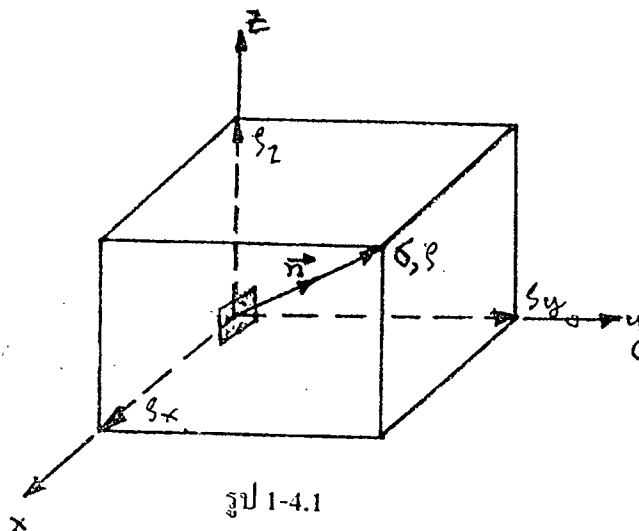
$$\begin{aligned} l \sigma &= l \sigma_{xx} + m \tau_{yx} + n \tau_{zx} \\ m \sigma &= l \tau_{xy} + m \sigma_{yy} + n \tau_{zy} \\ n \sigma &= l \tau_{xz} + m \tau_{yz} + n \sigma_{zz} \end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{aligned} l (\sigma_{xx} - \sigma) + m \tau_{yx} + n \tau_{zx} &= 0 \\ l \tau_{xy} + m (\sigma_{yy} - \sigma) + n \tau_{zy} &= 0 \\ l \tau_{xz} + m \tau_{yz} + n (\sigma_{zz} - \sigma) &= 0 \end{aligned} \quad (1-4.2a)$$

จากทฤษฎีของ determinant เราทราบว่าเราจะหา nontrivial solution ($l \neq 0, m \neq 0, n \neq 0$ ในเวลาเดียวกัน) ของสมการ(1-4.2a) ได้ก็ต่อเมื่อ determinant ของสัมประสิทธิ์ของ l, m, n มีค่าเท่ากับ ศูนย์ คือ

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (1-4.2b)$$



นั่นเราจึงสามารถหาความเค้นหลักได้จากการกระจายสมการ (1-4.2b) ส่วนทิศทางการหลักนั้นเราจะหาได้จากการแทนค่าความเค้นหลักลงใน (1-4.2a) และใช้ความสัมพันธ์ระหว่าง direction cosine

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (1-4.2c)$$

ถ้าเรากระจายสมการ (1-4.2b) เราจะได้สมการกำลังสามคือ

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (1-4.2d)$$

โดยที่

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$I_2 = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \quad (1-4.2e)$$

$$I_3 = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{yy}\tau_{zx}^2 - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}$$

ค่า I_1, I_2, I_3 นี้มีชื่อเรียกว่า first, second, third invariant ตามลำดับ invariant ทั้งสามนี้เป็นค่าที่ไม่เปลี่ยนแปลงไปตามระบบแกนที่ใช้ในการคำนวณหาความเค้น เช่น ถ้าเราหมุนแกนของระบบความเค้นของสมการ (1-4.2e) ให้ไปอยู่ในทิศทางหลัก (นั่นคือ ไปสู่ระนาบที่ความเค้นเฉือน มีค่าเป็นศูนย์) และให้ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ เป็น ความเค้นหลัก เราจะได้ว่าค่าของ invariant ทั้งสามใน (1-4.2e) มีค่าเท่ากับ

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \quad (1-4.2f)$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

ตัวอย่าง 1-4.1 กำหนดให้

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} -5c & -c & 0 \\ -c & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ N/mm}^2$$

จงหาความเค้นหลัก , ทิศทางหลัก, และ invariants ทั้งสาม

วิธีทำ จากสมการ(1-4.2b)

$$\begin{vmatrix} -5c - \sigma & -c & 0 \\ -c & c - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & c - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

กระจายออกมาได้ว่า

$$(c - \sigma)(\sigma^2 + 4c\sigma - 6c^2) = 0$$

ดังนั้นเราได้ค่าความเค้นหลักทั้งสามคือ

$$\sigma_1 = c \quad \text{N/mm}^2$$

$$\sigma = c(-2 + \sqrt{10}) = 1.162 c \quad \text{N/mm}^2$$

$$\sigma = -c(2 + \sqrt{10}) = -5.162 c \quad \text{N/mm}^2$$

การหา ทิศทางหลัก หรือ ระนาบหลัก ของความเค้นหลักแต่ละองค์ประกอบ เราใช้สมการ(1-4.2a) และ (1-4.2c) ดังนี้

$\sigma_1 = c$: จาก (1-4.2a) แทนค่า $\sigma = \sigma_1$

$$-6c l_1 - c m_1 = 0$$

$$-cl_1 = 0$$

$$(0)n_1 = 0$$

เนื่องจาก $c \neq 0$ ดังนั้น

$$l_1 = m_1 = 0, \quad n_1 \neq 0$$

จาก(1-4.2c)

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$$

$$n_1^2 = \pm 1$$

นั่นคือ

$$\cos(\sigma_1, x) = \cos(\sigma_1, y) = 0$$

$$\cos(\sigma_1, z) = 1$$

หรือ σ_1 อยู่ในระนาบเดียวกับแกน z นั่นเอง

$\sigma = 1.162 c$: จากสมการ (1-4.2a) แทนค่า $\sigma = \sigma_2$ เราจะได้ว่า

$$-6.162 c l_2 - c m_2 = 0$$

$$-c l_2 - 0.162 c m_2 = 0$$

$$-0.162 c n_2 = 0$$

หรือ

$$n_2 = \cos(\sigma_2, z) = 0$$

$$m_2 = -6.162 l_2$$

จาก

$$l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1$$

$$l_2^2 + (-6.162 l_2)^2 = 1$$

เพราะฉะนั้น

$$\cos(\sigma_2, x) = l_2 = 0.160$$

$$\cos(\sigma_2, y) = m_2 = -0.986$$

นั่นคือมุมที่ σ_2 กระทำกับแกน $x, y = 80.8^\circ$ และ 170.8° ตามลำดับ

$\sigma_3 = -5.162 c$: ในทำนองเดียวกันโดยใช้สมการ(1-4.2a) ,(1-4.2c) ได้ว่า

$$l_3 = 0.986, \quad m_3 = 0.16, \quad n_3 = 0$$

หรือมุมที่ σ_3 กระทำกับแกน x, y, z คือ $9.2^\circ, 80.8^\circ, 90^\circ$ ตามลำดับ

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_1 = c + c(-2 + \sqrt{10}) - c(2 + \sqrt{10}) = -3c$$

หรือเราจะหา first invariant จาก

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$I_1 = -5c + c + c = -3c$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = -10c^2$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = -6c^3$$

ข้อสังเกตจาก (σ) ที่กำหนดให้ จะเห็นว่า τ_{xz} และ τ_{yz} เท่ากับศูนย์ แสดงว่าค่า $\sigma_{zz} = c$ ที่กำหนดให้ นั้นเป็นความเค้นหลักบนระนาบที่มี unit outward normal ขนานกับแกน z แล้ว เพราะฉะนั้น เราจึงอาจจะลดปัญหาของเราจาก 3 มิติลงมาเป็น 2 มิติ ได้โดยคิดให้

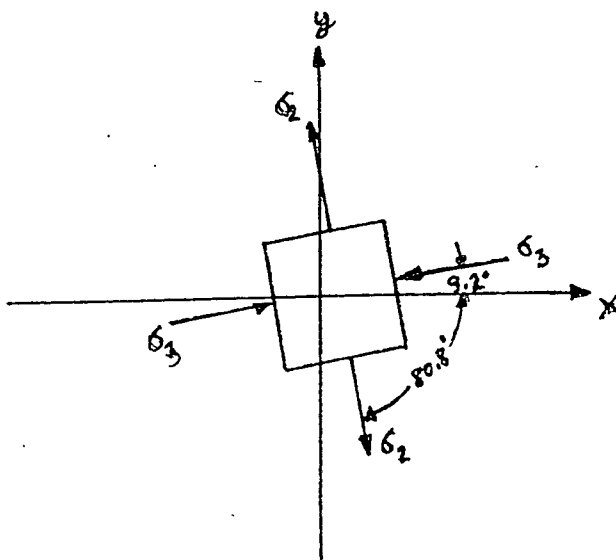
$$(\sigma) = \begin{pmatrix} -5 & -c \\ -c & c \end{pmatrix}$$

ฉะนั้น

$$\begin{vmatrix} -5c - \sigma & -c \\ -c & c - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\sigma^2 + 4c\sigma - 6c^2 = 0$$

ซึ่งผลที่ได้เช่นเดียวกับที่หามาแล้ว



รูป E1-4.1

ตัวอย่าง 1-4.2 จงพิสูจน์ว่าค่าของความเค้นหลักที่หาได้จาก

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

เป็นค่าจริง (real number) ทุกค่า

วิธีทำ ให้พิจารณา stress tensor โดยทั่วไปในแกน $o'x'y'z'$ เท่ากับ

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_{x'x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'} & \sigma_{z'z'} \end{pmatrix}$$

เนื่องจากความเค้นหลักมี 3 ค่า ดังนั้นอย่างน้อยที่สุดจะมีค่าจริง 1 ค่า สมมติว่าค่านี้เป็น σ_1 และให้อยู่ในทิศ x ของแกนใหม่ $oxyz$ ดังนั้น stress tensor แกนใหม่นี้เท่ากับ

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

ให้เราหาความเค้นหลักจาก

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$(\sigma_1 - \sigma)(\sigma_{yy} - \sigma)(\sigma_{zz} - \sigma) - \tau_{yz}^2 = 0$$

ฉะนั้น $\sigma = \sigma_1$ และ

$$(\sigma_{yy} - \sigma)(\sigma_{zz} - \sigma) - \tau_{yz}^2 = 0$$

$$\sigma^2 - (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})\sigma + \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \tau_{yz}^2 = 0$$

ค่าของความเค้นหลักอีก 2 ค่า ซึ่งจะหาได้จากสมการข้างบนนี้ จะจริงก็ต่อเมื่อ

$$(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 - 4(\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \tau_{yz}^2) \geq 0$$

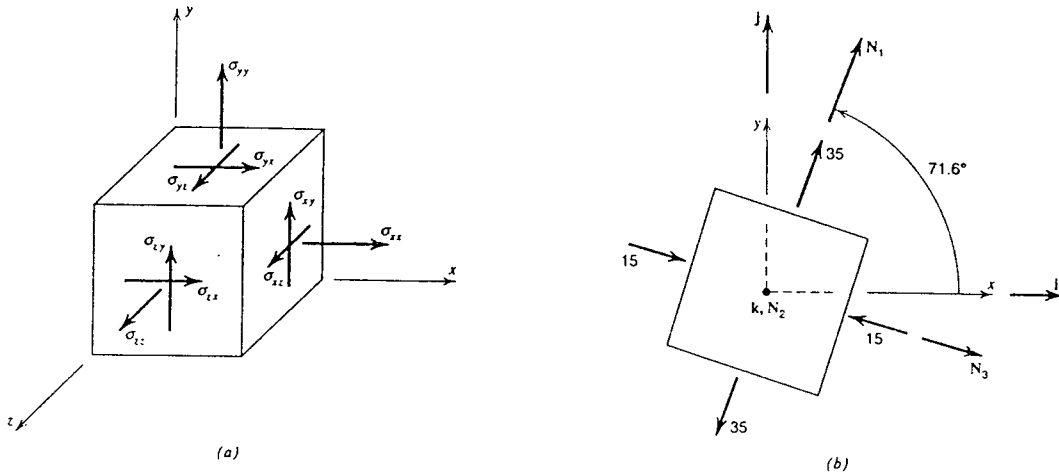
ซึ่งสามารถจัดรูปได้เป็น

$$(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})^2 - 4\tau_{yz}^2 \geq 0$$

ดังนั้นค่าของความเค้นหลักทั้งหมดเป็นค่าจริง

Q.E.D

ตัวอย่าง 1-4.3 สถานะของความเค้นที่จุดๆหนึ่งในเนื้อวัสดุมีค่าเป็น $\sigma_{xx} = -10 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{yy} = 30 \text{ N/mm}^2$, $\tau_{xy} = 15 \text{ N/mm}^2$ และ $\sigma_{zz} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ ดูรูป E1-4.3a จงหาความเค้นหลักและการเอียงทำมุมของแกนหลักที่จุดนี้



รูป E1-4.3

วิธีทำ จากสมการ (1-4.2f) stress invariants มีค่าเป็น

$$I_1 = 20, I_2 = 525, I_3 = 0$$

แทนค่า stress invariants ลงในสมการ (1-4.2d) แล้วแก้สมการหาค่าของ σ จะได้ความเค้นหลักเป็น

$$\sigma_1 = 35, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -15$$

การหาทิศทางของแกนหลักแกนแรกในเทอมของ direction cosines l_1, m_1 และ n_1 ของมัน เราแทนค่า σ ด้วย $\sigma_1 = 35$ ลงในสมการ (1-4.2a) ดังนั้นเราจะได้

$$-45l_1 + 15m_1 = 0 \quad (a)$$

$$15l_1 - 5m_1 = 0 \quad (b)$$

$$-35n_1 = 0 \quad (c)$$

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \quad (d)$$

เฉพาะสมการ(a) และ (b) เท่านั้นที่เป็นอิสระ จากสมการ (c) จะได้

$$n_1 = 0$$

แก้สมการ (b) และ (d) ด้วยกัน จะได้

$$l_1^2 = 1/10$$

หรือ

$$l_1 = \pm 0.3162$$

แทนค่า l_1 ลงในสมการ (b) เราจะได้

$$m_1 = \pm 0.9487$$

ซึ่งลำดับของเครื่องหมาย + และ - ต้องตรงกับค่าของ l_1 สังเกตด้วยว่าสมการ (a) ต้องสอดคล้องกับค่าของ l , m , และ n ดังนั้นแกนหลักจะอยู่ในทิศทางตาม unit vector $\mathbf{N}_1$ เมื่อ

$$\mathbf{N}_1 = 0.3162\mathbf{i} + 0.9487\mathbf{j} \quad (\text{e})$$

หรือ
$$\mathbf{N}_1 = -0.31612\mathbf{i} - 0.9487\mathbf{j} \quad (\text{f})$$

เมื่อ $\mathbf{i}$ และ $\mathbf{j}$ คือ unit vectors ตามแกน x และแกน y ตามลำดับ

การเอียงทำมุมของแกนหลักอันที่สอง จะหาได้จากการแทนค่า $\sigma = \sigma_2 = 0$ ลงในสมการ 2-4.2a ซึ่งจะได้

$$l_2 = 0 \text{ และ } m_2 = 0$$

ทำเช่นเดียวกันกับของ σ_1 , เราจะได้

$$n_2 = \pm 1$$

หรือ

$$\mathbf{N}_2 = \pm \mathbf{k}$$

เมื่อ $\mathbf{k}$ คือ unit vector ตามแกน z

การเอียงทำมุมของแกนหลักอันที่สามจะหาได้ในลักษณะเดียวกัน คือ

$$l_3 = \pm 0.9487$$

$$m_3 = \pm 0.3162$$

$$n_3 = 0$$

เพื่อที่จะกำหนดเครื่องหมายที่ถูกต้องสำหรับแกนหลักทั้งหลาย เราจำเป็นต้องให้แกนหลักเหล่านี้อยู่ในรูปแบบของระบบพิกัดแกนตามกฎมือขวา ถ้า $\mathbf{N}_1$ และ $\mathbf{N}_2$ เป็น unit vectors ที่แสดงถึงทิศทางของแกนหลักสองแกนแรก ดังนั้น unit vector $\mathbf{N}_3$ ของแกนหลักอันที่สามจะหาได้จากกฎมือขวาของ vector multiplication ดังนั้นเราจะได้

$$\mathbf{N}_3 = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$$

หรือ

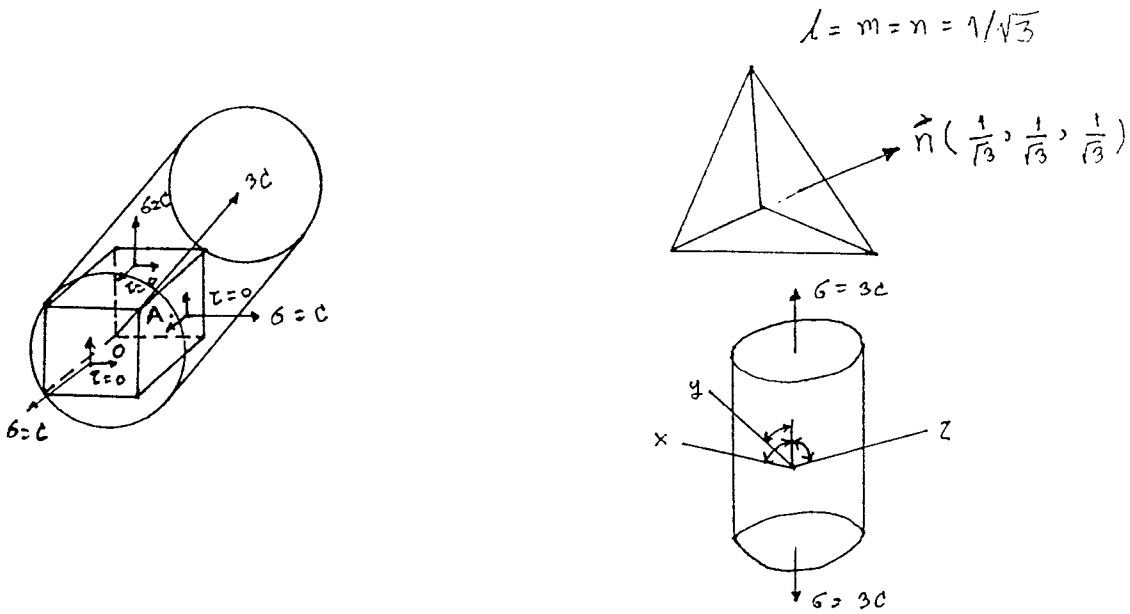
$$\mathbf{N}_3 = (m_1 n_2 - m_2 n_1)\mathbf{i} + (l_2 n_1 - l_1 n_2)\mathbf{j} + (l_1 m_2 - l_2 m_1)\mathbf{k} \quad (\text{g})$$

ในตัวอย่างนี้, ถ้าเราเลือกค่าใดๆของ $\mathbf{N}_1$ จากสมการ (e) และ $\mathbf{N}_2 = +\mathbf{k}$, เราจะได้ $\mathbf{N}_3$ จากสมการ (g) เป็น:

$$\mathbf{N}_3 = 0.9487\mathbf{i} - 0.3162\mathbf{j}$$

ความเค้นหลัก $\sigma_1 = 35 \text{ N/mm}^2$ และ $\sigma_3 = -15 \text{ N/mm}^2$ และการเอียงทำมุมของมัน (ซึ่งแสดงด้วยแกนหลัก) ได้แสดงไว้ในรูป E1-4.3b แกนหลักอันที่สามนั้นตั้งฉากกับระนาบ x - y ดังรูป และมีทิศทางพุ่งเข้าหาผู้อ่าน ความเค้นหลัก $\sigma_2 = 0$ เนื่องจากองค์ประกอบของความเค้นทั้งหลายที่มีทิศทางอยู่ในแนวแกน z (คือ σ_{zz}, σ_{xz} และ σ_{yz}) มีค่าเป็นศูนย์ สถานะของความเค้นนี้จึงเรียกว่าเป็นสถานะความเค้นระนาบบนระนาบ x - y

ตัวอย่าง 1-4.4 จงหาทิศทางหลัก เมื่อองค์ประกอบของความเค้นทุกองค์ประกอบมีค่าเป็น $c \text{ N/mm}^2$



รูป E1-4.4

วิธีทำ

$$I_1 = 3c$$

$$I_2 = c^2 + c^2 + c^2 - c^2 - c^2 - c^2$$

$$I_3 = c^3 - c^3 - c^3 - c^3 + 2c^3 = 0$$

$$\sigma^3 - 3c\sigma^2 + 0 - 0 = 0$$

$$\sigma_1 = 3c, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} (c - 3c)l & +cm & +cn \\ +cl & +(c - 3c)m & +cn \\ +cl & +cm & +(c - 3c)n \end{vmatrix} = 0$$

$$l = m = n, \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

เพราะฉะนั้น

$$l = m = n = 1/\sqrt{3}$$

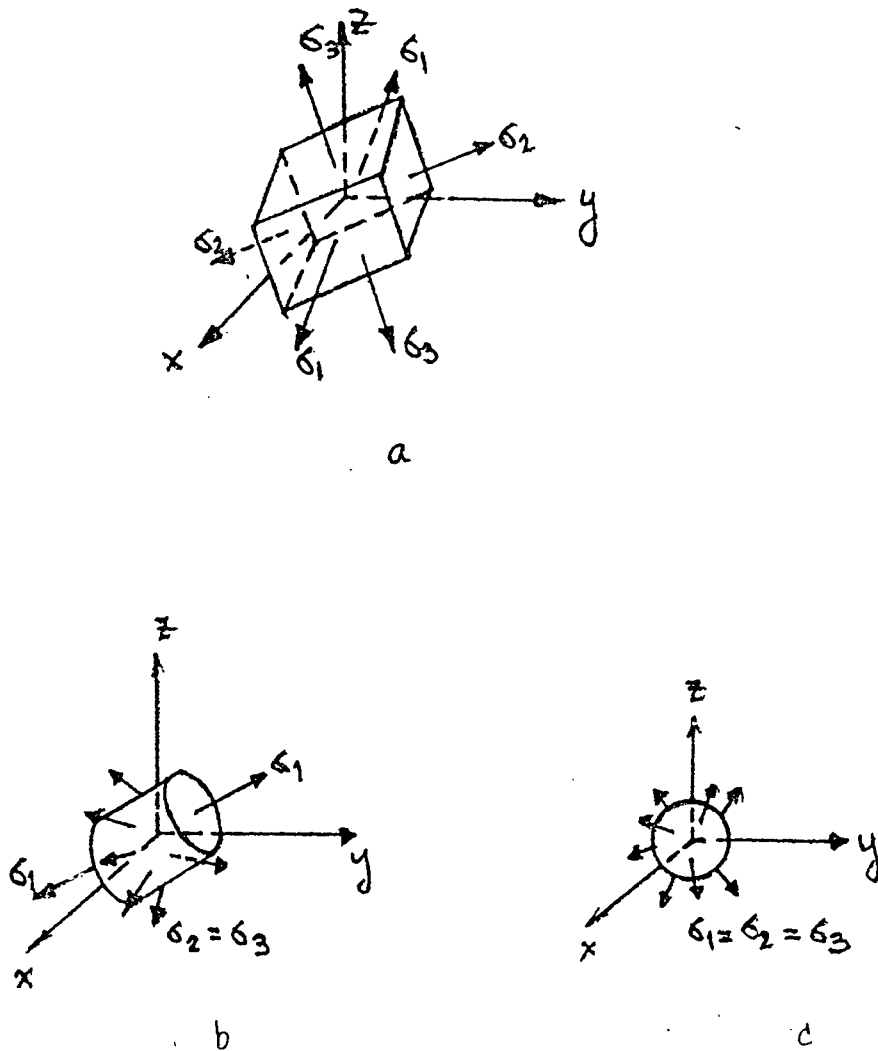
ทิศทางของแกนหลักได้แสดงไว้ในรูป E1-4.4b และ c

กรณีต่างๆของความเค้นหลัก ขึ้นอยู่กับว่าความเค้นหลักที่เราหาได้จากสมการ (1-4.2b) จะมีค่าซ้ำกันหรือไม่ เรามีอยู่ 3 กรณี คือ

กรณีที่ 1 $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ เรามีระนาบหลักเพียง 3 ระนาบ ตามรูป 1-4.2a

กรณีที่ 2 $\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$ ในกรณีนี้ ทุกๆระนาบที่ตั้งฉากกับระนาบหลักของ σ_1 จะเป็นระนาบหลักด้วย ดังรูป 1-4.2b

กรณีที่ 3 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ กรณีนี้ทุกๆระนาบจะเป็นระนาบหลัก ดังรูป 1-4.2c และเรามีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า Hydrostatic Stress



รูป 1-4.2

ความเค้นหลักในกรณีของความเค้นระนาบ สถานะของความเค้นซึ่ง $\tau_{zz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$ เรียกว่าสถานะของความเค้นในระนาบ x-y ในกรณีนี้เราสามารถที่จะแสดง Direction cosine ระหว่างแกนทั้งสองชุดนี้เป็นมุม θ ได้ดังต่อไปนี้ จากสมการ (1-3.4 a, b, d)

$$\sigma_{x'x'} = l_1^2 \sigma_{xx} + m_1^2 \sigma_{yy} + 2l_1 m_1 \tau_{xy} \quad (1-4.3a)$$

$$\sigma_{y'y'} = l_2^2 \sigma_{xx} + m_2^2 \sigma_{yy} + 2l_2 m_2 \tau_{xy} \quad (1-4.3b)$$

$$\tau_{x'y'} = l_1 l_2 \sigma_{xx} + m_1 m_2 \sigma_{yy} + (l_1 m_2 + l_2 m_1) \tau_{xy} \quad (1-4.3c)$$

จากรูป 1-4.3 เราจะเห็นว่า

$$l_1 = \cos(x', x) = \cos \theta$$

$$m_1 = \cos(x', y) = \sin \theta$$

$$l_2 = \cos(y',x) = -\sin\theta$$

$$m_2 = \cos(y',y) = \cos\theta$$

แทนค่า direction cosine ทั้งหมดนี้ลงในสมการ (1-4.3 a, b, c) แล้วใช้หลักการแปลงมุมจาก θ เป็น 2θ เราจะได้

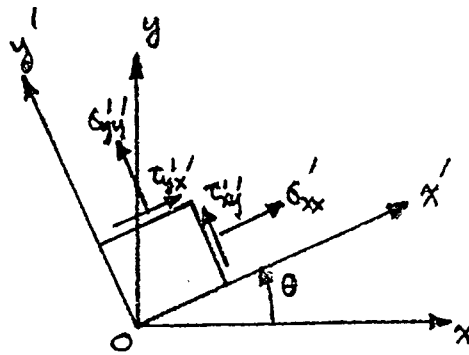
$$\sigma_{x'x'} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (1-4.4a)$$

$$\sigma_{y'y'} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (1-4.4b)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (1-4.4c)$$

ให้สังเกตว่าจาก (1-4.4a) และ (1-4.4b) เราจะได้

$$I_1 = \sigma_{x'x'} + \sigma_{y'y'} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$$



รูป 1-4.3

ในการหาความเค้นหลัก และ ทิศทางหลัก เราหาอนุพันธ์ของ $\sigma_{x'x'}$ เทียบกับ θ แล้วให้เท่ากับ ศูนย์ ซึ่งเราจะได้ทิศทางหลัก คือ

$$\tan \theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \quad (1-4.5a)$$

แทนค่าทิศทางหลักลงใน (1-4.4a) หรือ (1-4.4b) เราจะได้

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1-4.5b)$$

ในการหาความเค้นเฉือนสูงสุด โดนการหาอนุพันธ์ $\tau_{x'y'}$ แล้วให้เท่ากับศูนย์ เราจะได้ว่าทิศทางของระนาบที่เกิดความเค้นเฉือนสูงสุดคือ

$$\tan 2\theta = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\tau_{xy}} \quad (1-4.6a)$$

และ

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1-4.6b)$$

ซึ่งจะเห็นได้จาก (1-4.5b) ว่า

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (1-4.6c)$$

ตัวอย่าง 1-4.5 กำหนดให้จากตัวอย่าง 1-4.1

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} -5c & -c & 0 \\ -c & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ N/mm}^2$$

จงหาความเค้นหลัก และ ระนาบหลัก โดยการลดมิติของความเค้นลงมาเป็นความเค้นระนาบ

วิธีทำ เนื่องจาก $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ดังนั้น $\sigma_{zz} = c$ จึงเป็นค่าหนึ่งของความเค้นหลักซึ่งกระทำบนระนาบที่มี unit outward normal อยู่ในแนวแกน z คือ

$$\sigma_1 = \sigma_{zz} = c$$

ฉะนั้น (σ) จึงลดลงมาเป็น 2 มิติคือ

$$(\sigma) = \begin{pmatrix} -5c & -c \\ -c & c \end{pmatrix}$$

นั่นคือ $\sigma_{xx} = -5c$, $\tau_{xy} = -c$, $\sigma_{yy} = c$

จากสมการ (1-4.5b)

$$\begin{aligned} \left. \begin{matrix} \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{matrix} \right\} &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \frac{-5c + c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-5c - c}{2}\right)^2 + (-c)^2} \\ &= -c (2 \pm \sqrt{10}) \\ \tan 2\theta &= -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{(2)(-c)}{(-5c) - c} = 1/3 \\ \theta &= 9.2^\circ \end{aligned}$$

นั่นคือ

ซึ่งได้ผลเหมือนกันกับที่ได้จากตัวอย่าง 1-4.1

ตัวอย่าง 1-4.6 สมมติให้ความเค้นที่จุดๆหนึ่งมีค่าเป็น $\sigma_{xx} = 120 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{yy} = 55 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_{zz} = -85 \text{ N/mm}^2$, $\tau_{xy} = -55 \text{ N/mm}^2$, $\tau_{yx} = 33 \text{ N/mm}^2$, and $\tau_{zx} = -75 \text{ N/mm}^2$ จงหาความเค้นหลักและทิศทางการหลัก

วิธีทำ แทนค่าองค์ประกอบของความเค้นที่กำหนดให้ลงในสมการ (1-4.2d) จะได้

$$\sigma^3 - 90\sigma^2 - 18\,014\sigma + 471\,680 = 0$$

ความเค้นหลักทั้งสามคือรากของสมการนี้ มีค่าเป็น

$\sigma_1 = 176.80 \text{ N/mm}^2, \sigma_2 = -110.86 \text{ N/mm}^2, \sigma_3 = 24.06 \text{ N/mm}^2$

สำหรับทิศทางของความเค้นหลักแต่ละค่าจะหาได้จากการแทนค่าความเค้นหลักลงในสมการ(1-4.2a) แทนค่าของ σ_1 ลงในสมการ(1-4.2a) จะได้

$$\begin{aligned} (120 - 176.80) l_1 - 55m_1 - 75n_1 &= 0 \\ -55l_1 + (55 - 176.80)m_1 + 33n_1 &= 0 \\ 75l_1 + 33m_1 + (-85 - 176.80)n_1 &= 0 \end{aligned} \tag{a}$$

เมื่อ l_1, m_1 , และ n_1 คือ direction cosines สำหรับทิศทางของ σ_1 เฉพาะสองสมการแรกของสมการ(a) เท่านั้นที่เป็นอิสระ นอกจากนั้น direction cosines จะต้องสอดคล้องกับสมการ

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \text{ เมื่อ } i = 1, 2 \text{ หรือ } 3 \tag{b}$$

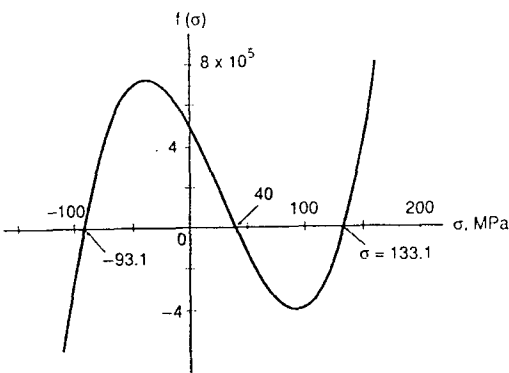
แก้สมการ (a) และ (b) ด้วยกัน จะได้

$$l_1 = 0.8372, m_1 = -0.4587, n_1 = -0.2977$$

ในทำนองเดียวกัน เราจะได้ชุดของ direction cosines สำหรับ σ_2 and σ_3 เป็น

$$\begin{aligned} l_2 &= 0.2872, m_2 = -0.0944, n_2 = 0.9532 \\ l_3 &= 0.4657, m_3 = 0.8834, n_3 = -0.0521 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1-4.7 ตรงจุดที่น่าสนใจในชิ้นส่วนทางวิศวกรรมจุดหนึ่ง ความเค้นที่เกิดขึ้นเมื่อเทียบกับระบบ แกนพิกัดที่คุ้นเคยคือ $\sigma_x = 100 \text{ N/mm}^2, \sigma_y = -60 \text{ N/mm}^2, \sigma_z = 40 \text{ N/mm}^2, \tau_{xy} = 80 \text{ N/mm}^2, \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ จงหาความเค้นหลักและความเค้นเฉือนสูงสุด



รูป E1-4.7

วิธีทำ แทนค่าองค์ประกอบของความเค้นที่กำหนดให้มาลงในสมการ (1-4.2b) จะได้

$$\begin{vmatrix} (100 - \sigma) & 80 & 0 \\ 80 & (-60 - \sigma) & 0 \\ 0 & 0 & (40 - \sigma) \end{vmatrix} = 0$$

ขยายโดยใช้ column สุดท้าย จะได้

$$100 - 133.1 - \sigma)(-60 - \sigma) - 6400 = 0$$

ซึ่งสามารถจัดรูปเป็นสมการกำลังสองได้

$$\sigma^2 - 133.1\sigma - 12\,400 = 0$$

ซึ่งสามารถแก้สมการได้ดังนี้

$$\sigma = \frac{133.1 \pm \sqrt{133.1^2 - 4(-12\,400)}}{2} = 10\,800\sigma + 496\,000 = 0$$

ซึ่งสามารถแก้สมการได้ดังนี้

ซึ่งสามารถแก้สมการได้ดังนี้ เนื่องจากตัวประกอบ $(\sigma - 40)$ ในสมการที่แปลงรูปให้ง่าย เราสามารถตัดตัวประกอบนี้ออกได้

$$\sigma_3 = 40 \text{ N/mm}^2 \quad \text{ตอบ}$$

ซึ่งสามารถแก้สมการได้ดังนี้

$$\sigma^2 - 40\sigma - 12\,400 = 0$$

ซึ่งสามารถแก้สมการได้ดังนี้ ซึ่งจะได้ค่าความเค้นหลักสองค่า เป็น

$$\sigma_1 = 133.1 \text{ N/mm}^2, \sigma_2 = -93.1 \text{ N/mm}^2 \quad \text{ตอบ}$$

ซึ่งสามารถแก้สมการได้ดังนี้ ซึ่งจะได้ค่าความเค้นหลักสองค่า เป็น

$$\sigma_1 = \frac{133.1 - 40}{2} = 66 \text{ N/mm}^2 \quad \text{ตอบ}$$

$$\sigma_2 = \frac{133.1 + 40}{2} = 46.6 \text{ N/mm}^2 \quad \text{ตอบ}$$

$$\sigma_3 = \frac{133.1 - (-93.1)}{2} = 113.1 \text{ N/mm}^2 \quad \text{ตอบ}$$

ซึ่งสามารถแก้สมการได้ดังนี้ ซึ่งจะได้ค่าความเค้นหลักสองค่า เป็น

$$\sigma_1 = 133.1 \text{ N/mm}^2, \sigma_{\min} = -93.1 \text{ N/mm}^2$$

และค่าความเค้นเฉือนสูงสุดสำหรับแกนพิกัดที่เป็นไปได้ทั้งหมด คือ มีค่าเท่ากับค่าความเค้นเฉือนสูงสุด

$$\tau_{\max} = \tau_3 = 113.1 \text{ N/mm}^2$$

ตัวอย่าง 1-4.8 จงหา direction cosines สำหรับแกนหลักแต่ละแกนสำหรับสถานะความเค้นในตัวอย่าง 1-4.7

วิธีทำ คำนวณค่าความเค้นหลักจากตัวอย่าง 1-4.7 คือ

$$\sigma_1 = 133.1 \text{ N/mm}^2, \sigma_2 = -93.1 \text{ N/mm}^2, \sigma_3 = 40 \text{ N/mm}^2$$

ใช้สมการ (1-4.2a) สำหรับค่าของความเค้นหลักเหล่านี้ แทนค่า σ ด้วย σ_1 และแทนค่าของความเค้น $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz},$ and τ_{zx} ที่เกิดขึ้นตามระบบแกนพิกัดเดิม จะได้

$$(100 - 133.1)l_1 + 80m_1 = 0$$

$$80l_1 + (-60 - 133.1)m_1 = 0$$

$$(40 - 133.1)n_1 = 0$$

สมการสุดท้ายจะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ $n_1 = 0$, และสองสมการแรกจะให้

$$l_1 = 2.414m_1$$

ใช้ผลลัพธ์นี้ร่วมกับสมการ(1-4.2c) จะได้

$$(2.414m)^2 + m_1^2 + 0^2 = 1$$

$$m_1 = 0.383$$

ต่อไปจะหาค่าของ l_1 ได้โดยง่าย ค่า direction cosines ทั้งสาม คือ

$$l_1 = 0.924, \quad m_1 = 0.383, \quad n_1 = 0 \quad \text{ตอบ}$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับ $\sigma_2 = -93.1 \text{ N/mm}^2$ และ $\sigma_3 = 40 \text{ N/mm}^2$ จะให้

$$l_2 = -0.383, \quad m_2 = 0.924, \quad n_2 = 0 \quad \text{ตอบ}$$

$$l_3 = 0, \quad m_3 = 0, \quad n_3 = 1 \quad \text{ตอบ}$$

จะเห็นได้ว่าแกนหลักสำหรับ σ_1 ซึ่งกำหนดจาก (l_1, m_1, n_1) นั้นวางอยู่บนระนาบ x-y และทำมุม $\theta_x = 22.5^\circ$ ในทิศทางตามเข็มนาฬิกาจากแกน x แกนหลักสำหรับ σ_2 ซึ่งกำหนดจาก (l_2, m_2, n_2) ก็วางอยู่บนระนาบ x-y ด้วย และตั้งฉากกับแกนของ σ_1 สุดท้าย แกนของ σ_3 ซึ่งกำหนดจาก (l_3, m_3, n_3) จะเห็นได้ว่าทับอยู่กับแกน z ดั้งเดิม

โดยทั่วไป แกนหลักจะเป็นระบบแกนพิกัดซึ่งตั้งฉากซึ่งกันและกัน แต่ไม่จำเป็นว่าจะต้องมีแกนใดแกนหนึ่งทับซ้อนอยู่กับแกนของระบบแกนพิกัดเดิมเสมอไป

1-5 วงกลมของโมร์

วงกลมของโมร์สำหรับกรณี 3 มิติ วงกลมของโมร์(Mohr's circle)เป็นวิธีหนึ่งซึ่งเหมาะสมแก่การใช้แสดงถึงสถานะของความเค้นที่จุดๆหนึ่งโดยการใช้รูปประกอบ

ให้ระนาบ BPC, APC และ APB ของรูป tetrahedron เป็นระนาบหลัก และ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ เป็นความเค้นหลัก ตามรูป 1-5.1 บนระนาบเหล่านี้ ความเค้นเฉือนเป็นศูนย์ ฉะนั้นจากสมการ (1-2.1)

$$S_x = l\sigma_1, S_y = m\sigma_2, S_z = n\sigma_3$$

แทนค่าเหล่านี้ลงในสมการ (1-1.2) และ (1-1.5b) เราจะได้

$$\sigma_n^2 + \tau_n^2 = (l\sigma_1)^2 + (m\sigma_2)^2 + (n\sigma_3)^2 \quad (1-5.1a)$$

$$\sigma_n = l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3 \quad (1-5.1b)$$

นอกจากนี้เรายังมีความสัมพันธ์ระหว่าง direction cosine

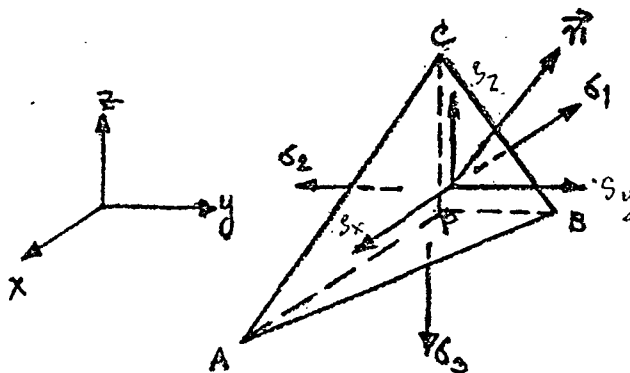
$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (1-5.1c)$$

จะเห็นว่าเรามีค่าที่ต้องการหา คือ l^2, m^2, n^2 ในกรณีแรกนี้ ให้ $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ และโดยใช้ Cramer's rule เราสามารถที่จะหา l^2, m^2 และ n^2 ได้จากสมการ (1-5.1) คือ

$$l^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \quad (1-5.2a)$$

$$m^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \quad (1-5.2b)$$

$$n^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \quad (1-5.2c)$$



รูป 1-5.1

เราสามารถที่จะจัดรูปสมการ (1-5.2a), (1-5.2b) และ (1-5.2c) ได้เป็นสมการของวงกลมคือ

$$\tau^2_n + (\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2})^2 = (\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2})^2 + l^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) = R^2_{23} \quad (1-5.3a)$$

$$\tau^2_n + (\sigma_n - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2})^2 = (\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2})^2 + m^2(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1) = R^2_{31} \quad (1-5.3b)$$

$$\tau^2_n + (\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2})^2 = (\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2})^2 + n^2(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) = R^2_{12} \quad (1-5.3c)$$

ซึ่งเป็น family ของวงกลมบนระนาบของ $\sigma_n - \tau_n$ โดยที่รัศมีของวงกลมมีพิกัดโดยค่าของ direction cosine ดังนี้

$$0 \leq l^2 \leq 1, \quad 0 \leq m^2 \leq 1, \quad 0 \leq n^2 \leq 1 \quad (1-5.4)$$

และได้แสดงอยู่ในตาราง 1-5.2

ตาราง 1-5.2

	R_{23}	R_{31}	R_{12}
$l = 0$	$\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$	-	-
$l = 0$	$\sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$	-	-
$m = 0$	-	$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$	-
$m = 0$	-	$\sigma_2 - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}$	-
$n = 0$	-	-	$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$
$n = 0$	-	-	$\sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$

จะให้เห็นได้จากรูป 1-5.2 ว่า ถ้าเงื่อนไขเป็นไปตามสมการ (1-5.4) แล้ว ค่าของ (σ_n, τ_n) จะต้องอยู่ในอาณาเขตที่ถูกแลเงาเอาไว้ อาณาเขตนี้ล้อมรอบด้วยวงกลมซึ่งมี $l = m = n = 0$ เราเรียกวงกลมเหล่านี้ว่าวงกลมของโมร์ และถูกเขียนอีกครั้งหนึ่งในรูป 1-5.3

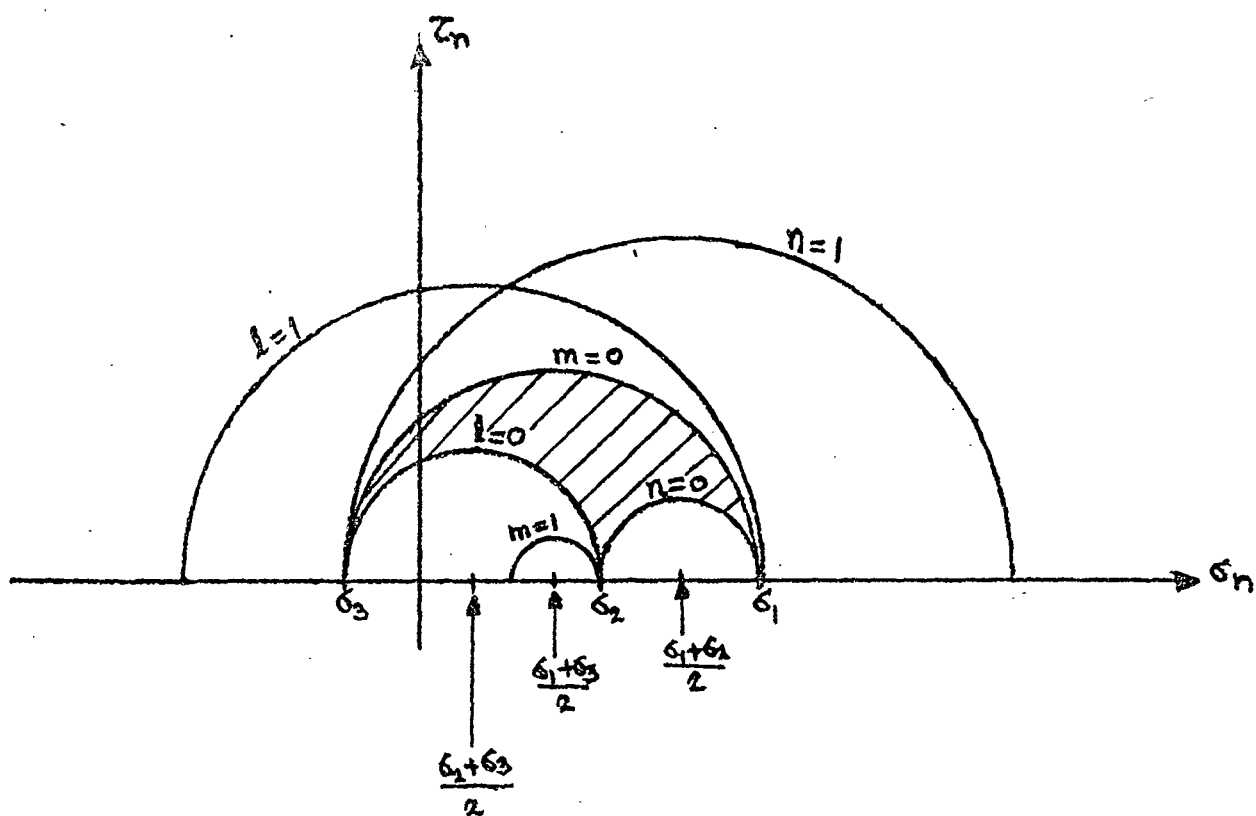


Рис. 1-5.2

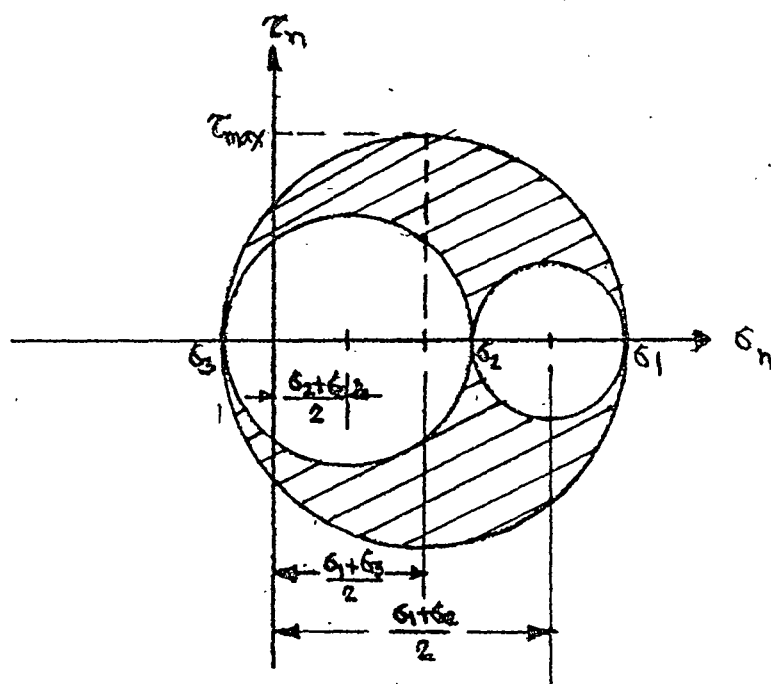


Рис. 1-5.3

จากรูป 1-5.3 จะเห็นว่าความเค้นเฉือนสูงสุด

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (1-5.5a)$$

และ

$$\tau_{\min} = 0$$

ความเค้นตั้งฉากบนระนาบที่ $\tau_{\max}$ กระทำนี้คือ

$$\sigma_{\tau_{\max}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \quad (1-5.5b)$$

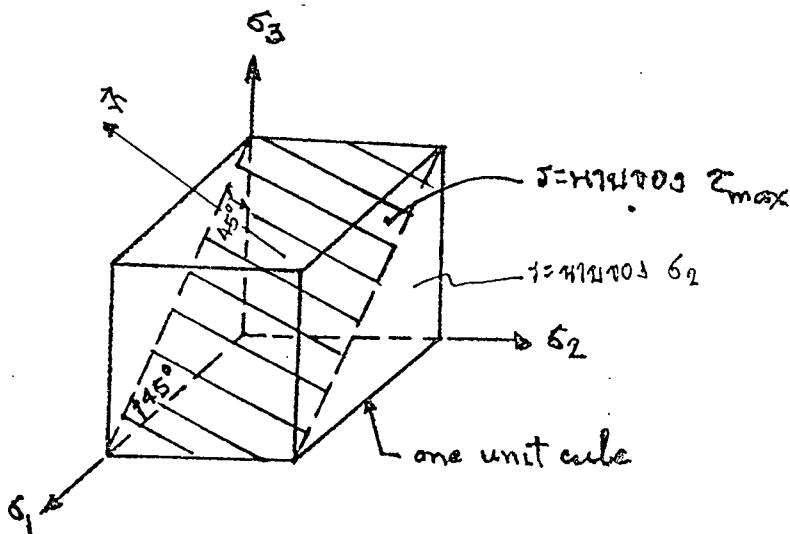
ถ้าเราแทนค่า $\tau_{\max}$ และ $\sigma_{\tau_{\max}}$ นี้ลงในสมการ (1-5.2a, b, c) เราจะได้ว่าระนาบของ $\tau_{\max}$ มี direction cosine

$$l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad m = 0, \quad n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1-5.6)$$

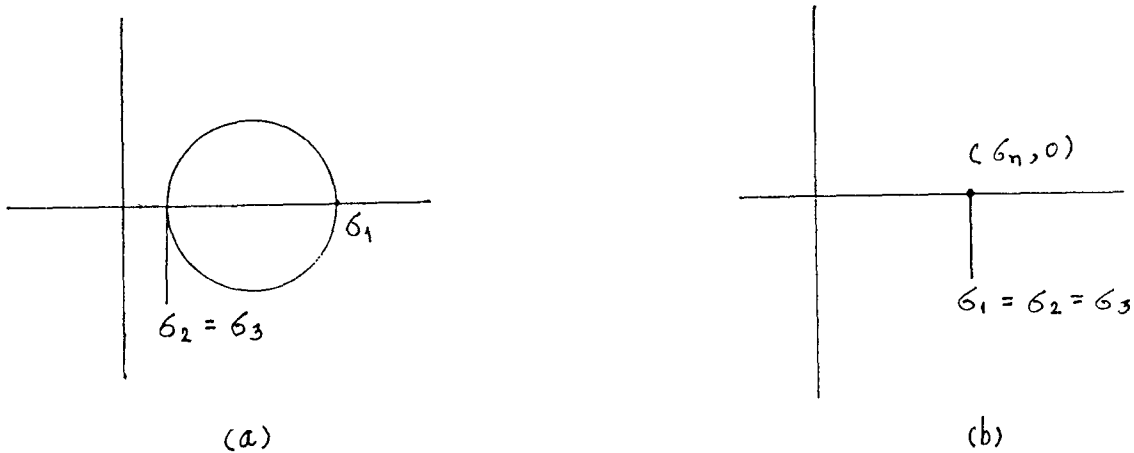
สมการ (1-5.6) แสดงว่าระนาบของ $\tau_{\max}$ มี unit outward normal อยู่บนระนาบซึ่งทำมุม 90° กับระนาบของ σ_2 และเอียงทำมุม 45° กับระนาบของ σ_1 และ σ_3 ตามรูป 1-5.4 นั่นคือระนาบที่ $\tau_{\max}$ กระทำ เอียงทำมุม 45° กับระนาบของ $\sigma_{\max} (\sigma_1)$ และ $\sigma_{\min} (\sigma_3)$ และ ตั้งฉากกับระนาบของ σ_2

ในกรณีที่ความเค้นหลักมีค่าเท่ากันสองค่าเช่น $\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$ เราจะเห็นได้ว่าวงกลมของโมร์ ในรูป 1-5-3 จะเหลือเพียงวงหนึ่งเท่านั้น รูป 1-5.5a

กรณีสุดท้ายเป็นกรณีที่ $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ วงกลมทั้งสามในรูป 1-5.3 จะลดลงมากลายเป็นจุดๆ เดียวเท่านั้นคือ $(\sigma, 0)$ ฉะนั้นความเค้นที่กระทำบนทุกๆ ระนาบที่ผ่านจุดนี้จึงมีแต่ความเค้นตั้งฉาก σ เท่านั้น รูป 1-5.5b

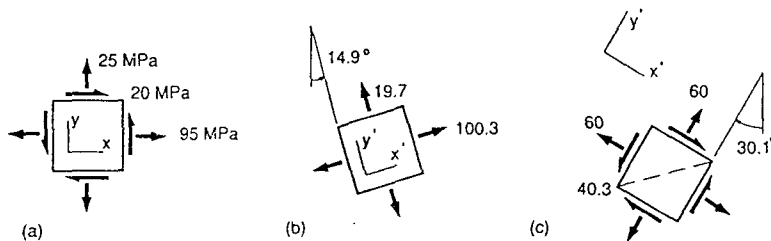


รูป 1-5.4



รูป 1-5.5

ตัวอย่าง 1-5.1 ที่จุดซึ่งน่าสนใจจุดหนึ่งบนพื้นผิวอิสระของชิ้นส่วนทางวิศวกรรม มีความเค้นที่เกิดขึ้นตามระบบแกนที่คุ้นเคยกันดี บนระนาบของพื้นผิวเป็น $\sigma_x = 95 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_y = 25 \text{ N/mm}^2$ และ $\tau_{xy} = 20 \text{ N/mm}^2$ จงหาความเค้นหลักและการทำมุมของระนาบหลัก



รูป E1-5.1

วิธีทำ แทนค่าที่กำหนดให้ ลงในสมการ (1-4.5a) จะได้มุมที่ความเค้นหลักทำกับระบบแกน x-y-z คือ

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = 4/7$$

$$\theta_1 = 14.9^\circ \text{ (ccw)}$$

แทนค่าลงในสมการ (1-4.2b) จะได้ความเค้นหลัก

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= 60 \pm 40.3 = 100.3, 19.7 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

ตอบ

ระนาบและสถานะของความเค้นแสดงไว้ในรูป E1-5.1b สังเกตด้วยว่าทิศทางสำหรับความเค้นหลักที่มีค่ามากกว่าจะอยู่ใกล้กับความเค้น σ_x และ σ_y มากกว่าความเค้นที่มีค่าน้อยกว่า

อีกวิธีหนึ่ง เราอาจจะแทน $\theta = \theta_x = 14.9^\circ$ ลงในสมการ (1-4.4) ซึ่งจะได้

$$\sigma = \sigma_{x'} = \sigma_1 = 100.3 \text{ N/mm}^2$$

ใช้ $\theta = \theta_x + 90^\circ = 104.9^\circ$ แทนลงในสมการ (1-4.4) จะได้ความเค้นประกอบอีกค่าหนึ่งเป็น

$$\sigma = \sigma_{y'} = \sigma_2 = 19.7 \text{ N/mm}^2$$

การที่ความเค้นเฉือนมีค่าเป็นศูนย์ เมื่อ $\theta = \theta_x$ สามารถยืนยันได้จากสมการ (1-4.4c)

สำหรับการแสดงระนาบซึ่งมีสถานะของความเค้นเทียบเท่ากับสถานะที่เกิดความเค้นเฉือนสูงสุดบนระนาบ x-y สมการ (1-4.6a) จะให้

$$\tan 2\theta_x = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\tau_{xy}} = -7/4$$

$$\theta_x = -30.1^\circ = 30.1^\circ (\text{cw})$$

ตอบ

ความเค้นสำหรับการหมุนระบบแกนพิกัดนี้สามารถคำนวณได้จากค่าของ σ_1 และ σ_2 โดยใช้สมการ (1-4.6c) คือ

$$\tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

และจากสมการ(1-5.5b) จะได้

$$\sigma_{r\max} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \pm 60 \text{ N/mm}^2$$

ซึ่งแสดงสถานะความเค้นไว้ในรูป E1-5.1c ความไม่แน่นอนเกี่ยวกับเครื่องหมายของความเค้นเฉือนสามารถกำหนดได้โดยการสังเกตว่า positive shear diagonal (เส้นประ) นี้จะต้องอยู่ในทิศเดียวกับค่าที่มากกว่าของ σ_1 และ σ_2

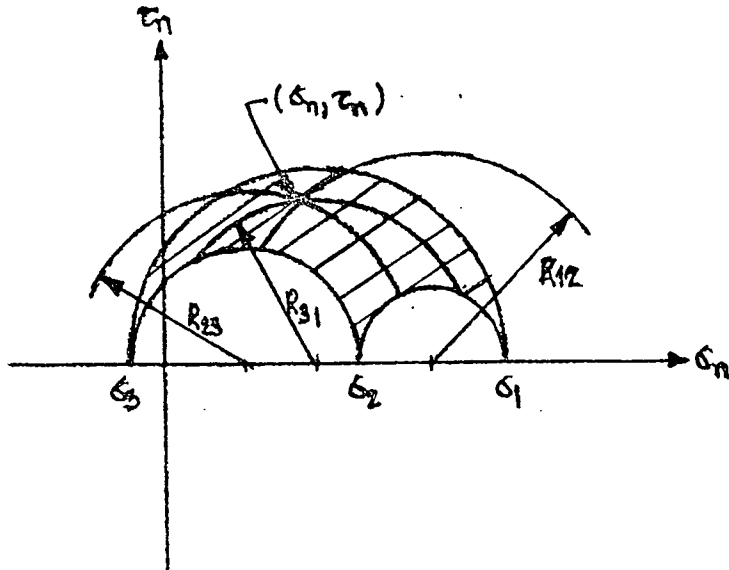
อีกวิธีหนึ่ง สามารถหาได้โดยแทนค่า $\theta = \theta_x = -30.1^\circ$ ลงในสมการ(1-4.4c) ซึ่งจะได้

$$\tau_3 = 40.3 \text{ N/mm}^2$$

เครื่องหมายบอกแสดงว่าความเค้นเฉือนมีค่าเป็นบวกในระบบแกนพิกัด $x' - y'$ อันใหม่

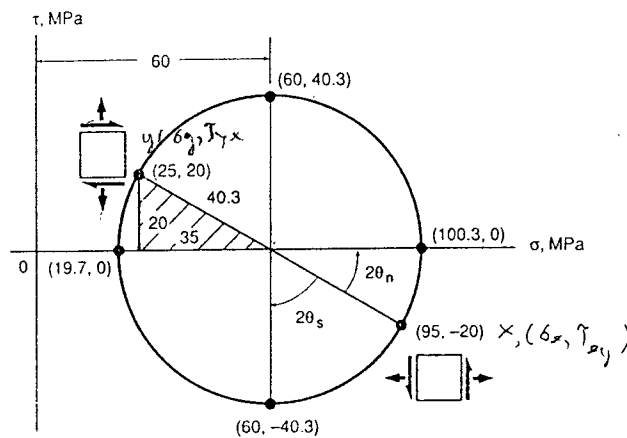
การใช้วงกลมของโมร์ในการหาความเค้น ถ้าเรามีวงกลมของโมร์ในกรณีของ 3 มิติเราก็จะสามารถหาความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือน (σ_n, τ_n) ซึ่งกระทำบนระนาบใดๆที่มี direction cosine เป็น l, m, n ได้ดังต่อไปนี้

คำนวณรัศมี R_{12} , R_{23} , R_{31} จากสมการ (1-5.3 a-c) จากนั้นก็เขียนวงกลมด้วยรัศมีนี้ตามรูป 1-5.6 วงกลมทั้งสามวงจะตัดกันที่จุดเพียงจุดเดียวซึ่งจะเป็นค่าของความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือนบนระนาบนั้น



รูป 1-5.6

ตัวอย่าง 1-5.2 ทำซ้ำตัวอย่าง 1-5.1 โดยใช้วงกลมของโมร์ ค่าความเค้นในสถานะดั้งเดิมคือ $\sigma_x = 95 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_y = 25 \text{ N/mm}^2$, $\tau_{xy} = 20 \text{ N/mm}^2$



รูป E1-5.2

วิธีทำ เขียนวงกลมได้โดยกำหนดจุดสองจุดลงไปเป็นปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมของโมร์ ดังแสดงในรูป E1-5.2 คือ

$$X(\sigma_x, \tau_{xy}) = (95, -20) \text{ N/mm}^2$$

$$Y(\sigma_y, \tau_{yx}) = (25, 20) \text{ N/mm}^2$$

ใช้เครื่องหมายลบกับค่าของ τ_{xy} ที่เป็นพิกัดร่วมกับ σ_x เนื่องจากลูกศรของความเค้นเฉือนที่อยู่บนระนาบเดียวกับ σ_x นี้มีแนวโน้มที่จะหมุนทวนเข็มนาฬิกา ในทำนองเดียวกัน τ_{yx} มีค่าเป็นบวกเมื่ออยู่บน

ระนาบเดียวกับ σ_x เพราะว่ามีแนวโน้มน้ำที่จะหมุนตามเข็มนาฬิกา จุดศูนย์กลางของวงกลมจะต้องอยู่บนแกน σ ตรงจุดกึ่งกลางระหว่าง σ_x กับ σ_1 นั่นคือตรงจุดที่มีพิกัดเป็น

$$C(\sigma, \tau)_{avr} = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_1}{2}, 0 \right) = (60, 0) \text{ N/mm}^2$$

จากพิกัดจุดดังกล่าว สามเหลี่ยมที่แรงตามทีแสดงไว้ในรูปจะมีฐานยาว 35 N/mm^2 และสูง 20 N/mm^2 ด้านตรงข้ามมุมฉากคือรัศมี และเป็นค่าของความเค้นเฉือนสูงสุดด้วย คือ

$$\tau_3 = \sqrt{35^2 + 20^2} = 40.3 \text{ N/mm}^2 \qquad \text{ตอบ}$$

มุมที่ทำกับแกน σ คือ

$$\begin{aligned} \tan 2\theta_n &= \frac{20}{35} \\ 2\theta_n &= 29.74^\circ \text{ (ccw)} \end{aligned} \qquad \text{ตอบ}$$

การหมุนทวนเข็มนาฬิกาของเส้นผ่านศูนย์กลางไปเป็นมุม $2\theta_n$ จะเป็นตำแหน่งของเส้นผ่านศูนย์กลางในแนวระดับ ซึ่งตรงกับความเค้นหลัก ค่าของความเค้นหลักจะหาได้จากตำแหน่งของจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม คือ

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_1}{2} + \tau_3 = 60 + 40.3 = 100.3 \text{ N/mm}^2 \qquad \text{ตอบ}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_1}{2} - \tau_3 = 60 - 40.3 = 19.7 \text{ N/mm}^2 \qquad \text{ตอบ}$$

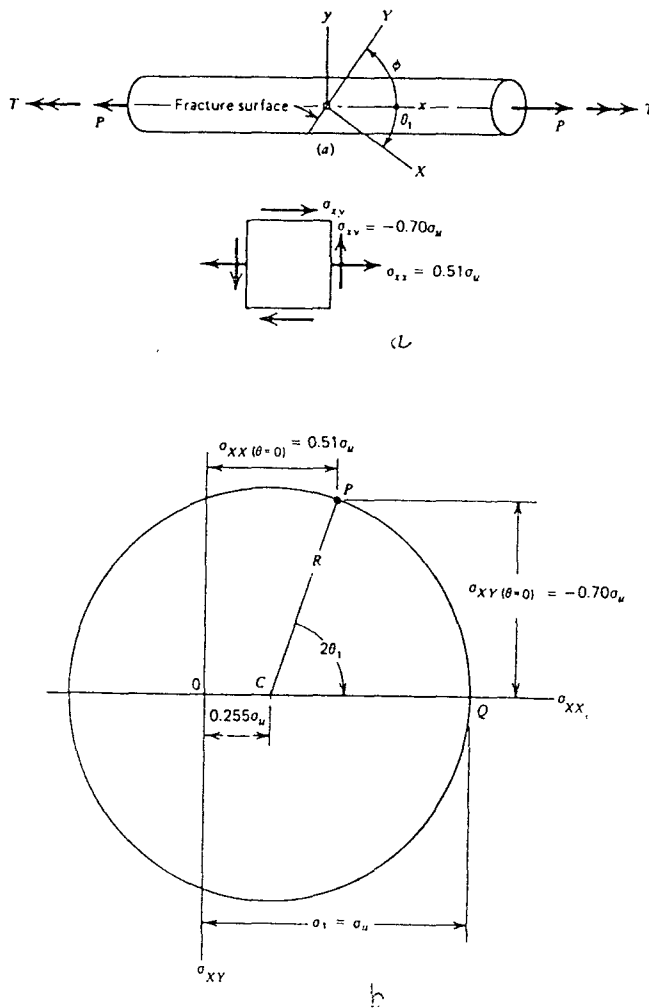
สถานะของความเค้นที่ได้จะเหมือนกับที่แสดงไว้ในรูป E1-5.1(b) สังเกตด้วยว่าการหมุนทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม $2\theta_n$ บนวงกลมจะตรงกับการหมุนของอีลีเมนต์เป็นมุม $\theta_n = 14.9^\circ$ ในทิศทางเดียวกัน

เส้นผ่านศูนย์กลางที่ตรงกับสถานะของความเค้นดั้งเดิมจะต้องหมุนไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาเพื่อที่จะให้ได้ความเค้นเฉือนสูงสุด เนื่องจากตำแหน่งนี้ทำมุม 90° กับแกน σ ดังนั้นมุมของการหมุนคือ

$$2\theta_s = 90^\circ - 2\theta_n = 60.26^\circ \text{ (cw)} \qquad \text{ตอบ}$$

ดังนั้น $\theta_s = 30.1^\circ$ ตามเข็มนาฬิกา พิกัดของจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางในแนวตั้งจะให้สถานะของความเค้นเป็นดังที่แสดงไว้ในรูป E1-5.1c

ตัวอย่าง 1-5.3 ซอลล์แท่งหนึ่งถูกกระทำด้วยภาระผสมซึ่งประกอบด้วยแรงดึง P กับแรงบิด T (รูป E1-5.3a) ซอลล์มีความแข็งแรงประลัย σ_u ซึ่งจะหาได้จากการทดสอบด้วยการดึงอย่างง่าย ภาระ P มีค่าคงที่อยู่ที่ค่าหนึ่ง และทำให้เกิดความเค้นดึงเป็น $0.51 \sigma_u$ บนหน้าตัดใดๆ ทุกหน้าตัด แรงบิด T มีค่าเพิ่มขึ้นทีละน้อยจนกระทั่งเกิดการเสียหายขึ้นบนพื้นผิวเอียงพื้นผิวหนึ่ง สมมติว่าการเสียหายเกิดขึ้นเมื่อความเค้นหลักสูงสุด σ_1 มีค่าถึงความแข็งแรงประลัย σ_u จงหาขนาดของความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นจากแรงบิด T ในขณะที่เกิดการเสียหาย และ จงหาการหมุนของพื้นผิวที่เกิดการเสียหาย



รูป E1-5.3

วิธีทำ ให้แกน x และ y พร้อมกับจุดกำเนิดของแกนอยู่ที่จุดๆหนึ่งในซอล์ค ดังแสดงไว้ในรูป E1-5.3a ดังนั้นอีลีเมนต์ที่ตัดออกมาจากซอล์คตรงจุดกำเนิดของแกนจะอยู่ในสถานะความเค้นระนาบ (ดูรูป E1-5.3b) โดย $\sigma_{xy} = 0.5\sigma_u$, $\sigma_{yy} = 0$, และ τ_{xy} เป็นสิ่งที่ไม่ทราบค่า ขนาดของความเค้นเฉือน τ_{xy} สามารถหาได้จากสมการซึ่ง σ_1 [หาได้จากสมการ(1-4.5b)] มีค่าเท่ากับ σ_u ดังนั้น

$$\sigma_u = 0.255\sigma_u + \sqrt{(0.255\sigma_u)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{xy} = 0.700\sigma_u$$

เนื่องแรงบิดกระทำกับปลายของแท่งซอล์คหมุนทวนเข็มนาฬิกา ความเค้นเฉือน τ_{xy} จะมีทิศทางลงข้างล่างบนผิวด้านหน้าของอีลีเมนต์ ดูรูป E1-5.3b และจะมีเครื่องหมายเป็นลบ ดังนั้น

$$\tau_{xy} = -0.700\sigma_u$$

กล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่า τ_{xy} ที่จริงแล้วจะกระทำลงด้านล่างบนผิวด้านขวาของรูป E1-5.3b และกระทำขึ้นข้างบนบนผิวด้านซ้ายมือ เราจะหาตำแหน่งของพื้นที่เสียหายก่อนโดยใช้วงกลมของมอร์แล้วจึงใช้สมการ (1-4.5a) ดังแสดงในรูป E1-5.3c จุดศูนย์กลาง C ของวงกลมของมอร์วางอยู่บนแกน σ_{xx} ตรง

ตำแหน่ง $0.255 \sigma_u$ จากจุดกำเนิด O รัศมี R ของวงกลมจะมีค่าเป็น $R = 0.745 \sigma_u$ เมื่อ $\theta = 0$, องค์ประกอบของความเค้น $\sigma_{xx(\theta=0)} = \sigma_{xx} = 0.51 \sigma_u$ และ $\tau_{xy} \sigma_{yy(\theta=0)} = \tau_{xy} \sigma_{yy} = -0.700 \sigma_u$ กำหนดจุด P ลงบนวงกลมจุด Q ซึ่งแสดงความเค้นหลักสูงสุดจะหาได้โดยหมุนไปตามเข็มนาฬิกาเป็นมุม $2\theta_1$ จากจุด P เพราะฉะนั้น ระบายเสียหายจะต้องตั้งฉากกับแกน x โดยอยู่ในตำแหน่งที่ซึ่งทำมุม θ_1 กับแกน x มุม θ_1 สามารถหาได้จากสมการ(1-4.5a) ซึ่งให้คำตอบมีค่าเป็น

$$\tan \theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx}} = -\frac{2(0.700\sigma_u)}{0.51\sigma_u} = -2.7452$$

ดังนั้น

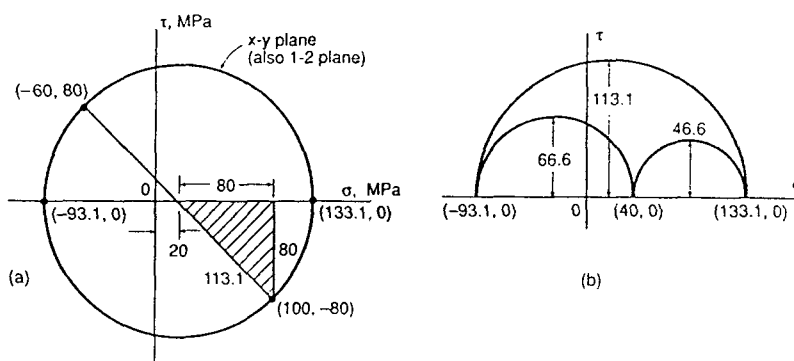
$$\theta_1 = -0.6107 \text{ rad}$$

เนื่องจาก θ_1 เป็นลบ แกน x จะอยู่ในตำแหน่งหมุนไปตามเข็มนาฬิกาเป็นมุม θ_1 จากแกน x ระบายเสียหายจะทำมุม ϕ กับแกน x ซึ่งจะหาได้จาก

$$\phi = \frac{\pi}{2} - |\theta_1| = 0.9601 \text{ rad}$$

ขนาดของ ϕ ขึ้นอยู่กับขนาดของ P ถ้า $P = 0$, ซอลส์จะถูกกระทำด้วยแรงบิดเพียงอย่างเดียว จะได้ค่า $\phi = \pi/4$ ถ้า $P/A = \sigma_u$ (A คือพื้นที่หน้าตัด) ซอลส์จะถูกกระทำด้วยการดึงอย่างเดียว ($T=0$) จะได้ค่า $\phi = \pi/2$

ตัวอย่าง 1-5.4 ทำซ้ำตัวอย่าง 1-4.7 องค์ประกอบของความเค้นในสถานะดั้งเดิม คือ $\sigma_x = 100 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_y = -60 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_z = 40 \text{ N/mm}^2$, $\tau_{xy} = 80 \text{ N/mm}^2$, $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$



รูป E1-5.4

วิธีทำ เนื่องจากมีองค์ประกอบของความเค้นเฉือนที่ไม่เป็นศูนย์เพียงองค์ประกอบเดียว ความเค้นตั้งฉากที่อยู่บนระนาบของความเค้นเฉือนค่านี้คือความเค้นหลักค่าหนึ่ง นั่นคือ

$$\sigma_3 = \sigma_z = 40 \text{ N/mm}^2$$

ตอบ

วงกลมของโมร์อาจใช้กับระนาบ x-y ปัญหาแบบสองมิติ จุดปลายทั้งสองของเส้นผ่านศูนย์กลางคือ

$$X(\sigma_x, \tau_{xy}) = (100, -80) \text{ N/mm}^2$$

$$Y(\sigma_y, \tau_{yx}) = (-60, 80) \text{ N/mm}^2$$

ได้วงกลมของโมร์ดังในรูป E1-5.4

เรขาคณิตง่ายเหมือนในตัวอย่าง 1-5.2 ที่ผ่านมาแล้ว เป็นสิ่งที่ต่อไปต้องการที่จะกำหนดจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางในแนวระดับ จุดศูนย์กลางของวงกลมของโมร์ถูกกำหนดให้อยู่บนแกน σ เป็นระยะ

$$a = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{100 - 60}{2} = 20 \text{ N/mm}^2$$

จากสามเหลี่ยมส่วนที่แรงงาไว้ในรูป E 1-5.4a รัศมีของวงกลมของโมร์คือ

$$R = \sqrt{80^2 + 80^2} = 113.1 \text{ N/mm}^2$$

ซึ่งจะให้ค่าของความเค้นหลักที่เหลืออีกสองค่าออกมา คือ

$$\sigma_1, \sigma_2 = a \pm R = 133.1 \text{ N/mm}^2, -93.1 \text{ N/mm}^2$$

จุดที่มีพิกัด $(\sigma_1, 0)$, $(\sigma_2, 0)$ และ $(\sigma_3, 0)$ จะถูกกำหนดลงไปเพื่อเขียนวงกลมของโมร์ ดังแสดงในรูป E1-5.4b รัศมีของวงกลมแต่ละวงก็คือความเค้นเฉือนสูงสุด

$$\tau_1 = \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2} = 66.6 \text{ N/mm}^2 \quad \text{ตอบ}$$

$$\tau_2 = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} = 46.6 \text{ N/mm}^2 \quad \text{ตอบ}$$

$$\tau_3 = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2} = 113.1 \text{ N/mm}^2 \quad \text{ตอบ}$$

ซึ่งค่าที่มากที่สุดจะเป็น $\tau_{\max}$

ถ้าตัวอย่างนี้เกี่ยวข้องกับสถานะของความเค้นดั้งเดิมซึ่งมีองค์ประกอบของความเค้นเฉือนที่ไม่เป็นศูนย์มากกว่าหนึ่งองค์ประกอบ การใช้วงกลมของโมร์จะไม่มีข้อได้เปรียบอะไรเลย เมื่อเทียบกับการแก้สมการกำลังสาม วิธีใช้วงกลมของโมร์กับสถานะของความเค้นสามมิติก็มีอยู่บ้าง แต่ค่อนข้างยาก วิธีเหล่านี้แสดงไว้ในตำราที่มีเนื้อหาที่ค่อนข้างขั้นสูง เช่น ของ Nadai (1950) เป็นต้น

ตัวอย่าง 1-5.5 จงหาค่าของความเค้นเฉือนสูงสุดสำหรับสถานะที่วิเคราะห์ในตัวอย่าง 1-5.1 และ 1-5.2

วิธีทำ สถานะของความเค้นดั้งเดิมคือ $\sigma_1 = 95 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_2 = 25 \text{ N/mm}^2$, $\tau_{xy} = 20 \text{ N/mm}^2$ และ

ความเค้นหลักกับความเค้นเฉือนสูงสุดหาได้เรียบร้อยแล้วจากการวิเคราะห์บนระนาบ x-y คือ

$$\sigma_1 = 100.3 \text{ N/mm}^2, \quad \sigma_2 = 19.7 \text{ N/mm}^2, \quad \tau_3 = 40.3 \text{ N/mm}^2$$

และความเค้นหลักค่าที่สามคือ

$$\sigma_3 = \sigma_y = 0$$

สมการ (1-5.5a) จะให้ความเค้นเฉือนสูงสุดค่าที่เหลือ คือ

$$\tau_1 = \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2} = \frac{|19.7 - 0|}{2} = 9.8 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_2 = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} = \frac{|100.3 - 0|}{2} = 50.1 \text{ N/mm}^2$$

ดังนั้นความเค้นเฉือนสูงสุดที่มีค่ามากที่สุดคือ τ_2 ซึ่งไม่ได้วางอยู่บนระนาบ x-y แต่จะเบงทำมุม 45° กับระนาบ x-y นั่นคือ

$$\tau_{\max} = 50.1 \text{ N/mm}^2$$

ตอบ

คาดว่าจะเป็ในสถานะเช่นนี้เนื่องจากความเค้นหลัก σ_1 และ σ_2 ที่อยู่บนระนาบ x-y มีเครื่องหมายเหมือนกัน

1. Let the state of stress at a point be specified by the following stress components: $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$, $\sigma_{xy} = -75$ MPa, $\sigma_{yz} = 65$ MPa, and $\sigma_{zx} = -55$ MPa. Determine the principal stresses, direction cosines for the three principal stress directions, and maximum shear stress.
2. Consider a state of stress in which the nonzero stress components are σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , and σ_{xy} . Note that this is not a state of plane stress since $\sigma_{zz} \neq 0$. Consider another set of coordinate axes (X , Y , Z), with the Z axis coinciding with the z axis and the X axis located counterclockwise through angle θ from the x axis. Show that the transformation equations for this state of stress are identical to Eq. (2.30) or (2.31) for plane stress.
3. Let the state of stress at a point be specified by the following stress components: $\sigma_{xx} = 110$ MPa, $\sigma_{yy} = -86$ MPa, $\sigma_{zz} = 55$ MPa, $\sigma_{xy} = 60$ MPa, and $\sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$. Determine the principal stresses, direction cosines of the principal stress directions, and maximum shear stress.

Ans. $\sigma_1 = 126.9$ MPa, $\sigma_2 = -102.9$ MPa, $\sigma_3 = 55.0$ MPa

$l_1 = 0.9625$, $m_1 = 0.2717$, $n_1 = 0$

$l_2 = 0.2717$, $m_2 = -0.9625$, $n_2 = 0$

$l_3 = 0$, $m_3 = 0$, $n_3 = -1$

$\sigma_{\max} = 114.9$ MPa

4. Solve Problem 1.3 using the results of Problem 1.2
5. Let the state of plane stress be specified by the following stress components: $\sigma_{xx} = 90$ MPa, $\sigma_{yy} = -10$ MPa, $\sigma_{xy} = 40$ MPa. Let the X axis lie in the (x , y) plane and be located at $\theta = \pi/6$ clockwise from the x axis. The direction cosines for the X axis are $l = \cos(-\pi/6) = 0.8660$, $m = \sin(-\pi/6) = -0.5000$, $n = 0$. Determine the normal and shear stresses on a plane perpendicular to the X axis; use Eqs. (2.10), (2.11), and (2.12).

Ans. $\sigma_{XX} = 30.36$ MPa, $\sigma_{XY} = 63.30$ MPa

In Problems 6 through 9, the Z axis for the transformed axes coincides with the z axis for the volume element on which the known stress components act.

6. The nonzero stress components are $\sigma_{xx} = 200$ MPa, $\sigma_{yy} = 100$ MPa, and $\sigma_{xy} = -50$ MPa. Determine the principal stresses and maximum shear stress. Determine the angle between the X axis and the x axis when the X axis is in the direction of the principal stress with largest absolute magnitude.
7. The nonzero stress components are $\sigma_{xx} = -90$ MPa, $\sigma_{yy} = 50$ MPa, and $\sigma_{xy} = 60$ MPa. Determine the principal stresses and maximum shear stress. Determine the angle between the X axis and the x axis when the X axis is in the direction of the principal stress with largest absolute magnitude.

Ans. $\sigma_1 = 72.2$ MPa, $\sigma_2 = -112.2$ MPa, $\sigma_3 = 0$, $\tau_{\max} = 92.2$ MPa.
 X axis located 0.3543 rad clockwise from x axis.

8. The nonzero stress components are $\sigma_{xx} = 80$ MPa, $\sigma_{zz} = -60$ MPa, and $\sigma_{xy} = 30$ MPa. Determine the principal stresses and maximum shear stress. Determine the angle between the X axis and the x axis when the X axis is in the direction of the principal stress with largest absolute magnitude.
9. The nonzero stress components are $\sigma_{xx} = 150$ MPa, $\sigma_{yy} = 70$ MPa, $\sigma_{zz} = -80$ MPa, and $\sigma_{xy} = -45$ MPa. Determine the principal stresses and maximum shear stress. Determine the angle between the X axis and the x axis when the X axis is in the direction of the principal stress with largest absolute magnitude.

Ans. $\sigma_1 = 170.2$ MPa, $\sigma_2 = 49.8$ MPa, $\sigma_3 = -80$ MPa,
 $\tau_{\max} = 125.1$ MPa. X axis located 0.4221 rad clockwise from the x axis.

10. Using transformation equations of plane stress, determine σ_{XX} and σ_{XY} for the X axis located 0.5000 rad clockwise from the x axis. The nonzero stress components are given in Problem 2.6.
11. Using transformation equations of plane stress, determine σ_{XX} and σ_{XY} for the X axis located 0.1500 rad counterclockwise from the x axis. The nonzero stress components are given in Problem 7.

Ans. $\sigma_{XX} = -69.1$ MPa, $\sigma_{XY} = 78.0$ MPa

12. Using transformation equations of stress (see Problem 2), determine σ_{Xx} and σ_{Xy} for the X axis located 1.00 rad clockwise from the x axis. The nonzero stress components are given in Problem 8.
13. Using transformation equations of stress (see Problem 2), determine σ_{Xx} and σ_{Xy} for the X axis located 0.70 rad counterclockwise from the x axis. The nonzero stress components are given in Problem 9.

Ans. $\sigma_{xx} = 72.5$ MPa, $\sigma_{xy} = -47.1$ MPa

14. Solve Problem 10 using Mohr's circle of stress.
15. Solve Problem 11 using Mohr's circle of stress.
16. Solve Problem 12 using Mohr's circle of stress.
17. Solve Problem 13 using Mohr's circle of stress.
18. A volume element at the free surface is shown in Fig. P 18. The state of stress is plane stress with $\sigma_{xx} = 100$ MPa. Determine the other stress components.

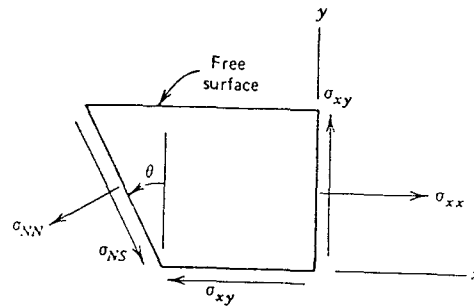


Figure P 18

19. Determine the unknown stress components for the volume element in Fig. P 19.

Ans. $\sigma_{xx} = 26.67$ MPa, $\sigma_{yy} = 172.50$ MPa

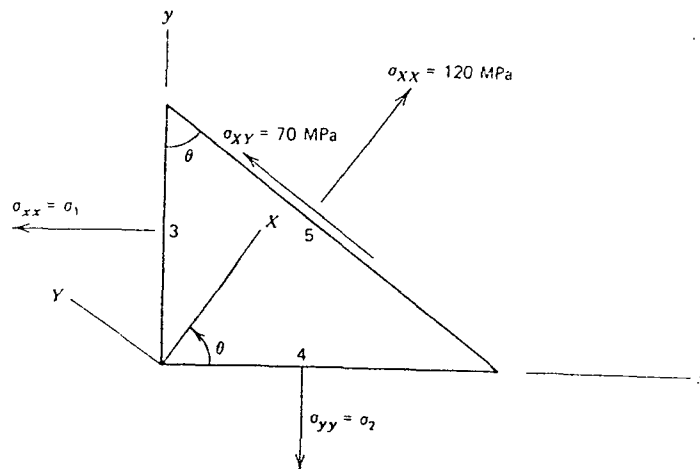


Figure P 19

20. Determine the unknown stress components for the volume element in Fig. P 20.

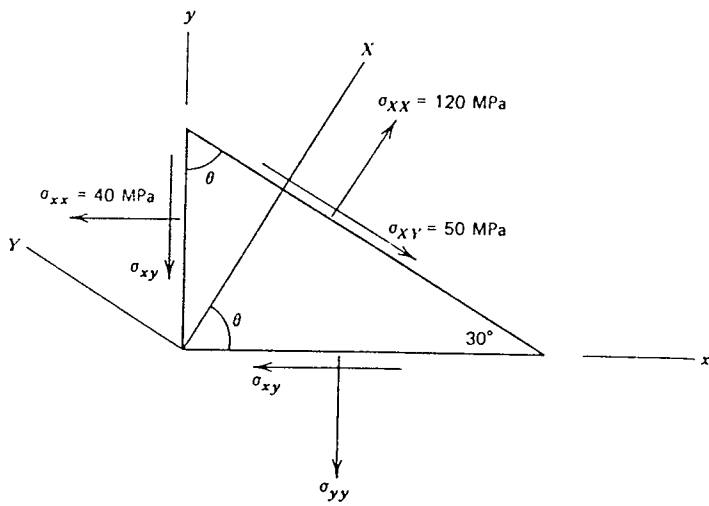


Figure P 20

21. Determine the unknown stress components for the volume element in Fig. P 21.

Ans. $\sigma_{xx} = -109.18 \text{ MPa}$, $\sigma_{xy} = -10.01 \text{ MPa}$

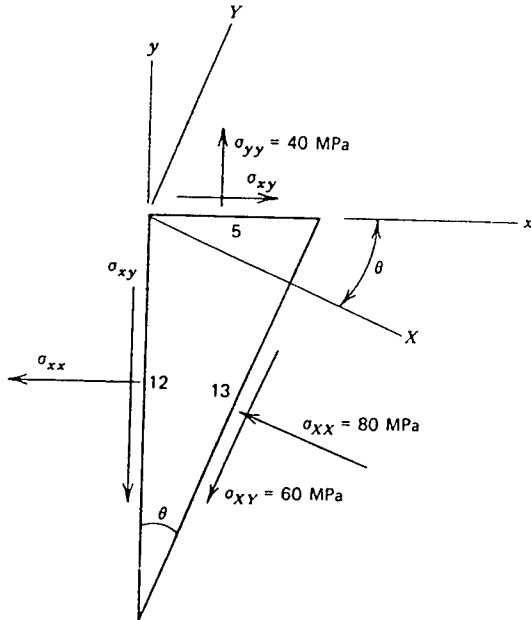


Figure P 21

22. The nonzero stress components are $\sigma_{xx} = -100$ MPa, $\sigma_{yy} = 60$ MPa, and $\sigma_{xy} = -50$ MPa.
23. The nonzero stress components are $\sigma_{xx} = 180$ MPa, $\sigma_{yy} = 90$ MPa, and $\sigma_{xy} = 50$ MPa.

Ans. $\sigma_1 = 202.3$ MPa, $\sigma_2 = 67.7$ MPa, $\sigma_3 = 0$, $\tau_{\max} = 101.1$ MPa,
 $\tau_{\text{oct}} = 84.1$ MPa

24. The nonzero stress components are $\sigma_{xx} = -150$ MPa, $\sigma_{yy} = -70$ MPa, $\sigma_{zz} = 40$ MPa, and $\sigma_{xy} = -60$ MPa.
25. The nonzero stress components are $\sigma_{xx} = 80$ MPa, $\sigma_{yy} = -35$ MPa, $\sigma_{zz} = -50$ MPa, and $\sigma_{xy} = 45$ MPa.

Ans. $\sigma_1 = 95.5$ MPa, $\sigma_2 = -50.5$ MPa, $\sigma_3 = -50$ MPa,
 $\tau_{\max} = 73.0$ MPa, $\tau_{\text{oct}} = 68.7$ MPa

26. The nonzero stress components are $\sigma_{xx} = 95$ MPa, $\sigma_{yy} = 0$, $\sigma_{zz} = 60$ MPa, and $\sigma_{xy} = -55$ MPa.
27. Let the state of stress at a point be given by $\sigma_{xx} = -120$ MPa, $\sigma_{yy} = 140$ MPa, $\sigma_{zz} = 66$ MPa, $\sigma_{xy} = 45$ MPa, $\sigma_{yz} = -65$ MPa, and $\sigma_{zx} = 25$ MPa. Determine the three principal stresses and directions associated with the three principal stresses.

Ans. $\sigma_1 = 180.2$ MPa, $\sigma_2 = 40.1$ MPa, $\sigma_3 = -134.3$ MPa
 $l_1 = 0.0913$, $m_1 = 0.8740$, $n_1 = -0.4773$
 $l_2 = 0.2584$, $m_2 = 0.4422$, $n_2 = 0.8589$
 $l_3 = 0.9598$, $m_3 = -0.2062$, $n_3 = -0.1904$

28. Let the state of stress at a point be given by $\sigma_{xx} = 0$, $\sigma_{yy} = 100$ MPa, $\sigma_{zz} = 0$, $\sigma_{xy} = -60$ MPa, $\sigma_{yz} = 35$ MPa, and $\sigma_{zx} = 50$ MPa. Determine the three principal stresses.
29. Let the state of stress at a point be given by $\sigma_{xx} = 120$ MPa, $\sigma_{yy} = -55$ MPa, $\sigma_{zz} = -85$ MPa, $\sigma_{xy} = -55$ MPa, $\sigma_{yz} = 33$ MPa, and $\sigma_{zx} = -75$ MPa. Determine the three principal stresses and maximum shear stress.

Ans. $\sigma_1 = 162.5$ MPa, $\sigma_2 = -114.1$ MPa, $\sigma_3 = -68.4$ MPa, $\tau_{\max} = 138.3$ MPa

30. Let the state of stress at a point be given by $\sigma_{xx} = -90$ MPa, $\sigma_{yy} = -60$ MPa, $\sigma_{zz} = 40$ MPa, $\sigma_{xy} = 70$ MPa, $\sigma_{yz} = -40$ MPa, and $\sigma_{zx} = -55$ MPa. Determine the three principal stresses and maximum shear stress.
31. Let the state of stress at a point be given by $\sigma_{xx} = -150$ MPa, $\sigma_{yy} = 0$, $\sigma_{zz} = 80$ MPa, $\sigma_{xy} = -40$ MPa, $\sigma_{yz} = 0$, and $\sigma_{zx} = 50$ MPa. Determine the three principal stresses and maximum shear stress.

Ans. $\sigma_1 = 91.2$ MPa, $\sigma_2 = 8.28$ MPa, $\sigma_3 = -169.5$ MPa,
 $\tau_{\max} = 130.3$ MPa

32. (a) Solve Example 1 using Mohr's circle and show the orientation of the volume element on which the principal stresses act.
 (b) Determine the maximum shear stress and show the orientation of the volume element on which it acts.
33. At a point on the flat surface of a member, load-stress relations give the following stress components relative to the (x, y, z) axes, where the z axis is perpendicular to the surface: $\sigma_{xx} = 240$ MPa, $\sigma_{yy} = 100$ MPa, $\sigma_{xy} = -80$ MPa, $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$.

- (a) Determine the principal stresses using Eq. (2.20), and then again using Eqs. (2.36) and (2.37).
- (b) Determine the principal stresses using Mohr's circle and show the orientation of the volume element on which these principal stresses act.
- (c) Determine the maximum shear stress and maximum octahedral shear stress.

PROBLEMS AND QUESTIONS

- 34 A state of stress that occurs at a point on the free surface of a solid body is $\sigma_x = 50$, $\sigma_y = 10$, and $\tau_{xy} = -15$ MPa, where the directions shown in Fig. 6.2(a) are considered positive.
- (a) Evaluate the principal normal stresses and the principal shear stress in the x - y plane, and give the coordinate axes rotations for these.
- (b) Considering shear stresses not in the x - y plane, what is the maximum shear stress?
- 35 Repeat Prob. 6.1 for the following state of stress: $\sigma_x = 60$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 30$ MPa.
- 36 Repeat Prob. 6.1 for the following state of stress: $\sigma_x = 50$, $\sigma_y = 100$, and $\tau_{xy} = -60$ MPa.
- 37 Repeat Prob. 6.1 for the following state of stress: $\sigma_x = 120$, $\sigma_y = 40$, and $\tau_{xy} = -30$ MPa.
- 38 A cylindrical pressure vessel 10 m long has closed ends, a wall thickness of 5 mm, and an inner diameter of 3 m. The vessel is filled with a gas to a pressure of 2 MPa. Determine the maximum normal stress and the maximum shear stress, and also describe the orientations of the planes on which these act. Neglect any effects of the discontinuity associated with the end closure.
- 39 A spherical pressure vessel has a wall thickness of 2.5 mm and an inner diameter of 150 mm, and it contains a liquid at 1.2 MPa pressure. Determine the maximum normal stress and the maximum shear stress, and also describe the planes on which these act.
- 40 A pipe 30 m long has closed ends, a wall thickness of 10 mm, and an inner diameter of 0.60 m. The pipe is filled with a gas to a pressure of 20 MPa, and it is subjected to a torque about its long axis of 1.13 MN·m. Neglect any effects of the discontinuity associated with the end closure. Determine: (a) the three principal normal stresses and (b) the maximum shear stress on any plane.
- 41 A weight $W = 45$ kN is hung eccentrically from the end of a cantilevered pipe of length $L = 750$ mm as shown in Fig. P 41. The outer diameter is $d = 250$ mm, the wall thickness is 6 mm, and a fluid in the pipe has a pressure of 3.5 MPa. Determine the maximum normal and shear stresses at (a) point A and (b) point B. Neglect any stress raiser effects where the pipe is attached.

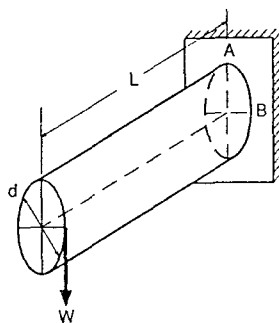


Figure P 41

- 42 A pipe with closed ends has an outer diameter of 80 mm and a wall thickness of 2.0 mm. It is subjected to an internal pressure of 10 MPa, a bending moment of 2000 N·m, and a torque of 3000 N·m. What is the maximum shear stress in the pipe?
- 43 A three-dimensional state of stress is as follows: $\sigma_x = 50$, $\sigma_y = 10$, $\sigma_z = -20$, $\tau_{xy} = -15$, and $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ MPa.
- (a) Determine the principal normal and shear stresses.
- (b) Determine the direction cosines for each principal normal stress axis.
- 44 Repeat Prob. 43 for $\sigma_x = 50$, $\sigma_y = 100$, $\sigma_z = 200$, $\tau_{xy} = 60$, and $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ MPa.
- 45 Repeat Prob. 43 for $\sigma_x = 10$, $\sigma_y = 20$, $\sigma_z = -10$, $\tau_{xy} = -20$, $\tau_{yz} = 10$, and $\tau_{zx} = -30$ MPa.
- 46 Consider a triaxial state of stress where $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = S$, and where all shear stresses for the x - y - z coordinate system chosen are zero, so that $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$. In terms of S , what are the principal normal and shear stresses?
- 47 Consider the special case where normal stresses σ_x , σ_y , and σ_z are present, but where the only nonzero shear stress is τ_{xy} for the x - y - z coordinate system chosen, so that $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$.

For determining principal normal stresses, show that the solution of Eq. 6.20 corresponds to the two equations represented by Eq. 6.7 and the third equation $\sigma_2 = \sigma_3$.

- 4.4 Consider an internally pressurized thick-walled spherical vessel.
- Use Eq. A.3 in Appendix A to develop an equation for the maximum shear stress at any radial position in the vessel, expressing this as a function of the radii r_1 , r_2 , and R , and the pressure p . Also show that the overall maximum shear stress in the vessel occurs at the inner wall.
 - Assume that the vessel has an inner diameter of 100 mm, an outer diameter of 150 mm, and contains an internal pressure of 300 MPa. Then determine the principal normal and shear stresses at the inner wall.
- 4.4 Consider an internally pressurized thick-walled cylinder with closed ends, and neglect the localized effects of the end closure.
- Use Eqs. A.1 and A.2 in Appendix A to develop an equation for the maximum shear stress at any radial position in the vessel, expressing this as a function of the radii r_1 , r_2 , and R , and the pressure p . Also show that the overall maximum shear stress in the vessel occurs at the inner wall.
 - Assume that the vessel has an inner diameter of 80 mm, an outer diameter of 100 mm, and contains an internal pressure of 100 MPa. Then determine the principal normal and shear stresses at the inner wall.
- 5.0 A thick-walled cylinder has closed ends and is loaded with an internal pressure of 100 MPa and a torque of 15 kN-m. The cylinder has an inner diameter of 60 mm and an outer diameter of 80 mm. Determine the maximum shear stress in the cylinder, considering all possible locations and planes. Neglect the localized effects of the end closure. (Suggestion: Since the location of the maximum shear stress is not known, evaluate the three principal shear stresses at both the inner and outer walls, and also at several intermediate radial positions.)
- 5.1 Determine the octahedral normal and shear stresses for the state of stress of Prob. 6.1.
- 5.2 Determine the octahedral normal and shear stresses for the state of stress of Prob. 6.10.
- 5.3 Consider a case of plane stress where the only nonzero components for the x - y - z coordinate system chosen are σ_x and τ_{xy} . (For example, this situation occurs at the surface of a shaft under combined bending and torsion.) Develop equations in terms of σ_x and τ_{xy} for the following: maximum normal stress, maximum shear stress, and octahedral shear stress.
- 5.4 Repeat Prob. 5.3 for the case of plane stress where the only nonzero components for the x - y - z system chosen are σ_x and σ_y . (For example, this occurs in a cylindrical tube with internal pressure and bending and/or axial loads.)
- 5.5 A thin-walled tube with closed ends has inner diameter d and wall thickness t , and it is subjected to an internal pressure p . Determine the following in terms of d , t , and p : maximum normal stress, maximum shear stress, and octahedral shear stress.
- 5.6 Develop an equation for the octahedral shear stress in terms of the principal shear stresses.
- 5.7 Consider a thick-walled cylindrical pressure vessel with closed ends, and neglect the localized effects of the end closure. Use Eqs. A.1 and A.2 in Appendix A to develop an equation for the octahedral shear stress τ_h at any radial position in the vessel. Also show that the maximum value of τ_h occurs at the inner wall.
- 5.8 For the situation of Prob. 5.5 determine the maximum octahedral shear stress in the cylinder.
- 5.9 Derive the equations for the octahedral normal and shear stresses, Eqs. 6.34 and 6.35, based on equilibrium of the solid body shown in Fig. 6.15(a). Suggestions: Note that the three faces in the principal planes are acted upon by principal stresses, σ_1 , σ_2 , and σ_3 , and calculate the relative areas of these planes and the octahedral plane. Then sum *forces* normal to the octahedral plane to get σ_h , and parallel to this plane to get τ_h . Also, from the general properties of direction cosines, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

สัปดาห์ที่ 6

หัวข้อเรื่อง การวิเคราะห์ความเครียด (3)

(3 ชั่วโมง)

ความคิดรวบยอด

1. สถานะของความเครียดแบบต่างๆเป็นสิ่งที่สำคัญมากในการวิเคราะห์ความเครียด จึงนำมาศึกษาโดยละเอียดอีกครั้ง
2. การพิจารณาสถานะของความเครียดสามารถออกเป็น สถานะของความเครียดสองมิติ และสถานะของความเครียดสามมิติ
3. การศึกษาสถานะของความเครียดก็เพื่อหาค่าความเครียดหลัก และความเครียดเนื่องสูงสุด ซึ่งสามารถหาได้จากการคำนวณ หรือโดยการใช่วงกลมของมอร์

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. วิเคราะห์สถานะของความเครียดภายใต้การตั้งหรือการอัดในทิศทางเดียวได้
2. วิเคราะห์สถานะของความเครียดภายใต้การตั้งหรือการอัดในทิศทางที่ตั้งฉากกันสองทิศทางได้
3. คำนวณหาความเครียดหลักในสถานะของความเครียดสองมิติได้
4. คำนวณหาความเครียดหลักในสถานะของความเครียดสามมิติได้

สังเขปเนื้อหา

หน่วยที่ 4. สถานะของความเครียด

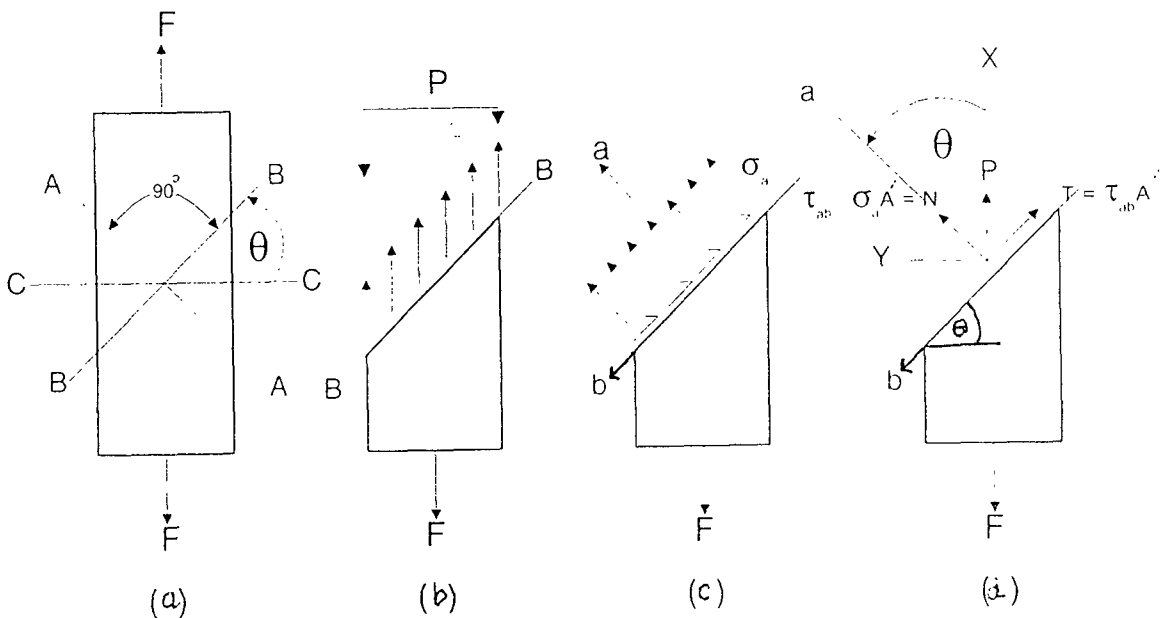
- ความเครียดภายใต้การตั้งหรือการอัดในทิศทางเดียว
- ความเครียดภายใต้การตั้งหรือการอัดในทิศทางที่ตั้งฉากกันสองทิศทาง
- การหาความเครียดหลักในสถานะของความเครียดสองมิติ
- การหาความเครียดหลักในสถานะของความเครียดสามมิติ

หน่วยที่ 4 สถานะของความเค้น

1-6 ความเค้นภายใต้การดึงหรือการอัดในทิศทางเดียว

การวิเคราะห์ชิ้นส่วนที่รับการดึงและการอัดตามแนวแกนที่ผ่านมาแล้วนั้น มักจะเป็นการพิจารณาความเค้นที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดที่ตั้งฉากกับแนวแรงภายนอก ในกรณีที่พิจารณาความเค้นบนหน้าตัด B-B ในรูป 1-6.1a จะสามารถทำได้ด้วยวิธีเดียวกับที่กล่าวมาแล้ว คือใช้วิธีวิเคราะห์โดยการตัด (Method of Sections) ตัดวัตถุในรูป 1-6.1a ออกที่หน้าตัด B-B แล้วแยกเอาส่วนล่างออกมาเป็นวัตถุอิสระ (Free Body) รูป 1-6.1b

แรงภายในที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดเอียงจะมีค่าเท่ากับ P ซึ่งเป็นแรงลัพธ์ของความเค้นที่เกิดขึ้นตลอดทั้งหน้าตัด ความเค้นที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดเอียงนี้สามารถแยกให้อยู่ในแนวที่ตั้งฉากและขนานกับหน้าตัดเอียงได้ ดังแสดงไว้ในรูป 1-6.1c กำหนดให้ความเค้นตั้งฉาก (Normal Stress) ในทิศทางที่ขนานกับแกน a ซึ่งตั้งฉากกับหน้าตัดเอียงเป็น σ_a และความเค้นเฉือน (Shearing Stress) ที่เกิดขึ้นบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน a และมีทิศทางขนานกับแกน b เป็น τ_{ab} แรงภายในที่เกิดขึ้นในแนวตั้งฉากและขนานกับหน้าตัดเอียงได้แสดงไว้ในรูป 1-6.1d คือแรง N ตั้งฉากกับหน้าตัดเอียงหรืออยู่ในแนวแกน a ซึ่งเอียงทำมุม θ กับแกน x และแรง T ขนานกับหน้าตัดเอียงหรือขนานกับแกน b เมื่อให้พื้นที่เอียงแทนด้วย A' จะได้



รูป 1-6.1

$$N = \sigma_a A' = P \cos \theta \quad (1)$$

$$T = \tau_{ab} A' = P \sin \theta \quad (2)$$

เนื่องจากพื้นที่ A' ทำมุม θ กับพื้นที่หน้าตัด A ดังนั้น

$$A = A' \cos \theta \quad (3)$$

เมื่อแทนสมการ (3) ลงใน (1) และ (2) จะได้

$$\sigma_a = \frac{P}{A} \cos^2 \theta = \frac{F}{A} \cos^2 \theta \quad (1-6.1)$$

$$\tau_{ab} = \frac{1}{2} \frac{P}{A} \sin 2\theta = \frac{1}{2} \frac{F}{A} \sin 2\theta$$

เนื่องจากความเค้นที่เกิดขึ้นในแนวแกน x คือ σ_x มีค่าเป็น

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{F}{A}$$

สมการ (1-6.1) จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\sigma_a = \sigma_x \cos^2 \theta \quad (1-6.2)$$

$$\tau_{ab} = \frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\theta$$

ดังนั้นจะเห็นได้ว่าบนหน้าตัดเอียงของชิ้นส่วนมีรับการดึงเพียงอย่างเดียวจะเกิดความเค้นตั้งฉาก σ_a และความเค้นเฉือน τ_{ab} ขึ้นพร้อมกันทั้ง 2 อย่าง จากสมการ (1-6.2) จะสังเกตได้ว่าความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดเอียงมีค่าขึ้นอยู่กับค่าของมุม θ ที่แกนตั้งฉาก a ทำมุมกับแกน x

ถ้า $\theta = 0^\circ$ คือหน้าตัด B-B ทับกับหน้าตัด C-C หรือแกน a ทับกับแกน x จากสมการ (1-6.1) จะได้

$$\sigma_a = \sigma_{\max} = \sigma_x$$

$$\tau_{ab} = 0$$

บนหน้าตัดนี้ ความเค้นตั้งฉากจะมีค่าสูงสุดเพราะมีค่าเท่ากับ $\sigma_x = F/A$ ส่วนความเค้นเฉือนนั้นจะไม่เกิดขึ้นบนหน้าตัดนี้

เมื่อ θ มีค่าเพิ่มมากขึ้นในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ความเค้นตั้งฉากจะมีค่าลดลงจนกระทั่ง $\theta = 45^\circ$ บนหน้าตัดนี้จะเกิดความเค้นขึ้นดังนี้คือ

$$\sigma_a = \frac{\sigma_x}{2}$$

$$\tau_{ab} = \tau_{\max} = \frac{\sigma_x}{2}$$

ดังนั้นบนหน้าตัดที่เอียงทำมุม 45° กับแนวแรงของแรงภายนอกจะเกิดความเค้นดัดฉากและความเค้นเฉือนมีค่าเท่ากับครึ่งหนึ่งของความเค้นสูงสุดที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดที่ตั้งฉากกับแนวแรงของแรงภายนอก และความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดนี้จะมีค่าสูงสุดอีกด้วย

เมื่อ $\theta = 90^\circ$ คือบนระนาบที่อยู่ในแนวแกน

$$\sigma_a = 0$$

$$\tau_{ab} = 0$$

ด้วยเหตุนี้บนระนาบที่อยู่ในแนวแกนของชิ้นส่วน จะไม่มีความเค้นดัดฉากและความเค้นเฉือนเกิดขึ้นเลย

เมื่อ $\theta = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$ แกน a จะหมุนมาทับกับแกน b บนหน้าตัดนี้ จะเกิดความเค้นเฉือนน้อยที่สุด เพราะว่าเมื่อแทนค่า $\theta = 135^\circ$ ลงในสมการ (1-6.2) จะได้

$$\tau_{a,b} = \tau_{\min} = -\frac{1}{2}\sigma_x$$

เพราะ

$$\sigma_b = \frac{\sigma_x}{2}$$

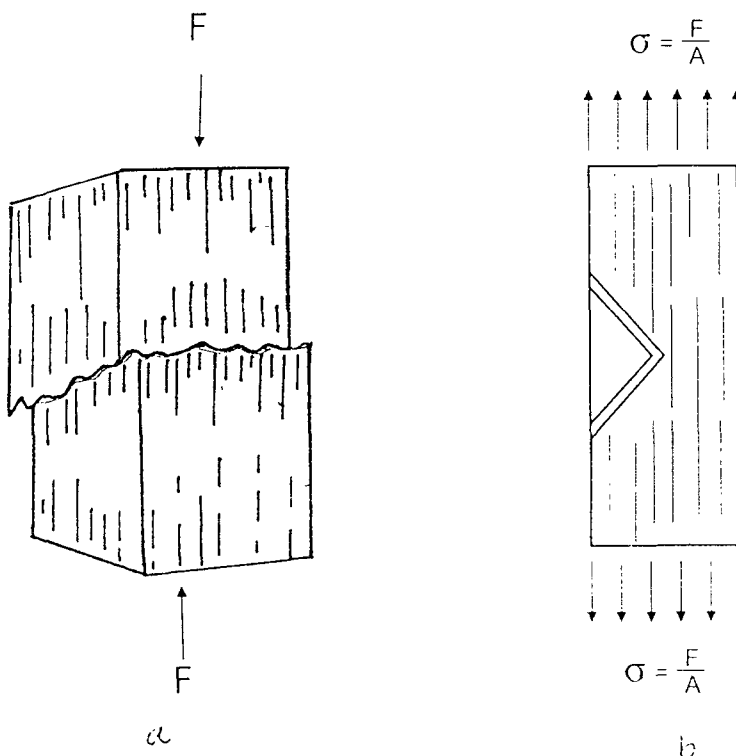
ดังนั้นชิ้นส่วนที่ถูกกระทำด้วยแรงภายนอกที่มีทิศทางอยู่ในแนวแกนของชิ้นส่วนจะเกิดความเค้นดัดฉากและความเค้นเฉือนขึ้นทั้ง 2 อย่าง ทำให้เนื้อวัสดุเกิดการดึงและการเฉือนร่วมกัน ข้อสรุปนี้สำคัญมากในการพิจารณาเกี่ยวกับการเสียหายของชิ้นส่วน

วัสดุจำนวนมากมีคุณสมบัติในการต้านทานการเฉือนน้อยกว่าคุณสมบัติในการต้านทานการดึงมาก ด้วยเหตุนี้แทนที่วัสดุดังกล่าวจะเสียหายด้วยการดึง วัสดุประเภทนี้กลับเสียหายเนื่องจากการเฉือน เพราะว่าความเค้นเฉือนสูงสุดจะมีค่าเท่ากับครึ่งหนึ่งของความเค้นดัดฉากสูงสุด

ดังนั้น Luder's Lines ที่เกิดขึ้นบนชิ้นทดสอบการดึงจึงเกิดขึ้นเนื่องจากผลของความเค้นเฉือน เส้น Luder's Lines เหล่านี้บางครั้งจะสามารถมองเห็นด้วยตาเปล่า ซึ่งเป็นการแสดงให้เห็นการเฉือนที่เกิดขึ้นในเนื้อวัสดุ ทิศทางของเส้น Luder's Lines ขึ้นอยู่กับทิศทางของความเค้นเฉือนสูงสุด ด้วยเหตุนี้ชิ้นส่วนที่รับแรงในแนวแกน ซึ่งมีเนื้อวัสดุต้านการเฉือนได้น้อยจึงมักจะเสียหายโดยโมเลกุลของเนื้อวัสดุเกิดการเลื่อนออกจากกันบนหน้าตัดที่เอียงทำมุม 45° กับแนวแกนของชิ้นส่วน เพราะบนหน้าตัดนี้ จะเกิดความเค้นเฉือนสูงสุด ตัวอย่างเช่นเสาไม้ขนาดเล็กในรูป 1-6.2(1) ซึ่งรับแรงอัดในแนวแกน จะเกิดการเสียหายอย่างแท้จริงด้วยการเฉือนบนหน้าตัดที่เอียงประมาณ 45° องศากับแนวแกน ในกรณีเช่นนี้ความเค้นอัด $\sigma = F/A$ ในขณะที่เกิดการเสียหายถือว่าเป็นความแข็งแรงประลัย (Ultimate Strength) ในการอัดของไม้ แม้ว่าไม่ใช่การเสียหายเนื่องจากการอัดที่แท้จริงก็ตาม

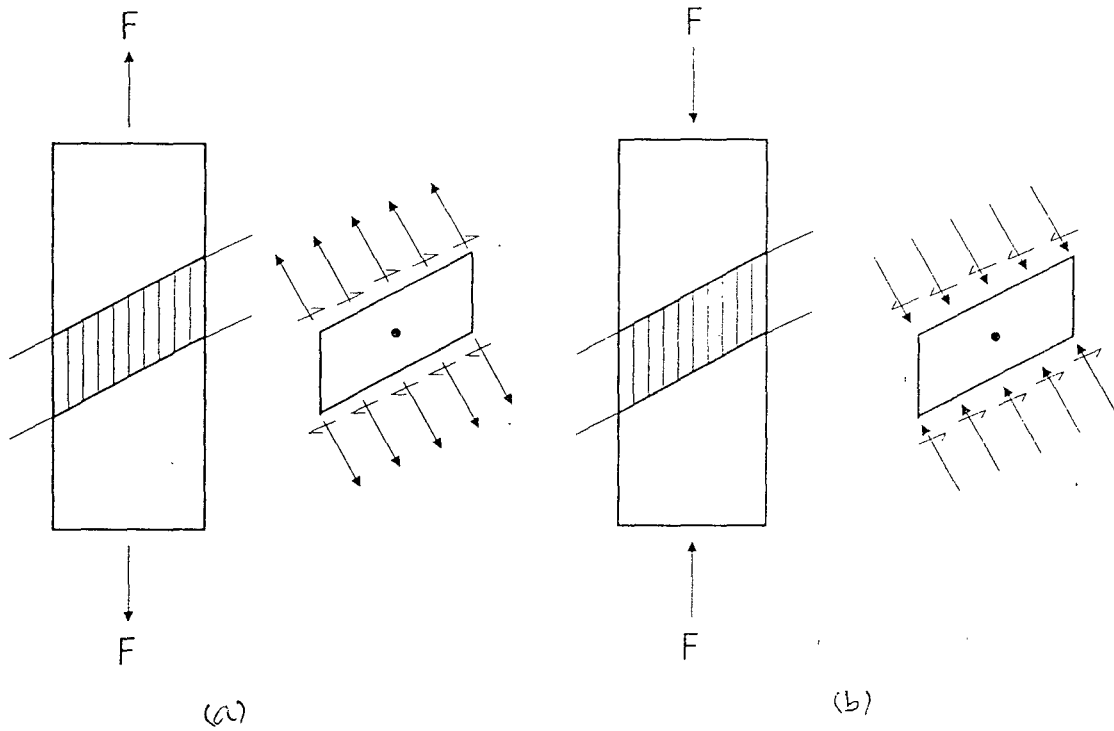
ในทำนองเดียวกัน ขณะที่ทดสอบการดึงชิ้นทดสอบเหล็กแผ่นผิวขัดมันที่ทำจากเหล็กกล้าคาร์บอนต่ำ (Low-Carbon Steel) จะสังเกตได้ว่าเมื่อความเค้นดึง $\sigma = F / A$ มีค่าเพิ่มขึ้นจนถึงค่าหนึ่ง จะปรากฏเส้น Luder's Lines ขึ้นบนผิวของชิ้นทดสอบ ดังแสดงไว้ในรูป 1-6.2(2) เส้น Luder's Lines ที่เกิดขึ้นนี้จะชี้ให้เห็นว่าวัสดุจะเกิดการเสียหายด้วยการเฉือน แม้ว่าชิ้นทดสอบจะถูกดึงก็ตาม การเลื่อนของเนื้อวัสดุบนหน้าตัดเอียงทำมุม 45° กับแนวระนาบที่ทำให้ชิ้นทดสอบเกิดการยืดตัวในแนวแกนและเมื่อลดแรงดึงออก ชิ้นทดสอบจะไม่หดกลับไปจนมีความยาวเท่าเดิม จะเกิดการเสียรูปร่างอย่างถาวรขึ้นภายในเนื้อวัสดุ การยืดเนื่องจากการเลื่อนของเนื้อวัสดุนี้เรียกว่า การครากแบบไม่ยืดหยุ่น (Plastic Yielding) ความเค้นดึงที่เกิดขึ้นในขณะที่เนื้อวัสดุเกิดการเลื่อนนี้เรียกว่าความเค้นคราก (Yield Stress) หรือความแข็งแรงคราก (Yield Strength) ในการดึง แม้ว่า การเสียหายที่เกิดขึ้นจะไม่ใช่การเสียหายเนื่องจากการดึงที่แท้จริงก็ตาม

สมการ (1-6.1) และสมการ (1-6.2) ได้หามาจากกรณีที่เป็นการดึงในแนวแกน สมการทั้ง 2 นี้สามารถใช้กับการอัดในแนวแกนได้โดยเปลี่ยนเครื่องหมายของ P / A หรือ σ_x ให้เป็นเครื่องหมายลบ ซึ่งจะทำให้ความเค้นดึงจากและความเค้นเฉือนเป็นค่าลบทั้ง 2 ค่า สถานะของความเค้นที่สมบูรณ์สำหรับการดึงและการอัดได้นำมาเปรียบเทียบกันไว้บนอติเม้นต์ที่อยู่ระหว่างหน้าตัดเอียงขนานกัน 2 หน้าตัด ในรูป 1-6.3 ทิศทางของความเค้นดึงจากและความเค้นเฉือนเนื่องจากการดึงในรูป 1-6.3a ถือว่าเป็นบวก ส่วนความเค้นดึงจากและความเค้นเฉือนเนื่องจากการอัดในรูป 1-6.3b ถือว่าเป็นลบ ดังนั้น σ_y จะเป็นบวกเมื่อ

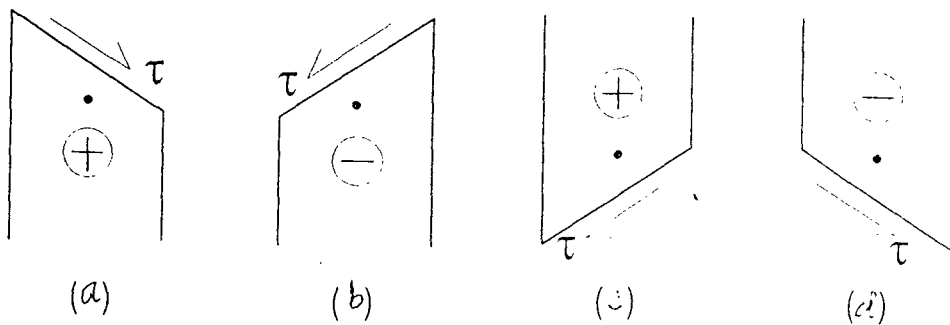


รูป 1-6.2

มันเป็นความเค้นดึง และจะเป็นลบเมื่อมันเป็นความเค้นอัด จากรูป 1-6.3 กฎเกณฑ์ที่ใช้ในการกำหนดเครื่องหมายของความเค้นเฉือนคือ ความเค้นเฉือนบนหน้าตัดใดๆของอีลิเมนต์จะมีค่าเป็นบวกเมื่อมันทำให้เกิดโมเมนต์หมุนตามเข็มนาฬิกาเมื่อเทียบกับจุดศูนย์กลางของโมเมนต์ (Center of Moment) ที่อยู่ในอีลิเมนต์ ถ้าความเค้นเฉือนทำให้เกิดโมเมนต์หมุนทวนเข็มนาฬิกาเมื่อเทียบกับจุดศูนย์กลางของโมเมนต์ที่อยู่ในอีลิเมนต์ ความเค้นเฉือนนั้นจะมีค่าเป็นลบ



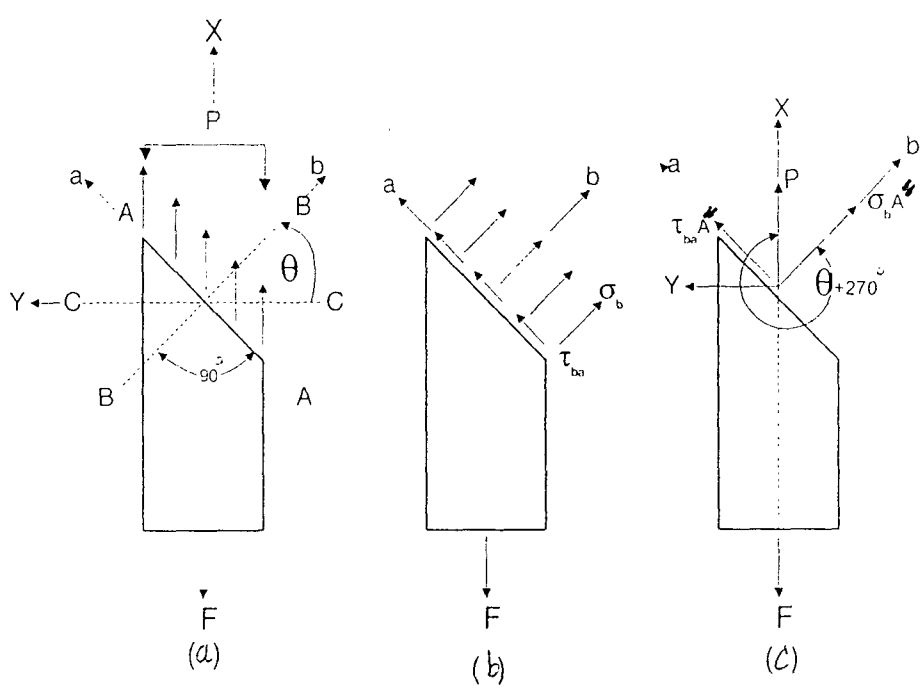
รูป 1-6.3



รูป 1-6.4

ในกรณีที่พิจารณาความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นบนระนาบใดๆของวัตถุ ความเค้นเฉือนจะมีค่าเป็นบวกเมื่อมันทำให้เกิดโมเมนต์หมุนตามเข็มนาฬิกาเมื่อเทียบกับจุดศูนย์กลางของโมเมนต์ที่อยู่ภายในวัตถุ ในกรณีตรงกันข้ามความเค้นเฉือนจะมีค่าเป็นลบ ตัวอย่างในการพิจารณาความเค้นเฉือนที่เป็นบวกและค่าความเค้นเฉือนที่เป็นลบได้แสดงไว้ในรูป 1-6.4 การกำหนดเครื่องหมายของความเค้นเฉือนก็เพื่อป้องกันการสับสนในการวิเคราะห์ความเค้นในสถานะที่ซับซ้อนมากขึ้น

ถ้าชิ้นส่วนในรูป 1-6.1(1) ถูกตัดออกมาเป็นหน้าตัด A-A ซึ่งหน้าตัด A-A นี้ตั้งฉากกับหน้าตัด B-B วัตถุอิสระของชิ้นส่วนเมื่อตัดออกจากหน้าตัด A-A ได้แสดงไว้ในรูป 1-6.5



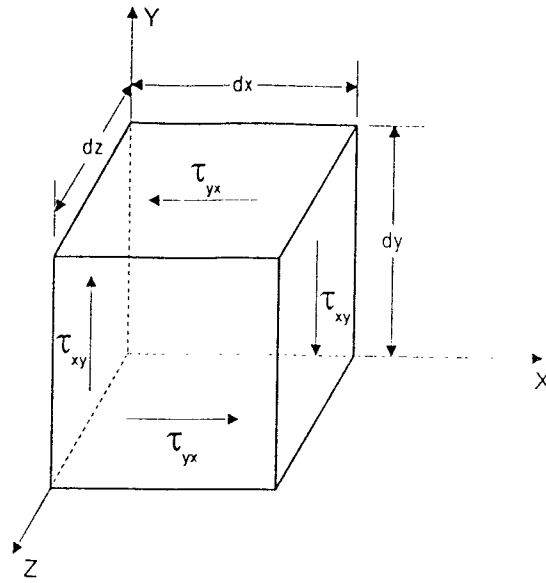
รูป 1-6.5

จากรูปที่ 1-6.5c จะสังเกตได้ว่ามุมระหว่างแกน x กับแกน b เมื่อวัดตามเข็มนาฬิกาจะมีค่าเป็น $\theta + 270^\circ$ การหาความเค้นตั้งฉาก σ_b และความเค้นเฉือน τ_{ba} บนหน้าตัดนี้จะได้โดยแทนค่า θ ในสมการ (1-6.2) ด้วย $\theta + 270^\circ$

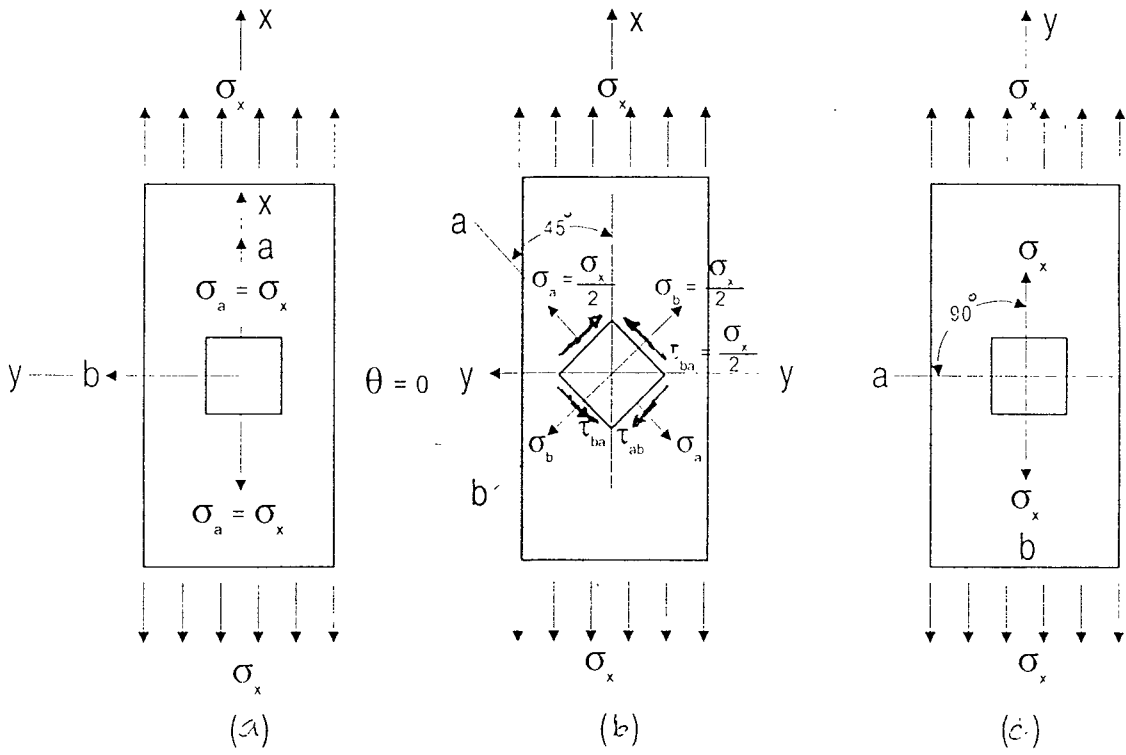
ดังนั้นจากสมการ (1-6.2) จะได้

$$\sigma_b = \sigma_x \cos^2(\theta + 270^\circ) = \sigma_x \sin^2\theta \tag{1-6.3}$$

$$\tau_{ba} = \frac{1}{2} \sigma_x \sin 2(\theta + 270^\circ) = -\frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\theta$$



រូប 1-6.6



រូប 1-7.7

ความเค้นทั้ง 2 นี้จะเกิดขึ้นบนหน้าตัด A-A ในรูปที่ 1-6.5b

ความเค้นที่ได้จากสมการ (1-6.2) และสมการ (1-6.3) เรียกว่าความเค้นประกอบ (Complementary Stresses) เพราะว่าความเค้นเหล่านี้เกิดขึ้นบนระนาบที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน เมื่อเปรียบเทียบสมการทั้ง 2 นี้จะสังเกตได้ว่า

$$\sigma_a + \sigma_b = \sigma_x \quad (1-6.4)$$

$$\tau_{ab} = -\tau_{ba}$$

ดังนั้นผลรวมทางพีชคณิตของความเค้นตั้งฉาก ที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน 2 หน้าตัดของชิ้นส่วนที่รับแรงในแนวแกนจะมีค่าคงที่ และมีค่าเท่ากับความเค้นตั้งฉากที่เกิดขึ้นบนพื้นที่หน้าตัดของชิ้นส่วน ส่วนความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดใดๆที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน 2 หน้าตัดของชิ้นส่วนที่รับแรงในแนวแกนนั้นจะมีขนาดเท่ากัน แต่มีเครื่องหมายตรงกันข้าม ข้อสรุปที่สำคัญข้อหลังนี้เรียกว่ากฎแห่งการเท่ากันของความเค้นเฉือน (Law of Equal Shearing Stresses)

การเท่ากันของความเค้นเฉือนประกอบบนหน้าตัดของอีลีเมนต์รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็ก ในรูปที่ 1-6.6 สามารถหาจากสถานะสมดุลของตัวอีลีเมนต์เองได้อีกด้วย จากรูปที่ 1-6.6 จะสังเกตได้ว่า τ_{xy} และ τ_{yx} ทำให้เกิดแรงคู่ควบขึ้น 2 คู่ ซึ่งอีลีเมนต์ในรูปนี้จะอยู่ในสถานะสมดุลก็ต้องมีโมเมนต์ของแรงคู่ควบของแรงเฉือนที่เกิดขึ้นบนหน้าทั้ง 4 ของอีลีเมนต์มีค่าเท่ากันคือ

$$\tau_{xy} (dy \, dz) \, dx = \tau_{yx} (dx \, dz) \, dy$$

จากสมการนี้จะได้ $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ เนื่องจาก τ_{yz} มีเครื่องหมายเป็นลบ ตามข้อตกลงของเครื่องหมายที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น ดังนั้น

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx}$$

สถานะของความเค้นที่เกิดขึ้นกับอีลีเมนต์ในเนื้อวัสดุ เมื่อแกน a หมุนทวนเข็มนาฬิกาไปเป็นมุม $\theta = 0, \theta = 45^\circ$ และ $\theta = 90^\circ$ เมื่อเทียบกับแกน x ได้แสดงไว้ในรูปที่ 1-6.7

1-7 ความเค้นหลักและสถานะของความเค้น

ในหัวข้อที่ 1-6 จะเห็นได้ว่าชิ้นส่วนที่รับแรงในแนวแกนเดียวทิศทางเดียวจะมีความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือนเกิดขึ้นร่วมกันทั้ง 2 อย่างบนระนาบบางระนาบและบนหน้าตัดบางอันก็อาจไม่มีความเค้นเฉือนเกิดขึ้น คือบนหน้าตัดที่ตั้งฉากกับแนวแกน ($\theta = 0$) และบนหน้าตัดที่ขนานกับแนวแกน ($\theta = 90^\circ$)

ระนาบที่ไม่มีความเค้นเฉือนเกิดขึ้นเรียกว่าระนาบหลัก (Principal Planes) แกนที่ตั้งฉากกับระนาบหลักเรียกว่าแกนหลัก (Principal Axis) และความเค้นตั้งฉากที่เกิดขึ้นบนระนาบหลักเรียกว่าความเค้นหลัก (Principal Stresses)

ระนาบหลักและความเค้นหลักไม่เพียงแต่จะเกิดขึ้นในการดึงหรือการอัดทิศทางเดียวเท่านั้น ภายใต้สภาวะของความเค้นแบบใดก็ได้ตามสามแกนที่จะเกิดระนาบหลักที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน 3 ระนาบได้บนระนาบหลักระนาบหนึ่งจะเกิดความเค้นหลักสูงสุด σ_1 ระนาบหลักระนาบที่ 2 จะเกิดความเค้นหลัก σ_2 และระนาบหลักระนาบที่ 3 จะเกิดความเค้นหลัก σ_3 ซึ่งเป็นความเค้นหลักที่มีค่าต่ำสุด ดังนั้นความเค้นหลักทั้ง 3 นี้จะอยู่ในสภาวะ

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

ยกตัวอย่างเช่น ถ้าตัดอิฐแผ่นที่มีลักษณะเป็นลูกบาศก์ออกมาจากวัสดุที่ถูกกระทำด้วยแรงภายนอกโดยให้ผิวของอิฐแผ่นขนานกับระนาบหลัก ความเค้นที่เกิดขึ้นบนระนาบทั้ง 3 นี้มีค่าเป็น $+50 \text{ N/mm}^2$, -3 N/mm^2 , และ -2 N/mm^2 ความเค้นหลักจะเขียนได้เป็น

$$\sigma_1 = +50 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = -2 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_3 = -3 \text{ N/mm}^2$$

ถ้าความเค้นหลักทั้ง 3 นี้ไม่มีอันหนึ่งอันใดมีค่าเป็นศูนย์ จะเรียกสถานะของความเค้นนี้ว่า สถานะของความเค้นในสภาวะ 3 มิติ (3-Dimensional State of Stress) หรือความเค้น 3 แกน (Triaxial Stress)

สถานะของความเค้น 2 มิติ (2-Dimensional State of Stress) คือสถานะของความเค้นที่มีความเค้นหลักเพียง 2 ค่า ความเค้นหลักอีกค่าหนึ่งจะมีค่าเป็นศูนย์ กรณีที่เป็นการดึงหรือการอัด 2 ทิศทาง จะอยู่ในสภาวะของความเค้นแบบนี้ ความเค้นในสภาวะ 2 มิตินิยมเรียกอีกอย่างหนึ่งว่าความเค้น 2 แกน (Biaxial Stress) หรือ ความเค้นระนาบ (Plane Stress)

ถ้าความเค้นหลัก 2 ค่ามีค่าเป็นศูนย์ สถานะของความเค้นแบบนี้จะเรียกว่า สถานะของความเค้น 1 มิติ หรือความเค้นแกนเดียว (Uniaxial Stress) กรณีที่เป็นการดึงหรือการอัดในทิศทางเดียวจะเป็นสถานะของความเค้น 1 มิติ

1-8 ความเค้นภายใต้การดึงหรือการอัดในทิศทางตั้งฉากซึ่งกันและกัน 2 ทิศทาง

สมมติว่าอีลีเมนต์ที่ตัดออกมาจากชิ้นส่วนรับการดึงโดยความเค้นที่เกิดขึ้นกับอีลีเมนต์จะแผ่กระจายอย่างสม่ำเสมอในทิศทางที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน 2 ทิศทางดังแสดงไว้ในรูป 1-8.1a เนื่องจากไม่มีความเค้นเฉือนเกิดขึ้นบนระนาบในแนวตั้งและแนวนอน ดังนั้นความเค้นตั้งฉากที่เกิดขึ้นจึงเป็นความเค้นหลัก ให้ความเค้นหลักทั้ง 2 นี้แทนด้วย σ_1 และ σ_2 และสมมติให้

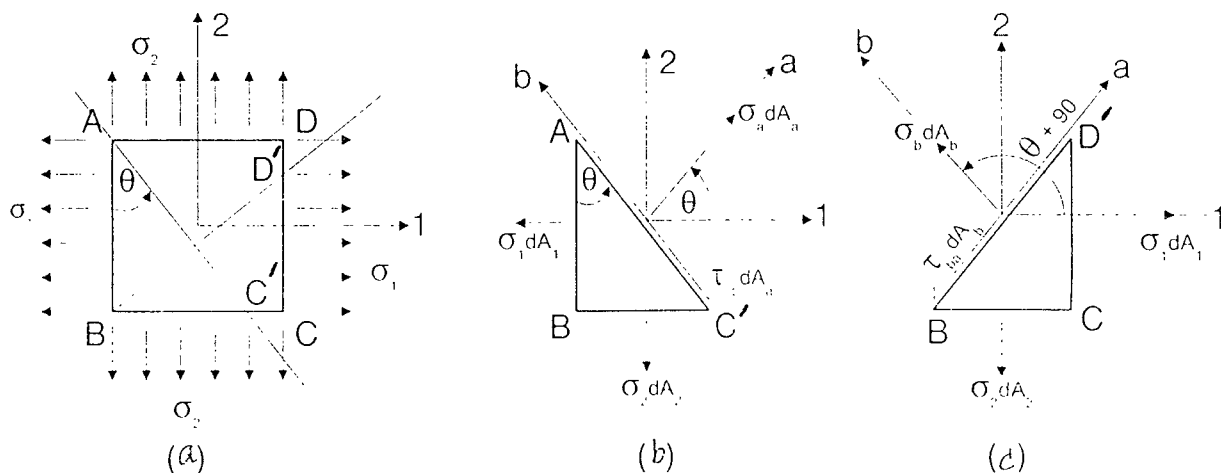
$$\sigma_1 > \sigma_2$$

ให้ σ_1 มีทิศทางขนานกับแกน 1 และ σ_2 มีทิศทางขนานกับแกน 2 ซึ่งแกนทั้ง 2 นี้จะตั้งฉากซึ่งกันและกัน ความเค้น σ_1 และ σ_2 มีค่าเป็นบวกทั้งคู่

เมื่อต้องการหาความเค้นที่กระทำบนหน้าตัดเอียง AC' ที่เอียงทำมุม θ กับหน้าตัด AB ซึ่งตั้งฉากกับแกน 1 ดังแสดงไว้ในรูป จะต้องตัดอีลีเมนต์นี้ออกมาที่หน้าตัด AC' เอาส่วนหนึ่งของอีลีเมนต์ออกมาเป็นวัตถุอิสระ ดังแสดงไว้ในรูป 1-8.1b ให้ dA_1 , dA_2 และ dA_a เป็นพื้นที่ที่ตั้งฉากกับแกน 1, แกน 2 และแกน a ของวัตถุอิสระตามลำดับ (แกน a ตั้งฉากกับหน้าตัด AC' และทำมุมกับแกน 1 เท่ากับ θ) แรงลัพธ์ของความเค้นบนพื้นที่ dA_1 จะมีค่าเท่ากับ $\sigma_1 dA_1$ แรงลัพธ์ของความเค้นบนพื้นที่ dA_2 จะมีค่าเท่ากับ $\sigma_2 dA_2$ แรงลัพธ์ของความเค้นตั้งฉากบนพื้นที่ dA_a ในแนวแกน a มีค่าเท่ากับ $\sigma_a dA_a$ และแรงลัพธ์ของความเค้นเฉือนบนพื้นที่ dA_a มีค่าเท่ากับ $\tau_{ab} dA_a$ จากรูป 1-8.1b จะสังเกตได้ว่า $dA_1 = dA_a \cos \theta$ และ $dA_2 = dA_a \sin \theta$ เนื่องจากอีลีเมนต์อยู่ในสภาวะสมดุล ดังนั้นสมดุลแรงในแนวแกน a จะได้

$$\sigma_a dA_a = \sigma_1 dA_1 \cos \theta - \sigma_2 dA_2 \sin \theta = \sigma_1 (dA_a \cos \theta) \cos \theta + \sigma_2 (dA_a \sin \theta) \sin \theta$$

$$\sigma_a = \sigma_1 \cos^2 \theta - \sigma_2 \sin^2 \theta = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta \quad (1-8.1)$$



รูป 1-8.1

ในทำนองเดียวกันเมื่อสมดุลแรงในแนวแกน b จะได้

$$\tau_{ab}dA_a = \sigma_1 dA_1 \sin\theta - \sigma_2 dA_2 \cos\theta = \sigma_1 (dA_a \cos\theta) \sin\theta - \sigma_2 (dA_a \sin\theta) \cos\theta$$

$$\tau_{ab} = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin\theta \cos\theta = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\theta \quad (1-3.2)$$

ดังนั้นสมการ (1-8.1) และสมการ (1-8.2) จะให้ค่าของความเค้นตั้งฉาก σ_a และความเค้นเฉือน τ_{ab} บนระนาบใดๆ ซึ่งระนาบต่างๆ เหล่านี้จะกำหนดด้วยมุม θ

ถ้าต้องการหาความเค้นบนระนาบ BD' ซึ่งแกน b ที่ตั้งฉากกับระนาบนี้จะเอียงทำมุม $\theta' = \theta + 90^\circ$ กับแกน 1 ดังนั้นเมื่อแทน $\theta' = \theta + 90^\circ$ ลงในสมการ (1-8.1) และสมการ (1-8.2) จะได้

$$\sigma_b = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos(180^\circ + 2\theta)$$

$$\tau_{ba} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin(180^\circ + 2\theta)$$

เนื่องจาก $\cos(180^\circ + 2\theta) = -\cos 2\theta$ และ $\sin(180^\circ + 2\theta) = -\sin 2\theta$ ดังนั้น

$$\sigma_b = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta \quad (1-8.3)$$

$$\tau_{ba} = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\theta \quad (1-8.4)$$

สมการ (1-8.3) และสมการ (1-8.4) จะให้ความเค้นที่เกิดขึ้นบนหน้าตัด BD' ซึ่งตั้งฉากกับหน้าตัด AC'

จากสมการ (1-8.1) จะสังเกตได้ว่า ความเค้นตั้งฉาก σ_a มีค่าขึ้นอยู่กับค่าของมุม θ และจะมีค่าอยู่ระหว่าง σ_1 และ σ_2 คือ

$$\text{เมื่อ } \theta = 0, \quad \sigma_a = \sigma_{\max} = \sigma_1$$

$$\text{และเมื่อ } \theta = 90^\circ, \quad \sigma_a = \sigma_{\max} = \sigma_2$$

ดังนั้นความเค้นหลัก σ_1 และ σ_2 จะเกิดขึ้นบนระนาบที่ไม่มีความเค้นเฉือน จะเป็นค่าสูงสุดและต่ำสุดของความเค้นตั้งฉาก σ_a

จากสมการ (1-8.2) ความเค้นเฉือน τ_{ab} จะมีค่าสูงสุดเมื่อ $\sin 2\theta = 1$ คือ $\theta = 45^\circ$ จะได้

$$\tau_{ab} = \tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (1-8.5)$$

ถ้า $\sin 2\theta = -1$ คือ $\theta = 135^\circ$ จะได้ $\tau_{\min} = -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$ นั่นคือความเค้นเฉือนสูงสุดจะเกิดขึ้นบน

ระนาบที่เอียงทำมุม 45° กับระนาบหลัก และมีค่าเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลต่างของความเค้นหลัก ส่วนความเค้นเฉือนต่ำสุดจะเกิดบนระนาบที่เอียงทำมุม 135° กับระนาบหลัก มีขนาดเท่ากับ $\tau_{\max}$ แต่มีเครื่องหมายเป็นลบ

โดยการเปลี่ยนแปลงเครื่องหมายของความเค้นหลักอย่างถูกต้อง สมการ (1-8.1),(1-8.2),(1-8.3),(1-8.4) และ (1-8.5) สามารถใช้กับกรณีที่เป็นการอัดได้โดยในกรณีที่เป็นการอัดจะให้เครื่องหมายของความเค้นหลักเป็นลบ ยกตัวอย่างเช่น ให้ความเค้นหลัก σ_1 เป็นความเค้นดึง ส่วน σ_2 เป็นความเค้นอัด ให้ความเค้นหลักทั้ง 2 มีค่าเท่ากัน คือ $\sigma_1 = -\sigma_2$ จากสมการ (1-8.5) จะได้ความเค้นเฉือนสูงสุดเป็น $\tau_{\max} = \sigma_1$

วงกลมของโมร์ พิจารณากรณีความเค้น 2 แกน ในรูปที่ 1-8.2a อีกครั้งหนึ่ง ดังได้กล่าวมาแล้ว ในหัวข้อที่ 1-8 ว่าความเค้นดึงฉากและความเค้นเฉือนบนระนาบใดๆที่แกนตั้งฉาก a ทำมุม θ กับแกนหลัก คือแกน 1 สามารถหาได้จากสมการ (1-8.1) และ (1-8.2) สมการทั้ง 2 นี้คือ

$$\begin{aligned}\sigma_a &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta \\ \tau_{ab} &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\theta\end{aligned}\tag{1}$$

จะแสดงได้ว่าสมการทั้ง 2 นี้เป็นสมการวงกลมในระนาบ $\sigma - \tau$ โดยมีมุม θ เป็นตัวพารามิเตอร์ กำหนดให้

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) &= \sigma_{av} \\ \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) &= \tau_{\max}\end{aligned}\tag{2}$$

จะเขียนสมการ (1) ให้ง่ายขึ้นเป็น

$$\begin{aligned}\sigma_a &= \sigma_{av} \pm \tau_{\max} \cos 2\theta \\ \tau_{ab} &= \tau_{\max} \sin 2\theta\end{aligned}\tag{3}$$

ดังนั้นในการกำจัดค่าพารามิเตอร์ θ จะสังเกตสมการของความเค้นเฉือนในสมการ (3) ได้ว่า

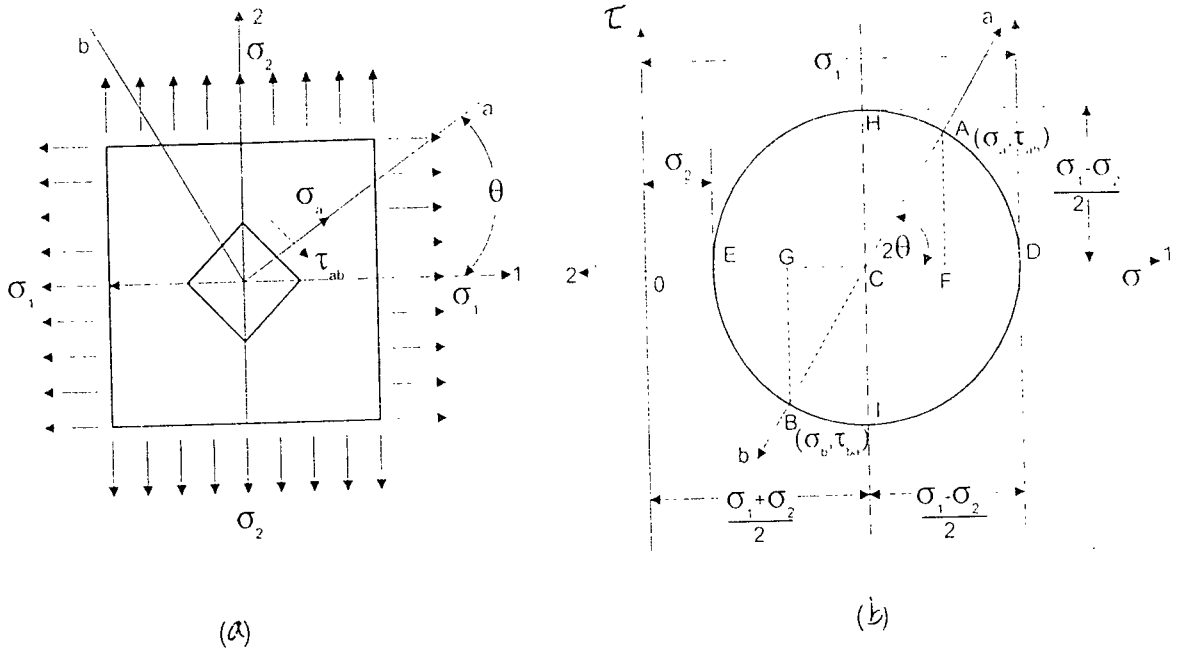
$$\cos 2\theta = \sqrt{1 - \sin^2 2\theta} = \sqrt{1 - \frac{\tau_{ab}^2}{\tau_{\max}^2}}$$

เมื่อแทนค่าลงในสมการของความเค้นตั้งฉาก ในสมการ (3) จะได้

$$(\sigma_a - \sigma_{av}) = \tau_{\max} \sqrt{1 - \frac{\tau_{ab}^2}{\tau_{\max}^2}}\tag{4}$$

หรือ

$$(\sigma_a - \sigma_{av})^2 + \tau_{ab}^2 = \tau_{\max}^2$$



รูปที่ 1-8.2

สมการนี้เป็นรูปร่างมาตรฐานของสมการวงกลมที่มีรัศมีเป็น $\tau_{\max}$ ซึ่ง

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

และมีจุดศูนย์กลางอยู่บนแกน σ ตรงตำแหน่ง σ_{av} โดยที่ $\sigma_{av} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ ดังแสดงไว้ในรูปที่ 1-8.2b วงกลมที่แสดงความสัมพันธ์ของความเค้นตั้งฉากกับความเค้นเฉือนนี้เรียกว่าวงกลมของโมร์ (Mohr's Circle) สำหรับความเค้น 2 แกน วงกลมของโมร์นี้จะใช้ในการแก้สมการ (1-8.1) และ (1-8.2) โดยวิธีเขียนรูป

พิจารณาจุด A ใดๆบนวงกลมในรูปที่ 1-8.2b โดยกำหนดให้มุม ACD มีค่าเท่ากับ 2θ ดังแสดงไว้ในรูป จากเรขาคณิตจะเห็นได้ว่าโคออร์ดิเนตของจุด A คือ

$$\begin{aligned} OF &= OC + AC \cos 2\theta \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta = \sigma_a \\ AF &= AC \sin 2\theta \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\theta = \tau_{ab} \end{aligned}$$

ดังนั้นโคออร์ดิเนตของจุด A ในรูปที่ 1-8.2b แอชชีซาจะแทนความเค้นตั้งฉาก σ_a และออร์ดิเนตจะแทนความเค้นเฉือน τ_{ab} สำหรับระนาบที่มีแกนตั้งฉาก a เอียงทำมุม θ กับแกน 1 ดังแสดงไว้ในรูปที่ 1-8.2a

การเปลี่ยนแปลงค่าของความเค้นบนระนาบแต่ละระนาบซึ่งถูกกำหนดด้วยมุม θ จะหาได้จากจุดที่ตรงกันบนเส้นรอบวงของวงกลมของโมร์ ยกตัวอย่างเช่นเมื่อ $\theta = 0$ แกนตั้งฉาก a จะทับกับแกน 1 จุด A จะทับกับจุด D ทำให้ $\sigma_a = \sigma_1$ และ $\tau_{ab} = 0$ เมื่อ $\theta = 45^\circ$, $2\theta = 90^\circ$ และจุด A จะทับกับจุด H ทำให้ $\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ และ $\tau_{ab} = \tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$ เมื่อ $\theta = 90^\circ$ แกนตั้งฉาก a จะทับกับแกน 2 จุด A จะเปลี่ยนไปเป็นจุด E ซึ่งจะได้ $\sigma_a = \sigma_2$ และ $\tau_{ab} = 0$ จะสังเกตได้ว่าที่จุด B ซึ่งอยู่ตรงข้ามกับจุด A จะให้ความเค้นประกอบ σ_b และ τ_{ba} ตามสมการ (1-8.3) และ (1-8.4) ดังนั้นความเค้นบนระนาบต่างๆจะหาได้อย่างง่ายดายโดยใช้วงกลมของโมร์

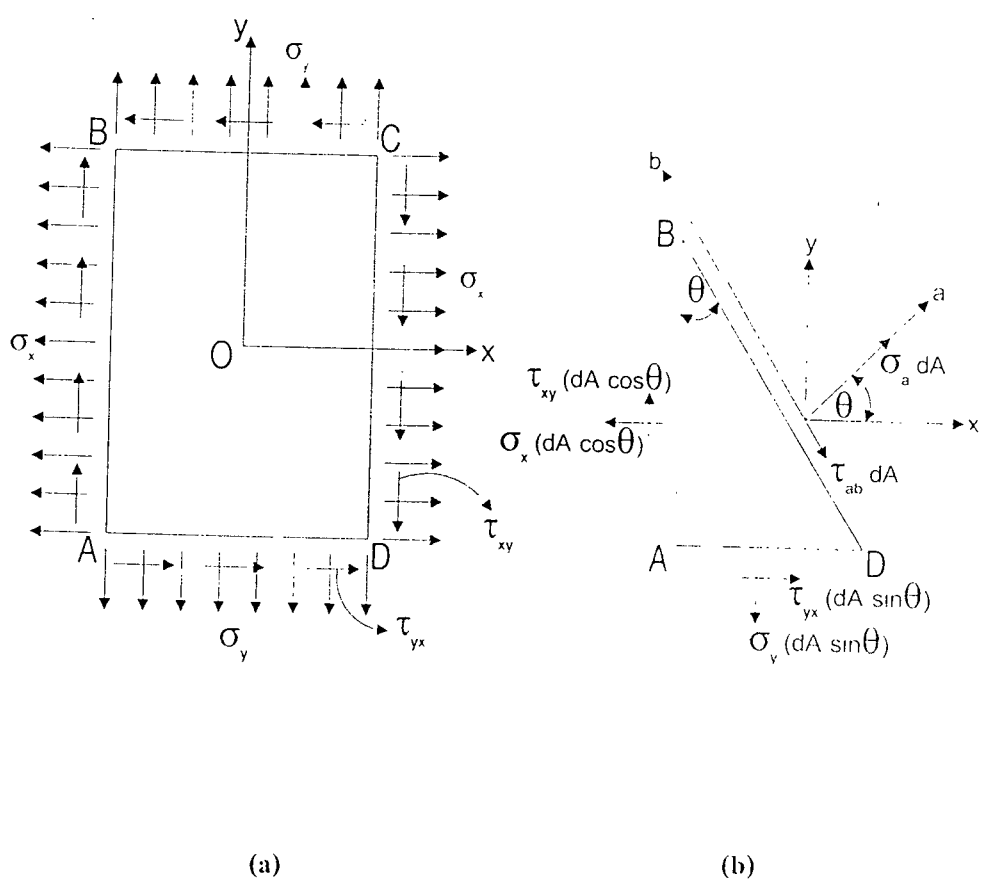
ถ้าความเค้นหลักเป็นความเค้นอัด ซึ่งกำหนดให้มีเครื่องหมายเป็นลบ ดังนั้นจุดศูนย์กลางของวงกลมของโมร์อาจจะอยู่ทางซ้ายมือหรือทางขวามือของแกน τ ก็ได้ แต่จุดศูนย์กลางจะต้องอยู่บนแกน σ เสมอ

1-9 การหาความเค้นหลักในสถานะของความเค้น 2 มิติ

พิจารณากรณีทั่วไปของอีลีเมนต์ที่อยู่ในสถานะความเค้นแบบความเค้นบนระนาบที่ตัดออกมาจากชิ้นส่วน ดังแสดงไว้ในรูปที่ 1-9.1a

ให้ผิวทั้ง 4 ของอีลีเมนต์มีความเค้นตั้งฉาก σ_x กับ σ_y และมีความเค้นเฉือน τ_{xy} กับ τ_{yx} กระทำอย่างสม่ำเสมอตลอดทั้งหน้าตัด ความเค้น σ_x และ σ_y ไม่ใช่ความเค้นหลัก เนื่องจากอยู่บนระนาบที่มีความเค้นเฉือนร่วมอยู่ด้วย ความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นบนระนาบทั้ง 4 จะมีขนาดเท่ากันตามกฎแห่งการเท่ากันของความเค้นเฉือน แยกอีลีเมนต์นี้ออกเป็น 2 ส่วน แล้วเอาส่วนหนึ่งออกมาเป็นวัตถุอิสระดังแสดงไว้ในรูปที่ 1-9.1b บนระนาบที่ตัดออกมานี้จะมีความเค้นตั้งฉาก σ_a และความเค้นเฉือน τ_{ab} กระทำอยู่เพื่อรักษาให้วัตถุอิสระอยู่ในสภาวะสมดุลเช่นเดิม

ให้พื้นที่ของผิว BD แทนด้วย dA ดังนั้นผิว AB จะมีพื้นที่ผิวเป็น $dA \cos \theta$ และผิว AD จะมีพื้นที่ผิวเป็น $dA \sin \theta$ ผิว BD จะถูกกระทำด้วยแรงดึง $\sigma_a dA$ และแรงเฉือน $\tau_{ab} dA$ ผิว AB ถูกกระทำด้วยแรงดึง $\sigma_x (dA \cos \theta)$ และแรงเฉือน $\tau_{xy} (dA \cos \theta)$ ส่วนผิว AD จะถูกกระทำด้วยแรงดึง $\sigma_y (dA \sin \theta)$



รูปที่ 1-9.1

และแรงเฉือน $\tau_{yx} (dA \sin \theta)$ ความเค้นในแนวแกน a และแนวแกน b จะหาได้โดยการสมดุลแรงในแนวแกนทั้ง 2 นี้คือ

สมดุลแรงในแนวแกน a ได้

$$\begin{aligned} \sigma_a dA - \sigma_x dA \cos^2 \theta + \tau_{xy} dA \cos \theta \sin \theta + \tau_{yx} dA \sin \theta \cos \theta - \\ \sigma_y dA \sin^2 \theta = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

สมดุลแรงในแนวแกน b ได้

$$\tau_{ab} dA - \sigma_x dA \cos \theta \sin \theta + \tau_{yx} dA \sin^2 \theta - \tau_{xy} dA \cos^2 \theta + \sigma_y dA \sin \theta \cos \theta = 0$$

หารสมการทั้ง 2 ตลอดด้วย dA และใช้ $\sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)$, $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$, $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$ จะได้สมการสำหรับความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือนดังนี้คือ

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \end{aligned} \quad (1-9.1)$$

$$\begin{aligned} \tau_{ab} &= \frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\theta - \frac{1}{2} \sigma_y \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \\ &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (1-9.2)$$

$$\text{เมื่อ } \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad \text{และ } \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

ความเค้นทั้ง 2 นี้มีค่าขึ้นอยู่กับมุมเอียงของระนาบ ตำแหน่งของระนาบที่เกิดความเค้นตั้งฉากสูงสุด (ระนาบหลัก) จะหาได้โดยหาอนุพันธ์สมการ (1-9.1) เทียบกับ θ แล้วให้มีค่าเท่ากับศูนย์ จะได้

$$\frac{d\sigma_a}{d\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} 2 \sin 2\theta - 2 \tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

จากสมการนี้จะได้

$$\tan 2\theta = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (1-9.3)$$

สมการนี้จะให้ค่าสูงสุดและต่ำสุด 2 ค่า เมื่อ 2θ มีค่าเปลี่ยนแปลงไป 180° ดังนั้นค่า θ ที่จะทำให้เกิดความเค้นตั้งฉากสูงสุดและต่ำสุดจะต่างกัน 90° ค่าของ θ ทั้ง 2 นี้ ค่าหนึ่งจะทำให้เกิดความเค้นตั้งฉากสูงสุดและอีกค่าหนึ่งจะทำให้เกิดความเค้นตั้งฉากน้อยที่สุด

พิจารณาสมการ (1-9.2) เมื่อให้ความเค้นเฉือน $\tau_{xy} = 0$ ก็จะได้สมการ (1-9.3) ออกมาเช่นเดียวกัน จากการพิจารณาที่ผ่านมาจะสรุปได้ว่าบนระนาบที่ความเค้นตั้งฉากมีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดจะไม่มีมีความเค้นเฉือนเกิดขึ้นบนระนาบนั้น ความเค้นตั้งฉากสูงสุดและต่ำสุดนี้เรียกว่าความเค้นหลัก และระนาบที่เกิดความเค้นหลักเรียกว่าระนาบหลัก ความเค้นหลักที่มีค่าสูงสุดและต่ำสุดจะเกิดขึ้นบนระนาบหลักที่ตั้งฉากซึ่งกันและกันเสมอ

การหาค่าความเค้นหลัก จะหาได้โดยใช้สมการ (1-9.1) ซึ่งฟังก์ชันตรีโกณมิติในสมการนี้สามารถเขียนได้เป็น

$$\sin 2\theta = \pm \frac{\tan 2\theta}{\sqrt{1 + \tan^2 2\theta}}$$

$$\cos 2\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\theta}}$$

ดังนั้นสมการ (1-9.1) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\sigma_a = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\theta}} \pm \tau_{xy} \frac{\tan 2\theta}{\sqrt{1 + \tan^2 2\theta}}$$

แทนค่า $\tan 2\theta$ ในสมการ (1-9.3) ลงไปจะได้

$$\sigma_a = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\tau_{xy}^2}{(\sigma_x - \sigma_y)^2}}} \pm \tau_{xy} \frac{\frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}}{\sqrt{1 + \frac{4\tau_{xy}^2}{(\sigma_x - \sigma_y)^2}}}$$

หลังจากจัดรูปสมการให้ง่ายขึ้นจะได้

$$\sigma_a = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

ดังนั้นความเค้นหลักทั้ง 2 ค่าซึ่งเป็นความเค้นตั้งฉากสูงสุด และความเค้นตั้งฉากต่ำสุด จะมีค่าเป็น

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1-9.4)$$

เมื่อบวกความเค้นหลักทั้ง 2 นี้เข้าด้วยกันจะได้

$$\sigma_{\max} + \sigma_{\min} = \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$$

จากสมการนี้จะเห็นได้ว่ากรณีทั่วไปของความเค้นบนระนาบ เหมือนกับกรณีความเค้นแกนเดียว (ดูสมการ (1-6.4)) คือผลของความเค้นตั้งฉากที่กระทำบนระนาบที่ตั้งฉากซึ่งกันและกันจะมีค่าคงที่ และมีค่าเท่ากับผลรวมของความเค้นหลัก

การหาตำแหน่งของระนาบที่เกิดความเค้นเฉือนสูงสุดจะทำให้ได้โดยหาอนุพันธ์สมการ (1-9.2) เทียบกับ θ แล้วให้เท่ากับศูนย์ คือ

$$\frac{d\tau_{ab}}{d\theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} 2 \cos 2\theta - 2\tau_{xy} \sin 2\theta = 0$$

ซึ่งจะได้

$$\cot 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (1-9.5)$$

สมการนี้จะให้ค่าสูงสุดและต่ำสุดเมื่อ 2θ มีค่าเปลี่ยนไป 90° ดังนั้นมุม θ ที่ทำให้เกิดความเค้นเฉือนสูงสุดและต่ำสุดจะต่างกัน 45° เมื่อเปรียบเทียบกับสมการ (1-9.3) จะเห็นได้ว่าระนาบที่เกิดความเค้นเฉือนสูงสุดจะทำมุม 45° กับระนาบหลัก ดังได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ 1-8

ในหัวข้อที่ 1-8 พบว่าความเค้นเฉือนสูงสุดมีค่าเท่ากับครึ่งหนึ่งของความแตกต่างระหว่างความเค้นหลักและความเค้นเฉือนสูงสุดจะเกิดขึ้นบนระนาบที่เอียงทำมุม 45° กับระนาบหลัก ดังนั้นความเค้นเฉือนสูงสุดจะมีค่าเป็น

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{aligned} \quad (1-9.6)$$

สมการ (1-9.6) สามารถหาได้จากสมการ (1-9.2) โดยใช้วิธีการเดียวกับการหาค่าของความเค้นหลักจากสมการ (1-9.1)

จากกฎแห่งการเท่ากันของความเค้นเฉือน ความเค้นเฉือนน้อยที่สุดจะมีค่าเป็น

$$\tau_{\min} = -\tau_{\max} = -\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1-9.7)$$

ซึ่ง $\tau_{\max}$ และ $\tau_{\min}$ นี้จะเกิดขึ้นบนระนาบที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน $\tau_{\max}$ และ $\tau_{\min}$ จะมีขนาดเท่ากับ แต่มีเครื่องหมายตรงกันข้าม

วงกลมของโมร์ กรณีสองของความถี่ 2 แกน (ความถี่ระนาบ) ได้แสดงไว้ในรูปที่ 1-9.2a การเขียนวงกลมของโมร์สำหรับกรณีนี้สามารถทำได้ดังนี้คือ

1. ตั้งแกน σ และ τ ที่จุด O ดังแสดงไว้ในรูปที่ 1-9.2b
2. กำหนดจุด X ตามสถานะของความถี่บนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน x โดยให้แอบซิสสา OX มีค่าเท่ากับ σ_x และออร์ดิเนต FX มีค่าเท่ากับ τ_x
3. กำหนดจุด Y ตามสถานะของความถี่บนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน y โดยให้แอบซิสสา OY มีค่าเท่ากับ σ_y และออร์ดิเนต GY มีค่าเท่ากับ τ_y

σ_x และ σ_y มีเครื่องหมายเป็นบวกเพราะว่าเป็นความถี่ดึง ความถี่เฉือนบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน x มีเครื่องหมายเป็น $+\tau$ เพราะทำให้เกิดโมเมนต์ตามเข็มนาฬิกา ส่วนความถี่เฉือนบนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน y มีเครื่องหมายเป็น $-\tau$ เพราะทำให้เกิดโมเมนต์ทวนเข็มนาฬิกา ข้อตกลงเกี่ยวกับเครื่องหมายนี้สำคัญมากในการเขียนวงกลมของโมร์

- 4.ลากเส้นตรง XY ตัดกับแกน σ ที่จุด C จุด C นี้จะเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมของโมร์ จะสังเกตได้ว่าแกน x และแกน y ในรูป 1-9.2a ตั้งฉากซึ่งกันและกัน คือทำมุม 90° แต่จุด X และ Y ซึ่งแทนความถี่บนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน x และแกน y ตามลำดับ จะทำมุมกัน 180° และจะเป็นจุดปลายของเส้นผ่าศูนย์กลาง

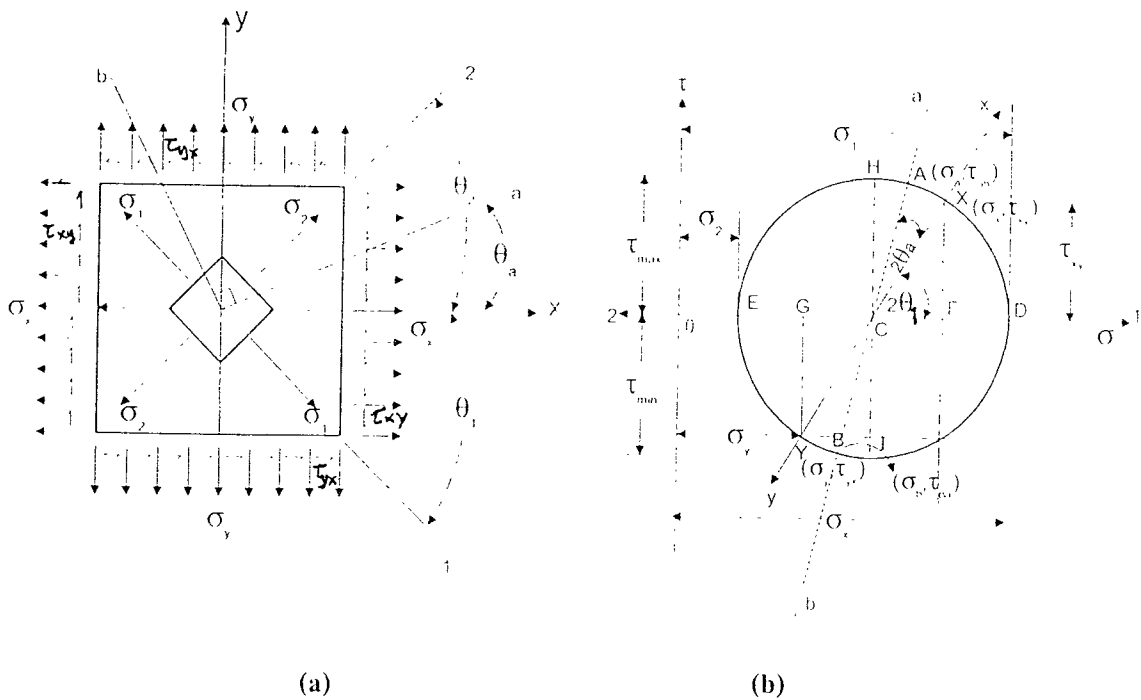
5. ความถี่หลักสูงสุดและต่ำสุดจะได้จากจุดที่เส้นรอบวงของวงกลม ตัดกับแกน σ คือแอบซิสสา OD จะแทน σ_1 (ความถี่หลักสูงสุด) ส่วนแอบซิสสา OE จะแทน σ_2 (ความถี่หลักต่ำสุด)

6. ตำแหน่งของระนาบหลักและทิศทางของระนาบหลักจะหาได้จากมุม $\angle XCO$ ซึ่งเมื่อวัดออกมาจากจุด X ซึ่งจะใช้แทนแกน x ไปตามเข็มนาฬิกาจนถึงจุด D ซึ่งจะใช้แทนแกน 1 จะได้มุม $\angle XCO$ เท่ากับ $2\theta_1$ ดังได้พิสูจน์มาแล้วในหัวข้อที่ 1-8.1

ดังนั้นทิศทางของ σ_1 จะทำมุม θ_1 กับแกน x ดังแสดงไว้ในรูปที่ 1-9.2a การวัดมุม θ_1 ในรูปที่ 1-9.2a นี้จะต้องวัดตามเข็มนาฬิกาเหมือนกับในวงกลมของโมร์ด้วย

- ทิศทางของ σ_2 จะต้องตั้งฉากกับทิศทางของ σ_1 ดังได้พิสูจน์มาแล้วในหัวข้อที่ 1-9

7. เนื่องจากความถี่เฉือนสูงสุดและต่ำสุดจะเกิดขึ้นบนระนาบที่ทำมุม 45° กับแกนหลัก ดังนั้นในวงกลมของโมร์จะต้องทำมุม 90° กับแกน σ จากรูปที่ 1-9.2b ความถี่เฉือนสูงสุดคือออร์ดิเนต CH และความถี่เฉือนต่ำสุดคือ ออร์ดิเนต CI ซึ่งจะเหมือนกับสมการ (1-9.4), (1-9.6), (1-9.7) ในหัวข้อที่ 1-9



รูปที่ 1-9.2

โดยทั่วไประนาบใดจุดบนอีลีเมนต์จะมีแกนตั้งฉาก a ทำมุม θ_a กับแกน x จะมีสถานะของความเค้นบนระนาบนี้ตรงกับจุด A บนวงกลมของโมร์ ในทำนองเดียวกันกับ XCD การวัดมุม ACX จะต้องมีค่าเป็น $2\theta_a$ เพราะจะต้องวัดออกจากจุด X ซึ่งใช้แทนแกน x ในวงกลมของโมร์ตามทิศทางเดียวกันกับในรูปที่ 1-9.2a เสมอ

สมการในการหาความเค้นหลักและความเค้นเฉือนสูงสุดจะหาได้จากเรขาคณิตของวงกลมของโมร์ คือ

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= OD = OC + CD = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_2 &= OE = OC - CD = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \tau_{\max} &= CH = CD = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \tau_{\min} &= CI = -CD = -\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\end{aligned}$$

ซึ่งจะเหมือนกับสมการ (1-9.4), (1-9.6) และ (1-9.7) ในหัวข้อที่ 1-9

ข้อควรระวังในการเขียนวงกลมของโมร์คือการวัดมุม มุมในวงกลมของโมร์จะมีค่าเป็น 2 เท่าของมุมในอีลีเมนต์ การวัดมุมในวงกลมของโมร์จะต้องมีทิศทางเหมือนกับทิศทางในการวัดมุมในอีลีเมนต์

1-10 สถานะของความเค้น 3 มิติ

ในการออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกลหรือชิ้นส่วนโครงสร้างบางครั้งจะต้องพิจารณาความเค้นที่เกิดขึ้นในสถานะของความเค้น 3 มิติ การวิเคราะห์ความเค้นในสถานะ 3 มิตินี้ตามปกติจะพิจารณาเฉพาะในการวิเคราะห์ชั้นสูงเท่านั้น อย่างไรก็ตาม การศึกษาวิชากลศาสตร์ของวัสดุควรจะต้องรู้สถานะของความเค้น 3 มิติบ้างพอสมควร

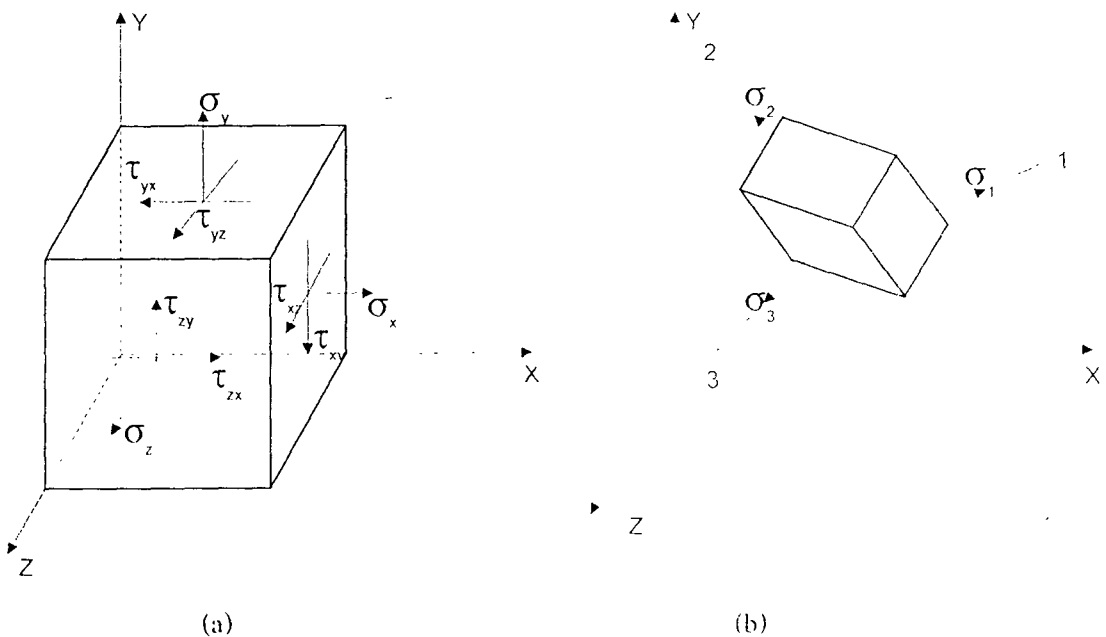
กรณีของความเค้น 3 แกนได้แสดงไว้ในรูป 1-10.1a จากกฎแห่งการเท่ากันของความเค้นเฉือน จะได้

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = -\tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = -\tau_{zy}$$

เช่นเดียวกับกรณีความเค้น 2 แกนบนระนาบที่เอียงทำมุมกับระนาบของเนื้อวัสดุอนุพันธ์บางระนาบจะไม่มี ความเค้นเฉือนเกิดขึ้น ซึ่งระนาบดังกล่าวนี้คือระนาบหลัก และความเค้นดังกล่าวที่เกิดขึ้นบนระนาบหลักคือความเค้นหลัก ในกรณีนี้จะมีค่าความเค้นหลัก 3 ค่าคือ σ_1 , σ_2 และ σ_3 ค่าของความเค้นหลักทั้ง 3 นี้จะหาได้จากสมการ

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\sigma - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0 \quad (1-10.1)$$

การหาสถานะของความเค้นโดยใช้สมการ (1-10.1) จะได้เนื้อวัสดุอนุพันธ์ที่ถูกกระทำด้วยความเค้นหลักดังแสดงไว้ในรูปที่ 1-10.1b เนื่องจากการแก้สมการ (1-10.1) นี้ยุ่งยากมาก จึงนิยมแก้ปัญหาความเค้น 3 แกนโดยใช้วงกลมของโมร์

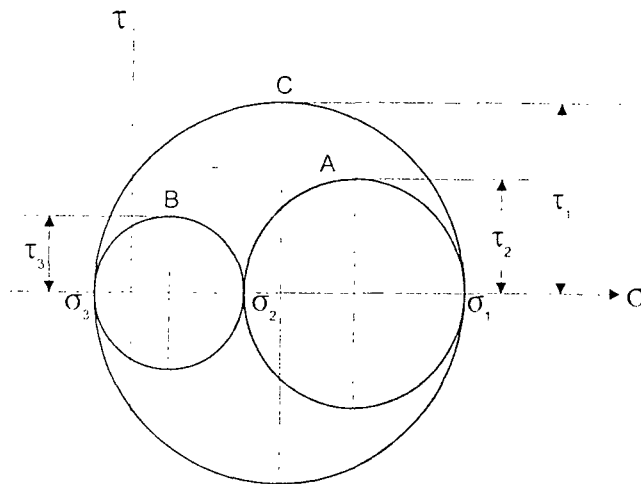


รูป 1-10.1

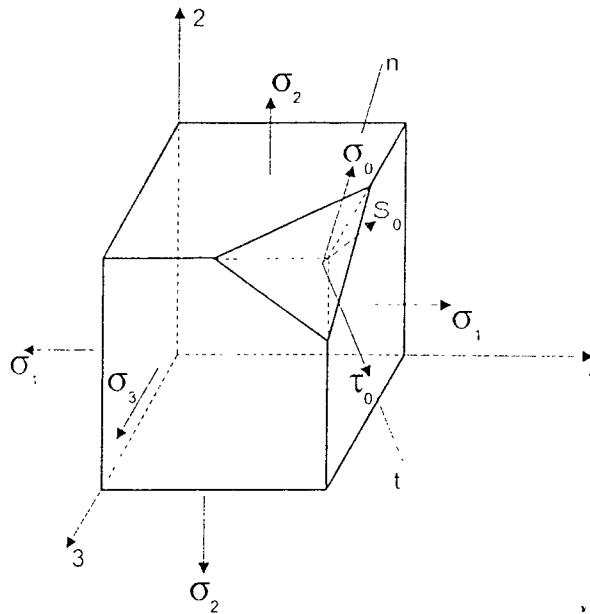
ถ้ารู้ค่าของความเค้นหลัก σ_1 , σ_2 และ σ_3 ก็จะสามารถเขียนวงกลมของโมร์ได้เช่นเดียวกันกับกรณีความเค้น 2 แกน จากรูป 1-10.1(2) ให้ $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ เมื่อพิจารณาความเค้นบนระนาบที่ขนานกับแกน 3 ก็จะมีค่าความเค้นหลัก σ_1 และ σ_2 เขียนวงกลมของโมร์สำหรับความเค้นหลัก σ_1 และ σ_2 จะได้วงกลม A ในรูปที่ 1-10.2 ต่อไปพิจารณาความเค้นบนระนาบที่ขนานกับแกน 1 ก็จะมีค่าความเค้นหลักเป็น σ_2 และ σ_3 วงกลมของโมร์สำหรับ σ_2 และ σ_3 คือวงกลม B ในรูป 1-10.2 บนระนาบสุดท้ายคือระนาบที่ขนานกับแกน 2 จะมีความเค้นหลักคือ σ_1 และ σ_3 วงกลมของโมร์สำหรับ σ_1 และ σ_3 คือวงกลม C ในรูป 1-10.2

ความเค้นเฉือนสูงสุดจะเกิดขึ้นบนระนาบที่เอียงทำมุม 45° กับระนาบหลัก ถ้าให้ความเค้นเฉือนสูงสุดบนระนาบทั้ง 3 นี้มีค่าเป็น $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$ จากรูปที่ 1-10.2 จะได้

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \\ \tau_2 &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \\ \tau_3 &= \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\end{aligned}\tag{1-10.2}$$



รูป 1-10.2



รูป 1-10.3

ในกรณีที่ตัดอีลีเมนต์ในรูปที่ 1-10.1b ออกที่ระนาบหนึ่งโดยที่ระนาบนี้จะมีเวกเตอร์หนึ่งหน่วย n ซึ่งตั้งฉากกับระนาบ (unit outward normal) ทำมุมกับแกน 1, แกน 2 และแกน 3 เท่ากันทั้ง 3 แกน ดังแสดงไว้ในรูปที่ 1-10.3 นั่นคือ

$$l = m = n$$

เนื่องจาก

$$l^2 = m^2 = n^2 = 1$$

หรือ

$$l = m = n = 1/\sqrt{3}$$

ระนาบนี้เรียกว่า Octahedral Plane ความเค้นที่เกิดขึ้นบนระนาบนี้เรียกว่า Octahedral Stress

ความเค้นบน Octahedral Plane จะประกอบด้วย Octahedral Normal Stress (σ_o), Octahedral Shearing Stress (τ_o) และ Octahedral Resultant Stress (S_o) ความเค้นทั้ง 3 นี้จะหาได้จากสมการ

$$\begin{aligned}\sigma_o &= \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ \tau_o &= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2} \\ S_o &= \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)}\end{aligned}\quad (1.10.3)$$

- 1– 6 For the states of plane stress shown in Figures P 1–P 6, use the stress transformation equations to determine the normal and shear stress acting on plane $a-a$.

Figure P 1

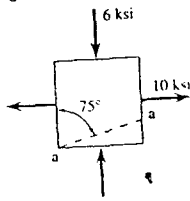


Figure P 2

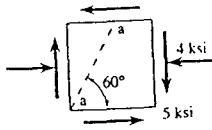


Figure P 3

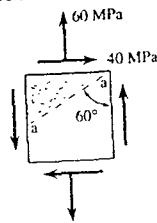


Figure P 4

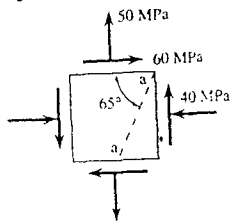


Figure P 5

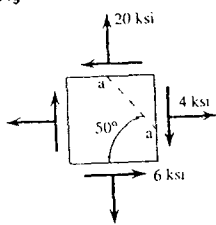
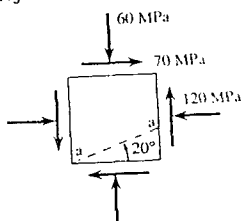


Figure P 6



- 7– 12 For the states of plane stress shown in Figures P 1–P 6, use the wedge method to determine the normal and shear stresses acting on plane $a-a$.

- 13– 20 The elements in plane stress shown in Figures P 13–P 20 are subjected to stresses σ_x , σ_y , and τ_{xy} . Determine (a) the principal stresses and show them on a properly oriented element, and (b) the maximum in-plane shear stress and the corresponding normal stress and show them on a properly oriented element.

Figure P 13

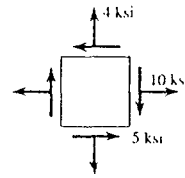


Figure P 14

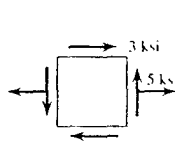


Figure P 15

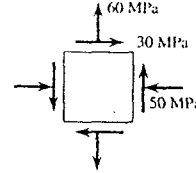


Figure P 16

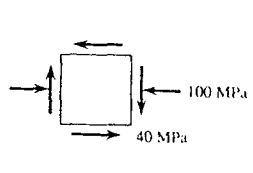


Figure P 17

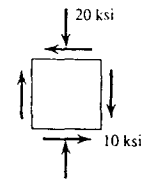


Figure P 18

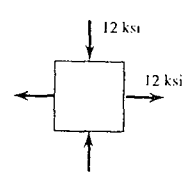


Figure P 19

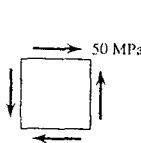
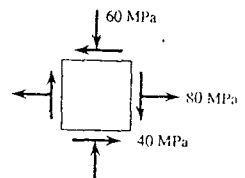


Figure P 20



- 21– 22 The grain of a wooden member forms an angle of 20° with the vertical. For the state of plane stress shown, determine (a) the normal stress perpendicular to the grain, and (b) the shear stress parallel to the grain.

Figure P 21

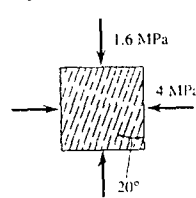
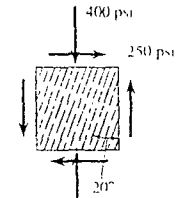


Figure P 22



- 23– 24 For the states of plane stress shown, determine the normal and in-plane shear stresses acting on a plane rotated 30° counterclockwise from the vertical.

Figure P 23

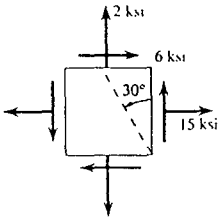
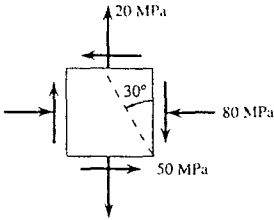
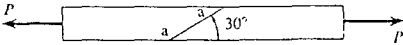


Figure P 24



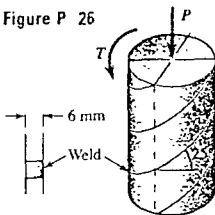
- 25 Two members of uniform cross-section 3 in. $\times$ 3 in. are glued together along a plane $a-a$, which forms an angle of 30° with the horizontal. The allowable normal stress in the glued joint is 110 psi and the allowable shear stress is 75 psi. Determine the largest axial force P that may be applied.

Figure P 25



- 26 A steel pipe of 250 mm outside diameter is fabricated of 6-mm-thick plate by welding along a helix that forms an angle of 25° with a horizontal plane. An axial force $P = 300$ kN and a torque $T = 15$ kN $\cdot$ m are applied to the pipe. Determine the normal and shear stresses in the weld.

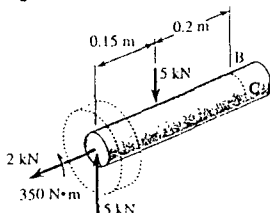
Figure P 26



- 27 Solve Problem P 26 with the direction of the torque reversed.

- 28 A drive shaft of an automobile is subjected to the vertical forces and torque shown. The diameter of the solid shaft is 25 mm, determine the principal stresses at point B located on the top of the shaft and at point C located on the side of the shaft.

Figure P 28



- 29– 34 Solve Problems P 1–P 6 using Mohr's circle method.
35– 42 Solve Problems P 13–P 20 using

- 43 Construct Mohr's circle for an element in uniaxial stress (a) from the circle, derive the following stress transformation equations for uniaxial loading.

$$\sigma_x = \left(\frac{\sigma_1}{2}\right)(1 + \cos 2\theta) \quad \tau_{xy} = \left(\frac{\sigma_1}{2}\right)\sin 2\theta$$

Then use the circle to determine (b) the principal stresses and (c) the maximum shear stress and show them on a properly oriented element.

Figure P 43

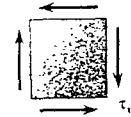


- 44 Construct Mohr's circle for an element in pure shear. (a) From the circle derive the following stress transformation equations for pure shear.

$$\sigma_x = \tau_{xy} \sin 2\theta \quad \text{and} \quad \tau_{xy} = \tau_{xy} \cos 2\theta$$

(b) Use the circle to obtain the principal stresses and show them on a properly oriented element. (c) From the circle, determine the maximum and minimum shear stresses.

Figure P 44



- 45– 50 An element in plane stress is subjected to stresses σ_x , σ_y , and τ_{xy} as shown in the figures below. Use Mohr's circle method to determine the stresses acting on an element rotated through an angle $\theta = 30^\circ$ clockwise.

Figure P 45

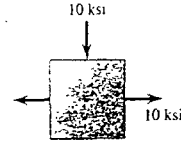


Figure P 46

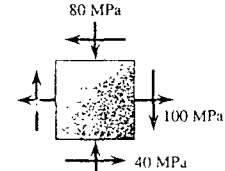


Figure P 47

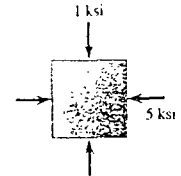


Figure P 48

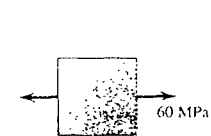


Figure P 49

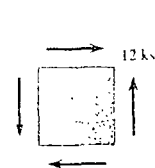
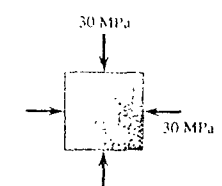
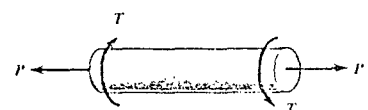


Figure P 50



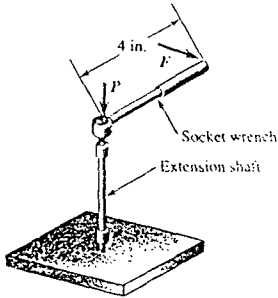
- 51 A solid circular bar is subjected simultaneously to an axial tensile force $P = 30$ kips and a torque $T = 40$ kip $\cdot$ in. as shown. Calculate the maximum tensile, maximum compressive, and maximum in-plane shear stress in the bar. The bar has a diameter of 3 in.

Figure P 51



- 52 A socket wrench with an extension shaft attached to it is subjected to a force $F = 50$ lb perpendicular to the socket wrench and a vertical force $P = 30$ lb as shown. Determine the maximum tensile, compressive, and in-plane shear stresses in the extension. The extension is a hollow shaft with outer diameter of $1/2$ in. and inner diameter of $3/8$ in.

Figure P 52



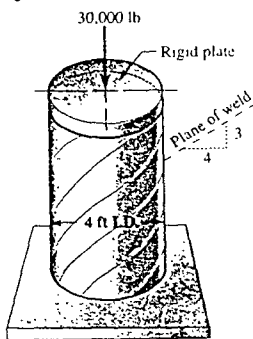
- 53 A closed-ended cylinder of inner radius 8 ft and thickness of 0.25 in. stores natural gas at an internal pressure of 100 psi. Determine (a) the hoop stress, (b) the longitudinal stress, and (c) the maximum in-plane shear stress.
- 54 The cylindrical pressure tank is made of 8-mm steel plate. The pressure inside is 1.2 MN/m^2 and the axial compressive force $P = 1 \text{ MN}$. The diameter of the tank is 1 m. Determine the maximum tensile and compressive stresses in the tank wall.

Figure P 54



- 55 A cylindrical tank is fabricated by butt welding $3/4$ in. plate with a spiral seam, as shown. The pressure inside the tank is 300 psi, and an axial force of 30,000 lb is applied to the end of the tank through a rigid bearing plate. Determine the maximum normal and shear stresses on the plane of the weld.

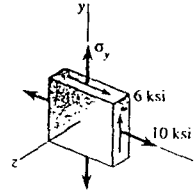
Figure P 55



- 56 A cylindrical pressure vessel is subjected to an internal pressure of 50 psi and also an external torque about its longitudinal axis of $10,000 \text{ lb} \cdot \text{ft}$. Determine the maximum tensile stress at a point on the outer wall in the cylindrical portion of the tank. The tank outer diameter is 40 in. and tank wall thickness is 0.125 in. Use $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$. Also use the thin-walled approximation equation for J ($J = 2\pi r^3 t$).

- 57 For the state of plane stress shown, determine the absolute maximum shear stress when (a) $\sigma_x = 10 \text{ ksi}$, $\sigma_y = 3 \text{ ksi}$, and $\tau_{xy} = 6 \text{ ksi}$ and (b) $\sigma_y = 0$ with the other stresses remaining the same. Consider both in-plane and out of plane shear.

Figure P 57



- 58 Solve Problem 8.57 when (a) $\sigma_x = 9 \text{ ksi}$ and (b) $\sigma_y = -4 \text{ ksi}$.

- 59– 64 For the states of plane stress shown, determine the absolute maximum shear stress.

Figure P 59

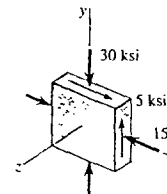


Figure P 60

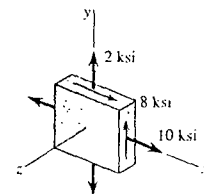


Figure P 61

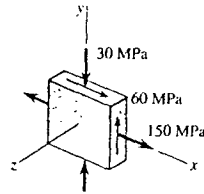


Figure P 62

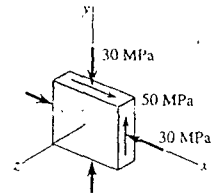


Figure P 63

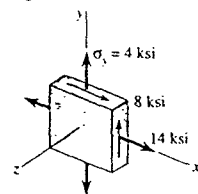
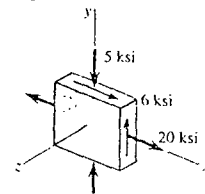
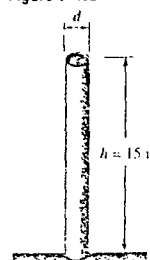


Figure P 64



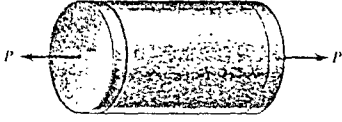
- 65 A standpipe is a thin-walled cylindrical tank holding water. The standpipe is 15 m high and 4 m in inside diameter and has a wall thickness of 20 mm. The density of water is 1000 kg/m^3 . Determine the largest normal stress and absolute maximum shear stress at the bottom of the tank when it is full of water.

Figure P 65



- 66 A thin-walled cylindrical container is subjected to an internal pressure of 300 psi and to an axial tensile force of $P = 75$ kips applied through rigid end plates. The inside diameter is 30 in. and the wall thickness is $1/2$ in. Determine the principal stresses and the absolute maximum shear stress on the outer surface of the tank.

Figure P 66



สัปดาห์ที่ 7

หัวข้อเรื่อง การวิเคราะห์ความเครียด (3), กฎของฮุกใน 3 มิติ, และ
ความสัมพันธ์ระหว่างค่าคงที่ของความยืดหยุ่น

(3 ชั่วโมง)

ความคิดรวบยอด

1. เราไม่สามารถถอดเครื่องมือวัดใดๆเข้าไปในเนื้อวัสดุเพื่อวัดค่าของความเค้นโดยตรงได้ เราจึงต้องใช้วิธีวัดค่าของความเครียดแทน แล้วแปลงค่าของความเครียดไปเป็นความเค้นโดยใช้กฎของฮุก
2. พื้นฐานของความเครียดจะเกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ทั้งเชิงเส้นจนถึงเชิงปริมาตร ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด และค่าคงที่ของความยืดหยุ่นต่างๆ

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. คำนวณและแปลงความเครียดได้
2. คำนวณหาความเค้นจากความเครียดโดยใช้กฎของฮุกได้
3. เขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง E , ν และ G ได้
4. คำนวณหาการเปลี่ยนแปลงปริมาตรได้

สังเขปเนื้อหา

หน่วยที่ 5. พื้นฐานของความเครียด

- กฎของฮุก
- ความสัมพันธ์ระหว่าง E , ν และ G
- Dilatation และ Bulk Modulus

ในรูป 2-1.2a ให้ ΔL เป็นระยะระหว่างจุด O กับ A สองจุดบนวัตถุยืดหยุ่นก่อนที่จะถูกแรงภายนอกมากระทำให้เกิดความเครียด ให้ $\Delta \delta$ เป็นความยาวที่เปลี่ยนไปของระยะระหว่าง OA ภายหลังจากที่วัตถุนี้ถูกการกระทำ ความเครียดตั้งฉาก คือ

$$\epsilon = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta L} = \frac{d\delta}{dL} \quad (2-1.1)$$

และ ค่าเฉลี่ยของความเครียดตั้งฉาก คือ

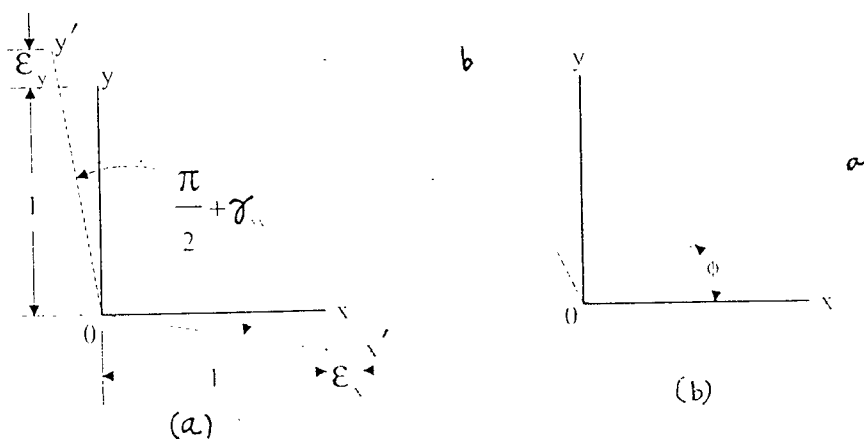
$$\epsilon_{av} = \frac{\Delta \delta}{\Delta L} \quad (2-1.2)$$

ความเครียดเฉือน (shearing strain) คือค่าของมุมเป็นเรเดียนที่เปลี่ยนไปของเส้นตรง 2 เส้น ซึ่งเป็นมุมฉากกันก่อนที่จะถูกแรงภายนอกมากระทำ ดังนั้นถ้าเราให้ OA และ OB เป็นเส้นตรงดังกล่าวตรงขอบของวัตถุยืดหยุ่น ตามรูป 2-1.2b เราจะได้ความเครียดเฉือนหรือความเครียดสัมผัส (tangential strain) เป็น

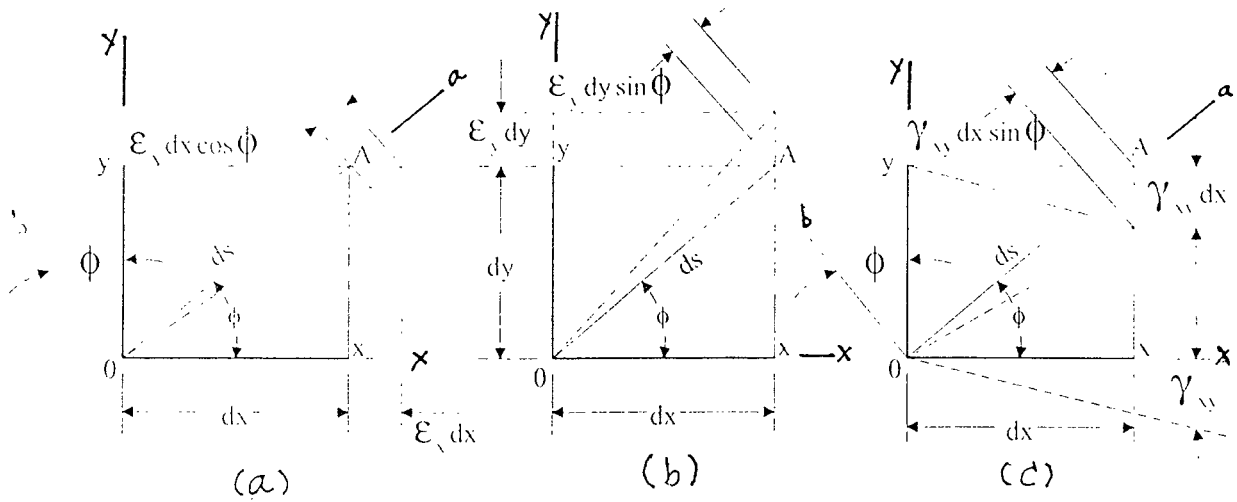
$$\gamma = \theta + \phi \quad (2-1.3)$$

2-1.2 การแปลงของความเครียด ทางปฏิบัติเรามักจะสนใจความเครียดที่เกิดขึ้นกับอีลีเมนต์ที่ตัดออกมาจากเนื้อวัสดุของวัตถุที่ถูกกระทำด้วยความเค้นแบบความเค้นระนาบ การนิยามสถานะของความเครียดที่สมบูรณ์บนระนาบ xy ของอีลีเมนต์ดังกล่าวจำเป็นต้องระบุความเครียดตั้งฉาก ϵ_x และ ϵ_y ที่อยู่ในแกนที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน และการเปลี่ยนแปลงมุมระหว่างแกนทั้ง 2 นี้ (คือความเครียดเฉือน γ_{xy}) ในรูป 2-1.3a ให้ ox และ oy เป็นแกนตรงที่ตั้งฉากกัน มีความยาวหนึ่งหน่วย เส้นตรงทั้ง 2 นี้จะทำอยู่กับขอบของอีลีเมนต์ที่ตัดออกมาจากแผ่นบางๆ ก่อนที่อีลีเมนต์จะมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ระหว่างที่เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง จุด x จะเคลื่อนที่ไปเป็นจุด x' และจุด y เคลื่อนที่ไปเป็นจุด y' จุด x' และ y' ยังคงอยู่บนระนาบ xoy ดังนั้นความเครียดตั้งฉากที่เกิดขึ้นทั้งสองจะมีค่าเป็น $\epsilon_x = xx'$ และ $\epsilon_y = yy'$ มุม xoy ซึ่งเดิมเป็นมุมฉากจะเปลี่ยนแปลงไปเป็นมุม $x'o'y' = 90^\circ + \gamma_{xy}$ ความเครียดเฉือนจะให้เครื่องหมายเป็นบวก และความเครียดอัดจะมีเครื่องหมายเป็นลบ ความเครียดเฉือน γ_{xy} จะให้เป็นบวกเมื่อมุมฉาก xoy มีค่าเพิ่มมากขึ้น จากข้อตกลงเรื่องเครื่องหมายนี้ ค่าความเครียดบวกจะตรงกับความเค้นบวกที่นิยามมาแล้วก่อนหน้านี้

ความเครียดที่เกิดขึ้นบนระนาบหนึ่ง ในทิศทาง x และ y ซึ่งตั้งฉากซึ่งกันและกัน จะประกอบด้วย ϵ_x , ϵ_y และ γ_{xy} สำหรับความเครียดในทิศทาง a และ b ซึ่งทำมุม ϕ กับแกน x และแกน y ในรูป 2-1.3b จะมีสถานะความเครียดเกิดขึ้นดังจะพิจารณาต่อไปนี้



รูป 2-1.3



รูป 2-1.4

พิจารณารูป 2-1.4 อีลีเมนต์รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า OXAY มีเส้นทะแยงมุม OA ทำมุม ϕ กับ OX ให้ dx, dy แทนความยาวของด้านทั้งสอง และ ds แทนความยาวของเส้นทะแยงมุม เมื่อมีความเครียด ϵ_x, ϵ_y และ γ_{xy} เกิดขึ้น จะทำให้ OX ยืดออก $\epsilon_x dx$, OY ยืดออก $\epsilon_y dy$, และมุมฉาก XOY จะเพิ่มมากขึ้นอีก γ_{xy} เพื่อให้พิจารณาได้อย่างชัดเจน การเปลี่ยนแปลงรูปร่างทั้ง 3 นี้ได้แสดงแยกออกจากกันไว้ในรูป 2-1.4a, b และ c จากรูปทั้งสามนี้จะเห็นได้ว่า ϵ_x ทำให้เส้นทะแยงมุม OA ยืดออก $+\epsilon_x dx \cos \phi$ ϵ_y ทำให้ OA ยืดออก $\epsilon_y dy \sin \phi$ และ γ_{xy} ทำให้ OA หดเข้าไป $-\gamma_{xy} dx \sin \phi$ ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงความยาวสุทธิของ OA จะมีค่าเท่ากับผลรวมทางพีชคณิตของการเปลี่ยนแปลงความยาวทั้งสามนี้ และเมื่อหารผลรวมทางพีชคณิตของการเปลี่ยนแปลงความยาวทั้งสามนี้ด้วย ds ก็จะได้ความเครียดที่เกิดขึ้นในทิศทาง OA (แกน a) คือ

$$\epsilon_a = \epsilon_x \frac{dx}{ds} \cos \phi + \epsilon_y \frac{dy}{ds} \sin \phi - \gamma_{xy} \frac{dx}{ds} \sin \phi$$

เนื่องจาก $\frac{dx}{ds} = \cos \phi$ และ $\frac{dy}{ds} = \sin \phi$ ดังนั้น

$$\epsilon_a = \epsilon_x \cos^2 \phi + \epsilon_y \sin^2 \phi - \gamma_{xy} \sin \phi \cos \phi \quad (1)$$

ความเครียด ϵ_b ในแกน b จะหาได้จากสมการ (1) โดยแทนค่า ϕ ในสมการ (1) ด้วย $(90^\circ + \phi)$

$$\epsilon_{\phi} = \epsilon_x \sin^2 \phi + \epsilon_y \cos^2 \phi - \gamma_{xy} \sin \phi \cos \phi \quad (2)$$

เมื่อแทนค่าฟังก์ชันทางตรีโกณมิติ $\sin^2 \phi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\phi)$, $\cos^2 \phi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\phi)$

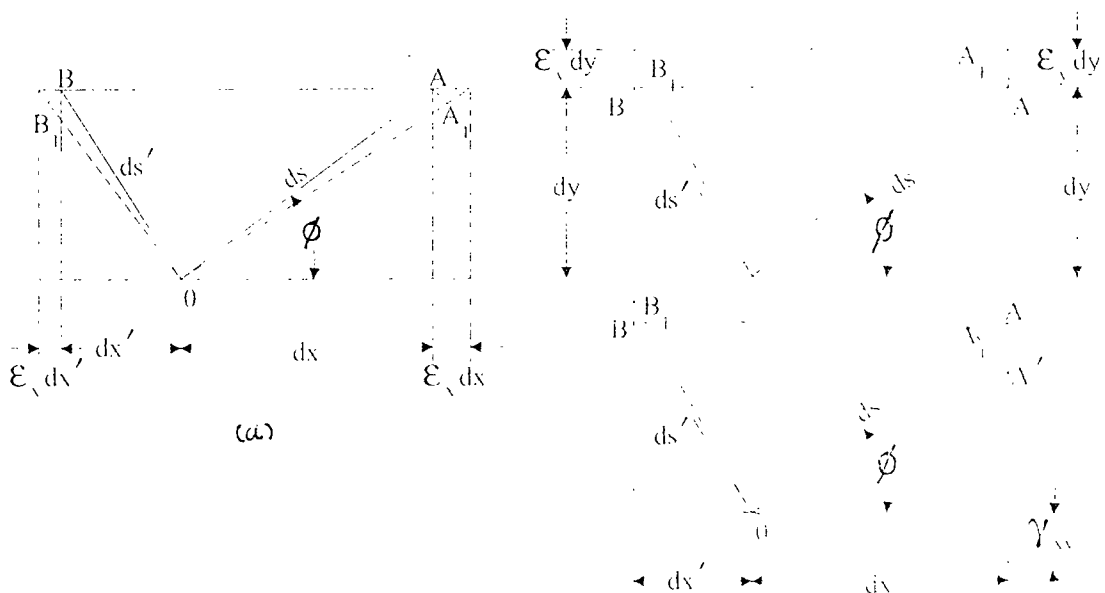
และ $\sin \phi \cos \phi = \frac{1}{2} \sin 2\phi$ ลงในสมการ (1) และ (2) จะได้

$$\epsilon_a = \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) + \frac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y) \cos 2\phi - \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin 2\phi \quad (2-1.4)$$

$$\epsilon_b = \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) + \frac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y) \cos 2\phi + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin 2\phi$$

สมการทั่วไปสำหรับความเครียดเฉือน γ_{ab} จะหาได้ในวิธีเดียวกัน พิจารณารูป 2-1.5 อีลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านขนานสองรูปที่อยู่ติดกันในรูปมีเส้นทแยงมุม OA และ OB ตั้งฉากซึ่งกันและกัน ดังนั้นรูป 2-1.5a จะแสดงให้เห็นผลของ ϵ_x ที่มีต่ออีลิเมนต์ทั้งสองนี้เพียงอย่างเดียว จะเห็นได้ว่าการเปลี่ยนแปลงมุมจาก BOA จะเป็นดังนี้คือ

$$\begin{aligned} \angle AOA_1 + \angle BOB_1 &= \frac{AA_1}{OA} + \frac{BB_1}{OB} = \frac{\epsilon_x dx \sin \theta}{ds} + \frac{\epsilon_x dx' \cos \theta}{ds'} \\ &= \epsilon_x \cos \theta \sin \theta + \epsilon_x \sin \theta \cos \theta = \epsilon_x \sin 2\theta \end{aligned}$$



รูป 2-1.5

ในทำนองเดียวกัน จากรูป 2-1.5b การเปลี่ยนแปลงมุมจาก BOA เนื่องจากความเครียด ϵ_y อย่างเดียวคือ

$$\begin{aligned} -AOA_1 - BOB_1 &= -\frac{AA_1}{OA} - \frac{BB_1}{OB} = -\frac{\epsilon_y dy \cos \phi}{ds} - \frac{\epsilon_y dx \sin \phi}{ds} \\ &= -\epsilon_y \sin \phi \cos \phi - \epsilon_y \cos \phi \sin \phi = -\epsilon_y \sin 2\phi. \end{aligned}$$

ในขั้นสุดท้าย จากรูป 2-1.5c การเปลี่ยนแปลงมุมจาก BOA ที่เกิดจากความเครียด γ_{xy} อย่างเดียวคือ

$$\begin{aligned} A'OA_1 - BOB_1 &= \frac{A'A_1}{OA} - \frac{BB_1}{OB} = \frac{\gamma_{xy} dy \cos \phi}{ds} - \frac{\gamma_{xy} dx' \sin \phi}{ds'} \\ &= \gamma_{xy} \cos^2 \phi - \gamma_{xy} \sin^2 \phi = \gamma_{xy} \cos 2\phi \end{aligned}$$

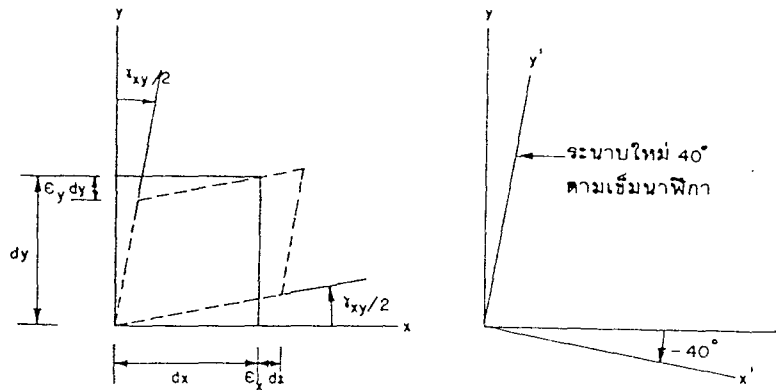
ผลบวกทางพีชคณิตของมุมที่เปลี่ยนแปลงไปข้างต้นจะมีค่าเป็นการเปลี่ยนแปลงมุม BOA สุทธิคือความเครียดเฉือน γ_{ab} ที่ต้องการ

$$\gamma_{ab} = (\epsilon_x - \epsilon_y) \sin 2\phi + \gamma_{xy} \cos 2\phi$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\frac{1}{2}\gamma_{ab} = \frac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin 2\phi + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \cos 2\phi \quad (2-1.5)$$

ตัวอย่าง 2-1.1 ชิ้นส่วนของโครงสร้างชิ้นหนึ่งมีค่าความเครียดตั้งฉากในแนวแกน x และแกน y เท่ากับ $600 \mu\epsilon$ และ $-200 \mu\epsilon$ ตามลำดับ และมีค่าความเครียดเฉือนเท่ากับ 0.00003 rad . จงหาค่าความเครียดของชิ้นส่วนนี้สำหรับอีลีเมนต์ที่เส้นตั้งฉากกับผิวทำมุม 40° ตามเข็มนาฬิกาจากแกน x



รูป E2-2.1

วิธีทำ

1. คำนวณหาค่า $\epsilon_{x'}$ จากสมการ (2-1.4)

$$\begin{aligned}\epsilon_{x'} &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta - \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\theta \\ &= \left(\frac{0.0006 - 0.0002}{2} \right) + \left(\frac{0.0006 + 0.0002}{2} \right) \cos(-80^\circ) - \left(\frac{0.00003}{2} \right) \sin(-80^\circ) \\ \epsilon_{x'} &= 0.00015\end{aligned}$$

2. คำนวณหาค่า $\gamma_{x'y'}$ จากสมการ (2-1.5)

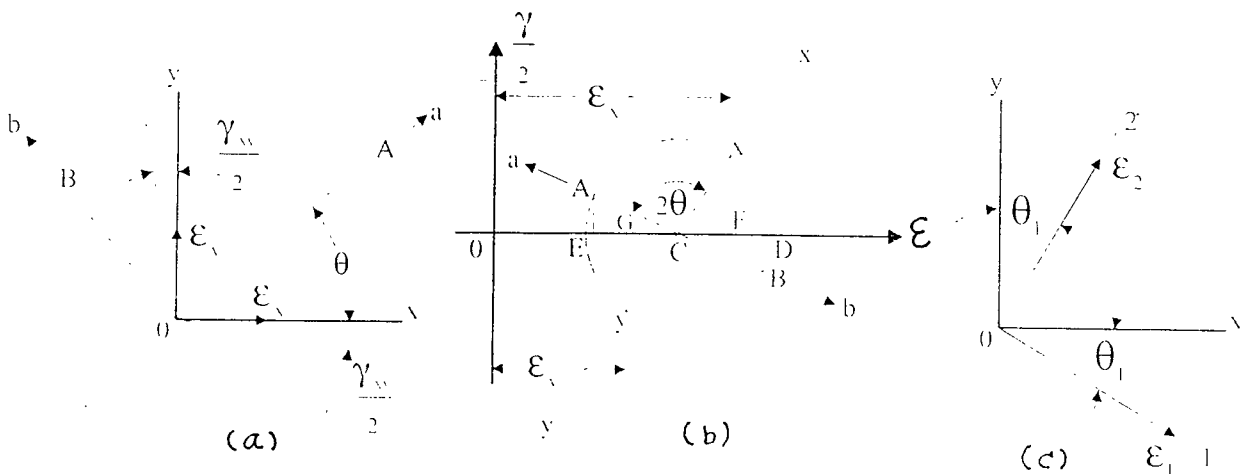
$$\begin{aligned}\frac{\gamma_{x'y'}}{2} &= -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\theta - \frac{1}{2} \gamma_{xy} \cos 2\theta \\ &= -\left(\frac{0.0006 + 0.0002}{2} \right) \sin(-80^\circ) - \left(\frac{0.00003}{2} \right) \cos(-80^\circ) \\ \gamma_{x'y'} &= 0.0004\end{aligned}$$

3. คำนวณหาค่า $\epsilon_{y'}$ จากสมการ (2-1.4) จะได้

$$\begin{aligned}\epsilon_{y'} &= \left(\frac{0.0006 - 0.0002}{2} \right) - \left(\frac{0.0006 + 0.0002}{2} \right) \cos(-80^\circ) + \left(\frac{0.00003}{2} \right) \sin(-80^\circ) \\ \epsilon_{y'} &= 0.00025\end{aligned}$$

2-1.3 วงกลมของโมร์สำหรับความเครียดระนาบ เมื่อเปรียบเทียบกับสมการ (2-1.4) และสมการ (2-1.5) กับสมการ (1-9.1) และสมการ (1-9.2) จะเห็นได้ว่าสมการทั้ง 2 นี้จะคล้ายกัน โดยสมการ (1-9.1) และ (1-9.2) เป็นสมการของความเค้นบนระนาบ และสมการ (2-1.4) และ (2-1.5) เป็นสมการของความเครียดระนาบ ความเครียดในแนวแกน ϵ_x , ϵ_y และ ϵ_z ในสมการ (2-1.4) และ (2-1.5) จะตรงกับ σ_x , σ_y และ σ_z ในสมการ (1-9.1) และ (1-9.2) ส่วนครึ่งหนึ่งของความเครียดเฉือน $\frac{\gamma_{xy}}{2}$ และ $\frac{\gamma_{ab}}{2}$ จะตรงกับความเค้นเฉือน τ_{xy} และ τ_{ab} ตามลำดับ ด้วยเหตุนี้จึงสามารถสร้างวงกลมของโมร์สำหรับความเครียดได้ในลักษณะเดียวกันกับวงกลมของโมร์สำหรับความเค้นที่ได้กระทำมาแล้ว

ในรูป 2-1.6a ให้ ϵ_x และ ϵ_y เป็นความเครียดในแนวแกน x และ y และให้ $\frac{\gamma_{xy}}{2}$ เป็นความเครียดเฉือนหรือการเปลี่ยนแปลงมุมฉากของมุม XOY ที่เพิ่มขึ้นเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ความเครียดเฉือนนี้ได้แสดงไว้ในรูป 2-1.6a ด้วยมุม $\frac{\gamma_{xy}}{2}$ ซึ่งเป็นมุมหมุนตามเข็มนาฬิกาของเส้น OX นั่นเอง และให้เส้น OY หมุนไปทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม $\frac{\gamma_{yx}}{2}$ การหมุนของเส้นตามเข็มนาฬิกาถือว่าความเครียดเป็นบวก และความเครียดที่เกิดจากเส้นหมุนทวนเข็มนาฬิกาเป็นลบ ดังนั้น $\frac{\gamma_{xy}}{2} = -\frac{\gamma_{yx}}{2}$



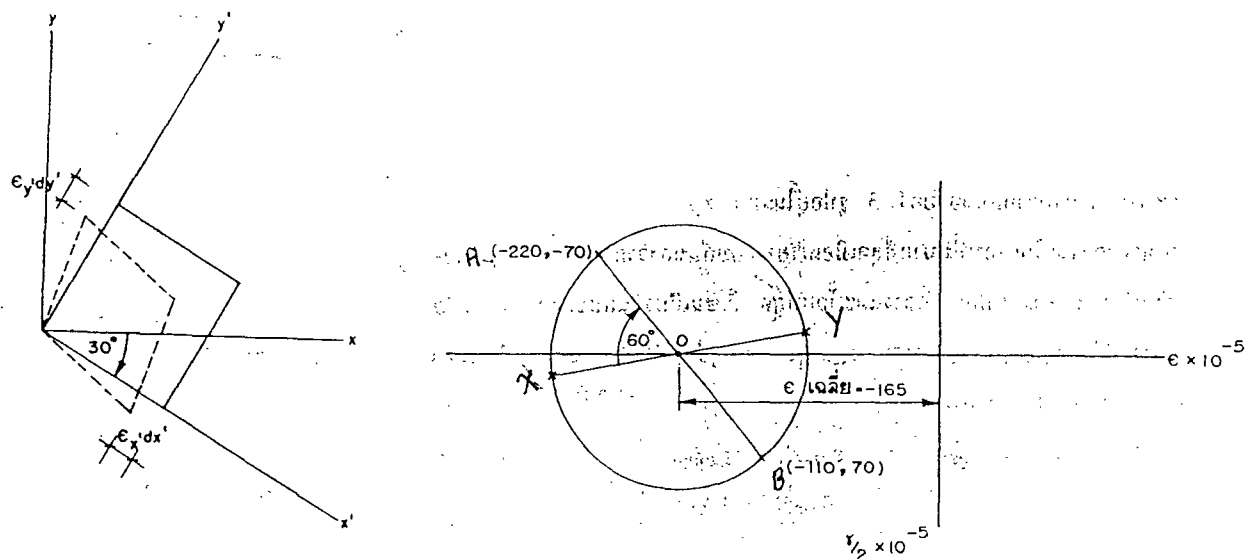
รูป 2-1.6

สร้างวงกลมของโมร์สำหรับสถานะของความเครียดอันนี้ เริ่มต้นด้วยการสร้างแกน ϵ และ $\frac{\gamma}{2}$ ให้ตั้งฉากกัน ดังแสดงในรูป 2-1.6b กำหนดจุด X เป็นจุดที่มีความเครียด ϵ_x เป็นแอบซิสซาที่มีเครื่องหมายเป็นบวกและ $\frac{\gamma_{xy}}{2}$ เป็นออร์ดิเนตที่มีเครื่องหมายเป็นบวก ในทำนองเดียวกัน กำหนดจุด Y ให้เป็นจุดที่มีแอบซิสซาเป็น ϵ_y และออร์ดิเนตเป็น $-\frac{\gamma_{yx}}{2}$ เขียนเส้นตรง XY ตัดกับแกน τ ที่จุด C ใช้จุด C เป็นจุดศูนย์กลางก็จะเขียนวงกลมของโมร์สำหรับความเครียดได้ดังแสดงไว้ในรูป 2-1.6b

เนื่องจากความเครียด ϵ_x , ϵ_y และ $\frac{\gamma_{ab}}{2}$ กระทำในแนวแกน a และแกน b ซึ่งแกนทั้งสองนี้เอียงทำมุม θ กับแกน x และแกน y ซึ่งความเครียดทั้งสามค่านี้จะหาได้จากวงกลมของโมร์ ดังจะแสดงให้เห็นต่อไปนี้ เนื่องจากแกน a เอียงทำมุมกับแกน x เป็นมุม θ เมื่อวัดออกจากแกน x ไปทวนเข็มนาฬิกา ดังนั้นจุด X ในวงกลมของโมร์เมื่อวัดมุมไปทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม 2θ ก็จะได้จุด A ซึ่งจุดนี้จะมีโคออร์ดิเนตเป็น ϵ_x , $\frac{\gamma_{ab}}{2}$ เมื่อลากเส้นตรงออกจากจุด A ผ่านจุด C ไปตัดเส้นรอบวงของวงกลมที่จุด B ที่จุด B นี้จะมีโคออร์ดิเนตเป็น ϵ_y , $\frac{\gamma_{ba}}{2}$

โคออร์ดิเนตที่มีค่าเป็นบวกทั้งคู่ของจุด A ซึ่งให้เห็นว่าเส้นตรง OA จะเกิดการดึงและการหมุนตามเข็มนาฬิกาในขณะที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง โดยที่โคออร์ดิเนตของจุด B ซึ่งให้เห็นว่าเส้นตรง OB จะเกิดการดึงและการหมุนทวนเข็มนาฬิกา ซึ่งหมายความว่าหลังจากเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง มุม BOA จะมากกว่ามุมฉากเล็กน้อย

ตัวอย่าง 2-1.2 ชิ้นส่วนของโครงสร้างคานมีค่า $\epsilon_x = -25 \mu\epsilon$ ค่า $\epsilon_y = -8 \mu\epsilon$ และค่า $\gamma_{xy} = 60 \times 10^{-6} \text{ rad}$ จงคำนวณหาค่าความเครียดของชิ้นส่วนนี้ในทิศทาง 30 องศาตามเข็มนาฬิกา โดยให้ใช้วิธีวงกลมของโมร์



รูป E2-1.2

วิธีทำ

1. สร้างวงกลมของโมร์ สร้างจุด 1 = $(-25 \times 10^{-6}, 3 \times 10^{-6})$ และจุดที่ 2 = $(-8 \times 10^{-6}, 3 \times 10^{-6})$

$$\epsilon_{เฉลี่ย} = \left(\frac{-25 - 8}{2} \right) 10^{-6} = -16.5 \times 10^{-6}$$

2. หาค่าความเครียดจากรูปวงกลมของโมร์อ่านค่า ϵ_a , $\frac{\gamma_{ab}}{2}$, ϵ_b จากจุด A และ B ได้

$$\epsilon_a = -22 \times 10^{-6}$$

$$\frac{\gamma_{ab}}{2} = -7 \times 10^{-6}$$

$$\gamma_{ab} = -14 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_b = -11 \times 10^{-6}$$

2-1.4 ความเครียดหลัก กรณีเฉพาะของสถานะความเครียดแบบความเครียดบนระนาบที่น่าสนใจก็คือกรณีที่เกิดความเครียดหลักขึ้นบนแกน 1 และแกน 2 ซึ่งแกนทั้ง 2 นี้จะยังคงเป็นมุมฉากซึ่งกันและกันตลอดเวลาเพราะไม่มีความเครียดเฉือนเกิดขึ้น จะมีเฉพาะความเครียดในแนวแกน 1 และ 2 คือ ϵ_1 และ ϵ_2 เกิดขึ้นเท่านั้น ความเครียดทั้ง 2 นี้จะมีค่าหนึ่งเป็นค่าสูงสุด และอีกค่าหนึ่งเป็นค่าต่ำสุด จากวงกลมของโมร์ รูป 2-1.6b จะเห็นได้ว่าทิศทางหลัก (Principal Direction) จะดูได้จากจุด D และจุด E เพราะว่าที่จุดทั้ง 2 นี้ไม่มีความเครียดเฉือนเกิดขึ้น มุมตามเข็มนาฬิกา $XCD = 2\theta_1$ ในวงกลมของโมร์ชี้ให้เห็นว่าทิศทางของความเครียดหลัก ϵ_1 เอียงทำมุม θ_1 กับแกน x ตามเข็มนาฬิกา ในทำนองเดียวกัน มุมตามเข็มนาฬิกา $YCE = 2\theta_1$ ก็จะทำให้เห็นว่าความเครียดหลัก ϵ_2 จะมีทิศทางเอียงทำมุม θ_1 กับแกน y ดังนั้นแกน 1 และแกน 2 จะทำมุมกับแกน x และแกน y ดังแสดงไว้ในรูป 2-1.6c จากวงกลมของโมร์ ขนาดของ ϵ_1 และ ϵ_2 คือ $\epsilon_1 = OD$ และ $\epsilon_2 = OE$ จะเห็นได้ว่าความเครียดทั้ง 2 นี้จะเป็นความเครียดในแนวแกนสูงสุดและต่ำสุดที่เกิดขึ้น บนระนาบของๆอีลิเมนต์ต่างๆที่พิจารณา

สมการที่ใช้ในการคำนวณหาความเครียดหลัก ϵ_1 และ ϵ_2 ในรูปของ ϵ_x , ϵ_y และ γ_{xy} จะหาได้โดยง่ายจากเรขาคณิตของวงกลมของโมร์ในรูป 2-1.6c คือ

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= OD = OC - CD = OC + CX \\ \epsilon_2 &= OE = OC - EC = OC - CX\end{aligned}\quad (1)$$

$$\text{เนื่องจาก } OC = \frac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y), \quad CD = \sqrt{(CF)^2 + (FX)^2}, \quad CF = \frac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y) \text{ และ } FX = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$$

ดังนั้นสมการ (1) จะกลายเป็น

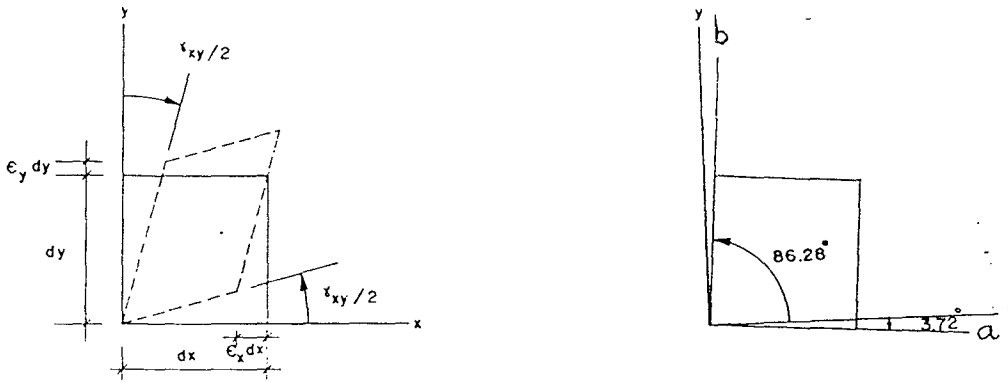
$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \\ \epsilon_2 &= \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}\end{aligned}\quad (2-1.6)$$

มุม θ_1 ซึ่งจะชี้ให้เห็นทิศทางของความเครียดหลัก ϵ_1 เมื่อเทียบกับแกน x จะหาได้จากสมการ

$$\tan 2\theta_1 = \frac{FX}{CF} = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}\quad (2-1.7)$$

ซึ่งได้จากตรีโกณมิติของมุมฉาก XFC ในรูปที่ 2-1.6b สมการ (2-1.6) และ (2-1.7) จะคล้ายคลึงกับสมการ (1-9.4) และ (1-9.3) ในหัวข้อที่ 1-9 สมการ (2-1.6) และ (2-1.7) จะสามารถใช้ในการหาความเครียดหลักได้โดยไม่ต้องเขียนวงกลมของโมร์

ตัวอย่างที่ 2-1.3 ชิ้นส่วนของโครงสร้างหนึ่งมีค่าความเครียดในทิศทาง x,y เท่ากับ $\epsilon_x = -150 \mu\epsilon$, $\epsilon_y = 80 \mu\epsilon$ และมีค่าความเครียดเฉือนเท่ากับ $\gamma_{xy} = 60 \times 10^{-6} \text{ rad}$ จงคำนวณหาค่าความเครียดหลักและทิศทางของระนาบหลักและค่าความเครียดเฉือนมากที่สุด



รูป E2-1.3

วิธีทำ

1. คำนวณหาทิศทางของระนาบหลัก (θ_p) จากสมการ 2-1.7

$$\tan 2(\theta_p) = \left(\frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \right) = \left(\frac{30}{-150 - 80} \right) \mu\epsilon = 0.13 \mu\epsilon$$

$$(\theta_p) = -3.72^\circ \text{ และ } 86.28^\circ$$

$(\theta_p) = -3.72^\circ$ (จะหมุนตามเข็มนาฬิกา) $(\theta_p) = +86.28^\circ$ (จะหมุนทวนเข็มนาฬิกา)

2. คำนวณหาค่าความเครียดหลัก (ϵ_1, ϵ_2) จากสมการ 2-1.6

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2}$$

$$= \left(\frac{-150 + 80}{2} \right) \mu\epsilon \pm \sqrt{\left(\frac{-150 - 80}{2} \mu\epsilon \right)^2 + \left(\frac{30 \times 10^{-6}}{2} \mu\epsilon \right)^2}$$

$$= -35 \pm 116 \mu\epsilon$$

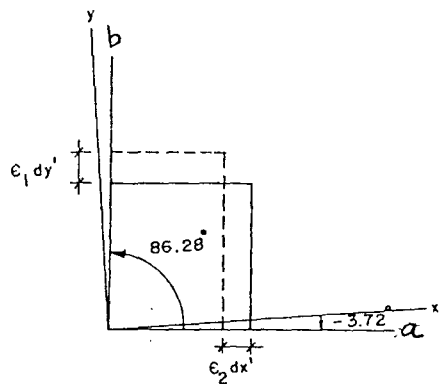
$$= -151 \mu\epsilon, 81 \mu\epsilon$$

$$\epsilon_1 = 81 \mu\epsilon$$

$$\epsilon_2 = -151 \mu\epsilon$$

3. การทดสอบค่า ϵ_1 และ ϵ_2 อยู่ในทิศทาง a หรือ b

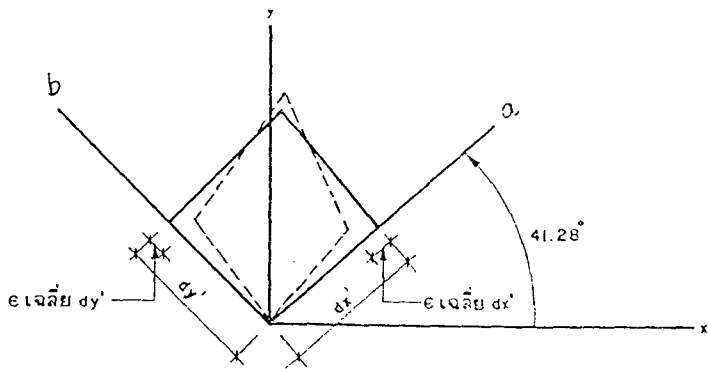
$$\begin{aligned} \epsilon_a &= \left(\frac{-150 + 80}{2}\right) \mu\epsilon + \left(\frac{-150 - 80}{2}\right) \mu\epsilon \cos 2(-3.72) + \left(\frac{30}{2}\right) \mu\epsilon \sin 2(-3.72) \\ &= -151 \mu\epsilon = \epsilon_2 \end{aligned}$$



4. คำนวณหาทิศทางของระนาบที่มีค่าความเครียดเฉือนมากที่สุด(θ_1) ถ้าพิจารณาแกน x
 $\theta_1 = \theta_p + 45^\circ = -3.72 + 45^\circ = 41.28^\circ$ (จะหมุนทวนเข็มนาฬิกา)

5. คำนวณหาค่าความเครียดเฉือนมากที่สุด ($\gamma_{xy, \max}$) จากสมการ

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{ab, \max}}{2} &= \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{-150 - 80}{2} \mu\epsilon\right)^2 + \left(\frac{30 \times 10^{-6} \text{ rad}}{2}\right)^2} \\ &= 116 \times 10^{-6} \text{ rad} \\ (\gamma_{ab, \max}) &= 232 \times 10^{-6} \text{ rad} \end{aligned}$$



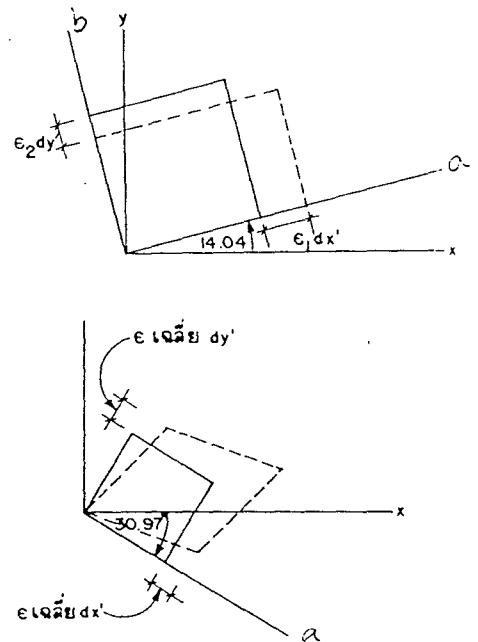
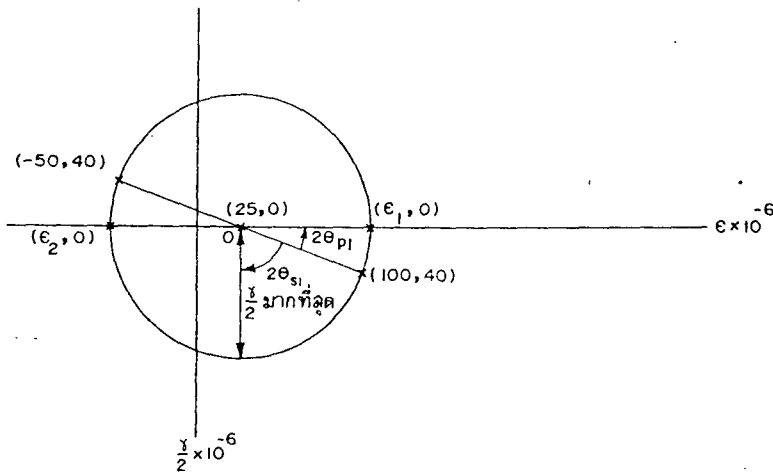
6. คำนวณหาค่าความเครียดเฉลี่ย (ϵ_{av}) จากสมการ

$$(\epsilon_{av}) = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} = \left(\frac{-150 + 80}{2} \right) \mu\epsilon = -35 \mu\epsilon$$

ตัวอย่างที่ 2-1.4 จงคำนวณหาค่าของความเครียดหลักและค่าความเครียดเฉือนมากที่สุด พร้อมทิศทางของแต่ละระนาบของค่า ϵ_1 เท่ากับ $100 \mu\epsilon$ ค่า ϵ_2 เท่ากับ $-50 \mu\epsilon$ และค่า γ_{xy} เท่ากับ $80 \times 10^{-6} \text{ rad}$
วิธีทำ

1. สร้างวงกลมของโมร์

สร้างจุด $(+100 \mu\epsilon, 40 \times 10^{-6} \text{ rad})$ และจุด $(-50 \mu\epsilon, 40 \times 10^{-6} \text{ rad})$ ดังรูป E2-1.4



รูป E2-1.4

2. หาค่าความเครียดหลัก (ϵ_1, ϵ_2) อ่านค่าจากรูปวงกลมของโมร์

$$\epsilon_1 = 110 \mu\epsilon$$

$$\epsilon_2 = -60 \mu\epsilon$$

3. หาทิศทางของระนาบหลัก จากสมการ (2-1.7) หรือวัดมุมจากรูป

$$\tan 2\theta_p = \gamma_{xy} / (\epsilon_1 - \epsilon_2)$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{80 \times 10^{-6}}{(100 + 50) 10^{-6}} = 0.533$$

$$2\theta_p = 28.07^\circ$$

$$\theta_p = 14.04^\circ \text{ ตามเข็มนาฬิกา}$$

4. หาค่าความเครียดเฉือนมากที่สุดอ่านค่าจากรูปวงกลมของโมร์

$$\frac{\gamma_{ab,\max}}{2} = 85 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

$$\gamma_{ab,\max} = 170 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

และมีค่า ε เฉลี่ย = $25 \mu\text{e}$

5. หาทิศทางของระนาบเมื่อมีค่าความเครียดเฉือนมากที่สุดอ่านค่าจากรูปวงกลมโมร์

$$2\theta_{s1} = 90^\circ - 28.07^\circ$$

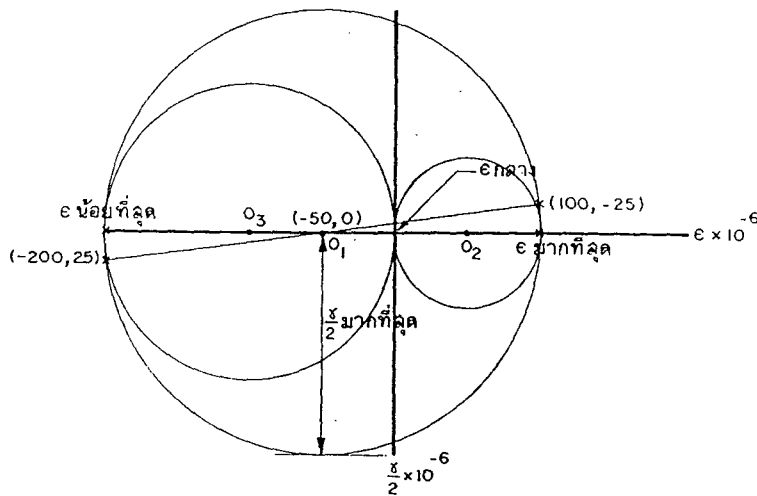
$$= 61.93^\circ$$

$$\theta_{s1} = 30.97^\circ$$

ตัวอย่างที่ 2-1.5 จงหาค่าความเครียดหลัก ค่าความเครียดเฉือนมากที่สุดสัมบูรณ์ของค่า ε_1 , ε_2 และ $\gamma_{\max}$ เท่ากับ $-200 \mu\text{e}$, $100 \mu\text{e}$ และ $50 \times 10^{-6} \text{ rad}$ ตามลำดับ

วิธีทำ

1. สร้างวงกลมของโมร์



2. หาค่า ε มากที่สุด และ ε น้อยที่สุด จากรูปวงกลมของโมร์

$$\varepsilon_{\max} = 102 \mu\text{e}$$

$$\varepsilon_{\min} = -202 \mu\text{e}$$

3. หาค่าความเครียดเฉือนมากที่สุด ($\gamma_{\max}$)

$$\frac{\gamma_{\max}}{2} = 152 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

$$\gamma_{\max} = 2 \times 152 \times 10^{-6} = 304 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

4. หาค่าความเครียดเฉือนมากที่สุดสัมบูรณ์ เมื่อทราบค่า

$$\varepsilon_{\max} = 102 \mu\text{e}$$

$$\epsilon_{max} = -202 \mu\epsilon$$
$$\epsilon_{av} = 0$$
$$\gamma_{max} \text{ สมบูรณ์} = 304 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

ตัวอย่าง 2-1.6 วัสดุรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 10 mm เมื่ออยู่ในภาวะความเครียดระนาบ ด้านแนวราบยืดออก 4 μm ในขณะที่ด้านแนวตั้งความยาวไม่เปลี่ยนแปลง มุมด้านล่างซ้ายเพิ่มขึ้น $0.4 \times 10^{-3} \text{ rad}$ ดังรูปจงหา

- 1) แกนหลัก (Principal Axes) และความเครียดหลัก (Principal Strains)
- 2) ความเครียดเฉือนสูงสุด และความเครียดตั้งฉากที่ตำแหน่งเดียวกัน

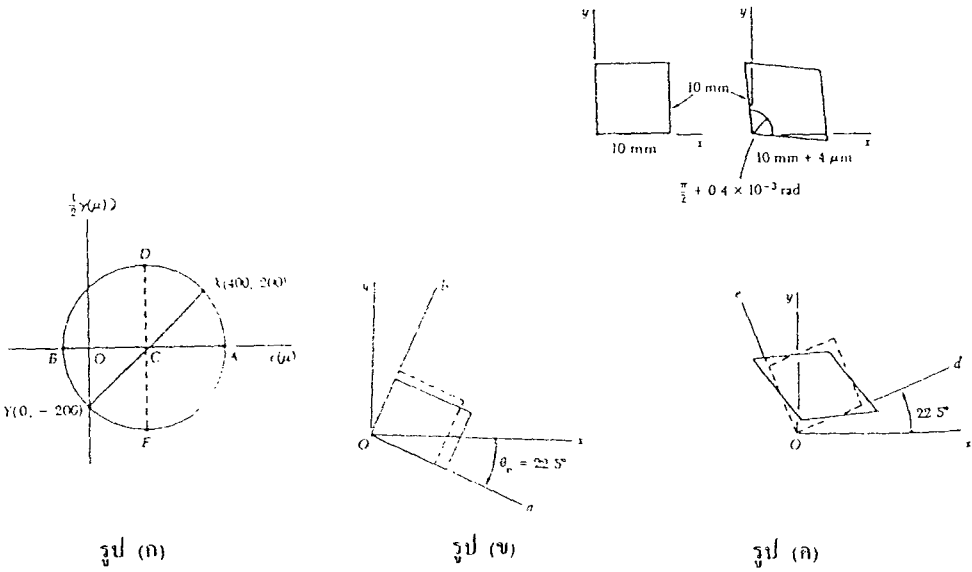
วิธีทำ 1) หาแกนหลัก และความเครียดหลัก

$$\epsilon_x = \frac{+4 \times 10^{-6} \text{ m}}{10 \times 10^{-3} \text{ m}} = +400 \mu\epsilon$$

$$\epsilon_y = 0$$

$$\left| \frac{\gamma_{xy}}{2} \right| = 200 \mu$$

เขียนวงกลมของโมร์ โดยที่จุด X และ Y คือ (400,200) และ Y (0,-200) ตามลำดับ(ด้านที่สัมพันธ์กับ ϵ_x หมุนตามเข็มนาฬิกา ดังนั้นจึงกำหนดจุด X (ϵ_x , $\frac{1}{2} \gamma_{xy}$) = X(400,200) ไว้ด้านบนของแกนราบ ส่วนด้านที่สัมพันธ์กับ ϵ_y หมุนทวนเข็มนาฬิกาจึงกำหนดจุด Y (ϵ_y , $-\frac{1}{2} \gamma_{xy}$) = Y (0,-200) ไว้ด้านล่างของแกนราบ เขียนเส้นผ่าศูนย์กลาง XY ได้จุดศูนย์กลางวงกลมของโมร์คือ C แล้วเขียนวงกลมดังรูป (ก)



$$OC = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} = 200 \mu$$

$$R = \sqrt{(200 \mu)^2 + (200 \mu)^2} = 283 \mu$$

เนื่องจากมุม $2\theta_p$ จากวงกลมของโมร์วัดจาก XY ไปยัง AB เท่ากับ 45° ดังนั้นมุม θ_p ที่วัดจาก OX ไปยัง Oa ในทิศทางเดียวกันจึงเท่ากับ 22.5° ดังรูป (ข)

$$\epsilon_{\max} = OC + R = 200 + 283 = 483 \mu$$

$$\epsilon_{\min} = OC - R = 200 - 283 = -83 \mu$$

2) หาคความเครียดเฉือนสูงสุด และความเครียดตั้งฉากที่ตำแหน่งเดียวกัน

$$\gamma_{\max} = 2R = 2(283) = 566 \mu$$

$$\epsilon' = \epsilon_{\text{ave}} = OC = 200 \mu$$

แกนความเครียดเฉือนสูงสุดแสดงไว้ในรูป (ค)

Example 2-1.7 Mohr's Circle for Plane Strain

A state of plane strain at a point in a body is given, with respect to the (x,y) axes, as $\epsilon_{xx} = 0.00044$, $\epsilon_{yy} = -0.00008$ Determine the principal strains in the (x,y) plane, the orientation of the principal axes of strain, the maximum shear strain, and the strain state on a block rotated by an angle of $\theta' = 25^\circ$ measured counterclockwise with respect to the reference axes.

SOLUTION Since the components of strain form a symmetric second-order tensor, they are transformed in precisely the same way as stresses. Thus, plane strain states can be represented by Mohr's circle in the same way as plane strain is defined by the equation. [see Eq. (2.32)]

$$[\epsilon_{xx} - \frac{1}{2}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})]^2 + (\epsilon_{xy} - 0)^2 = \frac{1}{4}(\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy})^2 + \epsilon_{xy}^2 \quad (a)$$

Equation (a) is the equation of a circle in the $(\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy})$ plan with center coordinates and radius

$$[\frac{1}{2}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}), 0] \quad (b)$$

$$R = \sqrt{\frac{1}{4}(\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy})^2 + \epsilon_{xy}^2} \quad (c)$$

The orientation of the principal axes of strain is given by the angle θ , where

$$\tan 2\theta = \frac{2\epsilon_{xy}}{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}} \quad (d)$$

and θ is measured with respect to the reference x axis, positive in the counterclock-wise sense. The principal strains are

$$\varepsilon_1 = \frac{(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \varepsilon_{xy}^2} \quad (c)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \varepsilon_{xy}^2} \quad (d)$$

The maximum shear strain is simply the radius the circle as given by Eq.(c).

For the data given, the state of strain may be expressed as $\varepsilon_{xx}=440 \mu$, $\varepsilon_{yy}=160 \mu$ and $\varepsilon_{xy}=-80 \mu$, where $\mu=10^{-6}$. This representation of strain is known as *microstrain*. The Mohr's circle for this data is shown in Fig E2.6a. By Eq. (b) and (c), the center of the circle is located at point C with coordinates $(300\mu, 0)$ and its radius is $R=161\mu$. By Eqs. (c) and (f), the principal strains are

$$\varepsilon_1 = 300 \mu + 161 \mu = 461 \mu \quad (g)$$

$$\varepsilon_2 = 300 \mu - 161 \mu = 139 \mu \quad (h)$$

On Mohr's circle, they correspond to points Q and Q', respectively. The reference strain state is plotted at points P(ε_{xx} , ε_{yy}) and P'(ε_{yy} , $-\varepsilon_{xx}$). Note that positive ε_{xy} axis is directed downward, as is done with the plane stress case. By Eq.(d) the principal axis corresponding to ε_1 in the body is located at an angle of $\theta=-14.87^\circ$ with respect to the x axis. On Mohr's circle, this corresponds to an angle $2\theta=-29.74^\circ$ from line CP to line CQ.

The maximum value of shear strain is $\varepsilon_{xy(max)} = R = 161 \mu$. It occurs at an orientation of $\pm 45^\circ$ from the principal axis for ε_1 ($\pm 90^\circ$ from line CQ on Mohr's circle). Note that this is the maximum shear strain using the tensor definition of strain. The Maximum engineering shear strain is $\gamma_{xy(max)} = 2\varepsilon_{xy(max)} = 322\mu$ of strain.[Eq.(2.73)]. The strain state on a block at $\theta'=25^\circ$ (50° on Mohr's circle) is identified by points S (ε'_{xx} , ε'_{yy}) and P' (ε'_{yy} , $-\varepsilon'_{xx}$). By geometry of the circle, the strain quantities are

$$\varepsilon'_{xx} = OC + R \cos(2\theta' - 2\theta) = 329 \mu$$

$$\varepsilon'_{yy} = OC - R \cos(2\theta' - 2\theta) = 271 \mu$$

$$\varepsilon'_{xy} = -R \sin(2\theta' - 2\theta) = -295 \mu$$

In Fig. E2.6b, the deformed shape of an element in the reference orientation is shown. Also illustrated is the deformed shape in the principal orientation, that is at an angle of $\theta=-14.87^\circ$ with respect to the x-axis. Notice that in this orientation, the deformed element is not distorted, since the shear strain is zero. Finally, the deformed shape at $\theta'=25^\circ$ with respect to the reference orientation is shown.

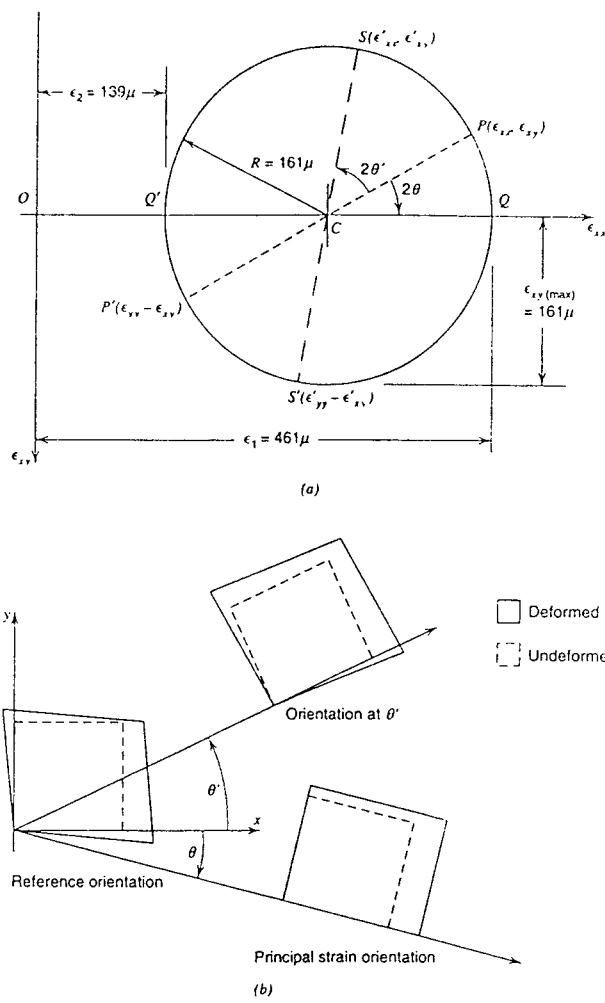


Figure E2.6 (a) Mohr's circle for plane strain. (b) Deformed element is three different orientations.

Example 2-1.8

At a point on a free (unloaded) surface of an engineering component made of an aluminum alloy, the following strains exist: $\epsilon_x = -0.0005$, $\epsilon_y = -0.0035$, and $\gamma_{xy} = 0.003$. Determine the principal normal and shear strains.

Solution. Since the material is expected to be isotropic, ϵ_z can be obtained from Eq. 6.45, and this is one of the principal normal strains.

$$\epsilon_3 = \epsilon_z = \frac{-0.345}{1 - 0.345} (-0.0005 + 0.0035) = -0.00158 \quad \text{Ans}$$

Where Poisson's Table 5.2 is used. Substituting the given strains into Eqs. 6.40 and 6.41 gives the axis rotations and values for the other two principal normal strains and for one of the principal shear strains

$$\tan 2\theta_n = -\frac{3}{4}, \quad \theta_n = -18.4^\circ \quad (CW)$$

$$\epsilon_1 \epsilon_2 = 0.004 - 0.001$$

Ans

$$\tan 2\theta_1 = \frac{4}{3} \cdot \theta_x = 26.6^\circ \qquad (CCW)$$

$$\gamma_1 = 0.005, \epsilon_{x,3} = 0.0015$$

Ans

The resulting states of strain are shown in Fig. E2-1.8 as (b) and (c). Signs and directions are determined in a manner similar to that used previously for stresses. In particular, the larger of the two principal normal strains takes a direction such that it is more nearly aligned with the larger of the original ϵ_1 and ϵ_2 than with the smaller. Also, the principal shear strain causes a distortion such that the long diagonal (dashed line) of the resulting parallelogram is aligned with the larger of ϵ_1 and ϵ_2 .

The remaining two principal shear strains can be obtained from Eq. 6.43.

$$\gamma_1 = |\epsilon_2 - \epsilon_3| = |0.001 - (-0.00158)| = 0.00058$$

Ans

$$\gamma_2 = |\epsilon_1 - \epsilon_3| = |0.004 - (-0.00158)| = 0.00058$$

Ans

The same result for the in-plane strains can be obtained by using Mohr's circle on a plot of ϵ versus γ as shown. Two ends of a diameter are given by

$$(\epsilon_x, -\frac{\gamma_{xy}}{2}) = (-0.0005, -0.0015)$$

$$(\epsilon_y, \frac{\gamma_{xy}}{2}) = (-0.0035, -0.0015)$$

Analysis on the circle proceeds in a manner similar to that for stress. The special dual sign convention needed for shear strain corresponds to that for the shear stress that would produce the distortion, clockwise rotation being positive as in Fig. 2-1.3.

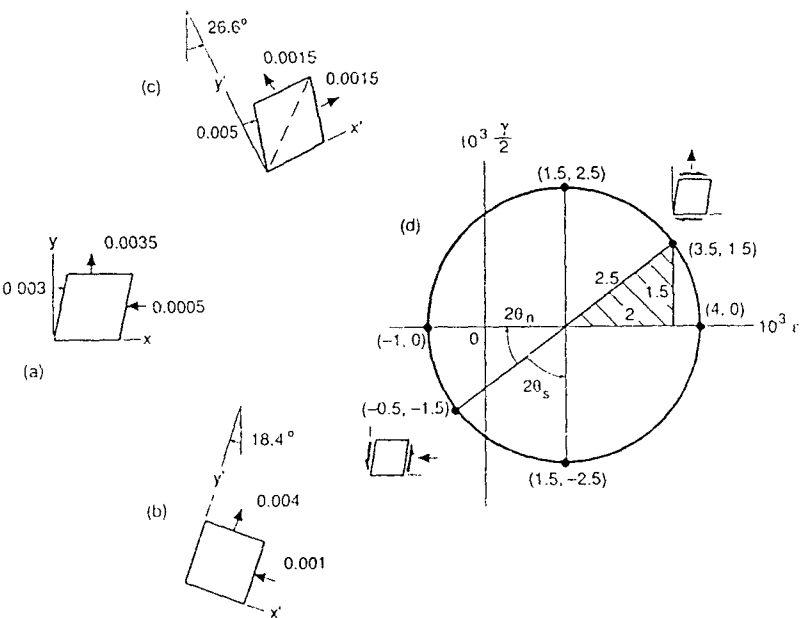


Figure E2-1.8 A state of strain(a) and the equivalent representations corresponding to principal normal strains (b) and the principal shear strain in the x-y plane (c). Mohr's circle for this case is shown in (d).

2-2 กฎของ Hook

เมื่อเข้าใจถึงเรื่องของความเค้นกับความเครียดที่เกิดขึ้นกับอีลีเมนต์ของชิ้นส่วนใดๆแล้ว ในหัวข้อนี้จะนำความรู้ดังกล่าวมาสร้างความสัมพันธ์เพื่อป้องกันถึงคุณสมบัติของวัสดุ โดยต่อไปนี้จะตั้งสมมติฐานว่า วัสดุเป็นแบบเนื้อชนิดเดียวกันทั้งหมด และมีคุณลักษณะความยืดหยุ่นเป็นเชิงเส้น

ความเค้นที่เกิดขึ้นกับอีลีเมนต์ที่มีขนาด Δx Δy Δz ตามรูป 2-2.1 นั้น เป็นเหตุให้ชิ้นส่วนดังกล่าวเกิดการเปลี่ยนแปลงทั้งขนาดและรูปร่าง ความเค้นดังกล่าวมีผลทำให้ชิ้นส่วนเกิดการยืดหรือหดในแนวแกน x, y และ z โดยที่ชิ้นส่วนนั้นยังคงสภาพเป็นรูปลูกบาศก์ด้านขนานอยู่ ความเค้นเฉือนไม่ทำให้อีลีเมนต์มีขนาดเปลี่ยนแปลง แต่จะทำให้รูปร่างของชิ้นส่วนเปลี่ยนแปลงจากรูปลูกบาศก์ด้านขนานเป็นรูปลูกบาศก์รูปทรงขนมเปียกปูน

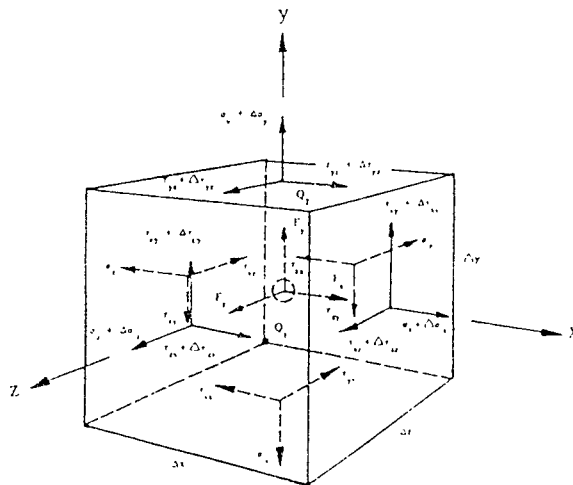
พิจารณาการเปลี่ยนแปลงขนาดของชิ้นส่วนที่เกิดจากความเค้นตั้งฉาก σ_x เท่านั้น จะพบว่าความยาวใหม่ในแต่ละทิศทางเท่ากับความยาวเดิมบวกด้วยอัตราการเปลี่ยนแปลงความยาวต่อหนึ่งหน่วยความยาวของความยาวเดิม

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \Delta x + \epsilon_x \Delta x \\ \Delta y' &= \Delta y + \epsilon_y \Delta y\end{aligned}\quad (2-2.1)$$

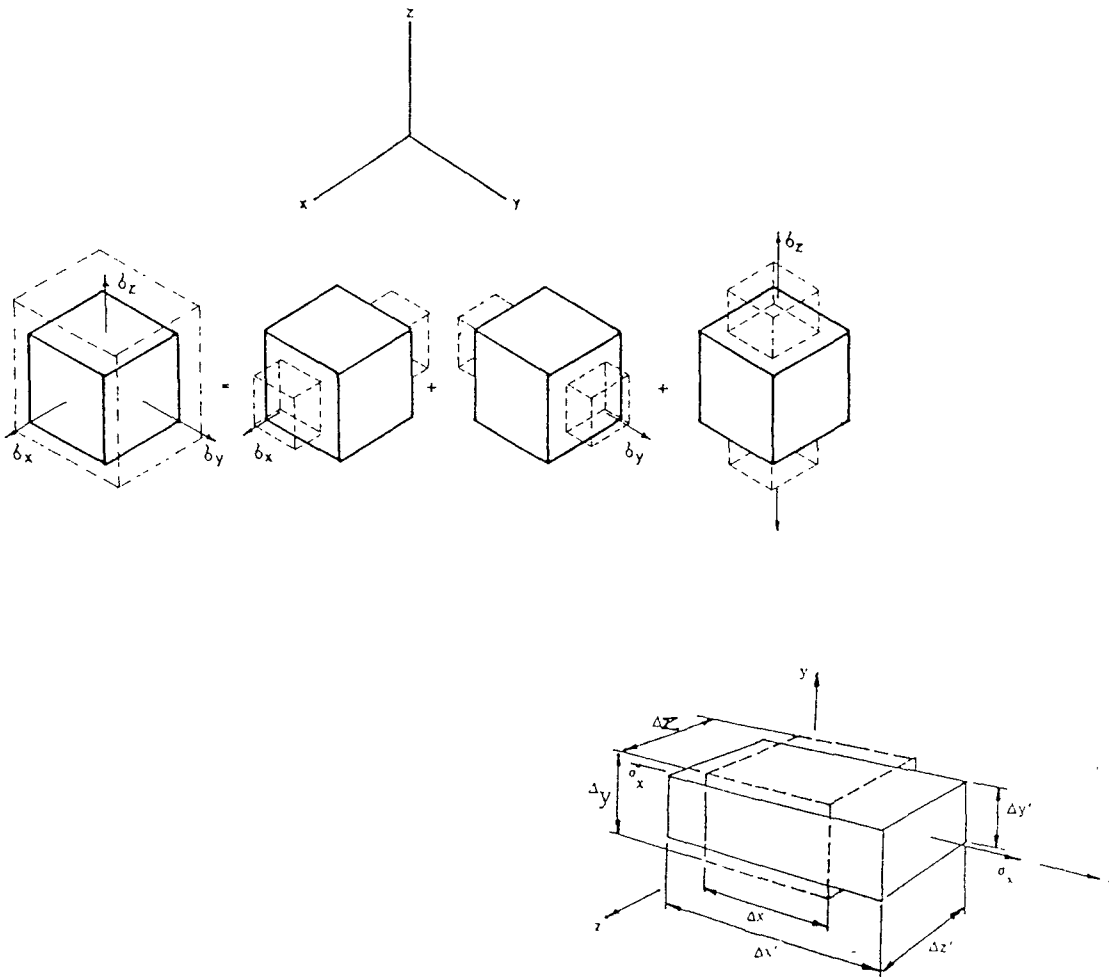
เมื่อ ϵ_x , ϵ_y และ ϵ_z เป็นการเปลี่ยนแปลงความยาวต่อหนึ่งหน่วยความยาวเดิมในแกน x, y และ z ตามลำดับ ซึ่งเรียกว่าความเครียดตั้งฉาก ดังนั้นรูป 2-2.2 ตามกฎของ Hooke สำหรับวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้น ความเครียดตั้งฉากจะแปรผันโดยตรงกับความเค้นตั้งฉาก นั่นคือ

$$\epsilon_x = \sigma_x / E$$

E เรียกโมดูลัสความยืดหยุ่น (Modulus of Elasticity) หรือโมดูลัสของยัง (Young's Modulus)



รูป 2-2.1



รูป 2-2.2

ขณะที่ชิ้นส่วนดังรูปยืดออกตามทิศทางของความเค้นตั้งฉาก หรือตามแกน x ในทิศทางตามแนวแกน y และ z ของชิ้นส่วนจะเกิดการหดตัวขึ้น ถ้าการหดตัวนี้เป็นปฏิกิริยาโดยตรงกับความเค้นตั้งฉาก โดยทั่วไปจะเขียนอยู่ในเทอมของความเครียดตั้งฉากตามแนวของความเค้น ซึ่งในที่นี้คือ ϵ_y ค่าคงที่ของอัตราส่วนระหว่างการหดตัวหรือความเครียดทางด้านข้างกับความเครียดตั้งฉากตามแนวทงความเค้น คือ อัตราส่วนของ Poisson ν ถ้าวัสดุเป็นวัสดุแบบ Isotropic ก็คุณสมบัติของวัสดุไม่แปรเปลี่ยนไปตามทิศทางของความเค้น การหดตัวตามแนวแกน y และ z จะเท่ากับ คือ

$$\epsilon_y = -\nu \epsilon_x = -\frac{\nu}{E} \sigma_x$$

$$\epsilon_z = -\nu \epsilon_x = -\frac{\nu}{E} \sigma_x$$

ความเครียดตั้งฉากที่เกิดขึ้นจาก σ_x และ σ_z ก็เหมือนกับความเครียดที่เกิดขึ้นจาก σ_y ความเครียดที่เกิดจาก σ_y คือ

$$\varepsilon_x = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_y$$

และความเครียดที่เกิดจาก σ_z คือ

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} \sigma_z$$

สำหรับชิ้นส่วนที่อยู่ภายใต้ σ_x , σ_y และ σ_z พร้อมๆกัน ใช้แนวความคิดเกี่ยวกับ Linear Superposition เขียนความสัมพันธ์ระหว่างความเครียด-ความเค้น สำหรับวัสดุแบบ Linear Homogeneous, Isotropic Material ได้เป็น

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \quad (2-2.2)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x)] \quad (2-2.3)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \quad (2-2.4)$$

ตัวอย่าง 2-2.1 ความเค้นที่จุดๆหนึ่งในวัสดุคือ

$$\sigma_x = 5 \text{ kN/mm}^2; \quad \tau_{xy} = 3 \text{ kN/mm}^2$$

$$\sigma_y = -1 \text{ kN/mm}^2; \quad \tau_{yz} = 0$$

$$\sigma_z = 4 \text{ kN/mm}^2; \quad \tau_{zx} = 2 \text{ kN/mm}^2$$

จงหาความเครียดตั้งฉากในแนว x, y และ z ถ้า $E = 10 \text{ MN/mm}^2$ และ $\nu = 0.30$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{10 \times 10^6} [5 - 0.3(-1 + 4)](1000) = 410 \times 10^{-6} \text{ mm/mm} \\ &= 410 \text{ } \mu\varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{1}{10 \times 10^6} [-1 - 0.3(5 + 4)](1000) = -370 \times 10^{-6} \text{ mm/mm} \\ &= -370 \text{ } \mu\varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{1}{10 \times 10^6} [4 - 0.3(5 - 1)](1000) = 280 \times 10^{-6} \text{ mm/mm} \\ &= 280 \text{ } \mu\varepsilon \end{aligned}$$

ถ้าทราบความเครียดสามารถหา σ_x , σ_y และ σ_z ได้จากสมการ (2-2.2) (2-2.4) คือ

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)] \quad (2-2.5)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_y + \nu(\epsilon_z + \epsilon_x)] \quad (2-2.6)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_z + \nu(\epsilon_x + \epsilon_y)] \quad (2-2.7)$$

สำหรับความเค้นระนาบ $\sigma_z = 0$ และสมการ (2-2.2) – (2-2.4) จะลดรูปลงเป็น

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad (2-2.8)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad (2-2.9)$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \quad (2-2.10)$$

จากสมการ (2-2.2) – (2-2.4) จะพบว่าความเค้นสองแกนนั้นสามารถหาค่าของ σ_x และ σ_y ได้โดยทราบความเครียดเพียงสองค่าเท่านั้น โดยทั่วไปความเครียดทั้งสองคือ ϵ_x และ ϵ_y ดังนั้น

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \quad (2-2.11)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu\epsilon_x) \quad (2-2.12)$$

การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นส่วนที่เกิดจากความเค้นเฉือนนั้นพิจารณาจากผลของ τ_{xy} ดังรูป 2-2.3 ความเครียดเฉือน γ วัดจากการเบี่ยงเบนของชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมด้านขนาน ความหมายของความเครียดเฉือน γ_{xy} คือ

$$\gamma_{xy} = \angle BAD = \angle BAD - \angle B A D$$

เมื่อ γ_{xy} มีหน่วยเป็นความยาวต่อหนึ่งหน่วยความยาว สำหรับ Linear, Homogeneous, Isotropic Material ความเครียดเฉือนกับความเค้นเฉือนจะสัมพันธ์กันดังนี้

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (2-2.13)$$

เมื่อ G เป็นโมดูลัสการเฉือน (Shear Modulus) ในทำนองเดียวกัน

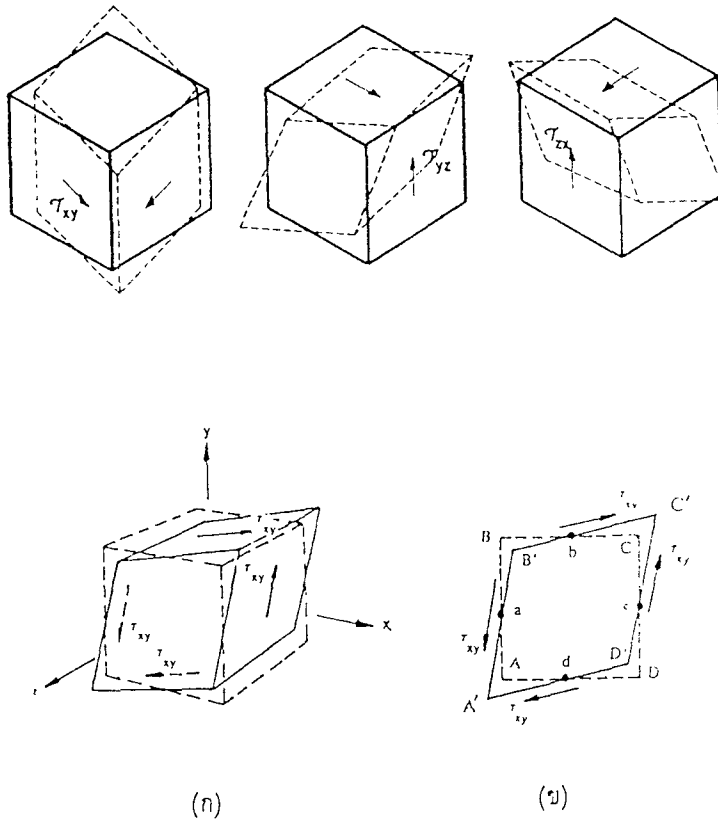
$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (2-2.14)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad (2-2.15)$$

โมดูลัสการเฉือน (Shear Modulus: G) นั้นสามารถเขียนอยู่ในรูปของความสัมพันธ์ของดัชนีความยืดหยุ่น (Modulus of Elasticity) และอัตราส่วนของ Poisson ได้เป็น

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2-2.16)$$

ที่มาของสมการนี้จะกล่าวถึงในหัวข้อ 2-3



รูปที่ 2-2.3

ดังนั้นสมการ (2-2.13) , (2-2.14) และ (2-2.15) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xy} \quad (2-2.17)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{yz} \quad (2-2.18)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{zx} \quad (2-2.19)$$

ตัวอย่าง 2-2.2 จงหาความเครียดเฉือนในตัวอย่าง 2-2.1

วิธีทำ
$$\gamma_{xy} = \frac{2(1 + 0.3)}{10 \times 10^6} (3000) = 780 \times 10^{-6} \text{ mm/mm}$$

$= 780 \text{ } \mu$

$$\gamma_{yz} = 0 \text{ mm/mm}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{2(1 + 0.3)}{10 \times 10^6} (2000) = 520 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

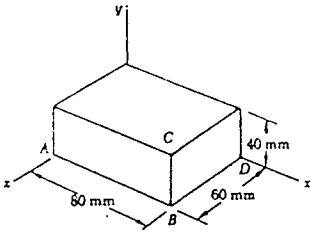
เมื่ออุณหภูมิเปลี่ยนแปลง วัสดุยืดหยุ่นซึ่งสามารถขยายตัวได้อย่างอิสระจะเกิดความเครียดตั้งฉากขึ้น สำหรับ Homogeneous and Isotropic Material ความเครียดตั้งฉากดังกล่าวคือ

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \alpha \Delta T \tag{2-2.20}$$

เมื่อ α = สัมประสิทธิ์การขยายตัวตามเส้น. มีหน่วยเป็น $m / (m) (^{\circ}C)$

ตัวอย่าง 2-2.3 แท่งเหล็กทรงสี่เหลี่ยมดังรูป E2-2.3 อยู่ภายใต้ความดันสม่ำเสมอทุกด้าน ทราบการเปลี่ยนแปลงความยาวของขอบ AB คือ $-24 \mu m$ สมบัติ $E = 200 \text{ kN/mm}^2$ และ $\nu = 0.29$ จงหา

- ก) การเปลี่ยนแปลงความยาวของขอบทั้งสองที่เหลือ
- ข) ความดัน P ที่กระทำกับด้านทั้งหมดของแท่งเหล็ก



รูป E2-2.3

วิธีทำ

ก) หากการเปลี่ยนแปลงความยาวของขอบทั้งสองที่เหลือ แทนค่า $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ ในสมการ (2-2.2),(2-2.3) และ (2-2.4) ได้ความเครียดทั้งสามแกนคือ

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \frac{p}{E} (1 - 2\nu) \tag{2-2.21}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \delta_x / AB = -24 \mu m / 80 mm = -300 \mu \epsilon \text{ ได้} \\ \epsilon_x &= \epsilon_y = \epsilon_z = -300 \mu \epsilon \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} \delta_y &= \epsilon_y (BC) = (-300 \mu)(40 mm) = -12 \mu m \\ \delta_z &= \epsilon_z (BD) = (-300 \mu)(60 mm) = -18 \mu m \end{aligned}$$

ข) หาความดัน p จากสมการ (2-2.21) แทนค่า p ได้

$$P = -\frac{E\varepsilon_x}{1-2\nu} = -\frac{(200\text{kN/mm}^2)(-300\mu\varepsilon)}{1-0.58} = 142.9\text{N/mm}^2$$

2-2.1 Octahedral shearing strain จากหัวข้อ 1-10 ที่ผ่านมา ความเค้นเฉือนสูงสุดทั้ง 3 ค่าที่เกิดขึ้นบนระนาบที่เอียงทำมุม 45° กับระนาบหลัก

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad , \quad \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad , \quad \tau_3 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad (2-2.22)$$

ดังแสดงในวงกลมของโมร์ รูปที่ 2-2.4a และ Octahedral Shearing Stresses จากสมการ

$$\tau_o = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2} \quad (2-2.23)$$

จากกฎของ Hooke ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นเฉือนกับความเครียดเฉือนคือ $\tau = G\gamma$ ดังนั้น

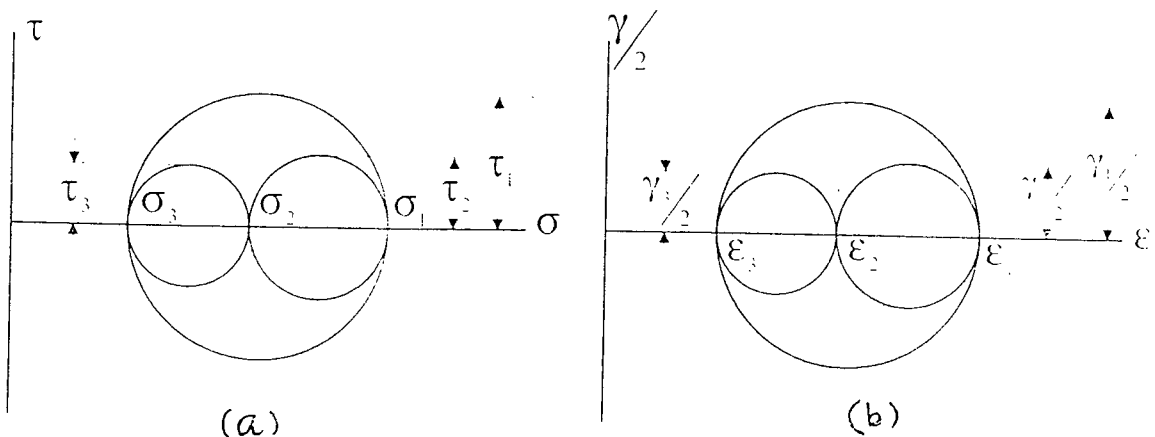
$$\tau_o = G\gamma_o \quad , \quad \tau_1 = G\gamma_1 \quad , \quad \tau_2 = G\gamma_2 \quad , \quad \tau_3 = G\gamma_3$$

เมื่อหารสมการ (2-2.23) ตลอดด้วย G จะได้

$$\gamma_o = \frac{\gamma_o}{G} = \frac{2}{3} \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2} \quad (2-2.24)$$

γ_o นี้เรียกว่า Octahedral Shear strain ความเครียด γ_1, γ_2 และ γ_3 จะหาได้จากวงกลมของโมร์สำหรับความเครียด ดังแสดงไว้ในรูปที่ 2-2.4b จากวงกลมของโมร์วงนี้จะได้

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \\ \gamma_2 &= \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \gamma_3 &= \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \end{aligned} \quad (2-2.25)$$



รูปที่ 2-2.4

2-2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นหลักกับความเครียดหลัก พิจารณาอีลีเมนต์ที่ตัดออกมาจากชิ้นส่วน ดังแสดงไว้ในรูปที่ 2-2.5 อีลีเมนต์นี้ถูกกระทำด้วยความเค้นหลัก σ_1 , σ_2 และ σ_3 ตามแกน 1, 2 และ 3 ตามลำดับ

ในกรณีที่อีลีเมนต์ถูกกระทำด้วยความเค้นหลัก σ_1 เพียงอย่างเดียว ความเครียดตามแกน 1 จะมีค่าเป็น $\frac{\sigma_1}{E}$ ในขณะเดียวกัน ทางด้านข้างของอีลีเมนต์ก็เกิดการหดตัวเท่ากับ $-\frac{\nu\sigma_1}{E}$

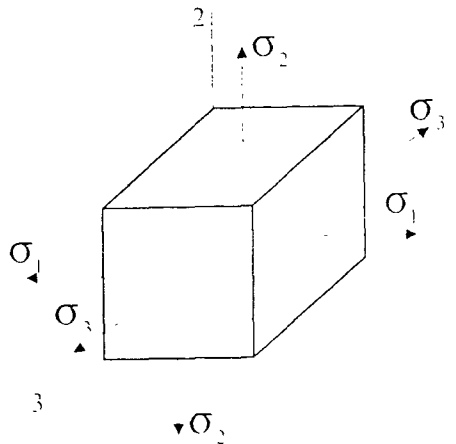
ในทำนองเดียวกัน ถ้าอีลีเมนต์ถูกกระทำด้วยความเค้นหลัก σ_2 เพียงอย่างเดียว ความเครียดตามในแกน 2 จะมีค่าเป็น $\frac{\sigma_2}{E}$ และทางด้านข้างจะหดตัวเท่ากับ $-\frac{\nu\sigma_2}{E}$

ส่วนความเค้น σ_3 ทำให้เกิดความเครียดในแกน 3 เท่ากับ $\frac{\sigma_3}{E}$ และการหดตัวทางด้านข้างเท่ากับ $-\frac{\nu\sigma_3}{E}$ ดังนั้น เมื่อความเค้น σ_1 , σ_2 และ σ_3 กระทำพร้อมกันความเครียดในแนวแกนทั้ง 3 จะมีค่าเป็น

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \nu\left(\frac{\sigma_2}{E} + \frac{\sigma_3}{E}\right) \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \nu\left(\frac{\sigma_3}{E} + \frac{\sigma_1}{E}\right) \\ \varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E} - \nu\left(\frac{\sigma_3}{E} + \frac{\sigma_1}{E}\right)\end{aligned}\quad (2-2.26)$$

ความเค้นหลักในแนวแกนทั้ง 3 เมื่อเขียนให้อยู่ในรูปของความเครียดหลักทั้ง 3 จากสมการ (2-2.26) จะเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{E\varepsilon_1(1-\nu) + \nu E(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{1-\nu-2\nu^2} \\ \sigma_2 &= \frac{E\varepsilon_2(1-\nu) + \nu E(\varepsilon_3 + \varepsilon_1)}{1-\nu-2\nu^2} \\ \sigma_3 &= \frac{E\varepsilon_3(1-\nu) + \nu E(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{1-\nu-2\nu^2}\end{aligned}\quad (2-2.27)$$



รูปที่ 2-2.5

กรณีเฉพาะ

1. ความเค้นแกนเดียว : $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$ จากสมการ (2-2.26) จะได้

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma}{E} \quad , \quad \epsilon_2 = -\nu \frac{\sigma}{E} \quad , \quad \epsilon_3 = -\nu \frac{\sigma}{E}$$

2. ความเค้นสองแกน : $\sigma_3 = 0$ จากสมการ (2-2.26) จะได้

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} \quad (2-2.28)$$

$$\epsilon_2 = -\left(\frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E}\right)$$

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_2 + \nu \epsilon_1) \quad (2-2.29)$$

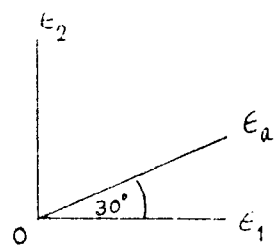
3. ความเค้นสองแกน : $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, $\sigma_3 = 0$ จากสมการ (2-2.26) จะได้

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{\sigma}{E} (1 - \nu)$$

$$\epsilon_3 = -\frac{2\nu}{E} \sigma \quad (2-2.30)$$

สมการเหล่านี้มักใช้ในการวิเคราะห์ความเค้นด้วยการทดลอง โดยวัดค่าของความเครียด ϵ_1 , ϵ_2 และ ϵ_3 ในกรณีที่เป็นการอัดในแนวแกนหลัก สมการเหล่านี้ยังคงใช้ได้ โดยเปลี่ยนเครื่องหมายของความเค้นหลักและความเครียดหลักให้เป็นลบ

ตัวอย่าง 2-2.4 ความเค้นหลักที่จุดๆหนึ่งในเนื้อวัสดุมีค่าเป็น 160 และ 40 N /mm²,เป็นความเค้นดึงทั้งคู่ ถ้า E = 200 kN /mm² and $\mu = 0.28$, จงหาความเครียดในทิศทางที่ทำมุม 30° กับทิศทางของความเค้นหลักสูงสุด และจงหาทิศทางซึ่ง ความเครียดมีค่าเป็นศูนย์ด้วย



รูป E2-2.4

วิธีหาความเครียดหลักในทิศ σ_1

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} = \frac{160 \times 10^{-3}}{200} - 0.28 \left(\frac{40 \times 10^{-3}}{200} \right) \\ &= 0.8(10^{-3}) - 0.056(10^{-3}) = 744 \mu\epsilon \end{aligned}$$

ความเครียดหลักในทิศ σ_2

$$\begin{aligned} \epsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E} = \frac{40 \times 10^{-3}}{200} - 0.28 \left(\frac{160 \times 10^{-3}}{200} \right) \\ &= 0.2(10^{-3}) - 0.224(10^{-3}) = 24 \mu\epsilon \end{aligned}$$

หาความเครียดในทิศ OE_3

$$\begin{aligned} \epsilon_3 &= \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) \cos 2\theta \\ &= \frac{1}{2}(0.744 \times 10^{-3} + 0.024 \times 10^{-3}) + \frac{1}{2}(0.744 \times 10^{-3} - 0.024 \times 10^{-3}) \cos 60^\circ \\ &= 0.552 (10^{-3}) = 552 \mu\epsilon \end{aligned} \qquad \text{ตอบ}$$

จาก

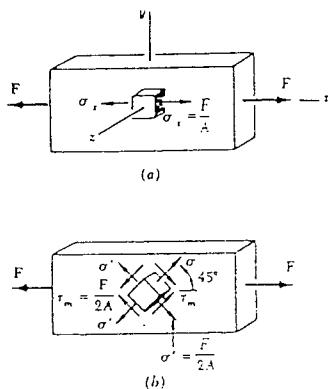
$$\begin{aligned} \epsilon_3 &= \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) \cos 2\theta = 0 \\ \cos 2\theta &= \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\epsilon_1 - \epsilon_2} = - \left(\frac{744 - 24}{744 + 24} \right) = - 0.9375 \\ \cos 2\theta &= \cos 159^\circ 40' \\ 2\theta &= 159^\circ 40' \\ \theta &= 79^\circ 50' \end{aligned} \qquad \text{ตอบ}$$

2-3 ความสัมพันธ์ระหว่าง E, V และ G

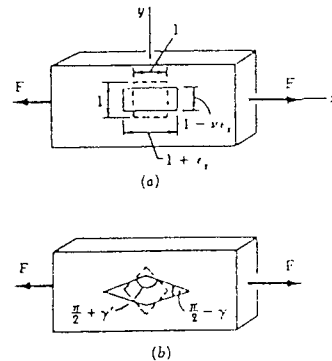
ดังที่ได้ทราบมาแล้วว่าแรงกระทำตามแนวแกนนั้นจะมีผลทำให้ความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือนมีค่าเท่ากันบนด้านทั้งสี่ของชิ้นส่วนซึ่งด้านของชิ้นส่วนนั้นทำมุม 45° กับแกนของวัตถุหรือบนแนวแรง ดังแสดงในรูป 2-3.1 ซึ่งความเค้นเฉือนสูงสุดก็อยู่บนระนาบทำมุม 45° กับแนวแรงด้วย จากกฎของ Hooke จะได้ว่า ความเครียดที่แสดงในรูป 2-3.2 b เป็นความเครียดเฉือนสูงสุด $\gamma = \gamma_m$

มาพิจารณาดังของความสัมพันธ์ของความเครียดเฉือนสูงสุด $\gamma = \gamma_m$ ที่แสดงในรูป 2-3.2b กับความเครียดตั้งฉาก ϵ_x ตามแนวแกนกระทำ ตัดอีลีเมนต์รูปลูกบาศก์ในรูป 2-3.2a ออกเป็นรูปปรีซึมตามแนวทะแยงมุมดังรูป 2-3.3a และรูป 2-3.3b จากรูป 2-3.3a จะเห็นว่าอีลีเมนต์ใหม่เปลี่ยนแปลงรูปร่างไปดังรูป 2-3.3c ซึ่งด้านที่อยู่ในแนวราบและแนวตั้งมีค่าเป็น $1 + \epsilon_x$ และ $1 - \nu \epsilon_x$ ตามลำดับ มุมระหว่างผิวด้านแนวราบกับด้านลาดเอียงของชิ้นส่วนในรูป 2-3.3b เท่ากับครึ่งหนึ่งของมุมฉากของชิ้นส่วนรูปลูกบาศก์ในรูป 2-3.2b ดังนั้นมุม β ควรเท่ากับครึ่งหนึ่งของ $\pi/2 - \gamma_{\max}$ ด้วย

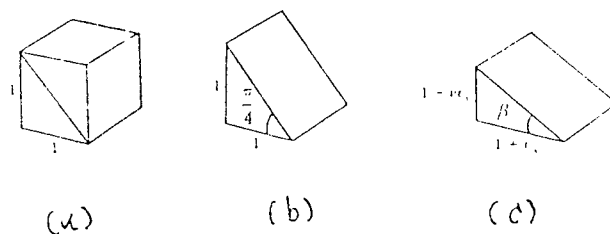
$$\beta = \pi/4 - \gamma_{\max}/2$$



รูป 2-3.1



รูป 2-3.2



รูป 2-3.3

2-3.1 ความเค้นเฉือนในสถานะการเฉือนอย่างเดียว

เป็นไปได้ที่สถานะของความเค้นที่เกิดขึ้นกับอีลีเมนต์ที่ตัดออกมาจากเนื้อวัตถุ โครงผิวของอีลีเมนต์ จะมีความเค้นเฉือนเกิดขึ้นเพียงอย่างเดียว สถานะของความเค้นที่มีเฉพาะความเค้นเฉือนเกิดขึ้นบนผิวทั้ง 4 ของเนื้อวัสดุอีลีเมนต์นี้เรียกว่าการเฉือนอย่างเดียว(Pure Shear)

พิจารณาอีลีเมนต์ที่อยู่ในสถานะการเฉือนอย่างเดียวภายใต้การดึงและการอัดในทิศทางที่ตั้งฉากกัน ดังในรูปที่ 2-3.4a ความเค้นดึงและความเค้นอัดที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากันคือ $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$ และ $\sigma_3 = 0$ ซึ่ง วงกลมของโมร์สำหรับความเค้นในสถานะการเฉือนอย่างเดียวนี้แสดงในรูปที่ 2-3.4b

จากหัวข้อที่ 1-8 ได้พิสูจน์แล้วว่า $\tau_{\max}$ และ $\tau_{\min}$ จะเกิดบนระนาบที่เอียงทำมุม 45° และ 135° กับ ระนาบหลักตามลำดับ ในกรณีเฉพาะอันนี้ความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นจะมีค่าเป็น

$$\tau_{\max, \min} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \pm \frac{1}{2}(\sigma + \sigma) = \pm \sigma$$

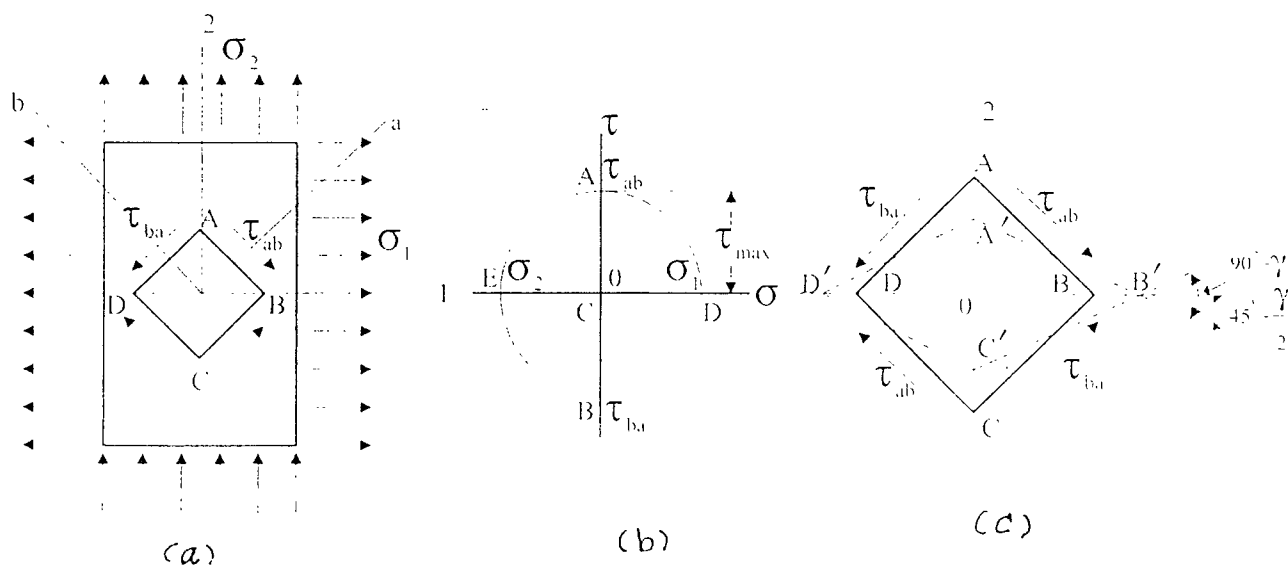
และจะไม่มีค่าความเค้นตั้งฉากเกิดขึ้นบนระนาบของผิวอีลีเมนต์ ดังนั้นจะพิสูจน์ได้โดยแทนค่า $\theta = 45^\circ, \theta = 135^\circ$ ลงในสมการ 1-8.1 คือ

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2 45 + \sigma_2 \sin^2 45 = \sigma_1/2 + \sigma_2/2 = \sigma/2 - \sigma/2 = 0$$

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2 135 + \sigma_2 \sin^2 135 = \sigma_1/2 + \sigma_2/2 = \sigma/2 - \sigma/2 = 0$$

การพิสูจน์นี้สามารถดูได้จากวงกลมของโมร์ ในรูป 2-3.4

ด้วยเหตุนี้เมื่ออีลีเมนต์ ABCD ในรูป 2-3.4a ซึ่งมีผิวทั้ง 4 เอียงทำมุม 45° กับแกนหลักที่กำลังพิจารณาอยู่นี้ จะมีความเครียดเฉือนกระทำบนผิวทั้ง 4 เพียงอย่างเดียว ดังนั้นอีลีเมนต์นี้เรียกได้ว่าอยู่ใน สถานะความเค้นแบบการเฉือนอย่างเดียว



รูป 2- 3.4

2-3.2 ความสัมพันธ์ระหว่างโมดูลัสความยืดหยุ่น โมดูลัสความแกร่งและอัตราส่วนของ Poisson จากสถานะความเค้นสองมิติ

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่าการดึงหรือการอัดจะเกิดการเฉือนบนระนาบเอียงเสมอ ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงรูปร่างโดยการดึงหรือการอัดจะสัมพันธ์กับการเปลี่ยนแปลงรูปร่างโดยการเฉือนอย่างใกล้ชิด โดยพื้นฐานของความสัมพันธ์นี้จะหาความสัมพันธ์ระหว่าง E, G และ ν ทางทฤษฎีได้

พิจารณาอีลีเมนต์ที่ถูกดึงและอัดในทิศทางที่ตั้งฉากกัน ดังแสดงในรูปที่ 2-3.4c ถ้า $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$ อีลีเมนต์นี้จะอยู่ในสถานะการเฉือนอย่างเดียว ความยาว OA และ OB ก่อนที่จะมีการจะเปลี่ยนแปลงรูปร่างจะมีค่าเท่ากัน และจะเปลี่ยนแปลงค่าไปหลังจากมีการจะเปลี่ยนแปลงรูปร่าง คือหลังจากมีการจะเปลี่ยนแปลงรูปร่าง OB จะเพิ่มมากขึ้นเป็น OB' โดยที่ OA ลดลงเป็น OA' ซึ่ง

$$OB' = OB(1 + \epsilon_1)$$

$$OA' = OA(1 + \epsilon_2)$$

ความเครียด ϵ_1 และ ϵ_2 จะหาได้จากสมการ (2-2.28) คือ

$$\epsilon_1 = 1/E(\sigma_1 - \nu\sigma_2) = 1/E(\sigma - \nu\sigma)$$

$$= \sigma/E(1 - \nu) = (1 - \nu)\tau/E$$

$$\epsilon_2 = 1/E(\sigma_2 - \nu\sigma_1) = 1/E(-\sigma - \nu\sigma)$$

$$= -\sigma/E(1 + \nu) = -(1 + \nu)\tau/E$$

ดังนั้น

$$OB' = OB[1 + (1 - \nu)\sigma/E]$$

$$OA' = OA[1 - (1 + \nu)\sigma/E]$$

มุมฉากที่อยู่ระหว่างผิว AB และ BC ของอีลีเมนต์จะมีค่าลดลง ซึ่งมุมที่มีค่าลดลงนี้คือมุมเฉือน (Angle of Shear) หรือความเครียดเฉือนนั่นเองดังนั้น

$$\tan [45 - \gamma/2] = OA'/OB' = [1 - (1 + \nu)\sigma/E] / [1 - (1 - \nu)\sigma/E] \quad (1)$$

เนื่องจาก $\gamma/2$ มีค่าน้อยมาก จึงสามารถกำหนดให้ $\tan \gamma/2 = \gamma/2$ ได้ ด้วยเหตุนี้

$$\tan [45 - \gamma/2] = \tan 45 - \tan \gamma/2 / 1 - \tan 45 \tan \gamma/2 = (1 - \gamma/2) / (1 + \gamma/2) \quad (2)$$

จากสมการ (1) และ (2) จะได้ว่า

$$(1 - \gamma/2) / (1 + \gamma/2) = [1 - (1 + \nu)\sigma/E] / [1 - (1 - \nu)\sigma/E]$$

$$\gamma = 2(1 - \nu)\sigma/E = 2\epsilon \quad (3)$$

ในหัวข้อ 2-3.1 ได้แสดงแล้วว่า τ บนผิวของเนื้อวัสดุหนึ่งซึ่งอยู่ในสถานะการเฉือนอย่างเดียว จะมีค่าเท่ากับค่าความเค้นตั้งฉากคือ $\tau = \sigma$ และจากกฎของ Hooke $\tau = G\gamma$ ในกรณีนี้จะได้

$$\sigma = G\gamma$$

แทนค่า $\sigma = G\gamma$ ลงในสมการ(3) จะ ได้ความสัมพันธ์ที่แสดงมาแล้ว เป็นสมการ(2-2.16) คือ

$$G = E / 2(1 + \nu) \quad (2-3.1)$$

สมการ(2-3.1) จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง G, E, ν ค่าความสัมพันธ์ระหว่าง G, E, ν จะเปลี่ยนแปลงไปตามค่า ν ของวัสดุแต่ละชนิด

$$\text{ถ้า } \nu = 1/4, G = 2/5 E$$

$$\nu = 1/3, G = 3/8 E$$

จากการทดลองพบว่า $G = 0.4 E$

2-3.3 ความสัมพันธ์ระหว่างโมดูลัสความยืดหยุ่น โมดูลัสความแข็งแรงและอัตราส่วนของ Poisson จากสถานะความเค้นสามมิติ

จากสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น (E) กับค่าโมดูลัสความแข็งแรง (G) ได้แสดงอีกครั้งในสมการ (2-3.1)

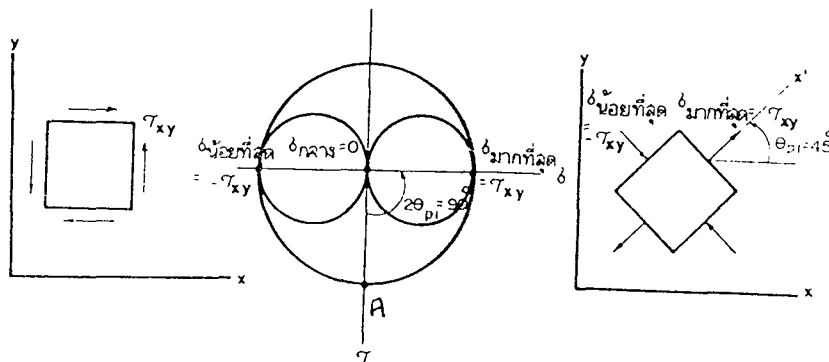
$$G = E/2(1+\nu) \quad (2-3.1)$$

เมื่อกำหนดให้ชิ้นส่วนโครงสร้างถูกแรงกระทำในสถานะการเฉือนอย่างเดียว คือ $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0)$ รูป 2-3.5 ได้แสดงรูปเพื่อช่วยในการวิเคราะห์พิสูจน์สมการ (2-3.1) จากสถานะความเค้นสามมิติ

จากรูปที่ 2-3.5 มี $\sigma_2 = 0$ เนื่องจากชิ้นส่วนมีความเค้นระนาบ (Plane Stress) ที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะอยู่ที่ $\sigma_2 = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = 0$ โดยรัศมีของวงกลม $= R$ ซึ่ง ณ จุด A จะอยู่ที่ $(0, \tau_{xy})$ ทำให้ $R = \tau_{xy}$ มี $\sigma_1 = \tau_{xy}$ และมี $\sigma_3 = -\tau_{xy}$

ถ้านำค่าต่างๆ เหล่านี้แทนค่าใน (2-2.26) จะได้

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= 1/E[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ &= 1/E[\sigma_1 - \nu(0 + \sigma_3)] \\ &= 1/E[\tau_{xy} + \nu\tau_{xy}] \\ \epsilon &= \tau_{xy}/E(1+\nu) \end{aligned} \quad (2-3.2)$$



รูป 2-3.5

เมื่อพิจารณาสมการ (2-2.26) และถ้าเป็นสภาพดังแสดงในรูป 2-3.5 คือเป็นการเค้นเฉือนอย่างเดียว จะได้ค่า $(\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0)$ ทำให้ได้ค่า $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$ ด้วยนำผลลัพธ์นี้ไปแทนใน (2-1.4) และให้ $\theta = 45^\circ$ จะได้

$$\begin{aligned}\epsilon &= \epsilon_1 = 0 + 0 + \gamma_{xy} \sin 90^\circ \\ \epsilon_1 &= \tau_{xy}/2\end{aligned}\quad (2-3.3)$$

จากสมการ (2-2.13) เข้าแทนค่าลงในสมการ (2-3.3) จะได้

$$\epsilon_1 = \tau_{xy}/2G \quad (2-3.4)$$

จากสมการ (2-3.4) เข้าแทนค่าลงในสมการ (2-3.2) จะได้สมการ (2-3.1) คือ

$$\begin{aligned}\tau_{xy}/2G &= \tau_{xy}/E(1+\nu) \\ G &= E/2(1+\nu)\end{aligned}\quad (2-3.1)$$

2-4 Dilatation และ Bulk Modulus

ต่อไปนี้จะพิจารณาถึงผลของความเค้นดังกล่าว σ_x , σ_y และ σ_z ที่มีต่อปริมาตรของชิ้นส่วนของวัสดุ พิจารณาอีลีเมนต์ในรูป 2-4.1 ขณะไม่มีความเค้นอีลีเมนต์มีรูปทรงเป็นรูปลูกบาศก์หนึ่งหน่วยปริมาตร แต่เมื่อมีความเค้น σ_x , σ_y และ σ_z อีลีเมนต์เดียวกันนี้เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างไปเป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานมีปริมาตรเป็น

$$V = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)$$

ด้วยเหตุที่ความเครียด ϵ_x , ϵ_y และ ϵ_z มีค่าน้อยกว่าหนึ่งมาก ดังนั้นเทอมที่มีค่าความเครียดคูณกันอยู่จึงมีค่าน้อยมากๆ เพราะฉะนั้นปริมาตร V จึงเขียนโดยประมาณได้เป็น

$$V = 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

แสดงค่าปริมาตรของอีลีเมนต์ที่เปลี่ยนไปด้วย Dilatation (e) หรือเรียกว่า Volumetric Strain มีค่าเป็น

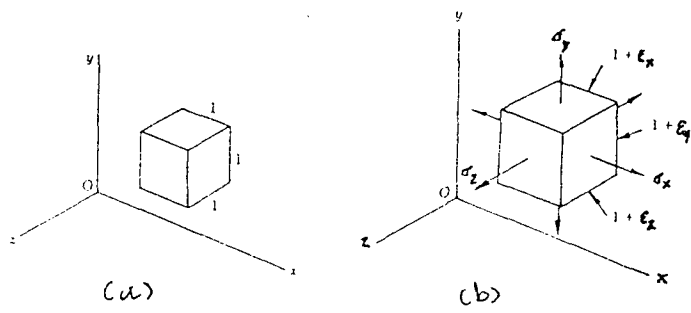
$$\begin{aligned} e &= V - 1 = 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z - 1 \\ e &= \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \end{aligned} \tag{2-4.1}$$

เมื่อพิจารณาในเทอมของ $\frac{\delta V}{V}$ นั่นคือค่า Dilatation (e) ในสมการ (2-4.1) จะมีค่าเป็น

$$e = \frac{\delta V}{V} = \epsilon_y + \epsilon_x + \epsilon_z \tag{2-4.2}$$

เนื่องจากปริมาตรเดิมเท่ากับหนึ่งหน่วยปริมาตร ดังนั้นปริมาณ e จึงแทนปริมาตรที่เปลี่ยนไปต่อ 1. หนึ่งปริมาตร แทนค่ากฎของ Hooke ลงในสมการ (2-4.1) ได้

$$\begin{aligned} e &= \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{E} - \frac{2\nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{E} \\ e &= \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \end{aligned} \tag{2-4.3}$$



รูป 2-4.1

ในกรณีที่วัตถุอยู่ภายใต้ความดันสถิตสม่ำเสมอ มีค่าเป็น p ความเค้นแต่ละแนวแกนเท่ากับ $-p$ สมการ (2-4.3) เขียนได้เป็น

$$e = -\frac{3(1-2\nu)}{E}p \quad (2-4.4)$$

กำหนดให้ค่าคงที่

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2-4.5)$$

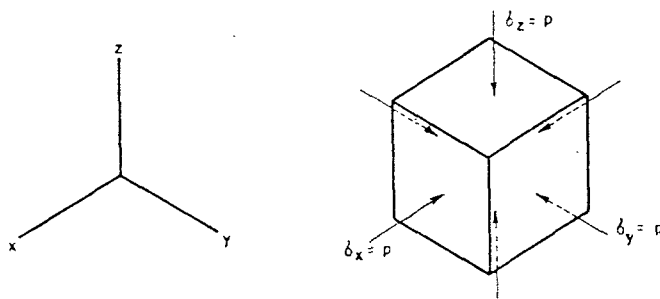
สมการ (2-4.4) เขียนใหม่ได้เป็น

$$e = -\frac{p}{K} \quad (2-4.6)$$

$$\frac{p}{e} = \frac{E}{3(1-2\nu)} = K \quad (2-4.7)$$

โดยนิยามเรียกค่าคงที่ K นี้เรียกว่า โมดูลัสการอัดตัวของวัสดุ (Modulus of Compression of Material) หรือ Volume Modulus of Elasticity หรือ Bulk Modulus of Elasticity หรือ Bulk Modulus มีหน่วยเช่นเดียวกับโมดูลัสความยืดหยุ่น (Modulus of Elasticity E) คือ N/mm^2

โดยทั่วไปค่า ν มีค่าเท่ากับ $1/3$ สำหรับวัสดุที่เป็นโลหะ ดังนั้น $K = E$ สำหรับวัสดุที่เป็นโลหะ



รูป 2-4.2

2-4.1 พลังงานความเครียดและการเปลี่ยนแปลงปริมาตร

การเปลี่ยนแปลงปริมาตรของอีลีเมนต์ทรงลูกบาศก์ที่แต่ละด้านยาว 1 หน่วย เมื่อถูกกระทำด้วยความเค้น 3 แกน จะหาได้ดังต่อไปนี้

สมมติให้ปริมาตรก่อนที่จะมีความเค้นขึ้นมีค่าเป็น 1 หน่วย ($v_0 = 1$) ดังนั้นหลังจากมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเนื่องจากความยาวของแต่ละด้านเปลี่ยนแปลงไป ปริมาตรจะเปลี่ยนไปเป็น

$$v = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3)$$

ตัดผลคูณของความเครียดซึ่งมีค่าน้อยมากทิ้งไป จะเหลือ

$$v = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

ปริมาตรที่เพิ่มขึ้นจะมีค่าเป็น

$$v - v_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

แทนค่า $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ และ ε_3 ในสมการ (2-1.4) จะได้

$$v - v_0 = \left[\frac{\sigma_1}{E} - v \left(\frac{\sigma_2}{E} + \frac{\sigma_3}{E} \right) \right] + \left[\frac{\sigma_2}{E} - v \left(\frac{\sigma_3}{E} + \frac{\sigma_1}{E} \right) \right] + \left[\frac{\sigma_3}{E} - v \left(\frac{\sigma_1}{E} + \frac{\sigma_2}{E} \right) \right]$$

หรือมีค่าเป็น

$$v - v_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{E} (1 - 2v) \quad (2-4.8)$$

จากสมการ (2-4.8) จะเห็นได้ว่า เมื่อ $v = 0.5$ อีลีเมนต์ภายใต้สถานะของความเค้นจะไม่มีการเปลี่ยนแปลงปริมาตรเกิดขึ้นเลย ปริมาตรที่เพิ่มขึ้นต่อปริมาตร 1 หน่วยจะมีค่า

$$\begin{aligned} \frac{v - v_0}{v_0} &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{E} (1 - 2v) \end{aligned} \quad (2-4.9)$$

ทั้งนี้เพราะว่า $v_0 = 1$

ในกรณีที่วัตถุถูกกระทำด้วย Hydrostatic Stress ซึ่งมีความเค้นเท่ากับ σ เกิดขึ้นทุกทิศทาง คือ $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ สมการ (2-4.9) จะเปลี่ยนไปเป็น

$$\frac{v - v_0}{v_0} = \frac{3(1 - 2v)\sigma}{E}$$

เมื่อ σ เป็นบวก $\frac{v - v_0}{v_0}$ ก็จะเป็นบวก และเมื่อ σ เป็นลบ $\frac{v - v_0}{v_0}$ ก็จะเป็นลบ สมการนี้จะเป็นจริงเมื่อ

$v = 1/2$ ดังนั้นค่าของ v สำหรับ Isotropic Material จะต้องไม่เกิน 0.5

ปริมาตร $\frac{3(1 - 2v)}{E} = \chi$ เรียกว่า Coefficient of Compressibility ของวัสดุ และส่วนกลับของมันคือ

$\frac{E}{3(1 - 2v)} = K$ เรียกว่า Bulk Modulus ของวัสดุ ซึ่งได้กล่าวถึงมาแล้วนั่นเอง

ในกรณีที่ต้องการหาพลังงานความเครียดต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร ในสถานะความเค้น 3 มิติ จะเริ่มพิจารณาจากพลังงานความเครียดต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรในสถานะความเค้นมิติเดียว ซึ่งจะหาได้จากสมการ

$$u = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{\sigma \varepsilon}{2}$$

ภายใต้สถานะความเค้นแบบ 3 มิติ ถ้ากำหนดให้ด้านของอีลีเมนต์มีค่าเท่ากันทุกด้านและความเค้นที่เกิดขึ้นบนอีลีเมนต์นี้เป็นความเค้นหลัก σ_1, σ_2 และ σ_3 ดังนั้นพลังงานความเครียดเนื่องจากความเค้นหลักทั้ง 3 นี้จะมีค่าเป็น

$$u = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \varepsilon_3}{2}$$

แทนค่า $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ และ ε_3 ด้วยสมการ (2-1.4) จะได้

$$u = \frac{\sigma_1}{2} \left[\frac{\sigma_1}{E} - \nu \left(\frac{\sigma_2}{E} + \frac{\sigma_3}{E} \right) \right] + \frac{\sigma_2}{2} \left[\frac{\sigma_2}{E} - \nu \left(\frac{\sigma_3}{E} + \frac{\sigma_1}{E} \right) \right] + \frac{\sigma_3}{2} \left[\frac{\sigma_3}{E} - \nu \left(\frac{\sigma_1}{E} + \frac{\sigma_2}{E} \right) \right]$$

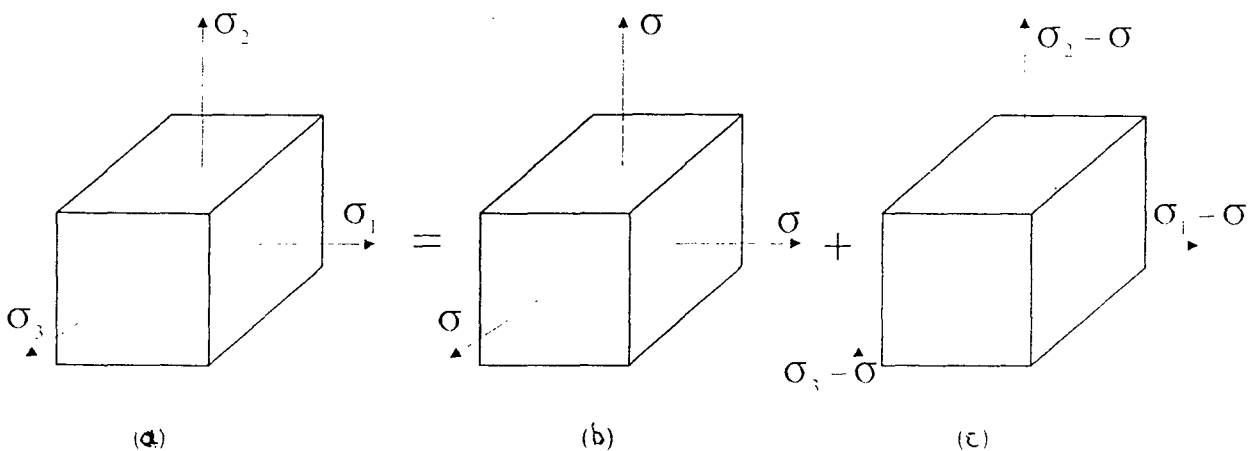
หรือ

$$u = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)) \quad (2-4.10)$$

ถ้าให้ $\sigma_3 = 0$ สมการ (2-4.10) จะเป็น

$$u = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2))$$

สมการนี้เป็นสมการสำหรับพลังงานความเครียดต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรภายใต้ความเค้นในสถานะความเค้นระนาบ



รูป 2-4.3

พลังงานความเครียดนี้สามารถพิจารณาแยกออกเป็น 2 ส่วนคือ พลังงานความเครียดส่วนหนึ่งซึ่งถูกซึมซับ (Absorbed) ไว้ในขณะที่เกิดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของอีลิเมนต์ทรงลูกบาศก์ เป็น Strain energy density ที่ใช้ในการเปลี่ยนปริมาตรของวัตถุยืดหยุ่นแต่ยังคงรักษารูปร่างเดิมเอาไว้ กับพลังงานความเครียดอีกส่วนหนึ่งซึ่งถูกซึมซับไว้ในขณะที่เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ซึ่งเรียกว่าพลังงานความเครียดเนื่องจากรูปร่างเปลี่ยนแปลง (Distortion Energy) ซึ่งเป็น Strain energy density ที่ใช้ในการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของวัตถุยืดหยุ่น แต่ค่าปริมาตรไม่เปลี่ยนแปลง ดังนั้นจากหลักการของวิธี Superposition พลังงานความเครียดจะเขียนได้เป็น

$$u = u_v + u_d$$

เมื่อ u_v คือพลังงานความเครียดที่ใช้ในการเปลี่ยนแปลง แต่ยังคงรักษารูปร่างเดิมไว้ได้ และ u_d คือพลังงานความเครียดที่ใช้ในการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง โดยปริมาตรไม่เปลี่ยนแปลง เรียกว่า Distortion Energy กำหนดให้

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

และให้ความเค้น σ นี้กระทำในทิศทางหลักร่วมกับ σ_1, σ_2 และ σ_3 ดังแสดงไว้ในรูป 2-4.3 ซึ่งจากรูป 2-4.3 นี้จะเป็นจริงตามหลักการของวิธี Superposition จากรูป 2-4.3b ความเค้น σ ที่กระทำกับอีลิเมนต์จะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างเพียงอย่างเดียว แทนค่า σ_1, σ_2 และ σ_3 ในสมการ (2-4.10) ด้วย σ จะได้พลังงานความเครียดที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงปริมาตรเพียงอย่างเดียวคือ

$$u_v = \frac{1}{2E} (3\sigma^2 - 2\nu(3\sigma^2)) = \frac{3\sigma^2}{2E} (1 - 2\nu) \quad (2-4.11)$$

ถ้าแทน $\sigma^2 = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2$ ลงในสมการ (2-4.11) แล้วจัดรูปร่างสมการให้ง่ายขึ้นจะได้

$$u_v = \frac{1 - 2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (2-4.12)$$

หรือ

$$u_v = \frac{1 - 2\nu}{6E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1))$$

ดังนั้นพลังงานความเครียดที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง (Distortion) เพียงอย่างเดียว จะหาได้โดยลบสมการ (2-4.10) ด้วยสมการ (2-4.12) คือ

$$\begin{aligned} u_d &= u - u_v \\ &= \frac{1 + \nu}{6E} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2) \end{aligned} \quad (2-4.13)$$

จะสังเกตได้ว่า $u_d = 0$ เมื่อ $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

ตัวอย่างที่ 2-4.1 จงหาปริมาตรที่เปลี่ยนไป ΔV ของแท่งเหล็กทรงสี่เหลี่ยม เมื่อแท่งเหล็กอยู่ภายใต้ความดันสถิต $P = 180 \text{ MPa}$ ให้ค่า $E = 200 \text{ GPa}$ และ $\nu = 0.29$

วิธีทำ จากสมการ (2-4.5) หาคำนีขนาดของแท่งเหล็ก

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} = \frac{200}{3(1 - 0.58)} = 158.7 \text{ GPa}$$

จากสมการ (2-4.6) ได้

$$e = -\frac{P}{K} = -\frac{180 \text{ MPa}}{158.7 \text{ GPa}} = -1.134 \times 10^{-3}$$

เนื่องจากปริมาตร V ของแท่งเหล็กขณะไม่มีความเค้นคือ

$$V = (80 \text{ mm})(40 \text{ mm})(60 \text{ mm}) = 192 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

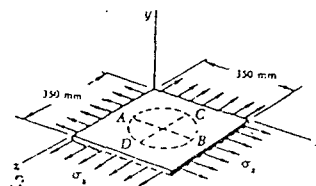
และเนื่องจาก e แทนปริมาตรที่เปลี่ยนไปต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร $e = \frac{\Delta V}{V}$ ดังนั้นจะได้

$$\Delta V = eV = (-1.134 \times 10^{-3})(192 \times 10^3 \text{ mm}^3)$$

$$\Delta V = -218 \text{ mm}^3$$

ตัวอย่างที่ 2-4.2 เขียนวงกลมขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง $d = 200 \text{ mm}$ ลงบนแผ่นอลูมิเนียมที่ไม่มีความเค้นหนา $t = 18 \text{ mm}$ ต่อมาเมื่อแรงกระทำในระนาบของแผ่นอลูมิเนียมทำให้เกิดความเค้นตั้งฉาก $\sigma_x = 85 \text{ MPa}$ และ $\sigma_y = 150 \text{ MPa}$ กำหนดให้ $E = 70 \text{ GPa}$ และ $\nu = 1/3$ จงหา

- ความยาวของเส้นผ่าศูนย์กลาง AD ที่เปลี่ยนไป
- ความยาวของเส้นผ่าศูนย์กลาง CD ที่เปลี่ยนไป
- ความหนาของแผ่นอลูมิเนียมที่เปลี่ยนไป
- ปริมาตรของแผ่นอลูมิเนียมที่เปลี่ยนไป



รูป E2-4.2

วิธีทำ จะพบว่า $\sigma_y = 0$ ใช้สมการ (2-2.2), (2-2.3) และ (2-2.4) หาคความเครียดแต่ละแนวแกนได้

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ &= \frac{1}{70\text{GPa}} \left[(85\text{MPa}) - 0 - \frac{1}{3}(150\text{MPa}) \right] = +0.5 \times 10^{-3} \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ &= \frac{1}{70\text{GPa}} \left[-\frac{1}{3}(85\text{MPa}) + 0 - \frac{1}{3}(150\text{MPa}) \right] = -1.119 \times 10^{-3} \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \\ &= \frac{1}{70\text{GPa}} \left[-\frac{1}{3}(85\text{MPa}) - 0 + (150\text{MPa}) \right] = +1.738 \times 10^{-3}\end{aligned}$$

ก) หาเส้นผ่าศูนย์กลาง AD ที่เปลี่ยนไป

$$\begin{aligned}\delta_{BA} &= \varepsilon_x d = (+0.5 \times 10^{-3})(200\text{mm}) \\ &= +100\mu\text{m}\end{aligned}$$

ข) หาเส้นผ่าศูนย์กลาง CD ที่เปลี่ยนไป

$$\begin{aligned}\delta_{CD} &= \varepsilon_z d = (+1.738 \times 10^{-3})(200\text{mm}) \\ &= +348\mu\text{m}\end{aligned}$$

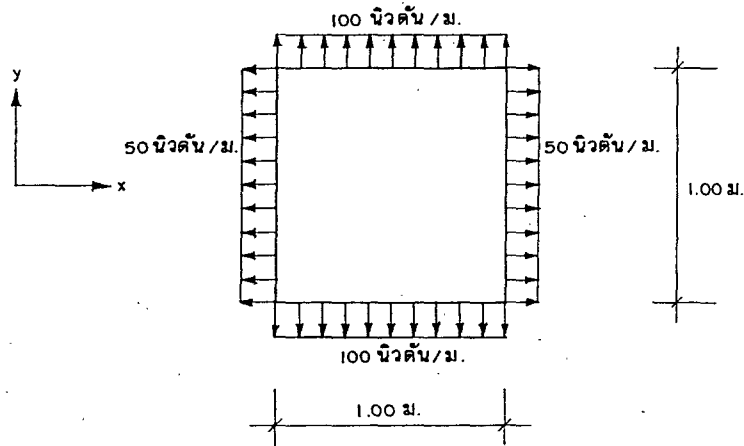
ค) หาคความหนาที่เปลี่ยนไป; ความหนาเดิม $t = 18\text{ mm}$

$$\begin{aligned}\delta_t &= \varepsilon_y t = (-1.119 \times 10^{-3})(18\text{mm}) \\ &= -20.1\mu\text{m}\end{aligned}$$

ช) หาปริมาตรที่เปลี่ยนไป: ใช้สมการ (2-4.2) ได้

$$\begin{aligned}e &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (+0.5 - 1.119 + 1.738) \times 10^{-3} \\ &= +1.119 \times 10^{-3} \\ \Delta V &= eV = +1.119 \times 10^{-3} [(0.35\text{m})(0.35\text{m})(0.018\text{m})] \\ &= +2.47 \times 10^{-6} \text{ m}^3 = +2470 \text{ mm}^3\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2-4.3 แผ่นยางขนาด $1.00\text{ m} \times 1.00\text{ m}$ หนา 5 มม. มีแรงดึงกระทำในแนวนอนและแนวตั้งเท่ากับ 50 และ 100 นิวตัน ต่อกเมตร. จงคำนวณหาขนาดแผ่นยางหลังจากถูกแรงดังกล่าวกระทำ กำหนดให้ค่า E เท่ากับ 4 MPa และ $\nu = 0.4$ ตามลำดับ



รูป E2-4.3

วิธีทำ

1. คำนวณหา $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{50 \text{ N/m}}{5 \text{ mm}} \times \frac{1000 \text{ mm}}{1 \text{ m}} = 10\,000 \text{ N/m}^2 \\ &= 10 \text{ kN/m}^2\end{aligned}$$

$$\sigma_y = \frac{100}{5} \times 1000 = 20\,000 \text{ N/m}^2 = 20 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = 0$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{4 \times 1000} [10 - 0.4(20 + 0)] = 0.0005$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{4 \times 1000} [20 - 0.4(10 + 0)] = 0.004$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{4 \times 1000} [0 - 0.4(10 + 20)] = -0.003$$

2. คำนวณหาขนาดของแผ่นยางหลังจากถูกแรงกระทำ

$$\text{ด้านยาว} = 1.00 \text{ ม.} + (0.0005)(1) = 1.0005 \text{ ม.}$$

$$\text{ด้านกว้าง} = 1.00 \text{ ม.} + (0.004)(1) = 1.004 \text{ ม.}$$

$$\text{ด้านหนา} = 5 \text{ ม.} + (-0.003)(5) = 4.985 \text{ ม.}$$

ตัวอย่างที่ 2-4.4 วัสดุชิ้นหนึ่งขนาด 100 mm x 100 mm x 100 mm ถูกแรงกระทำซึ่งทำให้เกิดค่า

$\sigma_x = -10 \text{ MPa}$, $\sigma_y = -20 \text{ MPa}$, $\sigma_z = 40 \text{ MPa}$ จงคำนวณหาค่า Volumetric Strain และขนาดรูปร่างของวัสดุหลังจากถูกแรงกระทำ กำหนดให้ค่า $E = 2000 \text{ MPa}$ และ $\nu = 0.20$

วิธีทำ

1. คำนวณหาค่า Volumetric Strain

ค่า Volumetric Strain = Dilatation = e

จากสมการ (2-4.3)

$$\begin{aligned} e &= \frac{(1 - 2\nu)}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\ &= \frac{(1 - (2 \times 0.2))(-10 - 20 + 40)}{2000} \\ &= 0.003 \text{ mm}^3/\text{mm}^3 \end{aligned}$$

2. คำนวณหาขนาดรูปร่างใหม่หลังจากถูกแรงกระทำ

จากสมการ

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_x &= \frac{1}{2000} [-10 - 0.2(-20 + 40)] = -0.007 \text{ mm/mm} \\ \epsilon_y &= \frac{1}{2000} [-20 - 0.2(-10 + 40)] = -0.013 \text{ mm/mm} \\ \epsilon_z &= \frac{1}{2000} [40 - 0.2(-10 - 20)] = 0.023 \text{ mm/mm} \end{aligned}$$

จะได้รูปร่างใหม่คือ

$$x = 100 - (0.007)(100) = 99.30 \text{ มม.}$$

$$y = 100 - (0.013)(100) = 98.70 \text{ มม.}$$

$$z = 100 + 0.023(100) = 102.30 \text{ มม.}$$

สัปดาห์ที่ 8

หัวข้อเรื่อง ผลจากการวัดความเครียด, วงกลมความเครียดของโมร์

(3 ชั่วโมง)

ความคิดรวบยอด

1. เครื่องมือที่ใช้ในการวัดค่าของความเครียดคือ strain gage ซึ่งเมื่อนำ strain gage หลายตัวมาวางเรียงทำมุมกันเป็นมุมต่างเป็นชั้นเดียวกัน จะเรียกว่า strain roset
2. strain gage ทำงานโดยใช้หลักการที่ว่า เมื่อความยาวของวัสดุเปลี่ยนแปลงไป จะทำให้ความต้านทานไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงไปด้วย ดังนั้นเมื่อวัดแรงดันไฟฟ้าในสถานะที่ไม่มีภาระกระทำ กับมีภาระกระทำ ก็จะได้ค่าที่ต่างกัน
3. การจัดเรียงมุมของ strain roset เป็นมุมต่างๆก็เพื่อให้ได้ข้อมูลที่สามารถนำไปหาค่าของความเครียดหลักได้ ซึ่งอาจจะใช้การคำนวณหรือใช้วงกลมของโมร์หากได้

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. หาคความเค้นจากความเครียดโดยใช้ strain roset ได้
2. หาคความเครียดบนระนาบโดยใช้วงกลมของโมร์ได้
3. หาคความเครียดสามมิติโดยใช้วงกลมของโมร์ได้

สังเขปเนื้อหา

หน่วยที่ 5. พื้นฐานของความเครียด (ต่อ)

- การหาความเค้นและความเครียดโดยการทดลอง
-strain roset
- วงกลมของโมร์สำหรับการวัดความเครียด
- การวัดความเครียดสามมิติ

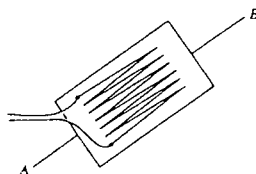
2-5 การหาความเค้นและความเครียดโดยการทดลอง

วัสดุที่ถูกการทำด้วยสถานะความเค้นบนระนาบมักจะหาความเค้นที่เกิดขึ้นโดยการทดลอง เนื่องจากความเค้นไม่สามารถหาขนาดได้โดยตรงจึงต้องหาความเครียดในขณะที่ถูกแรงภายนอกกระทำ แล้วนำความเครียดที่วัดได้มาเปลี่ยนเป็นความเป็นความเค้น

2-5.1 การวัดความเครียด

การหาความเครียดตั้งฉากบนผิวชิ้นส่วน โครงสร้างหรือเครื่องจักรในทิศทางใดๆที่ต้องการนั้นสามารถทำได้โดยการกำหนดจุด A และ B ลงบนเส้นตรงที่ลากไว้ในทิศทางที่ต้องการวัดความเครียด และวัดความยาวของเส้นตรง AB ก่อนที่ชิ้นส่วนนั้นจะรับภาระ และขณะที่รับภาระ ถ้า L เป็นความยาวเดิม AB และ δ เป็นความยาวที่เปลี่ยนไป ความเครียดตั้งฉากตามแนว AB คือ $\epsilon_{AB} = \delta / L$

มีวิธีที่วัดความเครียดอีกวิธีหนึ่งที่สะดวก และเที่ยงตรงกว่าการวัดด้วยวิธีขั้นต้น คือวัดด้วยเครื่องวัดความเครียดแบบอิเล็กทรอนิกส์ เรียกว่า variable resistance strain gage ซึ่งประกอบด้วยแผ่นโลหะหรือเส้นลวดบางๆยาวๆ จัดเรียงกันดังรูป 2-5.1 โดยประสานติดกับแผ่นกระดาษสองแผ่น เมื่อต้องการวัดความเครียด ของวัสดุคงกล่าวข้างต้นตามแนว AB ก็นำเครื่องวัดไปประสานติดกับวัสดุนั้นโดยให้รอยพับของลวด หรือแนวยาวของลวดในแต่ละพับวางขนานกับ ขณะที่วัสดุยืดตัวความยาวของลวดจะเพิ่มขึ้นโดยเส้นผ่านศูนย์กลางของลวดลดลง เป็นเหตุให้ความต้านทานไฟฟ้าของเครื่องวัด เพิ่มขึ้น วัดกระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านเครื่องวัดที่เทียบค่ากระแสไฟฟ้ากับความเครียดไว้ก็จะได้ความเครียดตั้งฉาก ϵ_{AB} อย่างเที่ยงตรง และต่อเนื่องในขณะที่รับภาระเพิ่มขึ้นเรื่อย



รูป 2-5.1

2-5.2 Strain Rosette

จะสังเกตได้ว่าองค์ประกอบความเครียด ϵ_x , ϵ_y และ γ_{xy} ที่จุดใดๆ ที่กำหนดได้นั้นสามารถหาได้จากการวัดความเครียดตามแนวเส้นตรงใดๆสามเส้นที่ผ่านจุดนั้น ดังรูป 2-5.2 ซึ่งเส้นตรงแต่ละเส้นทำมุมกับแกน x เป็นมุม θ_a , θ_b และ θ_c ได้ความเครียด ϵ_a , ϵ_b และ ϵ_c ตามลำดับแล้วแทนค่าในสมการ (1) ในหัวข้อ 2-1.2 ได้สมการใหม่สามสมการคือ

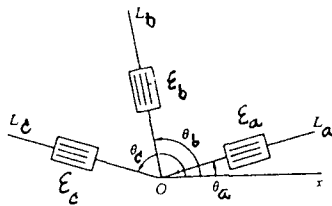
$$\begin{aligned}
 \epsilon_a &= \epsilon_x \cos^2 \theta_a + \epsilon_y \sin^2 \theta_a + \gamma_{xy} \sin \theta_a \cos \theta_a \\
 \epsilon_b &= \epsilon_x \cos^2 \theta_b + \epsilon_y \sin^2 \theta_b + \gamma_{xy} \sin \theta_b \cos \theta_b \\
 \epsilon_c &= \epsilon_x \cos^2 \theta_c + \epsilon_y \sin^2 \theta_c + \gamma_{xy} \sin \theta_c \cos \theta_c
 \end{aligned}
 \quad (2-5.1)$$

แก้สมการทั้งสามก็จะได้ ϵ_x , ϵ_y และ γ_{xy}

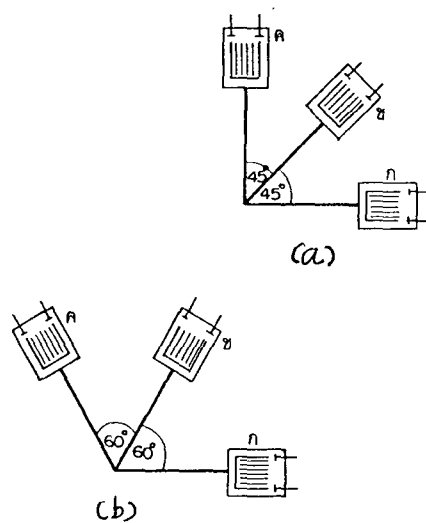
การหาความเครียดตั้งฉากสามารถใช้เครื่องมือวัดแบบระบบ Electrical Resistance Strain Gage โดยมีสายไฟและแผ่นโลหะบางๆติดกาวกับวัสดุที่ทำการวัด โดยมีแผ่นโลหะบางๆสามตำแหน่งแสดงไว้ดังรูป 2-5.3 การจัดเรียงเครื่องวัดความเครียด (Strain Gages) ในลักษณะที่วัดความเครียดสามเทอม ϵ_a , ϵ_b และ ϵ_c นั้นเรียกว่า Stain Rosette ซึ่งนิยมใช้แบบ 45° Strain Rosette รูป 2-5.3a และแบบ 60° Strain Rosette รูป 2-5.3b ในการวัดค่าความเครียดบนผิวชิ้นส่วนวัสดุจะไม่มีเกิดการเกิดความเค้นตั้งฉากกับผิวนี้ แต่จะมีความเค้นตั้งฉากหลักเกิดขึ้น ซึ่งไม่มีผลต่อการวัดความเครียดบนระนาบ ทำให้การหาความเครียดด้วยวิธีนี้เป็นวิธีที่ละเอียดถูกต้องที่สุด

จากสมการสามสมการข้างต้นสามารถแก้สมการหาค่า ϵ_x , ϵ_y และ γ_{xy} ได้ถ้ามุม θ เท่ากับ 45° หรือแบบ 45° Strain Rosette โดยแทนค่ามุม $\theta = 45^\circ$ ลงไปในสมการ (2-5.1) จะได้

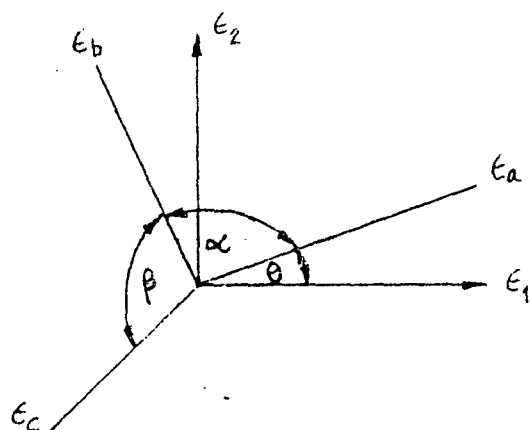
$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= \epsilon_a \\
 \epsilon_y &= \epsilon_b \\
 \gamma_{xy} &= 2\epsilon_c - (\epsilon_a + \epsilon_b)
 \end{aligned}
 \quad (2-5.2)$$



รูป 2-5.2



รูป 2-5.3



รูป 2-5.4

สำหรับแบบ 60° Strain Rosette โดยแทนค่ามุม $\theta = 60^\circ$ ลงไปในสมการ (2-5.1) จะได้

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \epsilon_a \\ \epsilon_y &= \left(\frac{2\epsilon_b + 2\epsilon_c - \epsilon_a}{3} \right) \\ \gamma_{xy} &= 2 \left(\frac{\epsilon_b - \epsilon_c}{\sqrt{3}} \right)\end{aligned}\tag{2-5.3}$$

ความเครียดของจุดๆหนึ่งในวัสดุสำหรับสองมิติ (Plane strain) หาได้ถ้ารู้ ϵ_x, ϵ_y และ γ_{xy} สำหรับ ϵ_x, ϵ_y อาจหาได้เช่น วัดโดย strain gage แต่ γ_{xy} วัดได้ยาก วิธีที่ง่ายกว่าก็คือ วัด strain ในสามทิศทาง คือ ϵ_a, ϵ_b และ ϵ_c โดยใช้ strain rosette ดังในรูป 2-5.4 และสมมติว่า ϵ_1 และ ϵ_2 เป็นความเครียดหลัก

จากสมการ

$$\epsilon_a = \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y) + \frac{1}{2}(\epsilon_x - \epsilon_y) \cos 2\theta - \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin 2\theta$$

และ γ ในทิศทางของความเครียดหลักต้องเป็นศูนย์ จะได้

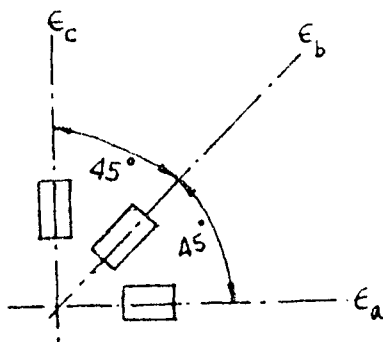
$$\epsilon_a = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) \cos 2\theta$$

$$\epsilon_b = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) \cos 2(\theta + \alpha) \quad (2-5.4)$$

$$\epsilon_c = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) \cos 2(\theta + \alpha + \beta)$$

ในทางปฏิบัติ สามารถทำได้โดยติด strain gage 3 ตัวในทิศทางที่กำหนด ดังนั้นจะรู้มุม α กับ β และค่า $\epsilon_a, \epsilon_b, \epsilon_c$ จะวัดได้จาก strain gage ด้วยเหตุนี้ สิ่งที่ไม่ทราบค่า(unknown)จะมีอยู่ 3 ประการ คือ ϵ_1, ϵ_2 และ θ ซึ่งจะหาได้จากสมการ (2-5.4) ในการจัด stain gage ทั่วไป จัดได้ดังนี้

45° Strain Rosette $\alpha = \beta = 45^\circ$ สมการ (2-5.4) จะให้ผลดังนี้



รูป 2-5.5

$$\epsilon_a = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) \cos 2\theta$$

$$\epsilon_b = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) - \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) \sin 2\theta \quad (2-5.5)$$

$$\epsilon_c = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) - \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) \cos 2\theta$$

ถ้าจัด θ จากสมการ (2-5.5) ถ้า ϵ_1 และ ϵ_2 หาได้จากกราฟของสมการ

$$\epsilon^2 - (\epsilon_a + \epsilon_c)\epsilon + [\epsilon_a\epsilon_c - \frac{1}{4}(2\epsilon_b - \epsilon_a - \epsilon_c)^2] = 0 \quad (2-5.6)$$

ทิศทางการได้จากสมการ

$$\tan 2\theta = \frac{2\epsilon_b - \epsilon_a - \epsilon_c}{\epsilon_c - \epsilon_a} \quad (2-5.7)$$

θ คือมุมระหว่าง ϵ_1 และ ϵ_2 วัดตามเข็มนาฬิกาจากทิศของ ϵ_a

120° Strain Rosette $\alpha = \beta = 120^\circ$ สมการ (2-5.4) จะให้ค่าดังนี้

$$\begin{aligned} \epsilon_a &= \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) + \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2)\cos 2\theta \\ \epsilon_b &= \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) - \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2)\left(\frac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta\right) \end{aligned} \quad (2-5.8)$$

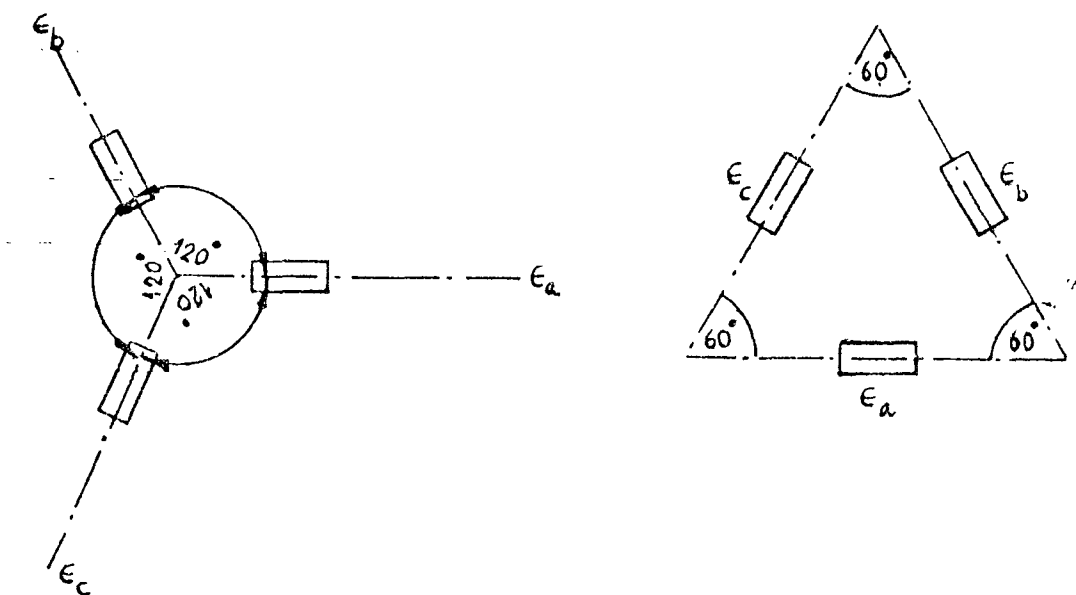
$$\epsilon_c = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) - \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2)\left(\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta\right)$$

ความเครียดหลัก ϵ_1 และ ϵ_2 หาได้จากรากของสมการ

$$3\epsilon^2 - 2(\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c)\epsilon - (\epsilon_a^2 + \epsilon_b^2 + \epsilon_c^2 - 2\epsilon_a\epsilon_b - 2\epsilon_b\epsilon_c - 2\epsilon_c\epsilon_a) = 0 \quad (2-5.9)$$

ทิศทางการได้จากสมการ

$$\tan 2\theta = \frac{\sqrt{3}(\epsilon_b - \epsilon_c)}{2\epsilon_a - \epsilon_b - \epsilon_c}$$



รูป 2-5.6

เมื่อได้ ϵ_1 และ ϵ_2 แล้ว ความเค้นหลักจะหาได้จาก

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E}$$

และ

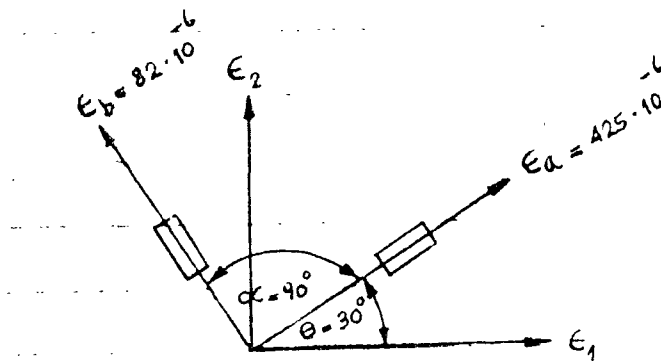
$$\epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E} \quad (2-5.10)$$

ซึ่งให้ค่า

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_2 + \nu \epsilon_1) \quad (2-5.11)$$

ตัวอย่าง 2-5.1 โดยการใช้อยู่ strain gages วัดค่าความเครียดในทิศทางที่ทำมุม 30° กับทิศทางของความเค้นหลัก พบว่าความเครียดมีค่าเป็น $425 \mu\epsilon$ และ $82 \mu\epsilon$ ตามลำดับ เป็นความเครียดดึงทั้งคู่ จงหาความเค้นตั้งฉากในทิศทางของการวัดความเครียด และความเค้นหลัก กำหนดให้ $E=200 \text{ kN/mm}^2$ และ $\nu=0.3$



รูป E2-5.1

วิธีทำ ความเค้นตั้งฉาก σ_a และ σ_b

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_a + \nu \epsilon_b) \\ &= \frac{200 \times 10^3}{1 - (0.3)^2} [425 \times 10^{-6} + 0.3(82 \times 10^{-6})] \\ &= 98.8 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

ตอบ

$$\sigma_b = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_b + \nu \epsilon_a)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{200 \times 10^3}{1 - (0.3)^2} [82 \times 10^{-6} + 0.3(425 \times 10^{-6})] \\
 &= 46 \text{ N/mm}^2
 \end{aligned}$$

ตอบ

ความเครียดหลัก

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos 2\theta \quad (1)$$

$$\varepsilon_b = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin 2(\theta + \alpha) \quad (2)$$

ลบสมการ(1) ด้วยสมการ(2)

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_a - \varepsilon_b &= \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2}[\cos 2\theta - \cos 2(\theta + \alpha)] \\
 425 \times 10^{-6} - 82 \times 10^{-6} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2}[\cos 60 - \cos 240] \\
 \varepsilon_1 - \varepsilon_2 &= 686 \times 10^{-6} \\
 \varepsilon_1 &= \varepsilon_2 + 686 \times 10^{-6} \quad (3)
 \end{aligned}$$

แทนสมการ (3) ลงในสมการ (1)

$$425 \times 10^{-6} = \frac{1}{2}(\varepsilon_2 + 686 \times 10^{-6} + \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_2 + 686 \times 10^{-6} - \varepsilon_2) \cos 60^\circ$$

$$\varepsilon_2 = -89.5 \text{ } \mu\varepsilon \quad \text{ตอบ}$$

และ

$$\varepsilon_1 = 596.5 \text{ } \mu\varepsilon \quad \text{ตอบ}$$

ความเค้นหลัก

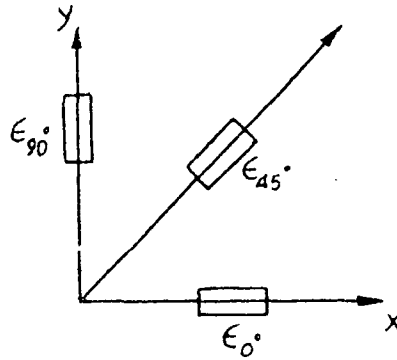
$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) \\
 &= \frac{200 \times 10^3}{1 - (0.3)^2} [596.5 \times 10^{-6} + 0.3(-89.5 \times 10^{-6})] \\
 &= 125.2 \text{ N/mm}^2 \quad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_2 &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) \\
 &= \frac{200 \times 10^3}{1 - (0.3)^2} [-89.5 \times 10^{-6} + 0.3(596.5 \times 10^{-6})] \\
 &= 19.6 \text{ N/mm}^2
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2-5.2 ในระบบความเครียดสองมิติอันหนึ่ง อ่านค่าความเครียดจาก 45° strain

$$\varepsilon_0 = 0.4 \times 10^{-3}, \varepsilon_{45} = 0.4 \times 10^{-3}, \varepsilon_{90} = 0.1 \times 10^{-3}$$

จงหาความเครียดหลักและความเค้นหลัก ถ้า $E = 200 \text{ kN/mm}^2$ และ $\nu = 0.3$



รูป E2-5.2

วิธีทำ จาก

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 2\theta - \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin 2\theta$$

โจทย์กำหนด

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{45^\circ} = 0.4 \times 10^{-3}, \varepsilon_x = \varepsilon_0 = 0.4 \times 10^{-3}, \varepsilon_y = \varepsilon_{90^\circ} = 0.1 \times 10^{-3}$$

แทนค่าในสูตรจะได้

$$0.4 \times 10^{-3} = \frac{1}{2}(0.4 \times 10^{-3} + 0.1 \times 10^{-3}) + 0 + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \times 1$$

$$0.4 \times 10^{-3} = 0.25 \times 10^{-3} - \frac{1}{2}\gamma_{xy} \times 1$$

$$\gamma_{xy} = -0.3 \times 10^{-3}$$

ความเครียดหลัก

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\gamma_{xy})^2}$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2}(0.4 \times 10^{-3} + 0.1 \times 10^{-3}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(0.4 \times 10^{-3} - 0.1 \times 10^{-3})^2 + (-0.3 \times 10^{-3})^2}$$

$$\varepsilon_{1,2} = 0.25 \times 10^{-3} \pm \frac{1}{2}\sqrt{0.18 \times 10^{-6}}$$

$$\varepsilon_{1,2} = 0.25 \times 10^{-3} \pm 0.2121 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_1 = 0.25 \times 10^{-3} + 0.2121 \times 10^{-3} = 0.4621 \times 10^{-3}$$

ตอบ

$$\varepsilon_2 = 0.25 \times 10^{-3} - 0.2121 \times 10^{-3} = 0.0379 \times 10^{-3} \quad \text{ตอบ}$$

ความเค้นหลัก

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) \\ &= \frac{200 \times 10^3}{1 - (0.3)^2} [0.4621 \times 10^{-3} + 0.3(0.0379 \times 10^{-3})] \\ &= 104 \text{ N/mm}^2 \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) \\ &= \frac{200 \times 10^3}{1 - (0.3)^2} [0.0379 \times 10^{-3} + 0.3(0.4621 \times 10^{-3})] \\ &= 38.8 \text{ N/mm}^2 \quad \text{ตอบ} \end{aligned}$$

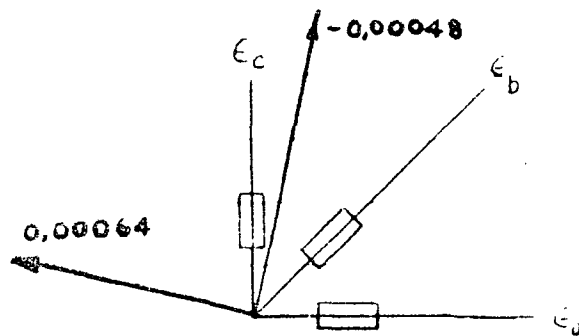
ตัวอย่าง 2-5.3 strain rosette ตัวหนึ่งถูกติดตั้งกับผิวของแผ่นโลหะที่อยู่ภายใต้ความเค้น ทำให้อ่านค่าความเครียดได้ดังนี้:

strain gage หมายเลข 1 ทำมุม 0° อ่านได้ $+0.000592$,

หมายเลข 2 ทำมุม 45° อ่านได้ $+0.000308$,

หมายเลข 3 ทำมุม 90° อ่านได้ -0.000432 ,

มุมเหล่านี้วัดทวนเข็มนาฬิกาจาก strain gage หมายเลข 1. จงหาขนาดของความเครียดหลักและทิศทางของความเครียดหลัก เทียบกับแนวแกนของ strain gage หมายเลข 1. และจงหาความเค้นหลักถ้า $E = 200 \text{ kN/mm}^2$ และ $\nu = 1/3$



รูป E2-5.3

วิธีทำ การจัด strain gage ตามโจทย์เป็นการจัดแบบ 45° strain rosette ดังนั้นจาก

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos 2\theta$$

$$\varepsilon_b = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin 2\theta$$

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos 2\theta$$

แทนค่าความเครียดที่อ่านได้แต่ละจุด จะได้

$$0.000592 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos 2\theta \quad (1)$$

$$0.000308 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin 2\theta \quad (2)$$

$$-0.000432 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos 2\theta \quad (3)$$

สมการ(1) บวกกับสมการ(3) ได้

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0.00016 \quad (4)$$

สมการ(1) ลบด้วยสมการ(3) ได้

$$\begin{aligned} \cos 2\theta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) &= 0.001024 \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_2 &= \frac{0.001024}{\cos 2\theta} \end{aligned} \quad (5)$$

แทนค่าสมการ (4) และ (5) ลงใน (2) จะได้

$$\begin{aligned} 0.000308 &= \frac{1}{2}(0.00016) + \frac{1}{2}\left(\frac{0.001024}{\cos 2\theta}\right) \sin 2\theta \\ \tan 2\theta &= \frac{0.00008 - 0.000308}{0.000512} = -0.4453125 \end{aligned}$$

$$\tan 2\theta = \tan 156^\circ$$

$$2\theta = 156^\circ$$

$$\theta = 78^\circ$$

ตอบ

แทน $\theta = 78^\circ$ ลงใน(5)

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 &= \frac{0.001024}{\cos 156^\circ} \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_2 &= -0.00112 \end{aligned} \quad (6)$$

ลบสมการ(4)ด้วยสมการ(6) จะได้

$$\varepsilon_2 = 0.00064$$

ตอบ

$$\varepsilon_1 = -0.00048$$

ตอบ

หาความเค้นหลัก

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2)$$

$$= \frac{200 \times 10^3}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \left[-0.00048 + \frac{1}{3} (0.00064) \right]$$

$$= -60 \text{ N/mm}^2$$

ตอบ

$$\sigma_2 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_2 + \nu \epsilon_1)$$

$$= \frac{200 \times 10^3}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \left[0.00064 + \frac{1}{3} (-0.00048) \right]$$

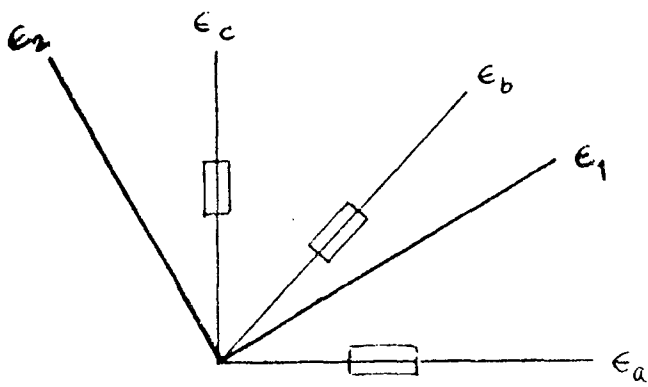
$$= 108 \text{ N/mm}^2$$

ตอบ

ตัวอย่าง 2-5.4 strain rosette ชิ้นหนึ่งถูกติดตั้งอยู่ที่ผิวของชิ้นส่วนโครงสร้าง เมื่อชิ้นส่วนโครงสร้างรับภาระ อ่านค่าความเครียดที่เกิดขึ้นได้ดังนี้ :

Gage หมายเลขที่	ทิศทางเทียบกับ gage หมายเลขที่ 1	ความเครียด
1	0°	+ 425 × 10 ⁻⁶
2	45°	+ 542 × 10 ⁻⁶
3	90°	+ 82 × 10 ⁻⁶

ถ้า E = 200 kN/mm² และ ν = 0.3 จงหาขนาดของความเค้นหลักและทิศทางของความเค้นหลัก เทียบกับแนวแกนของ gage หมายเลข 1



รูป E2-5.4

วิธีทำ เนื่องจากเป็น 45° Strain Rosette ดังนั้น

$$425 \times 10^{-6} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos 2\theta \quad (1)$$

$$542 \times 10^{-6} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin 2\theta \quad (2)$$

$$82 \times 10^{-6} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos 2\theta \quad (3)$$

สมการ(1)บวกกับสมการ(3)ได้

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 507 \times 10^{-6} \quad (4)$$

ลบสมการ(1)ด้วยสมการ(3)ได้

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{343 \times 10^{-6}}{\cos 2\theta} \quad (5)$$

แทนค่าสมการ (4)และ(5) ลงใน(2)

$$542 \times 10^{-6} = \frac{1}{2}(507 \times 10^{-6}) + \frac{1}{2}\left(\frac{343 \times 10^{-6}}{\cos 2\theta}\right) \sin 2\theta$$

$$\tan 2\theta = \tan 59^\circ 16'$$

$$\theta = 29^\circ 38'$$

จากสมการ (5)

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{343 \cdot 10^{-6}}{\cos 59^\circ 16'} = 672.549 \times 10^{-6} \quad (6)$$

จากสมการ (4)และ(6)

$$\varepsilon_1 = 589.7745 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_2 = -82.7745 \cdot 10^{-6}$$

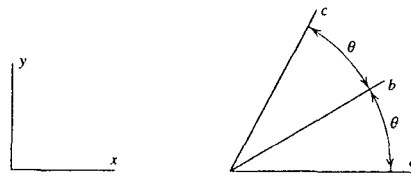
ความเค้นหลัก

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) \\ &= \frac{200 \times 10^3}{1 - (0.3)^2} [589.7745 \times 10^{-6} + 0.3(-82.7745 \times 10^{-6})] \\ &= 124 \text{ N/mm}^2 \end{aligned} \quad \text{ตอบ}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) \\ &= \frac{200 \times 10^3 \text{ MN} / \text{m}^2}{1 - (0.3)^2} [-82.7745 \times 10^{-6} + 0.3(589.7745 \times 10^{-6})] \\ &= 20.8 \text{ N/mm}^2 \end{aligned} \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่าง 2-5.5 strain rosette ชิ้นหนึ่งถูกติดอยู่บนผิวอิสระของชิ้นส่วน ทำมุม θ ดังแสดงในรูป E2-5.5 เมื่อชิ้นส่วนเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างไปแล้ว ความเครียดตั้งฉากที่อ่านได้จาก gage a, b, c คือ $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$ ตามลำดับ

- (1) จงพิสูจน์หาสมการสำหรับหาค่าของความเครียด $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ ในเทอมของ $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$ และ θ
- (2) จงหาสมการสำหรับ delta rosette ($\theta = 60^\circ$) และ rectangular rosette ($\theta = 45^\circ$) จากสมการข้างต้น



รูป E2-5.5

วิธีทำ (1) direction cosine ของ arms a, b, c ตามลำดับ คือ

$$(l_a, m_a, n_a) = (1, 0, 0), (l_b, m_b, n_b) = (\cos \theta, \sin \theta, 0), (l_c, m_c, n_c) = (\cos 2\theta, \sin 2\theta, 0)$$

ความเครียดตั้งฉากของอีลีเมนต์เส้นในทิศทาง (l, m, n) จะหาได้จากสมการ (2-5.1) ดังนั้น จากสมการ (2-5.1) ความเครียดตั้งฉากของ arms a, b, c คือ

$$\begin{aligned}\varepsilon_a &= \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_b &= \varepsilon_{xx} (\cos^2 \theta) + \varepsilon_{yy} (\sin^2 \theta) + 2\varepsilon_{xy} (\cos \theta)(\sin \theta) \\ \varepsilon_c &= \varepsilon_{xx} (\cos^2 2\theta) + \varepsilon_{yy} (\sin^2 2\theta) + 2\varepsilon_{xy} (\cos 2\theta)(\sin 2\theta)\end{aligned}\quad (1)$$

สมการ (1) ประกอบด้วย 3 สมการซึ่งจะแก้เพื่อหาค่าของ $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ ได้ คือ

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \varepsilon_a \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{(\varepsilon_a - 2\varepsilon_b) \sin 4\theta + 2\varepsilon_c \sin 2\theta}{4 \sin^2 \theta \sin 2\theta} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{2\varepsilon_a (\sin^2 \theta \cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta \cos^2 \theta) + 2(\varepsilon_b \sin^2 2\theta - \varepsilon_c \sin^2 \theta)}{4 \sin^2 \theta \sin 2\theta}\end{aligned}\quad (2)$$

(2) สำหรับ **delta rosette** ค่า $\theta = 60^\circ$, $\cos \theta = 1/2$, $\sin \theta = \sqrt{3}/2$, $\cos 2\theta = -1/2$ และ $\sin 2\theta = \sqrt{3}/2$ เพราะฉะนั้น เมื่อ $\theta = 60^\circ$ สมการ (2) จะกลายเป็น

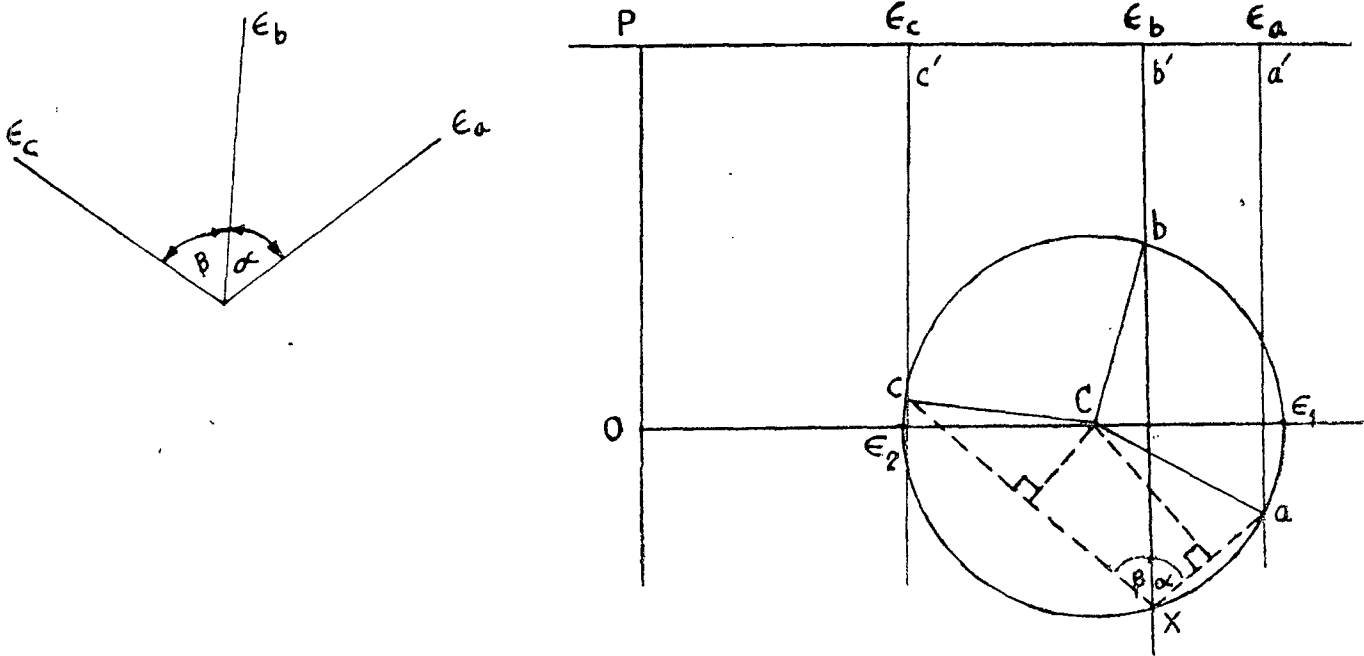
$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \epsilon_a \\ \epsilon_{yy} &= \frac{2(\epsilon_b + \epsilon_c) - \epsilon_a}{3} \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\epsilon_b - \epsilon_c}{\sqrt{3}}\end{aligned}\quad (3)$$

สำหรับ **rectangular rosette** ซึ่ง $\theta = 45^\circ$, $\cos \theta = 1/\sqrt{2}$, $\sin \theta = 1/\sqrt{2}$, $\cos 2\theta = 0$ และ $\sin 2\theta = 1$ เพราะฉะนั้น เมื่อ $\theta = 45^\circ$ สมการ (2) จะเปลี่ยนไปเป็น

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \epsilon_a \\ \epsilon_{yy} &= \epsilon_c \\ \epsilon_{xy} &= \epsilon_b - \frac{1}{2}(\epsilon_a + \epsilon_c)\end{aligned}\quad (4)$$

2-5.3 วงกลมของโมร์สำหรับวัดความเครียด

การวัดความเครียดมักจะใช้ Strain gage ที่มีความไวต่อการเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างมากๆ โดยนำ Strain gage มาแปะติดกับผิวของวัตถุก่อนที่จะวัดจะมีแรงภายนอกมากกระทำ ขณะที่วัตถุถูกแรงภายนอกกระทำ จะวัดหาความเครียดได้จาก Strain gage ที่นำไปติดไว้โดยตรง ปัญหาในการใช้ Strain gage ก็คือการจัดวาง Strain gage อย่างไรให้วัดหาข้อมูลที่ถูกต้องเพียงพอเพื่อให้การหาความเค้นนั้นถูกต้องด้วย คำตอบของการแก้ปัญหานี้คือจะต้องวัดความเครียด ϵ_x และ ϵ_y ในทิศทางตั้งฉากกันและกันใดๆ 2 ทิศทาง ตรงจุดที่ต้องการหาความเค้นบนผิววัสดุและการเปลี่ยนแปลงมุม γ_{xy} ระหว่างแกนทั้ง 2 ดังนั้นความเค้นหลักหาได้จากการคำนวณ โดยใช้สมการ (2-5.11) ในหัวข้อ 2-5.2 อย่างไรก็ตาม การหาความเครียดเฉือน อย่างถูกต้อง เป็นสิ่งที่ยากมากปัญหานี้จะทำให้ยุ่งขึ้นและถูกต้องมากขึ้นโดยการวัด ϵ_a, ϵ_b และ ϵ_c ในแกน a, b และ c ที่ต่างกัน 3 แกนตรงจุดที่ต้องการ และจากการวัดความเครียดทั้ง 3 นี้จะสามารถหาความเครียดหลัก ϵ_1 และ ϵ_2 ได้ชุดของ Strain gage ซึ่งวัดความเครียดในแนวที่แตกต่างกันที่เรียกว่า Strain rosette นอกจากการคำนวณที่กล่าวมาแล้ว เรายังสามารถใช้วงกลมของโมร์หาค่าของ ϵ_1 และ ϵ_2 ได้จากค่าของ ϵ_a, ϵ_b และ ϵ_c ดังต่อไปนี้



รูป 2-5.7

วิธีสร้าง

1. จากจุด P ลากเส้นในแนวระดับ วัดค่า ϵ_a, ϵ_b และ ϵ_c โดยใช้มาตราส่วนเดียวกัน จะได้จุด a', b', c'
2. จากจุด a', b', c' ลากเส้นตั้งฉาก Pa'
3. จากจุด x (ตรงไหนก็ได้) บนเส้นตั้งฉาก ลากจาก b' เขียนมุมและทิศทางของความเครียด ϵ_a และ ϵ_c ตัดเส้นตั้งฉากจาก a' และ c' ที่ a และ c การเขียนต้องให้ถูกต้องตามแนวจริงๆ เช่นจากรูป 2-5.7

x_a ต้องวัดไปเป็นมุม α ตามเข็มนาฬิกาจาก x_b

x_c ต้องวัดไปเป็นมุม β ทวนเข็มนาฬิกาจาก x_b

4. แบ่งครึ่งและลากเส้นตั้งฉากของเส้น x_a และ x_c ตัดกันที่ C ซึ่งเป็นจุดกลางของวงกลมของโมร์ สำหรับความเครียด
5. ใช้ C เป็นจุดศูนย์กลาง เขียนวงกลมรัศมี C_a หรือ C_c ตัด x_b ที่ b
6. ลาก OC ให้ตั้งฉากกับ OP ลาก C_a, C_b และ C_c

ความเครียดหลักคือ O1 และ O2

45° Strain Rosette ถ้าวัดความเครียด ϵ_a, ϵ_b และ ϵ_c ในแนวแกน a, b และ c ซึ่งทำมุม 45° ดังแสดงไว้ในรูป 2-5.8a วงกลมของโมร์สามารถสร้างขึ้นได้ดังแสดงไว้ในรูป 2-5.8c และจะหา ϵ_1 และ ϵ_2 ได้จากวงกลมของโมร์ วงกลมของโมร์จะสร้างขึ้นได้โดยวิธีต่อไปนี้

บนระนาบ $\epsilon - \frac{\gamma}{2}$ ในรูป 2-5.8c เขียนเส้นตรง aa, bb และ cc โดยที่เส้นตรงทั้งสามนี้จะตัดบนแกน ϵ ตรงตำแหน่งที่มีแอมพลิจูด ϵ_a, ϵ_b และ ϵ_c ตามลำดับคือที่จุด A', B' และ C' (ถ้าความเครียดค่าใดเป็นลบ เส้นที่ตัดแกน ϵ ที่ค่าแอมพลิจูดนั้นจะอยู่ด้านซ้ายมือของแกน $\frac{\gamma}{2}$) กำหนดจุด O' ให้อยู่กึ่งกลางระหว่าง A' กับ C' ถ้าเส้นตรง bb อยู่ทางซ้ายมือของจุด O' ดังแสดงไว้ในรูป ให้เขียนเส้นตรง $AA' = O'B'$ และ $CC' = O'B'$ เขียนเส้นตรง AC จากนั้นก็จะเขียนวงกลมของโมร์ได้ วงกลมนี้อาจตัดเส้นตรง bb ที่จุด B ซึ่งจะทำให้ $O'B$ ตั้งฉากกับเส้นตรง AC ทั้งนี้เพราะว่าสามเหลี่ยม $AO'A'$ และ $BO'B'$ สามเหลี่ยม เท่ากันทุกประการ ดังนั้นจุด A, B และ C จะมีแอมพลิจูดเป็น ϵ_a, ϵ_b และ ϵ_c ตามลำดับและห่างกันเป็นมุม 90° ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ทำให้รูป 2-5.8c แสดงความเครียดที่เกิดขึ้นในแนวแกน a, b และ c ซึ่งห่างกัน 45° เหมือนในรูป 2-5.8a อย่างสมบูรณ์ ความเครียดหลัก $\epsilon_1 = OD$ และ $\epsilon_2 = OE$ ทิศทางของความเครียดหลัก ϵ_1 ทำมุม θ_1 เท่ากับครึ่งหนึ่งของมุม $AO'D$ กับทิศทางของแกน a ดังแสดงไว้ในรูป 2-5.8b

เมื่อรู้ความเครียดหลัก ϵ_1 และ ϵ_2 ความเค้นหลัก σ_1 และ σ_2 จะหาได้จากสมการ (2-5.11) คือ

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \mu^2} (\epsilon_1 + \mu \epsilon_2)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1 - \mu^2} (\epsilon_2 + \mu \epsilon_1)$$

การหาความเค้นโดยวิธีนี้จะใช้ได้ใช้เมื่อเนื้อวัสดุเกิดความเค้นไม่เกินขอบเขตความยืดหยุ่น

สรุป สำหรับ 45° strain rosette มีวิธีเขียนวิธีเฉพาะได้ดังนี้

1. เขียนแกน $\epsilon, \frac{\gamma}{2}$
2. เขียนเส้นในแนวตั้ง aa, bb, cc ตามขนาด $\epsilon_a, \epsilon_b, \epsilon_c$ ที่วัดได้
3. จุดศูนย์กลาง C หาได้จากจุดกึ่งกลางระหว่าง aa และ cc
4. บนเส้น aa วัด $D'D_1 = CF'$
บนเส้น cc วัด $D_1'D = CF'$ (ด้านลบ)
5. ใช้ C เป็นจุดศูนย์กลางเขียนวงกลมรัศมี CD ตัดเส้น bb ที่ F
D, F, D_1 จะเป็นจุดของ $\epsilon_a, \epsilon_b, \epsilon_c$

พิสูจน์

จาก $\triangle CFF'$ และ $\triangle CD_1D'$

$$\text{ด้าน } CF' = D_1D', \quad CF = CD_1, \quad \text{มุม } CD_1D_1 = \text{มุม } CFF' = 90^\circ$$

ตามเหลี่ยมสองรูปนี้เท่ากัน จะได้

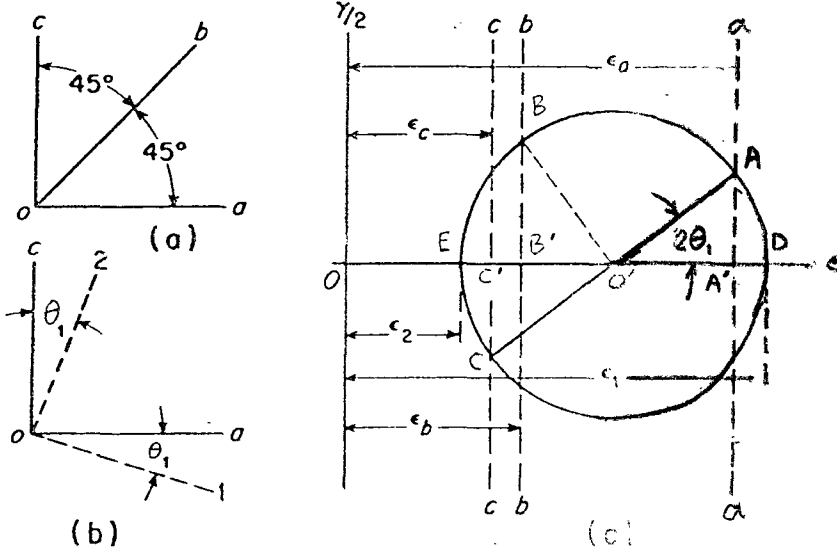
$$\widehat{CFF} = \widehat{D_1CD'_1}$$

$$\widehat{CFF'} + \widehat{FCF'} = 90^\circ ; \widehat{D_1CD'_1} + \widehat{FCF} = 90^\circ$$

เพราะฉะนั้น D, F, D_1 ห่างกัน 90° บนวงกลมของโมร์

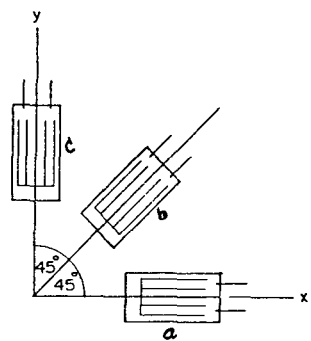
ความเครียดหลัก

$$\epsilon_1 = 01, \epsilon_2 = 02$$



รูป 2-5.8

ตัวอย่าง 2-5.6 กานคอนกรีตเสริมแรงยาว 3.00 m ถูกนำมาทดสอบที่ห้องปฏิบัติการเพื่อศึกษาถึงค่าความเครียดที่เกิดขึ้นในกาน โดยติดตั้งเครื่องความเครียดในลักษณะแบบ 45° Strain rosette ซึ่งพบว่ามิต่ำ ϵ_a , ϵ_b , ϵ_c เท่ากับ $20 \mu\epsilon$, $80 \mu\epsilon$, $100 \mu\epsilon$ ตามลำดับ จงหาค่าความเครียดหลักและทิศทางหลัก



รูป E2-5.6(a)

วิธีทำ 1) จากสมการ (2-5.1) คำนวณหา ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} จะได้

$$\begin{aligned} \epsilon_a &= \epsilon_x \cos^2 \theta_a - \epsilon_y \sin^2 \theta_a + \gamma_{xy} \sin \theta_a \cos \theta_a \\ 20 \times 10^{-6} &= \epsilon_x \cos^2 0^\circ + \epsilon_y \sin^2 0^\circ + \gamma_{xy} \sin 0^\circ \cos 0^\circ \\ 80 \times 10^{-6} &= \epsilon_x \cos^2 45^\circ + \epsilon_y \sin^2 45^\circ + \gamma_{xy} \sin 45^\circ \cos 45^\circ \\ 100 \times 10^{-6} &= \epsilon_x \cos^2 90^\circ + \epsilon_y \sin^2 90^\circ + \gamma_{xy} \sin 90^\circ \cos 90^\circ \end{aligned}$$

จัดรูปสมการใหม่ได้

$$20 \times 10^{-6} = \epsilon_x \tag{1}$$

$$80 \times 10^{-6} = 0.5 \epsilon_x - 0.5 \epsilon_y + 0.5 \gamma_{xy} \tag{2}$$

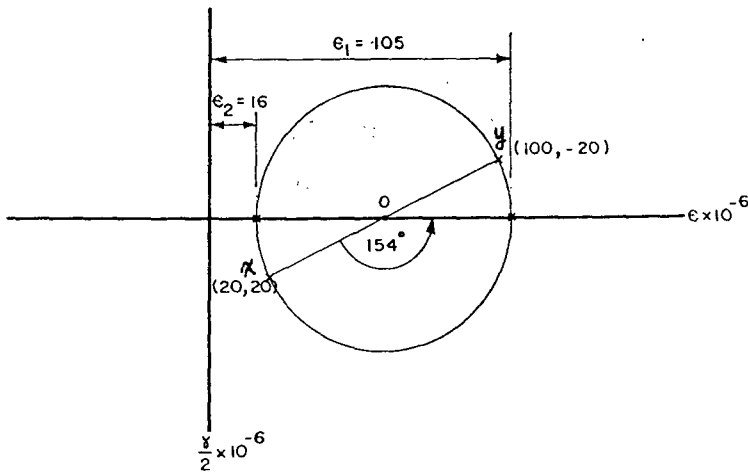
$$100 \times 10^{-6} = \epsilon_y \tag{3}$$

แทนค่า ϵ_x , ϵ_y ลงไปในสมการ (2)

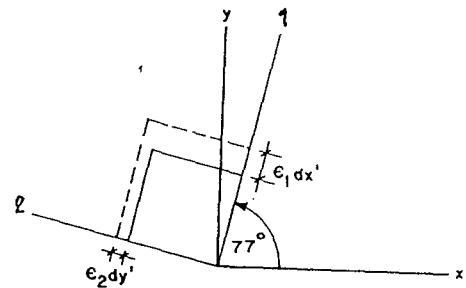
$$\begin{aligned} 80 \times 10^{-6} &= 0.5 \times 20 \times 10^{-6} - 0.5 \times 100 \times 10^{-6} + 0.5 \gamma_{xy} \\ \gamma_{xy} &= 0.00004 = 40 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

2) หาค่า ϵ_1 , ϵ_2 , θ_p ด้วยวิธีางกลมของโมร์

สร้างจุด X (20×10^{-6} , 20×10^{-6}) และจุด Y (100×10^{-6} , -20×10^{-6})



รูป E 2-5.6(b)



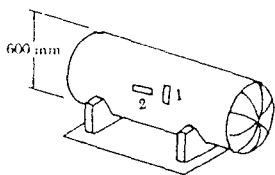
รูป E 2-5.6(c)

อ่านค่าจากรูปวงกลมของโมร์จะได้

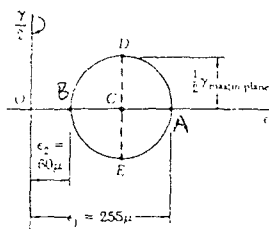
$$\begin{aligned}\epsilon_x &= 105 \times 10^{-6} \\ \epsilon_y &= 16 \times 10^{-6} \\ 2\theta_{pl} &= 154^\circ \\ \theta_{pl} &= 77^\circ\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2-5.7 ถังบรรจุก๊าซทรงกระบอกมีเส้นผ่าศูนย์กลางภายใน 600 mm และความหนาของผนัง 20 mm ติดตั้งเครื่องวัดความเครียด (Strain Gages) ไว้ที่ผิวของถังตามแนวขวาง และแนวยาวของถัง ดูรูป E2-5.7(a) อ่านค่าความเครียดจากการวัดได้ $255\mu\epsilon$ และ $60\mu\epsilon$ ตามลำดับ สำหรับวัสดุที่ใช้ทำถัง $G = 80 \text{ kN/mm}^2$ จงหา

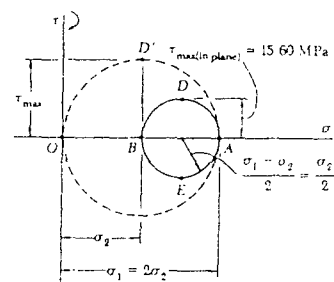
- 1) ความเค้นหลัก และความเค้นเฉือนสูงสุดในผนังของถัง
- 2) ความดันภายในถังจะได้อ่านได้จากเครื่องวัดความดัน



(a)



(b)
รูป E 2-5.7



(c)

วิธีทำ จะพบว่าความเครียดที่วัดได้เป็นความเครียดหลักที่ผิวของถัง กำหนดจุด A และ B ตามลำดับความเครียดที่วัดได้ แล้วเขียนวงกลมของโมร์สำหรับความเครียดตามรูป E2-5.7(b) ความเครียดเฉือนสูงสุด ในระนาบเท่ากับเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลมคือ

$$\gamma_{\max (in\ plane)} = \epsilon_1 - \epsilon_2 = 255\mu\epsilon - 60\mu\epsilon = 195\mu\ rad$$

จากกฎของฮุก

$$\begin{aligned} \tau_{\max (in\ plane)} &= G \gamma_{\max (in\ plane)} \\ &= (80 \times 10^9\ Pa)(195 \times 10^{-6}) = 15.60\ kN/mm^2 \end{aligned}$$

(1) หาคความดันเค้นหลักและความเค้นเฉือนสูงสุด

เนื่องจาก $\sigma_1 = 2\ \sigma_2$ เขียนวงกลมของโมร์สำหรับความเค้น ได้ ดังในรูป E2-5.7(c)

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= 2\gamma_{\max (in\ plane)} = 2(15.60\ MPa) \\ \sigma_2 &= 31.2\ MPa \\ \sigma_1 &= 2\sigma_2 = 2(31.2\ MPa) = 62.4\ MPa \end{aligned}$$

ความเค้นเฉือนสูงสุดนั้นพิจารณาได้จากการเขียนวงกลมของโมร์เช่นเดียวกับการหาความเครียดเฉือนสูงสุดคือ เท่ากับรัศมีของวงกลมเส้นผ่าศูนย์กลาง OA และตรงกับแกนที่หมุนไป 45° รอบแกนตามแนวยาวของถัง

(2) หาคความดันภายในถัง กรณีของถังภายใต้ความดันเช่นนี้

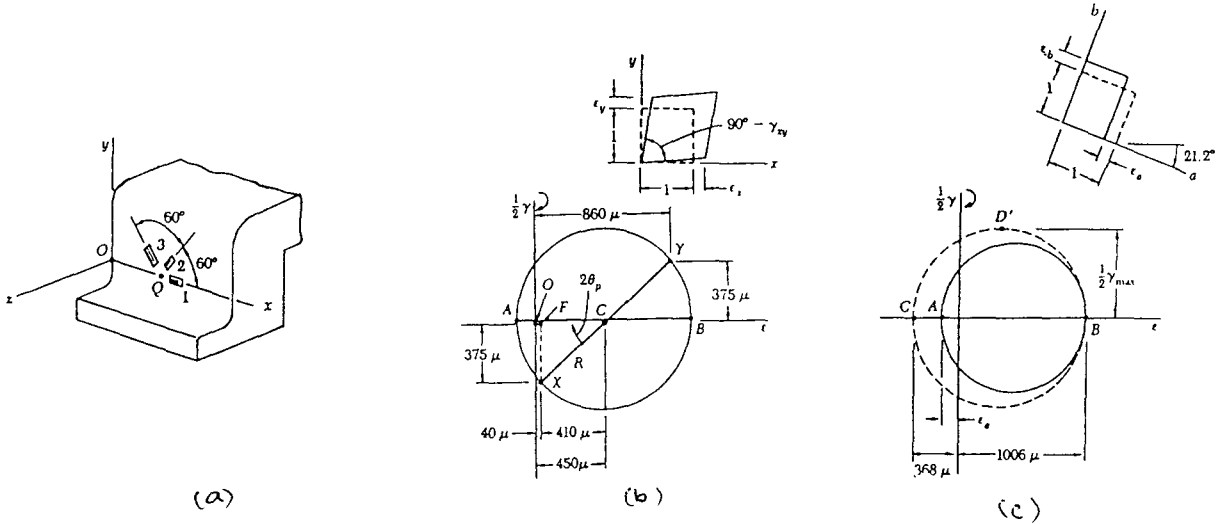
$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_1 = \sigma_2 = 31.2\ MPa$$

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{1}{2} \sigma_2 = \frac{Pr}{4t} \\ \tau_{\max (in\ plane)} &= \frac{Pr}{4t} \\ 15.60\ MPa &= \frac{P (0.3\ m)}{4 (0.02\ m)} \end{aligned}$$

$$P = 4.16\ MPa$$

ตัวอย่างที่ 2-5.8 ใช้ 60° Strain Rosette หาความเครียดที่จุด Q บนผิวของฐานเครื่องที่เป็นเหล็กกล้าได้ $\epsilon_1 = 40\mu$, $\epsilon_2 = 980\mu$ และ $\epsilon_3 = 330\mu$ ตามพิสัยดังรูป $\nu = 0.29$ จงหา

- 1) องค์ประกอบความเครียด ϵ_x , ϵ_y และ γ_{xy}
- 2) ความเครียดหลัก
- 3) ความเครียดเฉือนสูงสุด



รูป E2-5.8

วิธีทำ 1) หาองค์ประกอบความเครียด ϵ_x , ϵ_y และ γ_{xy}

จากรูป $\theta_1 = 0^\circ$; $\theta_2 = 60^\circ$; $\theta_3 = 120^\circ$

แทนค่าเหล่านี้ลงในสมการ (2-5.1) ได้

$$\epsilon_a = \epsilon_x (1) + \epsilon_y (0) + \gamma_{xy} (0)(1)$$

$$\epsilon_b = \epsilon_x (0.500)^2 + \epsilon_y (0.866)^2 + \gamma_{xy} (0.866)(0.500)$$

$$\epsilon_c = \epsilon_x (-0.500)^2 + \epsilon_y (0.866)^2 + \gamma_{xy} (0.866)(-0.500)$$

แก้สมการทั้งสามได้

$$\epsilon_x = \epsilon_a$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{3}(2\epsilon_b + 2\epsilon_c - \epsilon_a)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\epsilon_b - \epsilon_c}{0.866}$$

แทนค่า ϵ_1 , ϵ_2 และ ϵ_3 ที่โจทย์กำหนดได้

$$\epsilon_x = 40\mu$$

$$\begin{aligned} \epsilon_y &= \frac{1}{3}[2(980) + 2(330) - 40] \\ &= +860\mu\epsilon \end{aligned}$$

$$\gamma_{xy} = (980 - 330)/(0.866) = 750 \times 10^6 \text{ rad}$$

ความเครียดเหล่านี้ได้แสดงไว้บนอีลีเมนต์ดังในรูป E2-5.8(b) รูปบนสุด

(2) หาความเครียดหลักพึงสังเกตว่าด้านของอีลีเมนต์ภายใต้ความเค้น ϵ_x ในข้อ 1) นั้น หมุนไปจากแนวเดิมในทิศทวนเข็มนาฬิกา ดังนั้นจึงกำหนดจุด X ไว้ได้แกนแนวราบคือ X (40, - 375) จากนั้นกำหนดจุด Y (860, + 375) แล้วเขียนวงกลมของโมร์

$$\epsilon_{ave} = \frac{1}{2}(860)\mu\epsilon + 40\mu\epsilon = 450\mu\epsilon$$

$$R = \gamma_{max} = 2\sqrt{(375\mu)^2 + (450\mu)^2} = 556 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{375\mu\epsilon}{410\mu\epsilon} = 0.915$$

$$2\theta_p = 42.4^\circ$$

$$\theta_p = 21.2^\circ$$

จุด 1 และ 2 ตรงกับความเครียดหลัก ดังนั้น

$$\epsilon_1 = \epsilon_{ave} + R = 450\mu\epsilon + 556\mu\epsilon = 1006\mu\epsilon$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_{ave} - R = 450\mu\epsilon - 556\mu\epsilon = -106\mu\epsilon$$

เนื่องจาก σ_2 บนผิวเท่ากับศูนย์ ดังนั้นจึงสามารถหาความเครียดหลัก ϵ_3 ได้

$$\begin{aligned}\epsilon_3 &= -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_1 + \epsilon_2) \\ &= -\frac{0.29}{1-0.29}(-1006\mu\epsilon + 106\mu\epsilon) = -368\mu\epsilon\end{aligned}$$

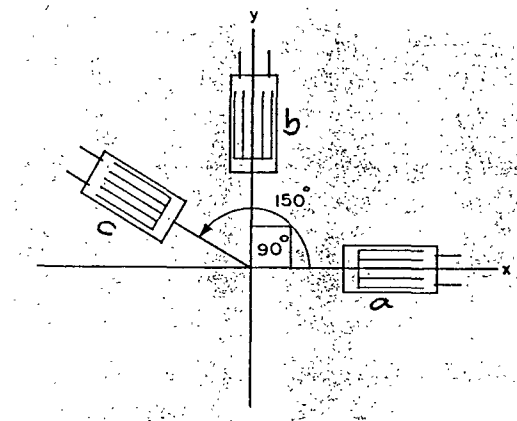
3) หาความเครียดเฉือนสูงสุด

กำหนดจุด C แล้วเขียนวงกลมของโมร์ผ่านจุด B และ C ได้จุด D ซึ่ง

$$\frac{1}{2}\gamma_{max} = \frac{1}{2}(1006\mu\epsilon + 368\mu\epsilon)$$

$$\gamma_{max} = 1374 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

ตัวอย่างที่ 2-5.9 ถังก๊าซมีแรงดันภายในดัง ทำให้เกิดความเค้นและความเครียดทั่วผิวถังก๊าซ เมื่อนำตัววัดค่าความเครียดติดตั้งแบบ Strain rosette โดยทำมุมตามรูป E2-5.9 จะได้ค่า ϵ_a , ϵ_b , ϵ_c เท่ากับ 2×10^{-5} , -3×10^{-5} , $+4 \times 10^{-5}$ จงคำนวณหาค่าความเค้นหลักของผิวถังก๊าซ กำหนดให้ $E = 210 \text{ kN/mm}^2$ และ $\nu = 0.25$



รูป E2-5.9

วิธีทำ

1. คำนวณหาค่า ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} จากสมการ (2-5.1)

$$\epsilon_a = \epsilon_x \cos^2 \theta_a + \epsilon_y \sin^2 \theta_a + \gamma_{xy} \sin \theta_a \cos \theta_a$$

$$2 \times 10^{-5} = \epsilon_x \cos^2 0^\circ + \epsilon_y \sin^2 0^\circ + \gamma_{xy} \sin 0^\circ \cos 0^\circ$$

$$-3 \times 10^{-5} = \epsilon_x \cos^2 90^\circ + \epsilon_y \sin^2 90^\circ + \gamma_{xy} \sin 90^\circ \cos 90^\circ$$

$$4 \times 10^{-5} = \epsilon_x \cos^2 150^\circ + \epsilon_y \sin^2 150^\circ + \gamma_{xy} \sin 150^\circ \cos 150^\circ$$

จะได้

$$2 \times 10^{-5} = \epsilon_x$$

$$-3 \times 10^{-5} = \epsilon_y$$

$$4 \times 10^{-5} = 0.75 \epsilon_x - 0.25 \epsilon_y - 0.433 \gamma_{xy}$$

แทนค่า ϵ_x และ ϵ_y จะได้

$$\gamma_{xy} = -7.5 \times 10^{-5}$$

2. คำนวณหาค่า σ_x , σ_y จากสมการ 2-5.10

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \sigma_y]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \sigma_x]$$

$$2 \times 10^{-5} = \frac{1}{210 \times 10^9} [\sigma_x - 0.25 \sigma_y]$$

$$-3 \times 10^{-5} = \frac{1}{210 \times 10^9} [\sigma_y - 0.25 \sigma_x]$$

$$\sigma_x - 0.25 \sigma_y = 4.2 \times 10^6 \quad (1)$$

$$\sigma_y - 0.25 \sigma_x = -6.3 \times 10^6 \quad (2)$$

หาร(1)ด้วย 0.25

$$4\sigma_x - \sigma_y = 16.8 \times 10^6 \quad (3)$$

(1) บวก (3)

$$3.75 \sigma_x = 10.5 \times 10^6$$

$$\sigma_x = 2.8 \times 10^6 \quad \text{Pa} = 2.8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = -5.6 \times 10^6 \quad \text{Pa} = -5.6 \text{ MPa}$$

3. คำนวณหาค่า τ_{xy}

จากสมการ

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G$$

$$G = \frac{210 \times 10^9}{2(1+0.25)} = 8.4 \times 10^{10} \text{ Pa}$$

$$-7.5 \times 10^{-5} = \tau_{xy} / 8.4 \times 10^{10}$$

$$\tau_{xy} = -6.3 \times 10^6 \text{ Pa} = -6.3 \text{ MPa}$$

4. หาค่าความเค้นหลัก (σ_1 , σ_2) ด้วยวิธีวงกลมของโมร์

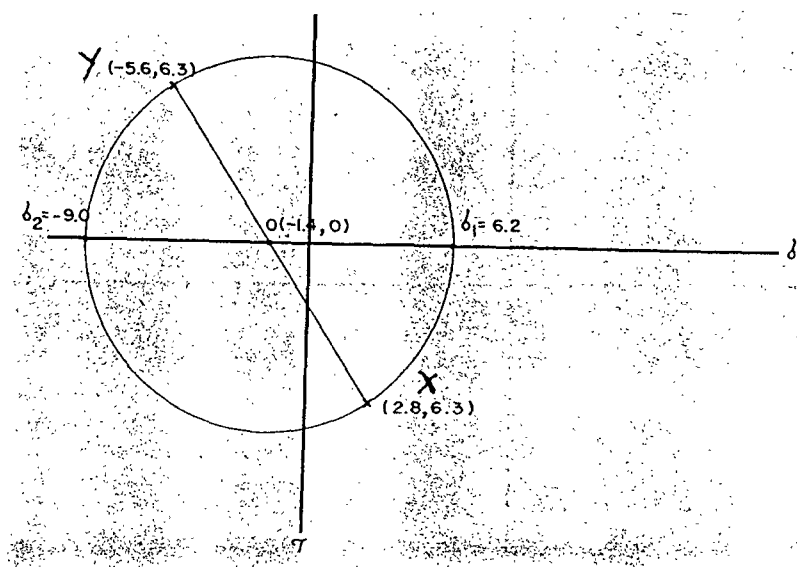
$$\text{จากข้อมูล } \sigma_x = 2.8 \text{ kN/mm}^2$$

$$\sigma_y = -5.6 \text{ kN/mm}^2$$

$$\tau_{xy} = -6.3 \text{ kN/mm}$$

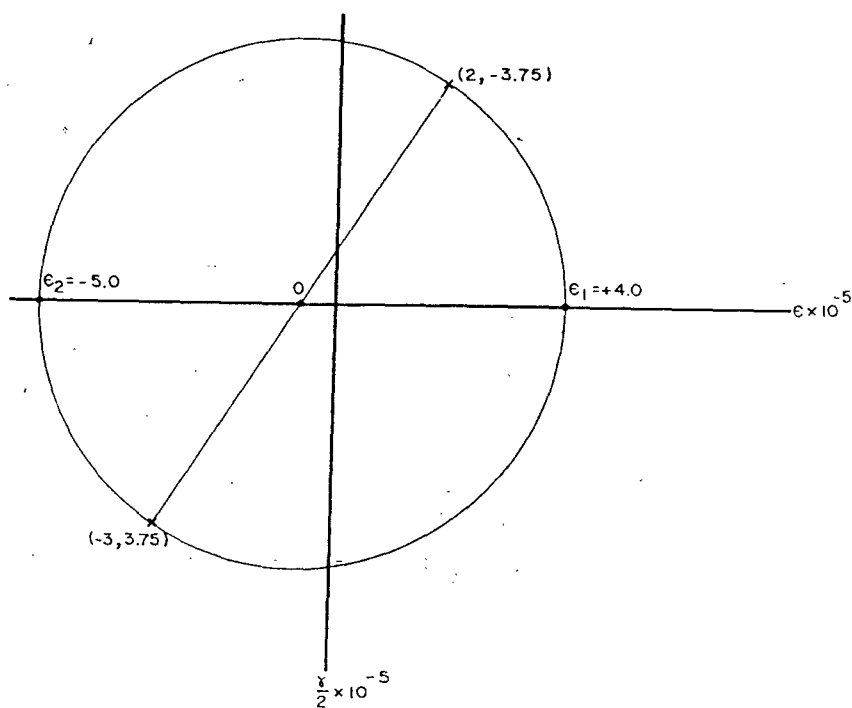
สร้างจุด X(2.8, -6.3) และ Y(-5.6, 6.3)

อ่านจากรูปวงกลมของโมร์จะได้ $\sigma_1 = 6.2 \text{ N/mm}^2$ และ $\sigma_2 = -9.0 \text{ N/mm}^2$



ตัวอย่างที่ 2-5.10

จากตัวอย่างที่ 2-5.9 จงคำนวณหาค่าความเครียดหลักด้วยวิธีวงกลมของโมร์และหาความเค้นหลักด้วยการคำนวณ



รูป E2-5.10

วิธีทำ

1. หาค่าความเครียดหลัก (ϵ_1, ϵ_2) ด้วยวิธีวงกลมของโมร์

จากผลคำนวณจากตัวอย่างที่ 2-5.9

$$\epsilon_x = 2 \times 10^{-5}$$

$$\epsilon_y = -3 \times 10^{-5}$$

$$\gamma_{xy} = -7.5 \times 10^{-5}$$

สร้างจุด X ($2 \times 10^{-5}, -3.75 \times 10^{-5}$) และ Y ($-3 \times 10^{-5}, +3.75 \times 10^{-5}$)

อ่านจากรูปวงกลมของโมร์จะได้ $\epsilon_1 = 4 \times 10^{-5}$, $\epsilon_2 = -5 \times 10^{-5}$

2. คำนวณหาค่าความเค้นหลัก (σ_1, σ_2)

จากสมการ 2-5.10

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu \sigma_2]$$

$$4 \times 10^{-5} = \frac{1}{210 \times 10^9} [\sigma_1 - 0.25 \sigma_2]$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu \sigma_1]$$

$$-5 \times 10^{-5} = \frac{1}{210 \times 10^9} [\sigma_2 - 0.25 \sigma_1]$$

$$\sigma_1 - 0.25 \sigma_2 = 8 \quad (1)$$

$$\sigma_2 - 0.25 \sigma_1 = -10 \quad (2)$$

จาก (1) หาร 0.25

$$4 \sigma_1 - \sigma_2 = 32 \quad (3)$$

นำ (2) บวกกับ (3)

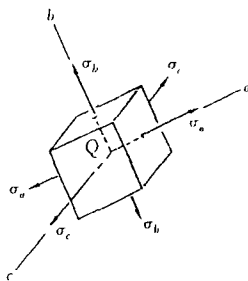
$$3.75 \sigma_1 = 22$$

$$\sigma_1 = 5.87 \text{ N/mm}^2 = 5.87 \text{ MPa}$$

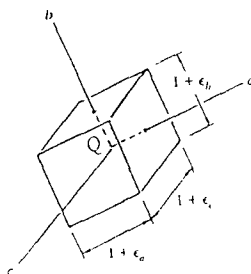
$$\sigma_2 = -8.53 \text{ N/mm}^2 = -8.53 \text{ MPa}$$

2-5.4 การวัดความเครียดสามมิติ

พิจารณาอีลีเมนต์รูปทรงลูกบาศก์ขนาดเล็กดังแสดงในรูป 2-5.9(a) ผิวหน้าของด้านแต่ละด้านตั้งฉากกับแกนหลัก (Principal Axis) a , b และ c ซึ่งบนผิวหน้าของแต่ละด้านจะไม่มี ความเครียดเฉือน กล่าวคือ $\gamma_{ab} = \gamma_{bc} = \gamma_{ca} = 0$ ขนาดความยาวด้านของลูกบาศก์ในตอนแรกเท่ากับหนึ่งหน่วย เมื่อเสียรูปวางไปเป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานมีความยาวด้านเท่ากับ $1 + \epsilon_a$, $1 + \epsilon_b$ และ $1 + \epsilon_c$ ดังรูป 2-5.9(b)

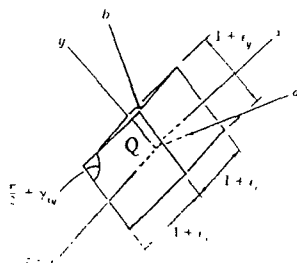


รูป 2-5.9(a)

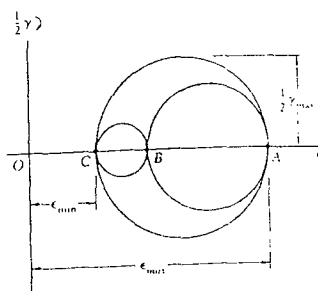


รูป 2-5.9(b)

ถ้าหมุนอีลีเมนต์ดังรูป 2-5.9(b) ไปรอบ ๆ แกนหลัก (Principal Axis) แกนหนึ่งในที่นี้คือแกน c ดังรูป 2-5.10 จะสามารถหาค่าประกอบของความเครียด ϵ_x , ϵ_y และ γ_{xy} บนผิวหน้าที่ตั้งฉากกับแกน c ได้โดยใช้วิธีเดียวกับการหาความเครียดระนาบที่ผ่านมา แต่จะเห็นว่าไม่สามารถหาความเครียดที่เกิดขึ้นได้ครบทุกเทอม วิธีหาค่าประกอบของความเครียดทุก ๆ เทอมนั้นหาได้จากการสร้างวงกลมของโมร์ผ่านจุด A และ B ซึ่งตรงกับแกนหลัก a และ b จากนั้นสร้างวงกลมเส้นผ่าศูนย์กลาง BC และ CA ในทำนองเดียวกัน ซึ่งเป็นวงกลมที่ได้จากการหมุนแกน a และ b ตามลำดับ ดังรูป 2-5.11



รูป 2-5.10



รูป 2-5.11

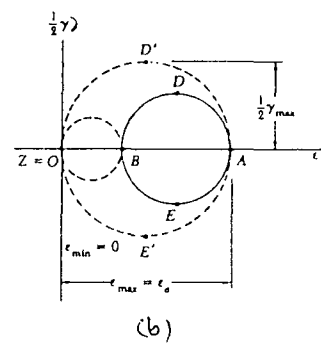
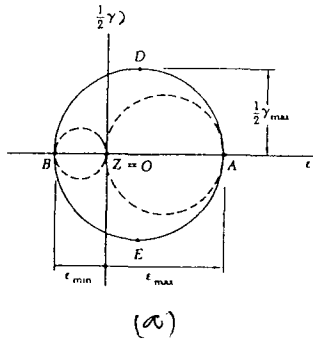
เนื่องจากความเครียดเฉือนสูงสุด γ_{max} เท่ากับเส้นผ่าศูนย์กลางของวงกลมวงใหญ่ที่สุดในจำนวนสามวงในรูป 2-5.11 ดังนั้น

$$\gamma_{max} = |\epsilon_{max} - \epsilon_{min}| \quad (2-5.12)$$

โดยที่ ϵ_{max} และ ϵ_{min} เป็นค่าทางพีชคณิตของความเครียดสูงสุดและต่ำสุดที่จุด Q

ในกรณีที่แป้นความเครียดระนาบ ซึ่งระนาบของความเครียดอยู่บนระนาบของแกน x และ y เราจะได้ $\epsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$ ดังนั้นแกน z จึงเป็นแกนหลัก (Principal Axis) แกนหนึ่งในจำนวนแกนทั้งสามที่จุด Q ซึ่งตรงกับจุดกำเนิด 0 ในวงกลมของโมร์ โดยที่ $\epsilon = \gamma = 0$ ถ้าจุด A และ B ซึ่งหมายถึงแกนหลักในระนาบความเครียดอยู่สองข้างของจุด 0 ดังรูป 2-5.12 (a) ความเครียดสำคัญที่จุดที่สองนี้คือ ความเครียดดึงจากสูงสุด และต่ำสุดที่จุด Q และความเครียดเฉือนสูงสุดเท่ากับความเร็วสูงสุดในระนาบซึ่งจะวัดได้จากระยะ DE ส่วนในกรณีที่จุด A และ B อยู่ด้านเดียวกันจากจุด 0 ดังรูป 2-5.12 (b) หรือหมายถึงในกรณีที่ ϵ

ϵ_a และ ϵ_b มีเครื่องหมายเหมือนกัน ความเครียดเฉือนสูงสุดจะได้จากระยะ $D'E'$ บนวงกลมของโมร์ที่มีเส้นผ่าศูนย์กลางยาว OA และจะได้ว่า $\gamma_{\max} = \epsilon_{\max}$



รูป 2-5.12

ในกรณีของความเค้นระนาบที่กล่าวถึงในเรื่องกฎของฮุก กำหนดให้แกนหลักบนระนาบความเค้นคือ a และ b โดยที่ c เป็นแกนหลักที่ตั้งฉากกับระนาบดังกล่าว ดังนี้ σ_x , σ_y และ σ_z ในสมการ (2-2.2), (2-2.3) และ (2-2.4) เท่ากับ σ_a , σ_b และ 0 ตามลำดับ และเขียนสมการทั้งสามใหม่ได้เป็น

$$\epsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} - \frac{\nu\sigma_b}{E} \quad (2-5.13)$$

$$\epsilon_b = -\frac{\nu\sigma_a}{E} + \frac{\sigma_b}{E} \quad (2-5.14)$$

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{E}(\sigma_a + \sigma_b) \quad (2-5.15)$$

รวมสมการ (2-5.13) เข้ากับสมการ (2-5.14) ได้

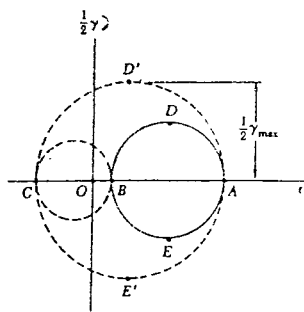
$$\epsilon_a + \epsilon_b = \frac{1 - \nu}{E} (\sigma_a + \sigma_b) \quad (2-5.16)$$

$$\sigma_a + \sigma_b = \frac{E}{1 - \nu} (\epsilon_a + \epsilon_b)$$

แทนค่า $\sigma_a + \sigma_b$ ในสมการ (2-5.15) ได้

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{1 - \nu} (\epsilon_a + \epsilon_b) \quad (2-5.17)$$

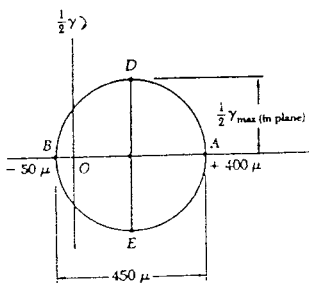
ความสัมพันธ์ในสมการ (2-5.17) หมายถึงความเครียดหลักเทอมที่สามในเทอมของความเครียดหลักในระนาบ สังเกตได้ว่าถ้าตำแหน่งของ B อยู่ระหว่าง A และ C บนวงกลมของโมร์ดังรูป 2-5.13 ความเครียดเฉือนสูงสุดจะเท่ากับเส้นผ่าศูนย์กลาง CA ของวงกลมที่ได้จากการหมุนแกนรอบแกน b



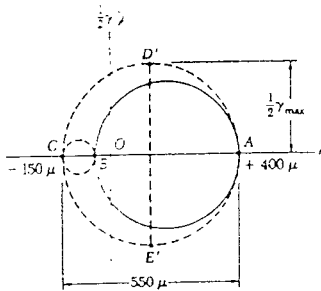
รูป 2-5.13

ตัวอย่าง 2-5.11 จากการวัดด้วยเครื่องวัดความเครียด (Strain Gages) ที่ติดตั้งอยู่บนผิวของชิ้นส่วนเครื่องจักรในหลาย ๆ ทิศทาง ปรากฏว่าความเครียดหลักบนผิวอิสระ $\epsilon_a = + 400 \mu\epsilon$ และ $\epsilon_b = - 50 \mu\epsilon$ อัตราส่วนของตัวลองสำหรับวัสดุที่ใช้ทำชิ้นส่วนนี้คือ $\nu = 0.30$ จงหา

- ก) ความเครียดเฉือนสูงสุดในระนาบ
- ข) ค่าที่ถูกต้องของความเครียดเฉือนสูงสุดใกล้ผิวของชิ้นส่วนดังกล่าว



รูป (ก)



รูป (ข)

รูป E2-5.11

วิธีทำ ก) หาความเครียดเฉือนสูงสุดในระนาบ
เขียนวงกลมของโมร์ผ่านจุด A และ B ซึ่งตรงกับค่าความเครียดหลักที่กำหนดให้ ดังรูป
(ก) ความเครียดเฉือนสูงสุดในระนาบวัดได้จากระยะ DE หรือเส้นผ่าศูนย์กลางวงกลมของโมร์

$$\gamma_{\max \text{ (in plane)}} = 400\mu + 50\mu = 450 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

(ข) หาความเครียดเฉือนสูงสุด

อันดับแรกต้องหาความเครียดสำหรับเทอมที่สามก่อนคือ ϵ_c เนื่องจากผิวของชิ้นส่วนเครื่องจักรอยู่ในภาวะของความเค้นระนาบ ดังนั้นจึงใช้สมการ (2-5.17) ในการหาค่า ϵ_c

$$\epsilon_c = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_a + \epsilon_b) = -\frac{0.30}{0.70}(400\mu - 50\mu) = -150\mu\epsilon$$

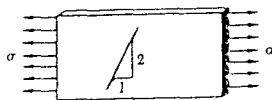
เขียนวงกลมของโมร์ผ่านจุด A และ C และเขียนอีกรวงหนึ่งผ่านจุด B และ C ดังรูป E2-5.11 (ข) จะได้ความเครียดเฉือนสูงสุดเท่ากับเส้นผ่าศูนย์กลางวงกลมที่มีเส้นผ่าศูนย์กลางยาว CA

$$\gamma_{\max} = 400\mu + 150\mu = 550 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

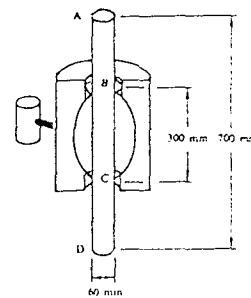
จะเห็นว่าถึงแม้ ϵ_a และ ϵ_b จะมีเครื่องหมายต่างกัน ความเครียดเฉือนสูงสุดในระนาบก็ไม่ใช่ค่าความเครียดเฉือนสูงสุดที่แท้จริง

แบบฝึกหัด

- จงคำนวณหาค่าความเครียดหลักและค่าความเครียดเฉือนมากที่สุดสมบูรณ์เมื่อ ϵ_x , ϵ_y และ γ_{xy} เท่ากับ -100×10^{-6} , 80×10^{-6} , 55×10^{-6} ตามลำดับ
- วัสดุชิ้นหนึ่งขนาด $200 \times 200 \times 200$ ลบ.มม. ถูกแรงกระทำซึ่งทำให้เกิดค่า $\sigma_x = -20$ MPa, $\sigma_y = -40$ MPa, $\sigma_z = 60$ MPa จงคำนวณหาค่า Volumetric Strain และขนาดรูปร่างหลังจากถูกแรงกระทำ กำหนดให้ค่า E เท่ากับ 2200 MPa และ ν เท่ากับ 0.25
- ใช้ท่อเหล็กกล้าแข็งเป็นพิเศษยาว 2 m เส้นผ่านศูนย์กลางภายนอก 273 mm หนา 12.5 mm ทำเสารับแรงตามแนวแกน 1.2 MN E = 200 GPa และ $\nu = 0.3$ จงหา
 - ความยาวของท่อที่เปลี่ยนไป
 - เส้นผ่านศูนย์กลางภายนอกของท่อที่เปลี่ยนไป
 - ความหนาของท่อที่เปลี่ยนไป
- แผ่นอะลูมิเนียมอยู่ภายใต้แรงกระทำตามแนวแกนทำให้เกิดความเค้นดึงจาก ซึ่งขณะที่ไม่มีแรงกระทำดังกล่าว ได้ลากเส้นตรงความชัน 2 : 1 ไว้บนแผ่นอะลูมิเนียมนี้ จงหาความชันของเส้นเมื่อ $\sigma = 130$ Mpa สำหรับอะลูมิเนียม E = 70 Gpa และ $\nu = 0.33$



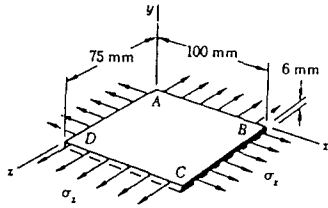
รูปข้อ 4



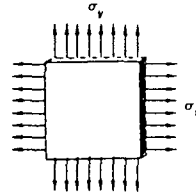
รูปข้อ 5

- แท่งทองเหลือง AD สวมอยู่ในกระบอกไฮดรอลิค ซึ่งมีความดัน 60 MPa แท่งทองเหลืองส่วนที่ รับความดันคือ BC ยาว 300 mm สำหรับทองเหลือง E = 105 Gpa และ $\nu = 0.33$ จงหา
 - ความยาวทั้งหมดของ AD ที่เปลี่ยนไป
 - เส้นผ่านศูนย์กลางตรงกึ่งกลางแท่งทองเหลืองที่เปลี่ยนไป

6. แผ่นเหล็กเนื้อเดียวกันตลอดแผ่น ABCD อยู่ภายใต้แรงกระทำสองแนวแกน ซึ่งทำให้เกิดความเค้นตั้งฉาก $\sigma_x = 150 \text{ MPa}$ และ $\sigma_y = 100 \text{ MPa}$ สำหรับเหล็ก $E = 200 \text{ GPa}$ และ $\nu = 0.30$ จงหา
- ความยาวของขอบ AB ที่เปลี่ยนไป
 - ความยาวของขอบ BC ที่เปลี่ยนไป
 - ความยาวของเส้นทแยงมุม AC ที่เปลี่ยนไป



รูปข้อ 6



รูปข้อ 7

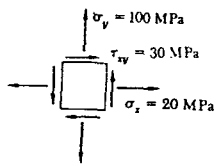
7. ในกรณีของความเค้นระนาบซึ่ง $\sigma_z = 0$ ดังเช่นแผ่นวัตถุดังแสดงในรูป ถ้าสมมติว่าทราบความเครียด ϵ_x และ ϵ_y จากการทดลอง หรือการวัด จงแสดงให้เห็นว่าสามารถเขียน σ_x, σ_y และ ϵ_z ได้ดังต่อไปนี้

$$\sigma_x = E \frac{\epsilon_x + \nu \epsilon_y}{1 - \nu^2}$$

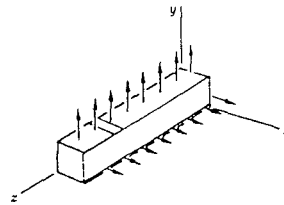
$$\sigma_y = E \frac{\epsilon_y + \nu \epsilon_x}{1 - \nu^2}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{1 - \nu} (\epsilon_x + \epsilon_y)$$

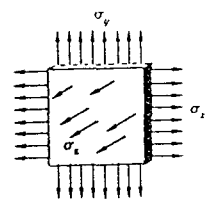
8. จากสถานะของความเค้นระนาบดังรูปซึ่งเกิดขึ้นบนผิวของชิ้นส่วนเครื่องจักรที่มีค่า $E = 200 \text{ GPa}$ และ $\nu = 0.30$ จงหาทิศทางและขนาดของความเครียดหลัก (Principal Strain) และค่าความเค้นหลัก (Principal Stress) ระบุ



รูปข้อ 8



(n)



(ข)

รูปข้อ 9

9. ในกรณีของความเครียดในระนาบ ซึ่ง $\varepsilon_z = 0$ ดังรูป ระนาบที่ตั้งฉากกับแกน z ไม่สามารถเปลี่ยนแปลงไปจากตำแหน่งเดิมตามแนวแกน z ได้ จงแสดงให้เห็นว่าสามารถเขียน σ_z , ε_x และ ε_y ได้ดังต่อไปนี้

$$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y)$$

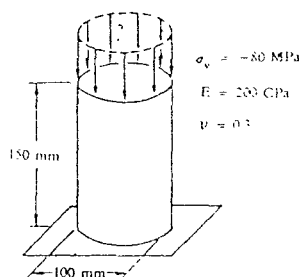
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2) \sigma_x - \nu(1 - \nu) \sigma_y]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2) \sigma_y - \nu(1 - \nu) \sigma_x]$$

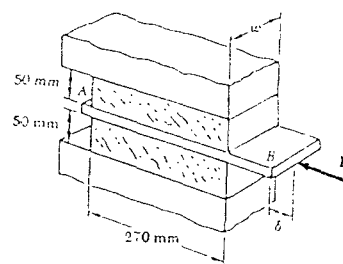
10. ทรงแท่งบอกลีกลึกอยู่ภายใต้แรงกระทำตามแนวแกนดังแสดงในรูป

ก) จงหาความสูง และปริมาตรของทรงแท่งบอกลีกลึกที่เปลี่ยนไป

ข) จงหาความสูง และปริมาตรของทรงแท่งบอกลีกลึกที่เปลี่ยนไป ถ้าทรงแท่งบอกลีกลึกวางอยู่ภายใต้ความดันสถิต ซึ่งทำให้ $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -80 \text{ MPa}$

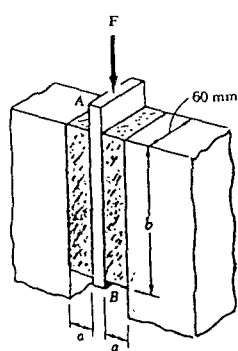


รูปข้อ 10



รูปข้อ 11

11. แท่งยางสี่เหลี่ยมสองแท่งซึ่งมีค่า $G = 9 \text{ MPa}$ ประสานติดกับแผ่นยึดตาย และแผ่นวัตถุอิสระ AB ดังรูป ความกว้างของแท่งยาง $w = 100 \text{ mm}$ จงหาค่าคงที่สปริงยังผล ($k = F/\delta$) ของระบบ
12. ชุดป้องกันการสั่นสะเทือนประกอบด้วยแผ่น AB ประสานติดกับแผ่นยางแข็งสองแผ่นและยึดแผ่นยางแข็งทั้งสองเข้ากับส่วนรองรับเกร็งดังรูป สำหรับแผ่นยาง $\tau_{all} = 1.5 \text{ MPa}$ และ $G = 18 \text{ MPa}$ มีแรง $F = 27 \text{ kN}$ กระทำตามแนวแกนของแผ่น AB ทำให้แผ่น AB เบี่ยงเบนไปจากตำแหน่งเดิม 2 mm ตามแนวแรง จงหาขนาดต่ำสุดของ a และ b



รูปข้อ 12



รูปข้อ 10-13

13-16 ตามสภาวะความเครียดระนาบที่กำหนดให้ จงหาสภาวะความเครียดเมื่อหมุนแกน

ϵ_x	ϵ_y	γ_{xy}	θ
-600μ	$+300 \mu$	0	$15^\circ \uparrow$
-360μ	0	$+150 \mu$	$30^\circ \downarrow$
0μ	800μ	-250μ	$30^\circ \uparrow$
-640μ	$+360 \mu$	$+160 \mu$	$25^\circ \downarrow$

17-20 จงใช้วงกลมของโมร์แก้ปัญหาแบบฝึกหัดข้อ 13-16

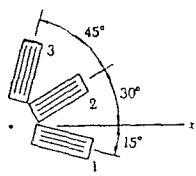
21-24 จากสภาวะความเครียดดังต่อไปนี้ ซึ่งวัดจากแผ่นวัตถุบางๆที่ไม่มีความเค้นที่ผิว โดยที่ v

$= \frac{1}{3}$ จงหา

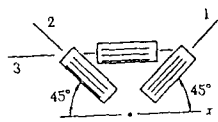
- ก) ทิศทางและขนาดของความเครียดหลัก (Principal Strains)
- ข) ความเครียดเฉือนสูงสุดในระนาบ
- ค) ความเครียดเฉือนสูงสุด

ϵ_x	ϵ_y	γ_{xy}
-600μ	-400μ	$+350 \mu$
$+200 \mu$	-600μ	-750μ
-650μ	-150μ	$+1200 \mu$
$+30 \mu$	$+570 \mu$	$+720 \mu$

25. จงหาความเครียด ϵ_x เมื่อวัดค่าความเครียดโดยใช้เครื่องวัดความเครียด (Strain Gage) ได้ดังนี้ $\epsilon_1 = +480 \mu$, $\epsilon_2 = -120 \mu$, $\epsilon_3 = +80 \mu$

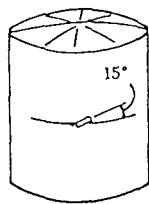


รูปข้อ 25

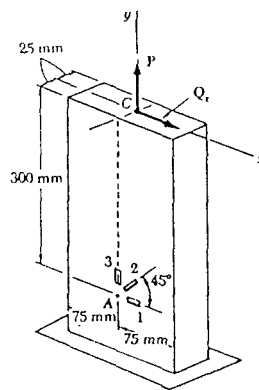


รูปข้อ 26

26. ค่าที่อ่านได้จากเครื่องวัดความเครียด (Strain Gage) ดังรูปคือ $\epsilon_1 = -100 \mu$, $\epsilon_2 = +720 \mu$, $\epsilon_3 = +630 \mu$ จงหาความเครียดต้งจากสูงสุดใบนระนาบ
27. กำหนดให้สภาวะของความเครียดที่วัดได้จากชิ้นส่วนเครื่องจักรคือ $\epsilon_x = +200 \mu$, $\epsilon_y = +450 \mu$, $\gamma_{xy} = -600 \mu$ โดยที่ $E = 70 \text{ GPa}$ และ $\nu = 0.30$ จงหาความเค้นหลัก (Principal Planes) และความเค้นหลัก (Principal Stresses)
28. ใช้เครื่องวัดความเครียด (Strain Gage) วางทำมุม 15° กับแนวราบบนถังเก็บแก๊สภายในถังทรงกระบอกดังรูป ผนังของถังทรงกระบอกหนา 6 mm มีเส้นผ่านศูนย์กลางภายใน 600 mm ทำจากเหล็กกล้าซึ่งมีค่า $E = 200 \text{ GPa}$ และ $\nu = 0.29$ อ่านค่าความเครียด (Strain Gage) ได้ 350μ จงหาความดันในถัง



รูปข้อ 28



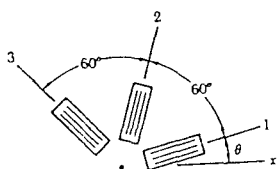
รูปข้อ 29

29. แท่งวัตถุสี่เหลี่ยมอยู่ภายใต้แรงกระทำ F ตามแนวแกน และแรงกระทำ Q_x ตามแนวราบที่จุด C ดังรูป ใช้เครื่องวัดความเครียด 45° - rosette ติดตั้งบนผิวของแท่งวัตถุที่จุด A อ่านค่าความเครียดได้ $\epsilon_1 = -60 \mu$, $\epsilon_2 = +240 \mu$, $\epsilon_3 = +200 \mu$ จงหาขนาดของ F และ Q_x โดยกำหนดให้ $E = 200 \text{ GPa}$, $G = 79 \text{ GPa}$ และ $\nu = 0.30$

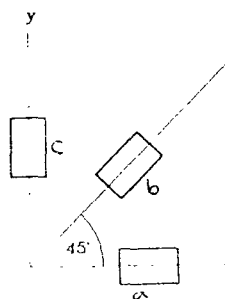
30. จงแสดงให้เห็นว่าผลรวมของความเครียดทั้งสามตัวที่ได้จากการวัดของเครื่องวัดความเครียด 60° - rosette นั้นไม่ขึ้นกับมุมของ rosette ที่หมุนไป และเท่ากับ

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 3 \epsilon_{ave}$$

โดยที่ ϵ_{ave} เป็นระยะที่วัดตามแนวราบจากจุดกำเนิดถึงศูนย์กลางวงกลมของโมร์สำหรับความเครียด



รูปข้อ 30

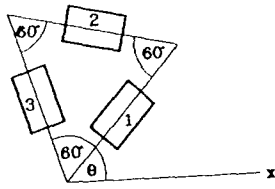


รูปข้อ 32

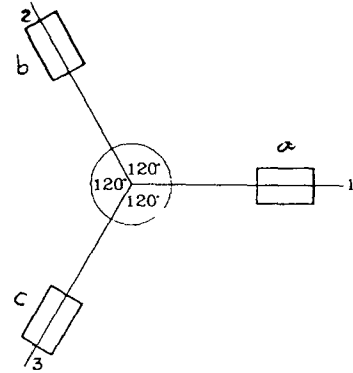
31. ใช้เครื่องวัดความเครียด 45° - rosette วัดความเครียดที่จุดที่กำหนดให้ได้ ϵ_1 , ϵ_2 และ ϵ_3 จงใช้วงกลมของโมร์แสดงให้เห็นว่าความเครียดหลัก (Principal Strain) คือ

$$\varepsilon_{\max, \min} = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 \right]^{1/2}$$

32. ตัวถังรถยนต์ถูกนำมาทดสอบที่ห้องทดสอบเพื่อหาค่าความเครียดหลักและค่าความเครียดเฉือนสูงสุด โดยการติดตั้งตัววัดความเครียดแบบStrain Rosette ดังแสดงในรูป ซึ่งพบว่ามีค่า $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$ เท่ากับ $520 \times 10^{-6}, 360 \times 10^{-6}, -80 \times 10^{-6}$ ตามลำดับ
33. ถ้าติดตั้งตัววัดความเครียดแบบStrain Rosette ดังแสดงในรูป จะได้ผลของ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ เท่ากับ $+250 \times 10^{-6}, +683 \times 10^{-6}, -183 \times 10^{-6}$ ตามลำดับ จงคำนวณหาค่าความเครียดหลัก และความเครียดเฉือนสูงสุด



รูปข้อ 33



รูปข้อ 34

34. ถ้าติดตั้งตัววัดความเครียดแบบStrain Rosette ดังแสดงในรูป จะได้ผลของ $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$ เท่ากับ $270 \times 10^{-6}, 160 \times 10^{-6}, 225 \times 10^{-6}$ ตามลำดับ จงคำนวณหาค่าความเครียดหลัก และทิศทางของระนาบหลัก

35. จงพิสูจน์สมการ (1) และ (2) ของการติดตั้งตัววัดความเครียดแบบStrain Rosette 60 องศา

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} \pm \frac{2}{3} \sqrt{\varepsilon_a(\varepsilon_b - \varepsilon_c) + \varepsilon_b(\varepsilon_c - \varepsilon_a) + \varepsilon_c(\varepsilon_a - \varepsilon_b)}$$

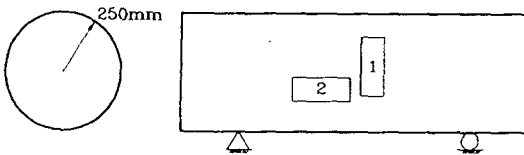
$$\tan 2\theta_p = \frac{\sqrt{3}(\varepsilon_b - \varepsilon_c)}{2\varepsilon_a - \varepsilon_b - \varepsilon_c}$$

36. จงพิสูจน์สมการ (1) และ (2) ของการติดตั้งตัววัดความเครียดแบบStrain Rosette 45 องศา

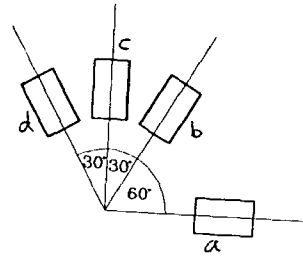
$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b - 2\varepsilon_c}{\varepsilon_a - \varepsilon_c}$$

37. ถังก๊าซรูปทรงกระบอกมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับ 500 มม. หนา 5 ซม. ได้ติดตั้งวัดความเครียดบนผิวถังดังแสดงในรูปซึ่งได้ค่า ϵ_1 เท่ากับ 255×10^{-6} และ ϵ_2 เท่ากับ 60×10^{-6} จงคำนวณหาค่าแรงดันที่มีภายในถังก๊าซ และค่าความเค้นหลักและค่าความเค้นเฉือนสูงสุด กำหนดให้ G เท่ากับ 80 GPa (ตอบ $P = 12.48 \text{ MPa}$, $\sigma_1 = 62.4 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 31.2 \text{ MPa}$, $\tau_{\max} = 31.2 \text{ MPa}$)

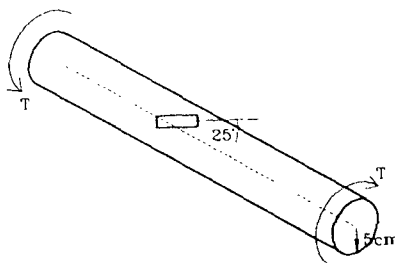


รูปข้อ 37



รูปข้อ 38

38. จากรูปแสดงการติดตั้งตัววัดความเครียดแบบ Strain Rosette ซึ่งได้ผลดังนี้ $\epsilon_a, \epsilon_b, \epsilon_c$ เท่ากับ -57.5×10^{-6} , -57.5×10^{-6} , 220×10^{-6} ตามลำดับ จงคำนวณหา ϵ_c ค่าความเค้นหลักและค่าความเค้นเฉือนสูงสุด (ตอบ $\epsilon_c = 127.5 \mu\epsilon$, $\epsilon_1 = 220 \mu\epsilon$, $\epsilon_2 = -150 \mu\epsilon$, $\tau_{\max} = 370 \times 10^{-6} \text{ rad}$)
39. ท่อนเหล็กขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางเท่ากับ 10 ซม. ดังแสดงในรูป มีแรงบิดกระทำ ซึ่งทำให้เกิดค่า ϵ เท่ากับ 300×10^{-6} โดยจากการติดตั้งวัดความเครียดที่แนว 25° กับแนวแกนท่อนเหล็ก กำหนดให้ค่า G เท่ากับ 80 GPa (ตอบ 12.30 kN.m)



รูปข้อ 39

สัปดาห์ที่ 9

หัวข้อเรื่อง การวิเคราะห์ความเครียด (4)

(3 ชั่วโมง)

ความคิดรวบยอด

1. การวิเคราะห์ความเครียดจะเกี่ยวข้องกับการหาความเครียด ณ จุดๆหนึ่ง และการแปลงความเครียด ซึ่งจะมีรูปแบบของสมการที่คล้ายคลึงกับสมการของความเค้น
2. เนื่องจาก differential equation ของ strain component มีอยู่ 6 สมการ โดยต้องการหา dependent variable เพียง 3 ตัว จึงต้องมีความสัมพันธ์ระหว่าง strain component เพื่อให้ compatible สมการที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่าง strain component นี้เรียกว่า compatibility equation

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. คำนวณหาความเครียด ณ จุดๆหนึ่งได้
2. เขียนสมการของ compatibility ได้

ส่งเขปเนื้อหา

หน่วยที่ 6. การวิเคราะห์ความเครียด

- การหาความเครียด ณ จุดๆหนึ่ง
- สมการของ compatibility

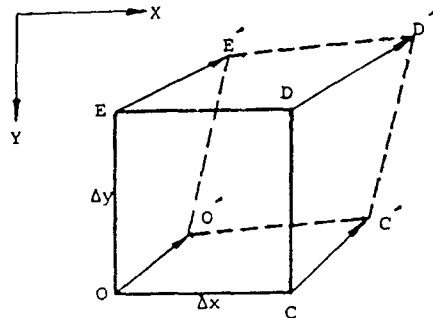
หน่วยที่ 6 การวิเคราะห์ความเครียด

2-6 การวิเคราะห์ความเครียด

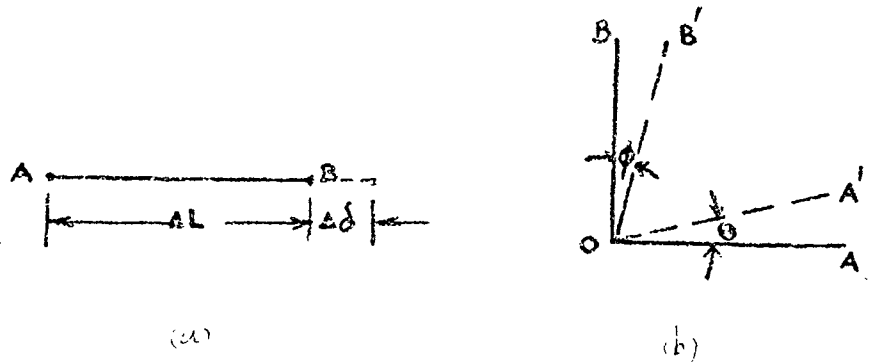
2-6.1 คำจำกัดความและการหาStrain component วัตถุยืดหยุ่นอันหนึ่งเรียกว่าเกิดความเครียดเมื่อความสัมพันธ์ของตำแหน่งของจุดต่าง ๆ บนวัตถุนั้นมีค่าเปลี่ยนไป ความเครียด มีอยู่ 2 ชนิดคือ normal strain หรือ logitudinal strain และ shearing strain

โดยปกติการเปลี่ยนรูปเกิดขึ้นทั้ง 3 มิติ แต่เพื่อให้การวิเคราะห์สะดวกและง่ายขึ้น จึงพิจารณาการเปลี่ยนรูปของเอเลเมนต์ (element) เล็ก ๆ ของวัตถุซึ่งเกิดขึ้นเฉพาะในระนาบ xy ดังแสดงในรูป 2-6.1 การเปลี่ยนรูปในบริเวณใกล้ ๆ จุด O เกิดขึ้นสองแบบคือ ความยาว OC และ OE เปลี่ยนแปลงไป และเส้นทั้งสองหมุนไปด้วยความสัมพันธ์กัน การวัดส่วนเปลี่ยนรูปทั้งสองแบบที่เกิดขึ้นด้วยปริมาณไม่มีมิติเรียกว่าความเครียด

ส่วนเปลี่ยนแปลงในความยาวต่อความยาวเดิมของเส้นตรง เรียกว่า ความเครียดดั่งฉาก (normal strain) แทนด้วยสัญลักษณ์ ϵ (epsilon) และอักษรห้อยท้ายตัวเดียว ตัวอักษรห้อยท้ายระบุทิศทางเดิมของเส้นที่ถูกวัดความเครียด



รูป 2-6.1 การเปลี่ยนรูปในระนาบ xy ของเอเลเมนต์เล็ก ๆ ของวัตถุ



รูป 2-6.2

ให้ ΔL ในรูป 2-6.2a เป็นระยะระหว่างจุด 2 จุดบน elastic body ก่อนที่จะถูกแรงภายนอกมากระทำให้เกิด strain $\Delta\delta$ เป็นความยาวที่เปลี่ยนไปของระยะระหว่าง AB ภายหลังจากที่ body นี้ถูกแรงมากระทำ normal strain คือ

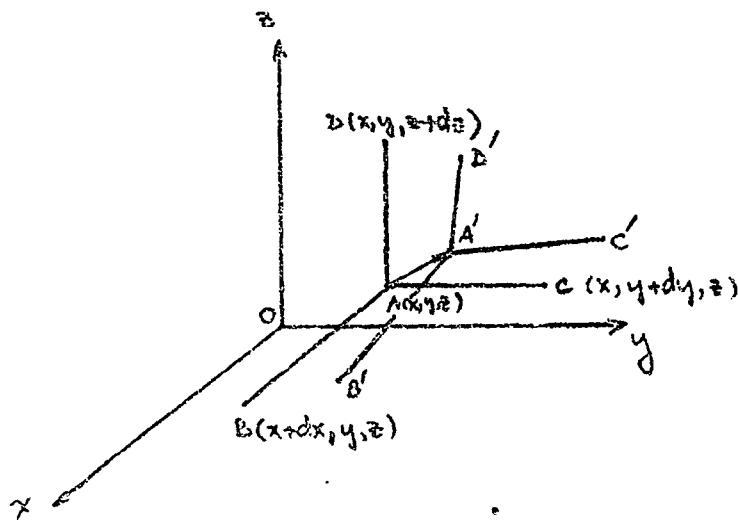
$$\epsilon = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta\delta}{\Delta L} = \frac{d\delta}{dl} \quad (2-6.1a)$$

และค่าเฉลี่ยของ normal strain คือ

$$\epsilon_{av} = \frac{\Delta\delta}{\Delta L} \quad (2-6.1b)$$

Shearing strain คือ ค่าของมุมเป็นเรเดียนที่เปลี่ยนไปของเส้นตรง 2 เส้นซึ่งเป็นมุมฉากกัน ก่อนที่จะถูกแรงภายนอกมากระทำ ดังนั้นถ้าเราให้ OA และ OB เป็นเส้นตรงตั้งฉากกันใน elastic body ตามรูป 2-6.2b เราจะได้ว่า shearing strain คือ

$$\gamma = \theta + \phi \quad (2-6.1c)$$



รูป 2-6.3

ในการหา strain component ให้เราพิจารณาจุด A(x,y,z) ซึ่งอยู่ใน elastic body ก่อนที่ body จะ deform จุด A,B,C,D มี coordinate ตามรูป 2-6.3 หลังจาก that body นี้ deform แล้ว จุด A,B,C,D จะเคลื่อนไปอยู่ที่จุด A',B',C',D' ตามลำดับ โดยทั่วไปแล้ว displacement ของจุดใด ๆ จะมี 3 component ให้ u, v และ w เป็น displacement ในทิศ x,y และ z ของจุด A นั่นคือ vector AA' จะมี component u, v และ w

$$u = u(x,y,z)$$

$$v = v(x,y,z)$$

$$w = w(x,y,z)$$

การที่จะหา coordinate ของจุดต่าง ๆ ให้เรา project จุดเหล่านี้ลงบนระนาบ xy ,yz และ zx ดังรูป 2-6.4a , 2-6.4b และ 2-6.4c พิจารณาจากรูป เราจะได้ coordinate ของจุดเหล่านี้ก่อนและภายหลังจากที่ elastic body นี้ deform แล้วดังที่ได้แสดงเอาไว้ในตาราง 2 –6.1

จากคำจำกัดความของ normal strain เราจะเห็นว่า normal strain ในทิศทาง x , ϵ_{xx} หรือ การเปลี่ยนความยาวของเส้น AB ต่อหนึ่งหน่วยความยาวคือ

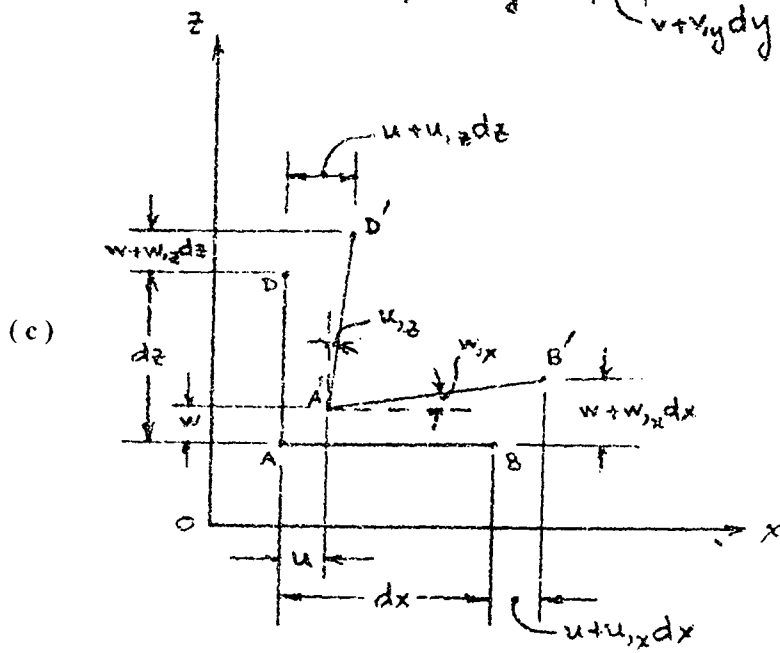
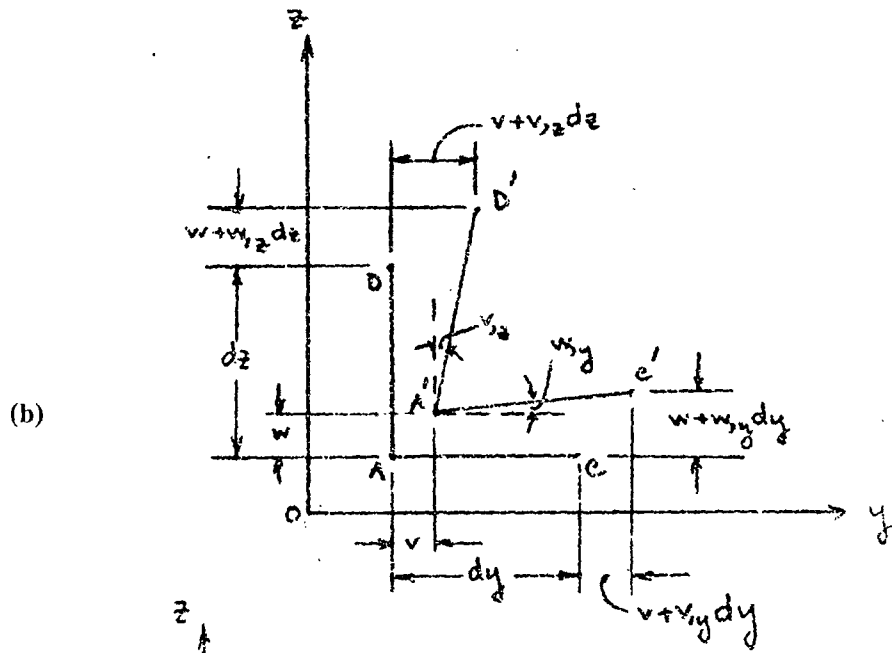
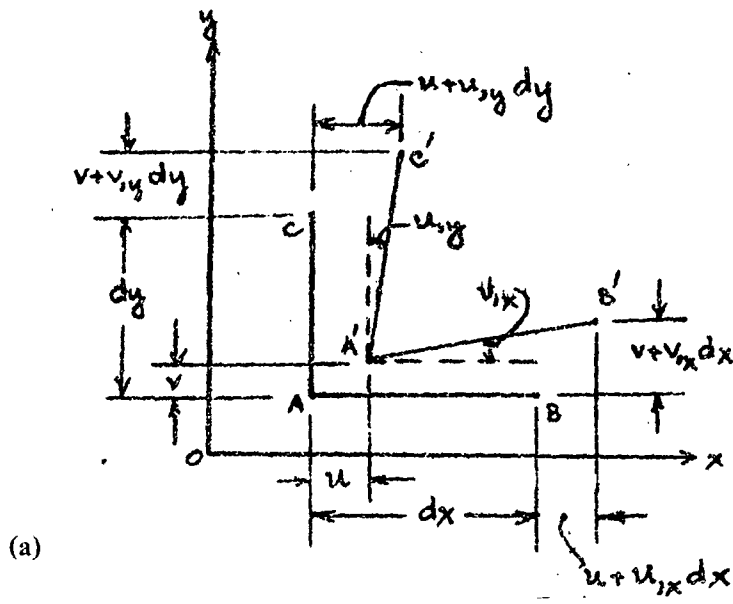
$$\epsilon_{xx} = \frac{(x + dx + u + u_{,x} dx) - (x + u) - dx}{dx}$$
$$\epsilon_{xx} = u_{,x}$$

ส่วน normal strain ในทิศ y และ z คือ

$$\epsilon_{yy} = \frac{(y + dy + v + v_{,y} dy) - (y + v) - dy}{dy}$$
$$\epsilon_{yy} = v_{,y}$$
$$\epsilon_{zz} = \frac{(z + dz + w + w_{,z} dz) - (z + w) - dz}{dz}$$
$$\epsilon_{zz} = w_{,z}$$

ตารางที่ 2-6.1

ก่อน deformation		หลัง deformation	
จุด	coordinate	จุด	coordinate
A	x	A'	x + u
	y		y + v
	z		z + x
B	x + dx	B'	x+dx+u+u _{,x} dx
	y		y+v+v _{,x} dx
	z		z+w+w _{,x} dx
C	x	C'	x+u+u _{,y} dy
	y + dy		y+dy+v+v _{,y} dy
	z		z+x+w _{,y} dy
D	x	D'	x+u+u _{,z} dz
	y		y+v+v _{,z} dz
	z + dz		z+dz+w+w _{,z} dz



ในการหา component ของ shearing strain ให้เราพิจารณา projection บนระนาบ xy ตามรูป 2-6.4a จากคำจำกัดความของ shearing strain ในระนาบ xy คือ

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x}$$

ในทำนองเดียวกันถ้าเราพิจารณา projection บนระนาบ yz และ zx เราก็จะได้ shearing strain อีกสอง component คือ

$$\gamma_{yz} = v_{,z} + w_{,y}$$

$$\gamma_{zx} = u_{,z} + w_{,x}$$

ดังนั้นเราจะได้ strain ทั้งหมด component คือ

$$\epsilon_{xx} = u_{,x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\epsilon_{yy} = v_{,y} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = v_{,z} + w_{,y} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\epsilon_{zz} = w_{,z} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = u_{,z} + w_{,x} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

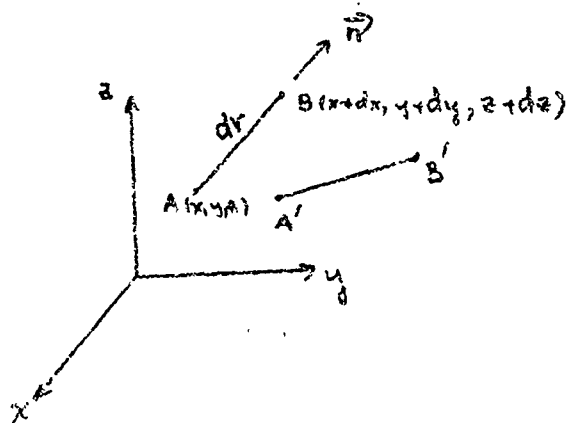
เราจะเห็นว่า projection ลงบนระนาบ xy หรือ yx ก็ได้ผลเช่นเดียวกันนั้น

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz}$$

normal strain มีค่าเป็นบวกเมื่อเกิดการยืดออกและมีค่าเป็นลบเมื่อเกิดการหดตัวขึ้น ส่วน shearing strain มีค่าเป็นบวก เมื่อมุมระหว่างเส้นตรงที่ตั้งฉากกันมีขนาดเล็กลงและมีค่าเป็นลบเมื่อมุมนี้มีขนาดเพิ่มขึ้น

2-6.2 การหา strain ณ จุด ๆ หนึ่ง

ให้ AB เป็นเส้นตรงขนาดสั้น (line element) ซึ่งอยู่ใน elastic body ผ่านจุด A มีความยาว dr ให้ $\bar{n}$ เป็น unit vector ของเส้น AB และมี direction cosine เป็น

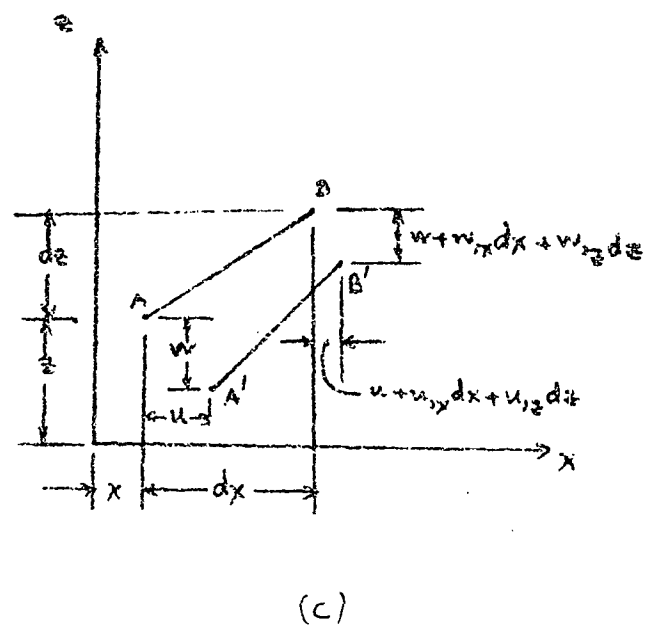
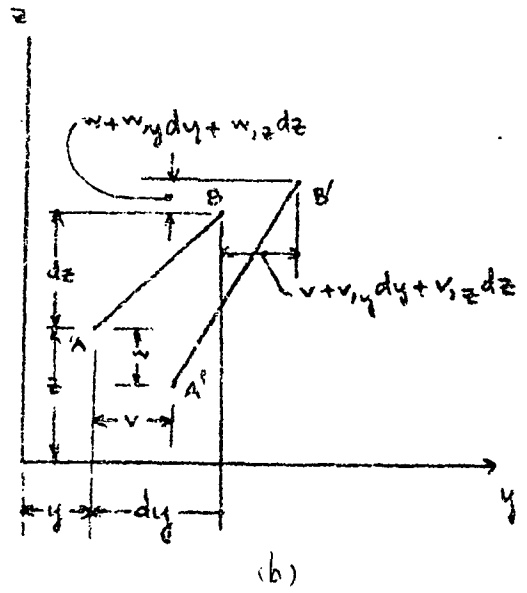
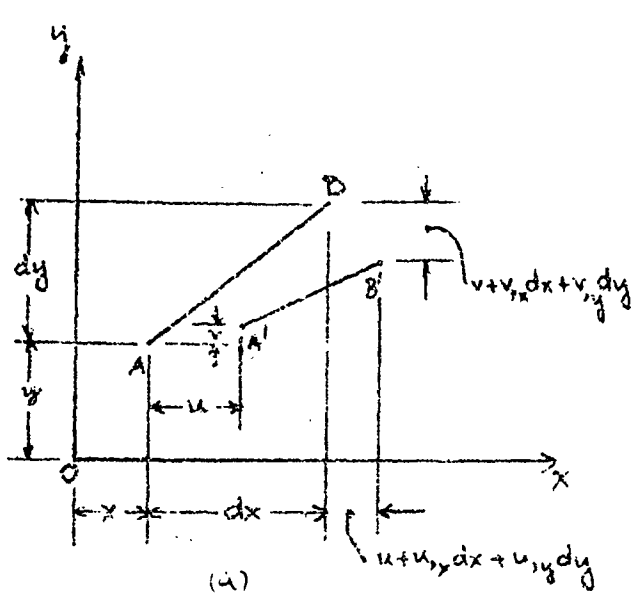


รูป 2-6.5

$$\cos(n,x) = l \quad , \quad \cos(n,y) = m \quad , \quad \cos(n,z) = n$$

ฉะนั้น $dx = l dr \quad , \quad dy = m dr \quad , \quad dz = n dr \quad (2-6.3)$

ในขณะที่ elastic body นี้ deform เส้น AB จะเคลื่อนไปอยู่ที่ A'B' โดยที่ u, v และ w เป็น displacement component ของจุด A ถ้าเรา project เส้น AB และ A'B' ลงบนระนาบ xy, yz และ zx ดังรูป 2-6.6a ถึง 2-6.6c เราจะได้ coordinates ของจุด A และ B ดังที่ได้แสดงไว้ในตารางที่ 2-6.2



รูป 2-6.6

ตาราง 2-6.2

ก่อน deformation		หลัง deformation	
จุด	Coordinate	จุด	Coordinate
A	x	A'	x + u
	y		y + v
	z		z + w
B	x + dx	B'	x + dx + u + u _x dx + u _y dy + u _z dz
	y + dy		y + dy + v + v _x dx + v _y dy + v _z dz
	z + dz		z + dz + w + w _x dx + w _y dy + w _z dz

ให้ ϵ_n เป็น normal strain ของเส้น AB ในทิศทาง $\vec{n}$ จากค่าจำกัดความของ strain

$$\epsilon_n = \frac{A'B' - AB}{AB}$$

$$\therefore (1 + \epsilon_n)^2 = \left(\frac{A'B'}{AB} \right)^2 \quad (2-6.4a)$$

แต่ว่า $(A'B')^2 = (dx + u_x dx + u_y dy + u_z dz)^2 + (dy + v_x dx + v_y dy + v_z dz)^2 + (dz + w_x dx + w_y dy + w_z dz)^2$

และ $(AB)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dr)^2$

แทนค่า $(AB)^2$, $(A'B')^2$ และ (2-6.3) ลงใน (2-6.4a) เราจะได้

$$(1 + \epsilon_n)^2 = [l(1 + u_x) + m u_y + n u_z]^2 + [l v_x + m(1 + v_y) + n v_z]^2 + [l w_x + m w_y + n(1 + w_z)]^2 \quad (2-6.4b)$$

เนื่องจากเราเกี่ยวข้องกับ small strain theory เท่านั้นดังนั้น $\epsilon_n^2 = 0$ และให้ละทิ้งเทอมที่มี order สอง เช่น $(u_x)^2$, $(v_y)^2$, $(v_z)^2$ เป็นต้น แล้วใช้ความสัมพันธ์ระหว่าง direction cosine $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ สมการ (2-6.4b) จะกลายเป็น

$$\epsilon_n = l^2 u_x + m^2 v_y + n^2 w_z + l m (u_y + v_x) + m n (v_z + w_y) + n l (u_z + w_x) \quad (2-6.5a)$$

หรือถ้าเราใช้สมการ(2-6.2)ด้วย เราจะได้

$$\epsilon_n = l^2 \epsilon_{xx} + m^2 \epsilon_{yy} + n^2 \epsilon_{zz} + l m \gamma_{xy} + m n \gamma_{yz} + n l \gamma_{zx} \quad (2-6.5b)$$

เนื่องจาก strain และ stress มีคุณสมบัติบางอย่างคล้ายคลึงกันดังนั้นเราจึงจะวิเคราะห์ strain โดยการใช้ความคล้ายคลึงกับ stress ดังต่อไปนี้

แทนค่าจากสมการ (1-2.1) ลงในสมการ (1-1.5b) เราจะได้

$$\sigma_n = l^2 \sigma_{xx} + m^2 \sigma_{yy} + n^2 \sigma_{zz} + 2 l m \tau_{xy} + 2 m n \tau_{yz} + 2 n l \tau_{zx}$$

ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบกับสมการ (2-6.5b) จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &\rightarrow \epsilon_{xx} & \sigma_{yy} &\rightarrow \epsilon_{yy} & \sigma_{zz} &\rightarrow \epsilon_{zz} \\ \tau_{xy} &\rightarrow \frac{\gamma_{xy}}{2} & \tau_{yz} &\rightarrow \frac{\gamma_{yz}}{2} & \tau_{zx} &\rightarrow \frac{\gamma_{zx}}{2}\end{aligned}$$

และถ้าเราให้ $\epsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$, $\epsilon_{yz} = \frac{\gamma_{yz}}{2}$, $\epsilon_{zx} = \frac{\gamma_{zx}}{2}$ เราจะมี symmetric strain tensor คือ

$$(\epsilon) = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (2-6.6)$$

หรือ

$$(\epsilon) = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_{yy} & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

ฉะนั้นเราจึงสามารถที่จะหา principal strain และ direction ได้เช่นเดียวกับในกรณีของ stress ให้ ϵ แทน principal strain ดังนั้นเราจะได้สมการดังต่อไปนี้สำหรับการหา principal strain

$$\begin{aligned}l(\epsilon_{xx} - \epsilon) - m\epsilon_{yy} + n\epsilon_{zz} &= 0 \\ l(\epsilon_{yy} - \epsilon) + m\epsilon_{xx} - n\epsilon_{zz} &= 0 \\ l\epsilon_{xx} + m\epsilon_{yy} - n(\epsilon_{zz} - \epsilon) &= 0\end{aligned} \quad (2-6.7a)$$

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{xx} - \epsilon & \epsilon_{yx} & \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} - \epsilon & \epsilon_{zy} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} - \epsilon \end{vmatrix} = 0 \quad (2-6.7b)$$

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (2-6.7c)$$

ถ้าสมการ (2-6.7b) ถูกกระจายออกมาระยะได้สมการ

$$\epsilon^3 - J_1\epsilon^2 + J_2\epsilon - J_3 = 0 \quad (2-6.7d)$$

โดยที่ J_1, J_2, J_3 เป็น invariant ทั้งสามของ strain และมีค่าทำนองเดียวกับสมการ (1-4.2e) โดยการแทน stress ด้วย strain component ให้ $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ เป็น principal strain เราจะได้ความสัมพันธ์ เช่นเดียวกันกับสมการ (1-4.2f) คือ

$$\begin{aligned} J_1 &= \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \\ J_2 &= \epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_2 \epsilon_3 + \epsilon_3 \epsilon_1 \\ J_3 &= \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \end{aligned} \quad (2-6.7c)$$

หรือ

$$\begin{aligned} J_1 &= \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} \\ J_2 &= \epsilon_{xx} \epsilon_{yy} + \epsilon_{yy} \epsilon_{zz} + \epsilon_{zz} \epsilon_{xx} - \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\gamma_{yz}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\gamma_{zx}}{2}\right)^2 \\ J_3 &= \epsilon_{xx} \epsilon_{yy} \epsilon_{zz} - \epsilon_{xx} \left(\frac{\gamma_{yz}}{2}\right)^2 - \epsilon_{yy} \left(\frac{\gamma_{zx}}{2}\right)^2 - \epsilon_{zz} \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2 - 2 \frac{\gamma_{xy}}{2} \frac{\gamma_{yz}}{2} \frac{\gamma_{zx}}{2} \end{aligned}$$

ในกรณีของ plan strain นั่นคือ $\epsilon_{zz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zx} = 0$ เราจะได้ principal strain และ direction ในทำนองเดียวกับ stress คือ

$$\epsilon_1, \epsilon_2 = \frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \epsilon_{xy}^2} \quad (2-6.8a)$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\epsilon_{xy}}{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}} \quad (2-6.8b)$$

ตัวอย่าง 2-6.1 กำหนดให้ strain tensor

$$(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

จงหา principal strain และ direction

วิธีทำ จากสมการ (2-6.7b)

$$\begin{vmatrix} 1 - \epsilon & 2 & 2 \\ 2 & 1 - \epsilon & 1 \\ 2 & 1 & 1 - \epsilon \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - \epsilon)[(1 - \epsilon)^2 - 1] - 2[2(1 - \epsilon) - 2] - 2[2 - 2(1 - \epsilon)] = 0$$

หรือ

$$\epsilon(\epsilon^2 - 3\epsilon - 6) = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$\epsilon_1 = 0, \epsilon_2 = 4.372, \epsilon_3 = -1.372$$

Principal direction จะหาได้จากการใช้สมการ (2-6.7a,c) ดังนี้

$$\epsilon = \epsilon_1 :$$

$$l_1 + 2m_1 + 2n_1 = 0 \quad (a)$$

$$2l_1 + m_1 + n_1 = 0 \quad (b)$$

$$2l_1 + m_1 + n_1 = 0 \quad (c)$$

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \quad (d)$$

จาก (a) และ (b) จะเห็นว่า

$$l_1 = -2m_1(m_1 + n_1) \quad \text{และ} \quad l_1 = -\frac{1}{2}(m_1 + n_1)$$

ซึ่งจะเป็นไปได้ก็ต่อเมื่อ

$$m_1 + n_1 = 0$$

ฉะนั้น

$$l_1 = 0 \quad \text{และ} \quad m_1 = -n_1$$

แทนค่า l_1 , m_1 , n_1 ลงใน (d) (ให้ค่า m_1 เป็น +) จะได้

$$m_1 = -n_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ดังนั้น principal strain $\epsilon_1 = 0$ กระทำกับแกน x, y, z เป็นมุม 90° , 45° และ 135° ตามลำดับ นั่นคือ principal plane คือ plane yz

ในทำนองเดียวกัน โดยการใช้สมการ(2-6.7a,c) สำหรับ ϵ_2 และ ϵ_3 จะพบว่าระนาบหลักคือ

$$l_2 = \cos(\epsilon_2, x) = 0.6425$$

$$m_2 = \cos(\epsilon_2, y) = 0.5418$$

$$n_2 = \cos(\epsilon_2, z) = 0.5418$$

$$l_3 = \cos(\epsilon_3, x) = -0.766$$

$$m_3 = \cos(\epsilon_3, y) = 0.454$$

$$n_3 = \cos(\epsilon_3, z) = 0.454$$

EXAMPLE 2-6.2 Three – Dimensional State of Strain

The parallelopiped in Fig E2-6.4 is deformed into the shape indicated by the dashed straight lines (small displacements). The displacement are given by the following relation : $u = C_1xyz$, $v = C_2xyz$ and $w = C_3xyz$.

(a) Determine the state of strain at point E when the coordinate of point E* for the deformed body are (1.504, 1.002, 1.996).

(b) Determine the normal strain at E in the direction of line EA

(c) Determine the shear strain at E for the undeformed orthogonal lines EA and E

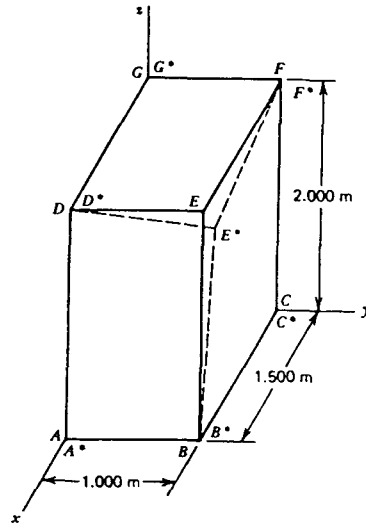


Fig. E2-6.2

SOLUTION The magnitudes of C_1 , C_2 and C_3 are obtained from the fact that the displacements of point E are known as follow: $u_E = 0.004$ m, $v_E = 0.002$ m and $w_E = -0.004$. Thus

$$u = \frac{0.004}{3} xyz$$

$$v = \frac{0.002}{3} xyz$$

$$w = -\frac{0.004}{3} xyz$$

(a) The strain components for the state of strain at point E are given by

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{0.004}{3} yz = 0.00267 \quad , \quad \epsilon_{yy} = 0.00200 \quad , \quad \epsilon_{zz} = -0.00200$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{0.002}{3} yz + \frac{0.004}{3} xz \right) = 0.00267$$

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} = 0.00533 \quad , \quad \gamma_{yz} = 2\epsilon_{yz} = -0.00400$$

$$\gamma_{xz} = 2\epsilon_{xz} = -0.00400$$

(b) Let the X axis lie along the line from E to A. The direction cosines of EA are $l_1 = 0$, $m_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ and $n_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}}$. The magnitude for ϵ_{xx}

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{xx} m_1^2 + \epsilon_{yy} n_1^2 + 2\epsilon_{xy} m_1 n_1$$

(c) Let the Y axis lie along the line from E to F. The direction cosines of EF are $l_2 = -1$, $m_2 = 0$ and $n_2 = 0$. The shear strain $\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy}$ is given by

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} = 2\epsilon_{xx} l_2 m_1 + 2\epsilon_{yz} l_2 n_1$$

$$\frac{(0.00533)}{\sqrt{5}} = \frac{(-0.00400)(2)}{\sqrt{5}} = -0.00160$$

2-6.3 สมการของ compatibility

จากความสัมพันธ์ระหว่าง strain component และ displacement field u, v, w ซึ่งเราได้หามาแล้วในสมการ (2-6.2) เราจะเห็นได้ว่าเรามี differential equation อยู่ 6 สมการ แต่ว่าเรามี dependent variable ที่ต้องการหาอยู่เพียง 3 ตัว คือ u, v, w ฉะนั้นเราจึงไม่สามารถที่จะหา single-valued solution ของ u, v, w จากสมการ (2-6.2) ได้ นั่นคือ strain field ไม่ compatible ด้วยเหตุนี้จึงจำเป็นที่จะต้องมีความสัมพันธ์ระหว่าง strain component สมการที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่าง strain component นี้มีชื่อเรียกว่า compatibility equation ซึ่งถูกค้นพบโดย Saint Venant เป็นคนแรก สมการเหล่านี้(ซึ่งอาจจะพิสูจน์ได้โดยการ differentiate สมการ (2-6.2)) คือ

$$\varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} = \gamma_{xy,xy} \quad (2-6.9a)$$

$$\varepsilon_{xy,zz} + \varepsilon_{zz,xy} = \gamma_{yz,yz} \quad (2-6.9b)$$

$$\varepsilon_{zz,xx} + \varepsilon_{xx,zz} = \gamma_{zx,zx} \quad (2-6.9c)$$

$$2\varepsilon_{xx,zy} = (\gamma_{yz,zy} - \gamma_{zy,zy} + \gamma_{zx,zx})_{,x} \quad (2-6.9d)$$

$$2\varepsilon_{yy,xz} = (\gamma_{zx,zx} - \gamma_{xz,xz} + \gamma_{xy,xy})_{,y} \quad (2-6.9e)$$

$$2\varepsilon_{zz,xy} = (\gamma_{xy,xy} - \gamma_{yx,yx} + \gamma_{yz,yz})_{,z} \quad (2-6.9f)$$

สำหรับในกรณีของ plane strain ในระนาบ xy นั่นคือ $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yz} = 0$ compatibility equation จะมีเพียงสมการเดียวเท่านั้น คือ

$$\varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} = \gamma_{xy,xy} \quad (2-6.10)$$

ตัวอย่าง 2-6.4 ถ้า strain component ในกรณีของ plane strain คือ

$$\varepsilon_{xx} = Ax^2 + By^2 \quad \varepsilon_{yy} = Bx^2 + Ay^2 \quad \gamma_{xy} = 2Bxy$$

โดยที่ A และ B เป็นค่าคงที่ strain field นี้เป็นไปได้หรือไม่ ถ้าหากว่า strain field นี้เป็นไปได้ จงแก้ไขให้เป็นไปได้

วิธีทำ

$$\varepsilon_{xx,yy} = 2B \quad \varepsilon_{yy,xx} = 2B \quad \gamma_{xy,xy} = 2B$$

แทนค่าลงใน สมการ (2-6.10) เราจะได้

$$4B = 2B$$

ซึ่งเป็นไปได้ นอกเสียจากว่า $B = 0$ ฉะนั้น strain field ที่ควรจะเป็น คือ

$$\varepsilon_{xx} = Ax^2 \quad \varepsilon_{yy} = Ay^2 \quad \gamma_{xy} = 0$$

ถ้าหากว่า B ไม่เท่ากับศูนย์ strain field การจะกลายเป็น

$$\varepsilon_{xx} = Ax^2 + By^2 \quad \varepsilon_{yy} = Bx^2 + Ay^2 \quad \gamma_{xy} = 4Bxy$$

แบบฝึกหัด

- 2.34. The tension member in Fig. P2.34 has the following dimensions: $L = 5$ m, $b = 100$ mm, and $h = 200$ mm. The (x, y, z) coordinate axes are parallel to the edges of the member, with origin O located at the centroid of the left end. Under the deformation produced by load P , the origin O remains located at the centroid of the left end and the coordinate axes remain parallel to the edges of the deformed member. Under the action of load P , the bar elongates 20 mm. Assume that the volume of the bar remains constant with $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy}$.

- (a) Determine the displacements for the member and the state of strain at point Q , assuming that the small-displacement theory holds.
- (b) Determine ϵ_{zz} at point Q based on the assumption that displacements are not small.

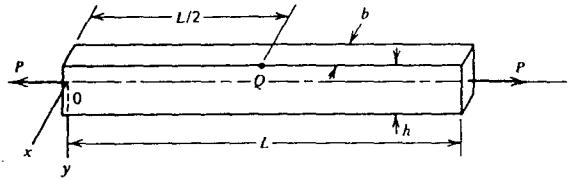


Figure P2.34

- 2.35. In many practical engineering problems, the state of strain is approximated by the condition that the normal and shear strains for some direction, say, the z direction, are zero, that is, $\epsilon_{zz} = \epsilon_{zx} = \epsilon_{zy} = 0$ (plane strain). In Chapter 1, it is shown that analogously, $\epsilon_{xx} = \epsilon_{xy} = 0$, but $\epsilon_{zz} \neq 0$ for members made of isotropic materials and loaded such that the state of stress may be approximated by the condition $\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$ (plane stress). Assume that ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , and ϵ_{xy} for the (x, y) coordinate axes shown in Fig. P2.35 are known. Let the (X, Y) coordinate axes be defined by a counterclockwise

transformation for plane stress, show that the transformation equations of plane strain are $\epsilon_{XX} = \epsilon_{xx} \cos^2 \theta + \epsilon_{yy} \sin^2 \theta + 2\epsilon_{xy} \sin \theta \cos \theta$ and $\epsilon_{XY} = -\epsilon_{xx} \sin \theta \cos \theta + \epsilon_{yy} \sin \theta \cos \theta + \epsilon_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$. [See Eq. (2.30).]

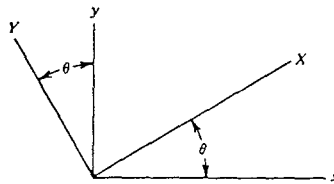


Figure P2.35

- 2.36. The square plate in Fig. P2.36 is loaded so that the plate is in a state of plane strain ($\epsilon_{zz} = \epsilon_{zx} = \epsilon_{zy} = 0$).
- (a) Determine the displacements for the plate given the deformations shown and the strain components for the (x, y) coordinate axes.
 - (b) Determine the strain components for the (X, Y) axes.

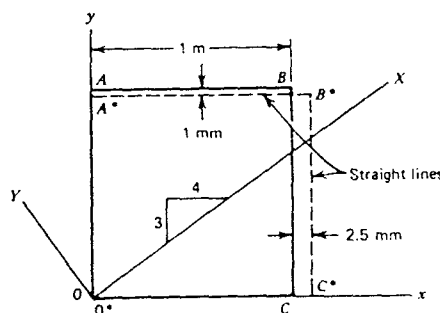
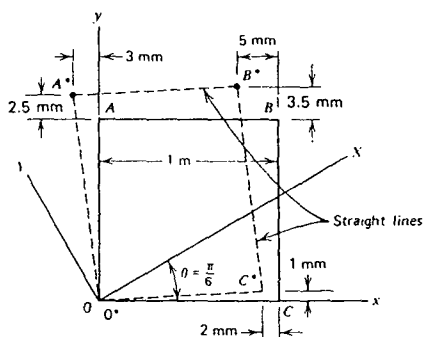


Figure P2.36

- 2.37. The square plate in Fig. P2.37 is loaded so that the plate is in a state of plane strain ($\epsilon_{zz} = \epsilon_{xx} = \epsilon_{xy} = 0$.)



- (a) Determine the displacements for the plate for the deformations shown and the strain components for the (x, y) coordinate axes.
 (b) Determine the strain components for the (X, Y) axes.

Ans. (a) $u = -0.0020x - 0.0030y$, $v = 0.0010x + 0.0025y$, $\epsilon_{xx} = -0.0020$, $\epsilon_{yy} = 0.0025$, $\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} = -0.0020$;
 (b) $\epsilon_{XX} = -0.00174$, $\epsilon_{YY} = 0.00224$, $\gamma_{XY} = 2\epsilon_{XY} = 0.00290$

- 2.38. Determine the orientation of the (X, Y) coordinate axes for principal directions in Problem 2.37. What are the principal strains?

- 2.39. The plate in Fig. P2.39 is loaded so that a state of plane strain ($\epsilon_{zz} = \epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = 0$) exists.

- (a) Determine the displacements for the plate for the deformations shown and the strain components at point B.
 (b) Let the X axis extend from point 0 through point B. Determine ϵ_{XX} at point B.

Ans. (a) (dimensions in m) $u = 0.000667xy$, $v = 0.001333xy$, $\epsilon_{xx} = 0.00200$, $\epsilon_{yy} = 0.00200$, $\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} = 0.00500$;
 (b) $\epsilon_{XX} = 0.00400$

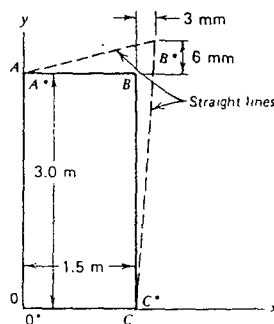


Figure P2.39

- 2.40. The nonzero strain components at a point in a loaded member are $\epsilon_{xx} = 0.00180$, $\epsilon_{yy} = -0.00108$, and $\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} = -0.00220$. Using the results of Problem 2.35, determine the principal strain directions and principal strains.
 2.41. Solve for the principal strains in Problem 2.40 by using Eqs. (2.77b) and (2.78).

Ans. $\epsilon_1 = 0.00217$, $\epsilon_2 = -0.00145$, $\epsilon_3 = 0$

- 2.42. Determine the principal strains at point E for the deformed parallelepiped in Example 2.4.
 2.43. When solid circular torsion members are used to obtain material properties for finite strain applications, an expression for the engineering shear strain γ_{xz} is needed, where the (x, z) plane is a tangent plane and the z axis is parallel to

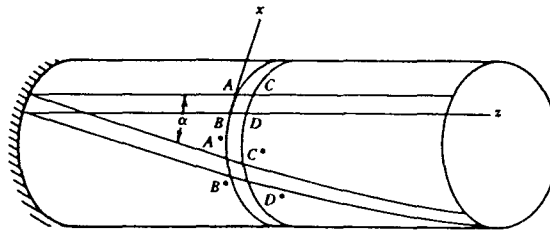


Figure P2.43

the axis of the member as indicated in Fig. P2.43. Consider an element $ABCD$ in Fig. P2.43 for the undeformed member. Assume that the member deforms such that the volume remains constant and the diameter remains unchanged. (This is an approximation of the real behavior of many metals.) Thus, for the deformed element $A^*B^*C^*D^*$, $A^*B^* = AB$, $C^*D^* = CD$, and the distance along the z axis of the member between the parallel curved lines A^*B^* and C^*D^* remains unchanged. Show that Eq. (2.71) gives the result $\gamma_{zx} = \tan \alpha$, where α is the angle between AC and A^*C^* , where $\gamma_{zx} = 2\epsilon_{zx}$ is defined to be the engineering shear strain.

- 2.44. A state of plane strain exists at a point in a member, with the nonzero strain components $\epsilon_{xx} = -2000 \mu$, $\epsilon_{yy} = 400 \mu$, and $\epsilon_{xy} = -900 \mu$.

- Determine the principal strains in the (x, y) plane and the orientation of the rectangular element on which they act. (See Example 2.6.)
- Determine the maximum shear strain in the (x, y) plane and the orientation of the rectangular element on which it acts.
- Show schematically the deformed shape of a rectangular element in the reference orientation, along with the original undeformed element. (See Example 2.6.)

- 2.45. For the rectangular strain rosette, Fig. 2.20b, let arm a be directed along the positive x axis of axes (x, y) .

- Show that the maximum principal strain is located at angle θ , counterclockwise to the x axis, where

$$\tan 2\theta = \frac{2\epsilon_b - \epsilon_a - \epsilon_c}{\epsilon_a - \epsilon_c}$$

- Show that the two principal surface strains ϵ_1 and ϵ_2 are given by

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} + R, \quad \epsilon_2 = \frac{\epsilon_a + \epsilon_c}{2} - R$$

where

$$R = \frac{1}{2}[(\epsilon_a - \epsilon_c)^2 + (2\epsilon_b - \epsilon_a - \epsilon_c)^2]^{1/2}$$

- Construct the corresponding Mohr's circle for the rectangular rosette.

- 2.46. For the delta strain rosette, Fig. 2.20a, let arm a be directed along the positive x axis of axes (x, y) .

- Show that the maximum principal strain is located at angle θ , counterclockwise to the x axis, where

$$\tan 2\theta = \frac{\sqrt{3}(\epsilon_b - \epsilon_c)}{2\epsilon_a - \epsilon_b - \epsilon_c}$$

- Show that the two principal surface strains ϵ_1 and ϵ_2 are given by

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c}{3} + R, \quad \epsilon_2 = \frac{\epsilon_a + \epsilon_b + \epsilon_c}{3} - R$$

where

$$R = \frac{1}{3}[(2\epsilon_a - \epsilon_b - \epsilon_c)^2 + 3(\epsilon_b - \epsilon_c)^2]^{1/2}$$

- Construct the corresponding Mohr's circle for the delta rosette.

- 2.47. Let the arm a of a delta rosette, Fig. 2.20a, be directed along the positive x axis of axes (x, y) . From measurements, $\epsilon_a = 2450 \mu$, $\epsilon_b = 1360 \mu$, and $\epsilon_c = -1310 \mu$. Determine the two principal surface strains, the direction of the principal axes, and the associated maximum shear strain ϵ_{xy} .

- 2.48. Let the arm a of a rectangular rosette, Fig. 2.20b, be directed along the positive x axis of axes (x, y) . Using Mohr's circle of strain, show that $2\epsilon_{xy} = \gamma_{xy} = 2\epsilon_b - \epsilon_a - \epsilon_c$.

- 6.27 For pure planar shear, where only τ_{xy} is nonzero, verify the principal stresses, strains, and planes shown in Fig. 5.10.
- 6.28 At a point on the free surface of an engineering component made of a low-carbon steel, the following strains exist: $\epsilon_x = 0.0005$, $\epsilon_y = 0.00025$, and $\gamma_{xy} = 0.0006$. Determine the principal normal and shear strains.
- 6.29 By modifying the equations for stress, develop equations for the normal and shear strains on the octahedral plane, ϵ_h and γ_h . Express these in terms of the components of a general three-dimensional state of strain: $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$. What is the significance of ϵ_h ? Under what conditions is the octahedral plane for strain the same as the one for stress?

8.77–8.82 For the states of plane strain listed, use the strain transformation equations to determine the strains associated with axes rotated through angle θ from the x-axis.

	ϵ_x	ϵ_y	γ_{xy}	θ
8.77	500 μ	500 μ	0 μ	30°
8.78	−300 μ	200 μ	180 μ	20°
8.79	1000 μ	500 μ	100 μ	20°
8.80	300 μ	−300 μ	−200 μ	30°
8.81	0 μ	100 μ	−400 μ	15°
8.82	800 μ	500 μ	0 μ	45°

8.83–8.88 Use Mohr's circle method to solve Problems 8.77–8.82.

8.89–8.94 Use the Mohr's circle method to determine the principal strains for Problems 8.77–8.82.

8.95 During the testing of a beam, the following strains were recorded from a 45° strain rosette.

$$\epsilon_a = 700 \mu \quad \epsilon_b = 50 \mu \quad \epsilon_c = -50 \mu$$

Determine (1) the principal strains and (2) the in-plane maximum shear strain.

8.96 During the pressure testing of a tank, the following strains were recorded from a rectangular strain rosette.

$$\epsilon_a = 400 \mu \quad \epsilon_b = 600 \mu \quad \epsilon_c = 900 \mu$$

Determine (1) the principal strains, and (2) the absolute maximum shear strain.

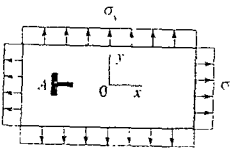
8.97 A machine part has a delta strain rosette mounted to it before loading. After the maximum load was applied the strains were recorded as

$$\epsilon_a = 500 \mu \quad \epsilon_b = 700 \mu \quad \epsilon_c = 300 \mu$$

Determine the principal strains and maximum in-plane shear strain.

8.98 A thin rectangular plate is subjected to normal stresses as shown in Figure P8.98. The strain gauges record $\epsilon_x = 1000 \mu$ and $\epsilon_y = 400 \mu$. Assuming that $E = 200 \text{ GPa}$ and $\nu = 0.30$, determine the stresses σ_x and σ_y .

Figure P8.98

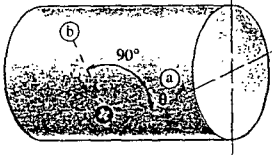


8.99 The strains measured on the outside surface of the cylindrical pressure vessel of Figure P8.99 are:

$$\epsilon_a = 500 \mu \text{ and } \epsilon_b = 240 \mu.$$

The angle θ is not known. The diameter of the vessel is 24 in. and the thickness is 1/8 in. The material is ASTM-A242 high-strength steel. Determine (a) the stresses σ_a and σ_b in the shell, (b) the principal stresses at the outer wall surface, and (c) the pressure in the vessel. Notice that when two orthogonal strains are measured the angle θ is not needed to determine the normal stresses.

Figure P8.99



8.100 A light pressure cylinder is made of an aluminum alloy. The cylinder has a 3.5-in. outer diameter, a wall thickness of 0.065 in., a modulus of elasticity of 10.3×10^6 psi, and a Poisson's ratio of 0.334. If the internal pressure is 1860 psi, what is the principal normal strain on an element on the circumference?

8.101 An axle from a large earth moving tractor has a delta strain rosette mounted to it before loading. After loading the strains were recorded as:

$$\epsilon_a = 1000 \mu \quad \epsilon_b = 500 \mu \quad \epsilon_c = 200 \mu$$

Determine the principal stresses in the shaft. Let $E = 30 \times 10^6$ psi and $\nu = 0.30$.

8.102 The safety of a bridge across a river is investigated by inspectors who determine strains $\epsilon_x = 1000 \mu$, $\epsilon_y = -200 \mu$, and $\gamma_{xy} = 800 \mu$. The safety code indicates that the maximum allowable stresses are $\sigma = 20,000$ psi and $\tau = 15,000$ psi. Based

on these allowable stresses, is the bridge safe? Use $E = 29 \times 10^6$ psi, $G = 12 \times 10^6$ psi, and $\nu = 0.30$.

8.103 The following normal strains have been determined on a body

$$\epsilon_x = 500 \mu \quad \epsilon_y = 400 \mu \quad \epsilon_z = -200 \mu$$

Determine the dilatation of the body.

8.104 A submerged tank is subjected to a hydrostatic pressure of $p = 80$ psi. The material of the tank is steel with $E = 29 \times 10^6$ psi and $\nu = 0.30$. Determine the bulk modulus and dilatation of the material.

8.105 A solid steel sphere is subjected to a hydrostatic pressure p that reduces the volume by 0.03%. (1) Determine the pressure p and (2) determine the bulk modulus K_b for the steel. The steel has $E = 29 \times 10^6$ psi and $\nu = 0.30$.

สัปดาห์ที่ 10

หัวข้อเรื่อง การวิเคราะห์ความเครียด (5)

(3 ชั่วโมง)

ความคิดรวบยอด

1. ทฤษฎีความยืดหยุ่นคือการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียด ควบคู่ไปด้วยหลักการทางคณิตศาสตร์ โดยมีสมมติฐานว่า วัสดุเป็นแบบ isotropic homogeneous และเป็นไปตามกฎของฮุก
2. พิกัดอ้างอิงที่ใช้มีอยู่ 2 ระบบ คือ ระบบพิกัดฉาก x-y และระบบ polar coordinate $r-\theta$
3. ทฤษฎีนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้งานได้มากมาย เช่นการหา stress concentration เป็นต้น ส่วนทรงกระบอกผนังหนาที่กล่าวไว้ในหน่วยนี้ เป็นเพียงตัวอย่างพื้นฐานเท่านั้น การศึกษาโดยละเอียดจะกล่าวไว้ในหน่วยที่ 9

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. คำนวณหาความเค้นและความเครียดสองมิติในพิกัดฉากได้
2. คำนวณหาความเค้นและความเครียดสองมิติในพิกัดเชิงขั้วได้

สังเขปเนื้อหา

หน่วยที่ 7. ทฤษฎีความยืดหยุ่น

- ปัญหาสองมิติในพิกัดฉาก
- หลักของ Saint Venant
 - พิกัดเชิงขั้ว

หน่วยที่ 7. ทฤษฎีความยืดหยุ่น

3-0 นาท

ในการศึกษาวิชากลศาสตร์ของแข็งขั้นมูลฐานเบื้องต้นที่ผ่านมา เราอาจหาค่าความเค้น (Stress) ได้จากการสมมติสภาพการส่งกำลังในชิ้นส่วนต่างๆของเครื่องกลอย่างง่ายและคำนวณหาความเค้น (Stress) จากสมการสมดุลทางสถิตศาสตร์ (Static Equilibrium) เป็นต้นว่าการหา stress ในคานซึ่งรับ Moment in bending (โมเมนต์ดัด) โดยไม่ต้องพิจารณาว่า stress มีความสัมพันธ์กับ strain อย่างไร stress ที่หาได้อาจไม่สัมพันธ์กับ Strain เลย ซึ่งแสดงว่า วัตถุอาจมีการฉีกขาดภายในได้โดยที่เราไม่ทราบ

ในบทนี้เราจะได้พิจารณา Stress และ strain ควบคู่กันไปโดยจะวางสมมติฐานว่าวัสดุที่จะนำมาทำชิ้นส่วนต่างๆทางเครื่องกลต้อง

1. มีเนื้อภายในเหมือนกันหมดทุกประการไม่มีรูเว้าแหว่งภายใน (homogeneous & continuous)
2. มีคุณสมบัติยืดหยุ่นสมบูรณ์ (Perfectly elastic) ในทุกทิศทาง หรือกล่าวง่ายๆคือมีค่าสัมประสิทธิ์ของความยืดหยุ่น (Modulus of Elasticity, E) เท่ากันทุกทิศทาง (isotropic)
3. เป็นไปตามกฎของ Hooke

3-1 ปัญหาสองมิติตามแกน x และ y

จากสมดุลของแรงทาง x และทาง y ที่จุดใดๆภายใน เราจะได้สมการสมดุล (Differential Equation of Equilibrium) ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-1.1)$$

เมื่อ x และ y เป็น body force ต่อหน่วยปริมาตรตามแกน x และแกน y ตามลำดับ

เมื่อชิ้นส่วนทางกลได้รับแรงภายนอกและเกิด stress ภายในขึ้นตามสมการ 3.1 ที่จุดต่างๆภายในของมันย่อมเกิดความเครียด (Strain) ขึ้น ถ้าเราให้ u และ v เป็นการเคลื่อนที่ของจุดภายในตามแนวแกน x และ y ตามลำดับเราจะได้ว่า

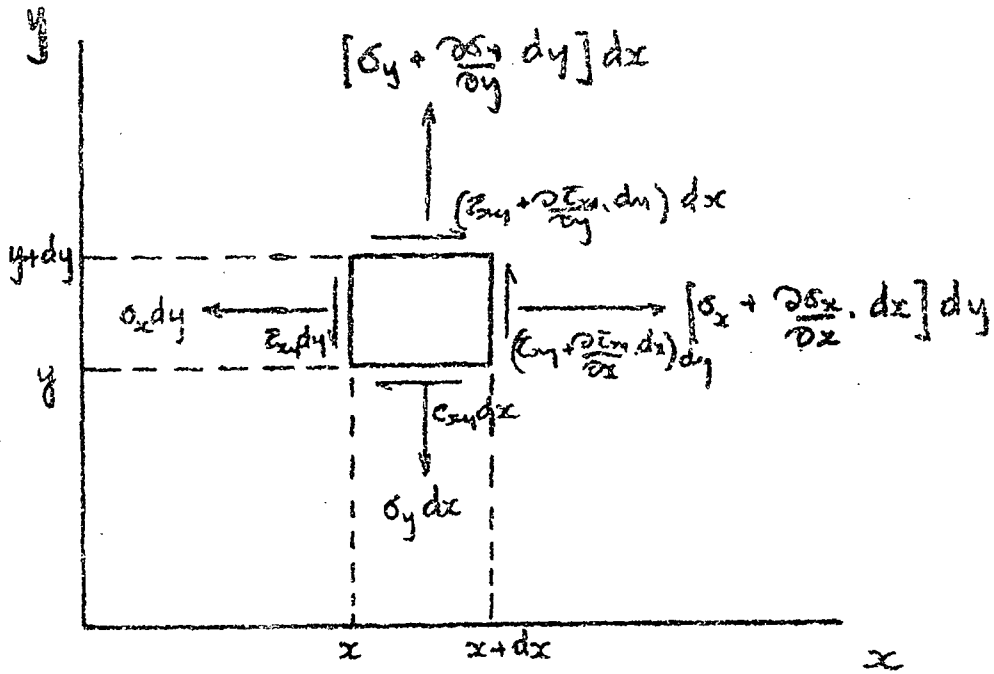
$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (3-1.2)$$

นอกจากนี้ที่ผิวนอก Stress ที่เกิดขึ้นยังจะต้องสมดุลแรงต่างๆที่มากระทำที่ผิวนอกด้วยดังสมการ

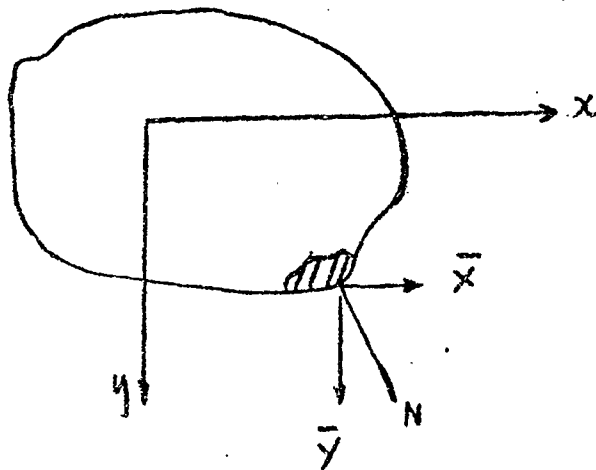
$$\bar{x} = l\sigma_x + m\tau_{xy} \quad (3-1.3)$$

$$\bar{y} = m\sigma_y + l\tau_{xy}$$

เมื่อ $\bar{x}$ และ $\bar{y}$ เป็น surface forces ต่อหน่วยพื้นที่ที่ตามแกน x และ y และ l, m เป็น direction cosines ของเส้นตั้งฉาก N กับผิว (boundary)



รูป 3-1.1



รูป 3-1.2

จึงอาจสรุปได้ว่าปัญหา stress analysis ทั่วไปขึ้นอยู่กับสมการ Equilibrium Equation (3-1.1) โดยให้ stress ที่ได้สัมพันธ์กับสมการ 3-1.3 boundary conditions ทุกๆจุดบนผิวโดยไม่มีข้อยกเว้น เนื่องจากสมการ (3-1.3) มี 2 สมการซึ่งประกอบด้วย stress σ_x , σ_y และ τ_{xy} แต่ละจุดซึ่งไม่รู้ค่า จึงจัดได้เป็นปัญหาในประเภท statically indeterminate problems จะหาคำตอบจากสมการ static อย่างเดียวไม่ได้ จำเป็นจะต้องนำสมการ 3-1.2 เข้ามาช่วย

ทีนี้ลองมาพิจารณาสมการ (3-1.2) ซึ่งให้ค่าของ strains 3 ตัวคือ ϵ_{xx} , ϵ_{yy} และ γ_{xy} ในเทอมของ u และ v ซึ่งเป็น independent variables เพียง 2 ตัว แสดงให้เห็นว่า strains ทั้ง 3 ตัวซึ่งมาจาก derivatives ของ u และ v จะเกิดขึ้นโดยอัตโนมัติโดยไม่ต้องกำหนดค่า ความสัมพันธ์ของ ϵ_{xx} , ϵ_{yy} และ γ_{xy} เรียกว่า strain compatibility จะหาได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}; \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ &\quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} \\ \therefore \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (3-1.4)$$

สมการ 3-1.4 เป็นตัวบังคับความสัมพันธ์ระหว่าง displacement functions และ strains ทั้ง 3 ในทางคำนวณ (Mathematics) u และ v จะต้องเป็น continuous functions ซึ่งสามารถจะ differentiate ได้ อย่างน้อย 3 ครั้ง และสัมพันธ์กันดังข้างบน ในทางปฏิบัติหมายความว่าชิ้นส่วนรับแรงจะบิดเบี้ยวไปได้เนื่องจากแรงภายนอกที่มากระทำแต่จะต้องไม่มีการแตกแยกภายใน

เราจะหา Stress Compatibility ได้โดยใช้ Hooke's Law

$$\left. \begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}\end{aligned}\right\} \quad (3-1.5)$$

จากสมการ (3-1.4) $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) = 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (3-1.5a)$$

จากสมการ(3-1.1) ถ้าเราให้ $X = Y = 0$ และ differentiate จะได้

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

ข้างขวาของสมการ (3-1.5a) เราอาจแยกเขียนได้เป็น

$$(1 + \nu) \left\{ \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \right\} = (1 + \nu) \left(2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \right)$$

หรือ $-(1 + \nu) \left\{ \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} \right\}$ และ $E = 2G(1 + \nu)$

จะได้สมการ Stress Compatibility

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \quad (3-1.6 a)$$

หรือ $\nabla^2 (\partial x + \partial y) = 0 \quad (3-1.6 b)$

3-1.1 วิธีแก้สมการด้วย Function

Airy ได้หาวิธีแก้สมการโดยสมมติ Function ขึ้นเรียกว่า Airy Stress Function (Φ) โดยสมมติว่า Stress ที่เกิดขึ้นทั้งหมดอาจเขียนได้โดยใช้ Φ ร่วมกันตัวเดียว และวางกฎไว้ดังนี้

ให้ $\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$ และ $\tau_{xy} = \frac{-\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$ (3-1.7)

หรือ $\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$

จากสมการ (3-1.1) ถ้าให้ $X = Y = 0$ จะเห็นได้ทันทีว่า Φ จะเป็น function ใด ๆ ก็ได้ถ้า differentiate ได้ 3 ครั้งเราจะเขียนสมการ(3-1.6) ใหม่ได้เป็น

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right\} = 0$$

หรือ $\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0$

หรือ $\nabla^4 \Phi = 0 \quad (3-1.8)$

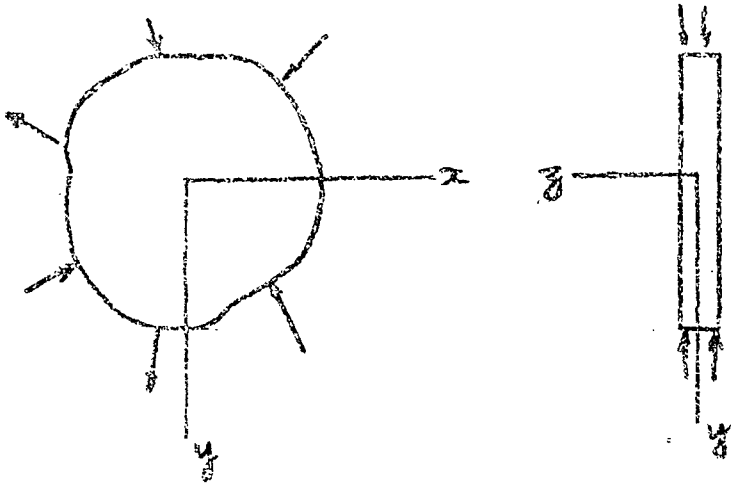
สมการนี้เรียกว่า Biharmonic Equation

จึงสรุปได้ว่า Φ ใด ๆ ก็ตามที่ทำให้ข้างขวาของสมการ (3-1.8) เป็นศูนย์และให้ค่า stress บนผิวเป็นไปตาม (3-1.3) ย่อมเป็น stress function ที่ใช้ได้

ความลำบากในการใช้วิธีนี้ในการหา Φ ที่จะตรงกับปัญหาของ stress ที่เกิดขึ้นจริงในงานวิศวกรรม

3-1.2 ปัญหาในระนาบ (Plane stress และ Plane strain)

3-1.2.1 ปัญหา Plane stress ยกตัวอย่างเช่นแผ่นโลหะบาง (Thin Plate) รับแรงเฉพาะในแนวนอนกับระนาบเพียงอย่างเดียว



รูป 3-1.4

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

ในกรณีนี้จะเกิด strain ขึ้นได้ทางด้าน z คือ

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

หมายความว่าความหนาของแผ่นอาจเปลี่ยนแปลงได้

3-1.2.2 ปัญหา Plane Strain ถ้าเรามีเพลทซึ่งมีหน้าตัดขนานกับระนาบ xy และมีเส้นผ่านศูนย์กลางอยู่ตามแนว z ถ้าเพลทนี้ยาวมากและมีแรงมาทำสม่ำเสมอในระนาบ xy เท่านั้น เราอาจถือว่า

$$\epsilon_z = 0 = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\therefore \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

จะเห็นได้ว่า ปัญหาทั้งสองประเภทนี้ไม่เหมือนกัน และควรจะได้ทำความเข้าใจความสัมพันธ์ของ stress และ strain ในปัญหาแต่ละแบบให้ดีตั้งแต่ต้น

3-1.3 แก้ปัญหา Rectangular Coordinates โดยใช้ Polynomials

เราจะแก้ปัญหา stress โดยการใส่ Φ จากสมการ (3-1.8) โดยวิธีเค้นถอยหลัง

เริ่มด้วย $\Phi = \text{Constant}$ หรือ Φ เป็น function กำลังหนึ่ง

$$\Phi = Ax \quad , \quad \Phi = By \quad , \quad \Phi = Ax + By \quad \text{ ฯลฯ }$$

จะเห็นได้อย่างง่าย ๆ ว่า Φ ทำให้สมการ (3-1.8) เป็นศูนย์ทั้งหมดแต่ไม่ได้ stress Φ เหล่านี้จึงใช้ประโยชน์ไม่ได้

ทดลองดู

$$\Phi = Ax^2$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2Ax$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 2A$$

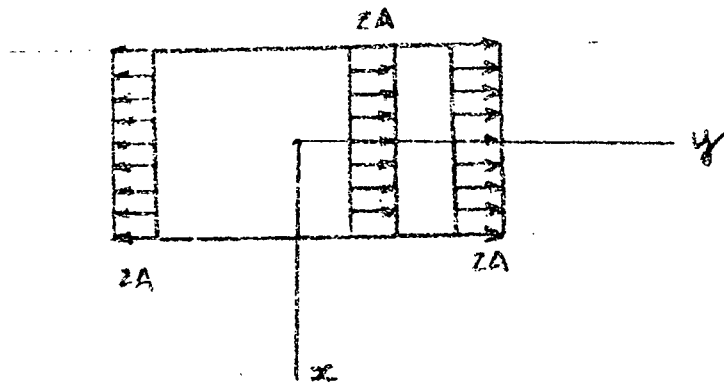
$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} = 0$$

Φ ตัวนี้ใช้ได้ตามสมการ (3-1.8) และให้ stress ดังนี้

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 2A$$

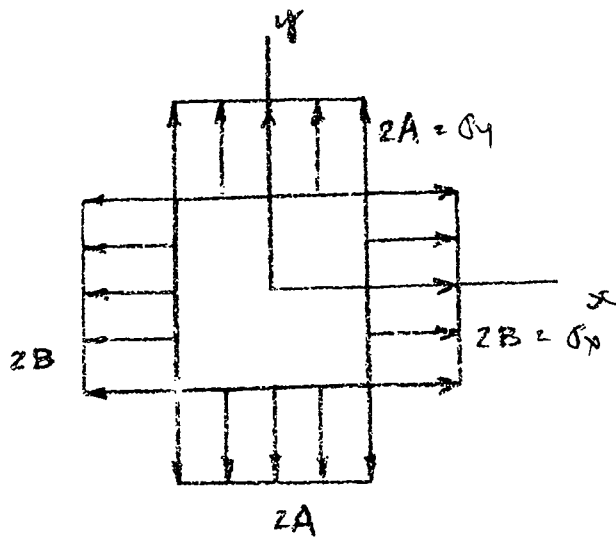
$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

ถ้า A เป็นบวก



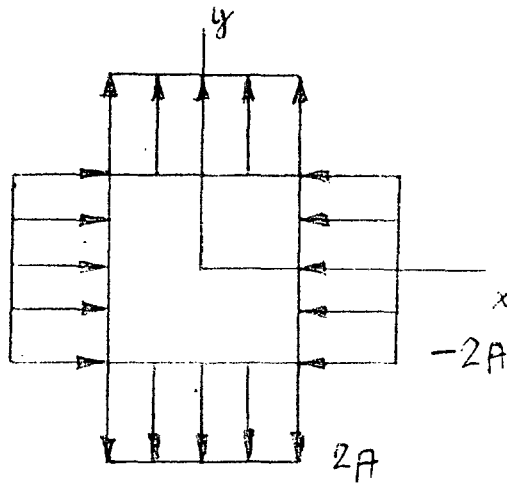
รูป 3-1.5

ถ้า $\Phi = Ax^2 + By^2$ เราจะได้สนามของ stress $2A$ ทางทิศทางของ Y และ $2B$ ทางทิศ X (A และ B เป็นบวก)



รูป 3-1.6

ถ้า $A = B$ และมีเครื่องหมายกลับกันเราจะได้ ($B = -A$)



รูป 3-1.7

$$\Phi = Ax^3$$

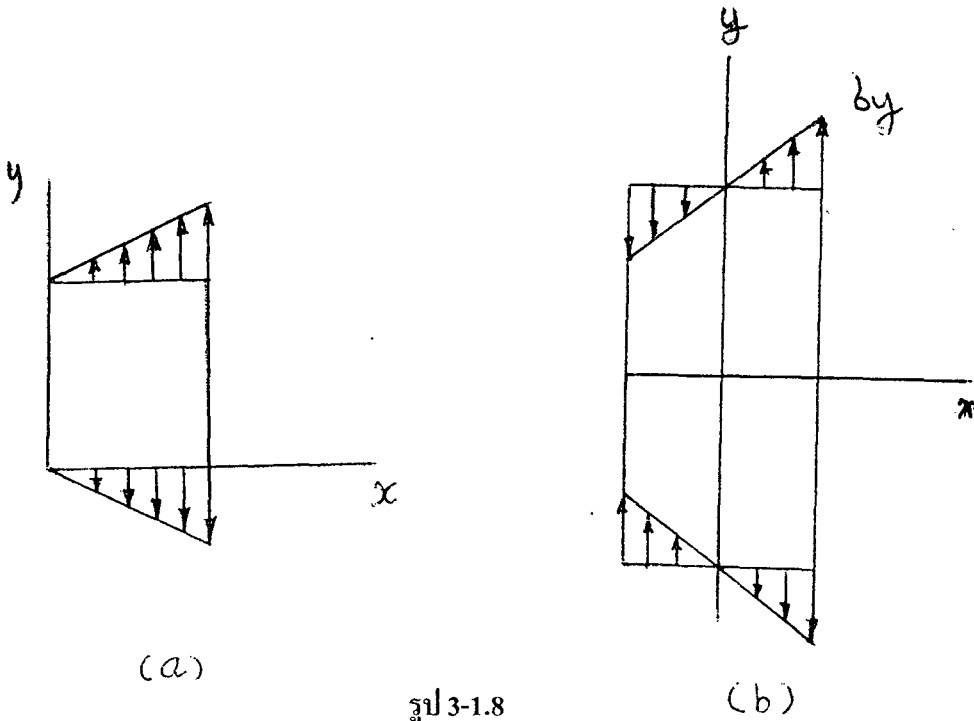
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 3Ax^2$$

ใช้เป็น stress function ได้ satisfy สมการ (3-1.8)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 6Ax$$

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 6Ax, \quad \tau_{xy} = 0$$

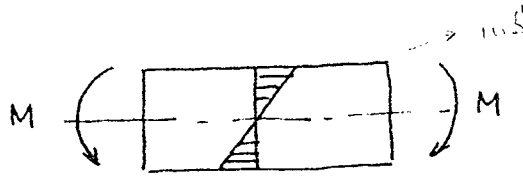
แสดงให้เห็นว่า $\Phi = Ax^3$ เป็น Solution สำหรับแผ่นบางรับ stress บนขอบสองข้างดังในรูป 3-1.8b



รูป 3-1.8

3-2 หลักของ Saint Venant

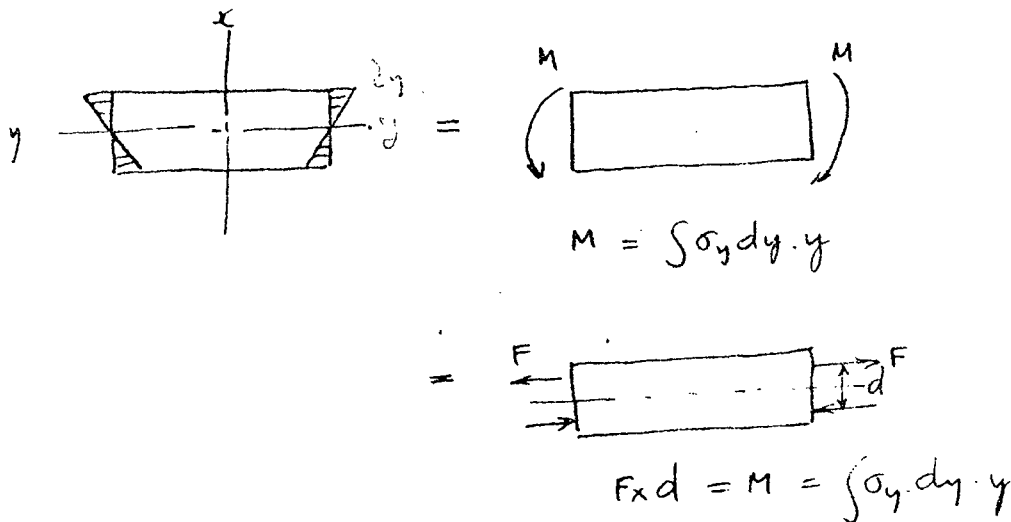
จากตัวอย่างที่แล้วและจะเห็นได้จากรูป 3-1.8b ว่าการเรียงตัวของ stress เหมือนกับกรณีทีแผ่นบางรับโมเมนต์ดัดอย่างเฉียว



รูป 3-2.1

ในกรณีนี้ M คือโมเมนต์ดัดซึ่งได้มาจากผลรวมของโมเมนต์อันเกิดจากความเค้น σ_y

Saint Venant ให้หลักการไว้ว่าเราอาจจะแทนแรงหรือโมเมนต์กลุ่มใดกลุ่มหนึ่งซึ่งกระทำบนวัตถุแข็งเกร็งได้ด้วยแรงหรือโมเมนต์กลุ่มอื่น โดยไม่ทำให้การเรียงตัวของความเค้นบริเวณที่ห่างผิวหรือจุดกระทำของแรงนั้น ๆ ออกไปถ้าแรงหรือโมเมนต์กลุ่มที่นำมาแทนมีผลทางสถิตศาสตร์เหมือนเดิม ฉะนั้น



รูป 3-2.2

ตัวอย่าง 3-2.1

จงหาว่า $\Phi = A[xy^3 - (3/4)xyh^2]$ ใช้สำหรับเป็น exact solution และ practical solution แก่

ปัญหาคณิตใด ?

วิธีทำ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = A(y^3 - \frac{3}{4}h^2y); \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 3A(y^2 - \frac{h^2}{4})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2A(xy^2 - \frac{h^2}{4}x); \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 6Axy$$

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = 0; \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0; \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0$$

$$\therefore \nabla^4 \Phi = 0$$

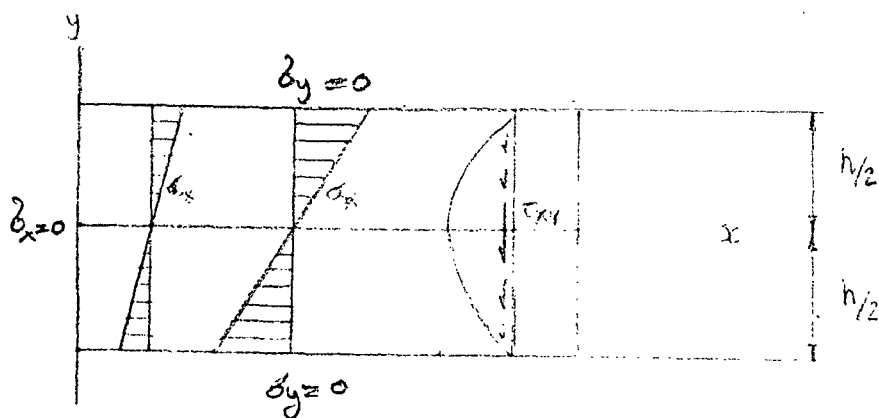
นั่นคือ Φ ที่กำหนดมาให้เป็น stress function ได้และให้ค่า stress ดังนี้คือ

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 6Axy$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0$$

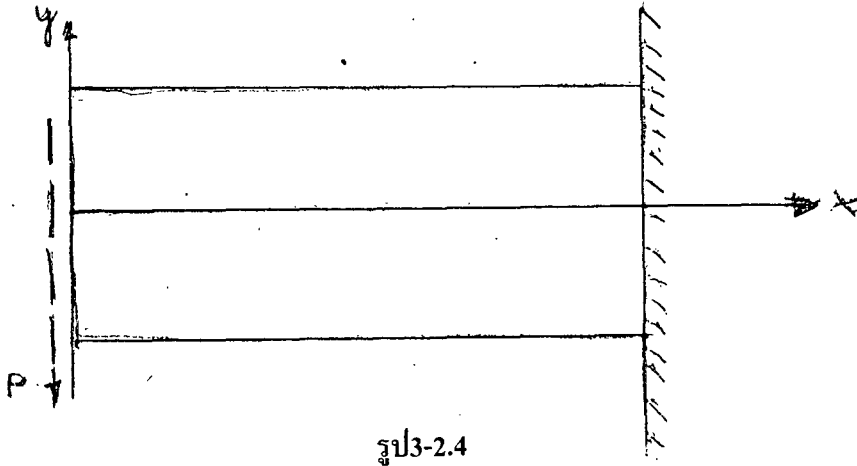
$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -3A(y^2 - \frac{h^2}{4}) = 3A\{(\frac{h}{4})^2 - y^2\}$$

ลองเขียนรูปการเรียงตัวของ stress ดู



รูป 3-2.3

จากรูป 3-2.3 จะเห็นได้ว่า σ_x แปรเป็นเส้นตรงกับระยะ y และเป็นศูนย์เสมอบนแกน x ส่วน τ_{xy} เรียงตัวแบบ parabola ถ้าเรากำหนดให้ strip มีความสูงเป็น h และไม่ขึ้นอยู่กับ x กล่าวคือ τ_{xy} เรียงตัวเป็น parabola รูปเดียวกันหมดไม่ว่า plane จะมีค่า x เป็นเท่าใดก็ตาม



เราสรุปได้ว่า Φ เป็น solution ของ cantilever ที่มีแรงลงที่ปลายข้างซ้ายโดยมีค่า

$$P = \int \text{Shear force ตลอดทั้งหน้า}$$

สมมติว่า cantilever มีความหนาเป็น 1 หน่วย

$$P = \int_{-h/2}^{+h/2} 3A\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \times dy \times 1 = \frac{Ah^3}{2}$$

เราลองมาตรวจดูว่าแรง P นี้จะทำให้เกิดการเรียงตัวของ σ_x ดังรูป 3-2.3 หรือไม่ โดยใช้สูตรของคานอย่างง่าย

$$\sigma_x = My/I$$

ในกรณีนี้

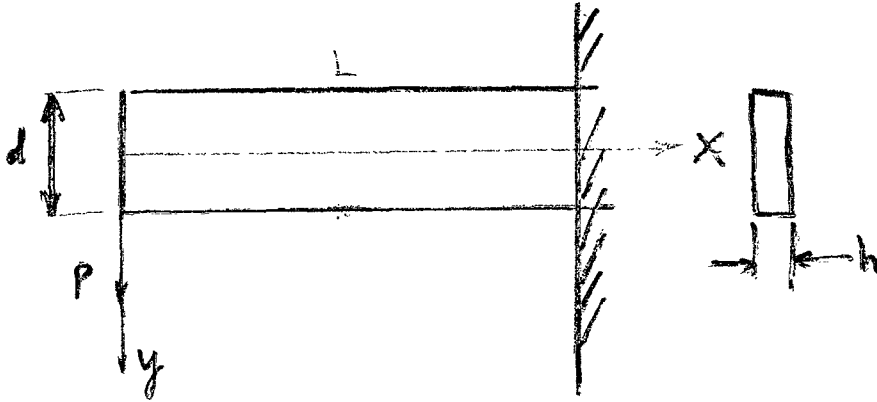
$$I = (1 \times h^3)/12 = h^3/12$$

$$M_x = Px = (Ah^3x)/2$$

$$\begin{aligned} \therefore \sigma_x &= Ah^2 \cdot x \cdot \frac{y}{\left(\frac{h^3}{12}\right)} \\ &= 6Axy \end{aligned}$$

ซึ่งตรงกับ σ_x ซึ่งได้มาจาก Φ

3-2.1 การสร้าง solution โดยพิจารณา load



รูป 3-2.5

สมมติว่าเรามี cantilever beam ยาว L สูง d และ กว้าง h รับน้ำหนัก P อยู่ที่ปลายข้างหนึ่ง $h \ll d$ เรา
จะถือว่าคานมีน้ำหนักเบาเมื่อเทียบกับ load P

Boundary Conditions ที่จะต้องพิจารณาคือ

ก. ที่ผิวของคานด้านบนและด้านล่างไม่มี stress

ข. ผลรวมของ shear force ที่หน้า $x=0$ มีขนาดเท่ากับ P

จากความรู้ทางสถิตศาสตร์ เราจะประมาณได้ว่าโมเมนต์ดัดตามหน้าตัดต่างๆจะแปรกับระยะทาง x และที่แต่ละหน้าตัด σ จะแปรตามความลึก y ของ section

$$\text{ทดลอง} \quad \sigma = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = c_1 xy$$

เราจะได้ว่า Φ จะออกมาในรูปดังนี้คือ

$$\Phi = \frac{c_1}{6} xy^3 + yf_1(x) + f_2(x)$$

เมื่อทั้ง $yf_1(x)$ และ $f_2(x)$ เป็น function ของ x เท่านั้น ทดสอบว่า Φ ใช้ได้หรือไม่โดยแทนค่าในสมการ

$\nabla^4 \Phi = 0$ จะได้ว่า

$$y \frac{d^4 f_1}{dx^4} + \frac{d^4 f_2}{dx^4} = 0$$

เราจะเห็นได้ว่าถ้า Φ จะใช้กับ Biharmonic Equation ได้ทุกค่าแล้วละก็ สมการ

$$\Phi = (c_1 xy^3)/6 + yf_1(x) + f_2(x)$$

จะต้องเป็นจริงทุกค่าของ x และ y ตลอดทั้งตัวคาน ซึ่งจะเป็นไปได้ก็ต่อเมื่อ

$$\frac{d^4 f_1}{dx^4} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{d^4 f_2}{dx^4} = 0$$

นั่นคือ

$$f_1(x) = c_2 x^3 + c_3 x^2 + c_4 x + c_5$$

$$f_2(x) = c_6 x^3 + c_7 x^2 + c_8 x + c_9$$

เมื่อ $c_2, \dots, c_9$ เป็นตัวคงที่ชุดหนึ่ง ฉะนั้นเราจะได้ว่า

$$\Phi = \frac{c_1}{6} xy^3 + y(c_2 x^3 + c_3 x^2 + c_4 x + c_5) + c_6 x^3 + c_7 x^2 + c_8 x + c_9$$

$$\therefore \sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 6(c_2 y + c_6)x + 2(c_3 y + c_7)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\frac{c_1}{2} y^2 - 3c_2 x^2 - 2c_3 x - c_4$$

จาก Boundary Condition เราต้องการว่า $\sigma_y = 0$ เมื่อ $y = \pm \frac{d}{2}$ นั่นคือ

$$\left. \begin{aligned} 6(c_2 \frac{d}{2} + c_6)x + 2(c_3 \frac{d}{2} + c_7) &= 0 \\ 6(-c_2 \frac{d}{2} + c_6)x + 2(-c_3 \frac{d}{2} + c_7) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq x \leq L$$

$$\begin{aligned} c_2 \frac{d}{2} + c_6 &= 0 & c_3 \frac{d}{2} + c_7 &= 0 \\ -c_2 \frac{d}{2} + c_6 &= 0 & -c_3 \frac{d}{2} + c_7 &= 0 \end{aligned}$$

$$c_2 = c_3 = c_6 = c_7 = 0$$

ดังนั้น shear stress $\tau_{xy} = -\frac{c_1}{2} y^2 - c_4$

จาก Boundary Condition เราต้องการว่า $\tau_{xy} = 0$ เมื่อ $y = \pm \frac{d}{2}$

$$-\frac{c_1}{8} - c_4 = 0 \quad ; \quad c_4 = -\frac{c_1 d^2}{8}$$

ที่ปลาย $x=0$ ผลรวมของ shear จะต้องเท่ากับ load P

$$P = -\int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \tau_{xy} h dy = \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \frac{C_1}{8} h (4y^2 - d^2) dy$$

$$c_1 = -\frac{12P}{d^3 h}$$

Moment of inertia $I = \frac{hd^3}{12}$ เราจะได้ exact stress ดังนี้

$$\sigma_x = -\frac{P_{xy}}{I} \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = -\frac{P}{2I} \left(\frac{d^2}{4} - y^2 \right)$$

3-2.2 วิธีหา Displacement

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x = \frac{\sigma}{E} = -\frac{Pxv}{EI}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y = -\frac{\nu \sigma}{E} = \frac{\nu Px}{EI}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy} = 2\frac{(1+\nu)}{E}\tau_{xy} = -\frac{(1+\nu)P}{EI}\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right)$$

เรา integrate สมการ ϵ_x และ ϵ_y เราจะได้ดังนี้

$$\int \frac{\partial u}{\partial x} dx = u = -\frac{P}{2EI}x^2y + g_1(y)$$

$$\int \frac{\partial v}{\partial y} dy = v = \frac{\nu P}{2EI}xy^2 + g_2(x)$$

$g_1(y)$ เป็น function ของ y เท่านั้น และ $g_2(x)$ เป็น function ของ x เท่านั้น. เราย้ายค่าของ u และ v แทนเข้าไปในสมการของ γ_{xy}

$$\frac{dg_1}{dy} - \frac{P}{EI}\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)y^2 = -\frac{dg_2}{dx} + \frac{P}{2EI}x^2 - \frac{(1+\nu)P}{4EI}d^2$$

function ของ y function ของ x
เท่านั้น เท่านั้น

ทั้งข้างซ้ายและข้างขวาของสมการต่างก็ขึ้นอยู่กับตัวแปรคนละตัวซึ่งจะเป็นไปได้ก็ต่อเมื่อทั้งสองข้างมีค่าเท่ากับตัวคงที่ตัวหนึ่ง สมมติว่าเป็น a_1 สำหรับทุกๆค่าของ x และ y เราตั้งสมการใหม่ได้ว่า

$$\frac{dg_1}{dy} = \frac{P}{EI}\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)y^2 + a_1$$

$$\frac{dg_2}{dx} = \frac{P}{2EI}x^2 - \frac{(1+\nu)}{4EI}Pd^2 - a_1$$

$$g_1(y) = \frac{P}{3EI}\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)y^3 + a_1y + a_2$$

$$g_2(x) = \frac{P}{6EI}x^3 - \frac{(1+\nu)}{4EI}d^2x - a_1x + a_3$$

a_2 และ a_3 เป็นตัวคงที่ได้จาก Integration ดังนั้น

$$u = -\frac{P}{2EI}x^2y + \frac{P}{3EI}\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)y^3 + a_1y + a_2$$

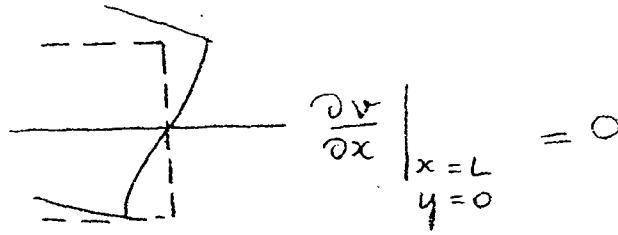
$$v = \frac{\nu P}{2EI}xy^2 + \frac{P}{6EI}x^3 - \frac{(1+\nu)}{4EI}d^2x - a_1x + a_3$$

ถ้าเราสมมติว่า จุด $x = L, y = 0$ อยู่กับที่ คือ $u = v = 0$

$$0 = a_2$$

$$0 = \frac{PL^3}{6EI} - \frac{(1+\nu)}{4EI} d^2 L - a_1 L + a_3$$

เนื่องจากเรามี unknown 3 ตัว คือ a_1, a_2 และ a_3 เราต้องการสมการอีกหนึ่งซึ่งอาจได้มาจากการสมมติว่า เส้น $y = 0$ มีค่า slope คงที่เมื่อตอนที่ฝังในกำแพง



รูป 3-2.6

จะได้

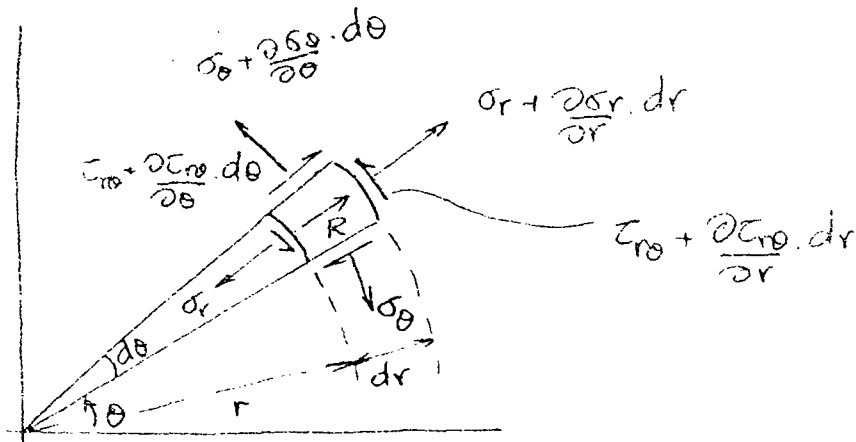
$$a_1 = \frac{PL^2}{2EI} - \frac{(1+\nu)}{4EI} Pd^2$$

$$a_3 = \frac{PL^3}{3EI}$$

3-2.3 สมการทั่วไปโดยใช้ Cylindrical Co-ordinates r, θ, z

ในปัญหาบางประเภทซึ่งรูปร่างของขอบนอกเป็นวงกลม เรามักใช้ Co-ordinates r, θ, z ถ้าเป็นปัญหา plane stress หรือ plane strain $\tau_{rz} = \tau_{z\theta}$ และ stress อื่นๆ จะเป็น function ของ r, θ เท่านั้น ในกรณีอย่างนี้เราก็ใช้ Polar Co-ordinates (r, θ)

การสมดุล



รูป 3-2.7

จากการหาสมดุลของ element $dr.d\theta$ เราจะได้สมการขึ้นมา 2 สมการด้วยกันคือ

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0 \quad (3-2.1 a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta = 0 \quad (3-2.1 b)$$

โดยที่ F_r และ F_θ เป็น body force ต่อหน่วยปริมาตรตามแกน r และ θ ตามลำดับ สมการ (3-2.1) นี้เหมือนกับสมการ (3-1.1) เมื่อใช้ rectangular Co-ordinates

Airy Stress Function สมการ (3-1.7) จะเปลี่ยนไปเป็นดังนี้

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \quad ; \quad \tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r \partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3-2.2)$$

Strain จะเขียนได้ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} \text{Radial} \quad \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} \\ \text{Hoop} \quad \epsilon_\theta &= \frac{u}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \text{Shear} \quad \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \end{aligned} \right\} \quad (3-2.3)$$

โดยที่ u และ v เป็น displacement ทางด้านรัศมีและด้านรอบวงตามลำดับ Biharmonic Equation :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (3-2.4)$$

3-2.4 ปัญหาที่มี Symmetry กับแกน z (Axis Symmetrical Problem)

ถ้าปัญหา มี Symmetry กับแกนใดๆ ซึ่งตั้งฉากกับ plane (r, θ) Stress ซึ่งเกิดขึ้นก็ย่อมจะไม่ขึ้นอยู่กับค่าของ θ แต่จะขึ้นอยู่กับระยะ r เพียงอย่างเดียว shear $\tau_{r\theta}$ จะเป็นศูนย์โดยตลอด สมการ Equilibrium 3-2.1 จะเหลือแต่เพียงสมการเดียว

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0$$

ถ้าเราไม่คำนึงถึง body force F_r , สมการจะเหลือเพียง

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (3-2.5)$$

สมการ Biharmonic (3-2.4)

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right) = \frac{d^4 \Phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \Phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\Phi}{dr} = 0 \quad (3-2.6)$$

วิธีแก้สมการหา r^4 คูณตลอด

$$r^4 \Phi^{(4)} + 2r^3 \Phi^{(3)} - r^2 \Phi^{(2)} + r \Phi^{(1)} = 0$$

หา solution ได้ในสมการ $\Phi = e^t$

$$t(t-1)(t-2)(t-3) + 2t(t-1)(t-2) - t(t-1) + t = 0$$

$$t(t-1)^2(t-2) - t(t-2) = 0$$

$$t(t-2)[(t-1)^2 - 1] = t(t-2)(t^2 - 2t) = t^2(t-2)^2 = 0$$

$$t = 0, 0, 2, 2$$

เนื่องจากว่ารากของสมการซ้ำกับเราจะได้ Solution เป็นของ log general Solution ของ homogeneous differential equation นี้คือ

$$\Phi = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D \quad (3-2.7)$$

A, B, C และ D เป็นตัวคงที่ซึ่งจะหาค่าได้โดยอาศัย conditions ต่างๆมาบังคับ

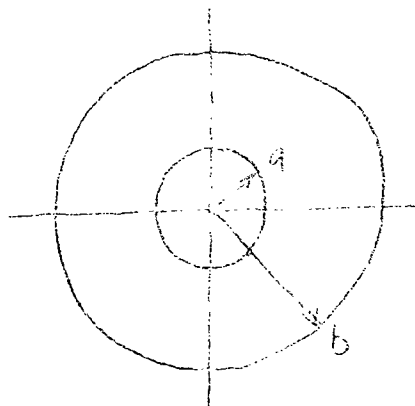
จากสมการ (3-2.2) เราจะหา stress ทั่วๆไปของปัญหา axis symmetrical problem ได้ดังนี้ คือ

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-2.8)$$

3-2.5 การใช้งาน

ถ้าปัญหาของเราเป็นประเภทไม่มีช่องว่างที่บริเวณใกล้จุดตั้งต้นของ r (ถ้าไม่มี $A = B = 0$) คือ r มีค่าไปได้ตั้งแต่ศูนย์ถึง R เราจำเป็นต้องให้ A และ B เป็นศูนย์มิฉะนั้น (3-2.8) จะให้ $\sigma_r \rightarrow \sigma_\theta \rightarrow \infty$ จะได้ว่า $\sigma_r = \sigma_\theta = 2C$ นั่นคือได้ unifrom tension หรือ unifrom compression field

ถ้าเราให้ $B = 0$ เราจะได้วิธีหาความเค้นในท่อหนากลางดังนี้คือ



รูป 3-2.8

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{A}{r^2} + 2C \\ \sigma_\theta &= -\frac{A}{r^2} + 2C \end{aligned} \right\} \quad (3-2.9)$$

ให้ท่อหนาของเรามีรัศมีภายในและภายนอกเป็น a และ b ตามลำดับ
และให้ความดัน P_i และ P_o ทำอยู่ภายในและภายนอกของท่อ

Boundary conditions :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r|_{r=a} &= -p_i \\ \sigma_r|_{r=b} &= -p_o \end{aligned} \right\} \quad (3-2.10)$$

จากสมการ (3-2.9)

$$\begin{aligned} -p_i &= \frac{A}{a^2} + 2C \\ -p_o &= \frac{A}{b^2} + 2C \end{aligned}$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2} \\ 2C &= \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2} \end{aligned} \right\} \quad (3-2.11)$$

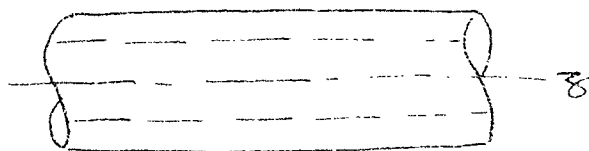
ความเค้นทั่วไปภายในท่อจะเป็นดังนี้

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2} \\ \sigma_\theta &= -\frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2} \end{aligned} \right\} \quad (3-2.12)$$

เหตุที่เราให้ $B=0$ อาจจะดูได้จาก displacement เราลองย้อนกลับไปดูสมการ(3-2.3)โดยนำมาใช้กับปัญหา axis symmetrical ดังนี้

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad t_\theta = \frac{u}{r} \quad r_{r\theta} = \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \quad (3-2.13)$$

สมมุติว่าเรานำท่อมาใช้โดยไม่บังคับปลายทั้งสองข้าง $\sigma_z = 0$



รูป 3-2.9

จากกฎของ Hook สมการของเราก็จะได้สมการความเครียด

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \quad (3-2.14a)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) \quad (3-2.14b)$$

เรา integrate สมการ (3-2.14a)

$$\begin{aligned} Eu &= \int \left[\frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C \right] dr - \nu \int \left[-\frac{A}{r^2} + B(3 - 2 \ln r) + 2C \right] dr \\ &= \int \left[(1 - \nu) \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r - 3\nu - 2\nu \ln r) + 2C(1 - \nu) \right] dr \\ &= -\frac{A}{r} (1 - \nu) + B[r(1 - 3\nu) + 2(1 - \nu)(r \ln r - r)] + 2C(1 - \nu)r + K \end{aligned}$$

จากสมการ (3-2.14b) เราได้

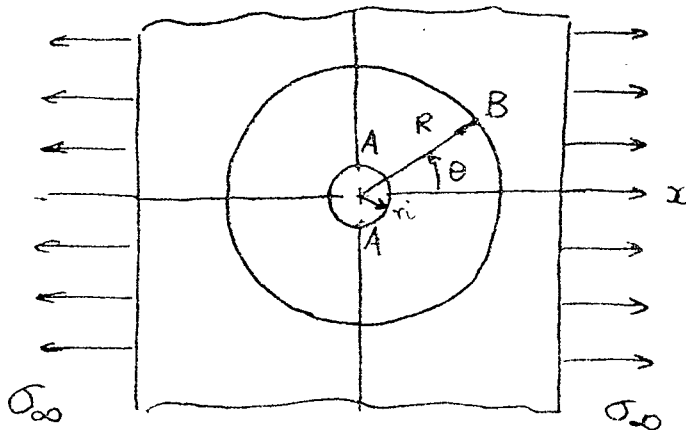
$$Eu = -\frac{A}{r} (1 + \nu) + B[r(3 - \nu) + 2r(1 - \nu) \ln r] + 2C(1 - \nu)r$$

ทั้งสองสมการนี้ต้องเท่ากัน และจะเท่ากันก็ต่อเมื่อ $B=0, K=0$

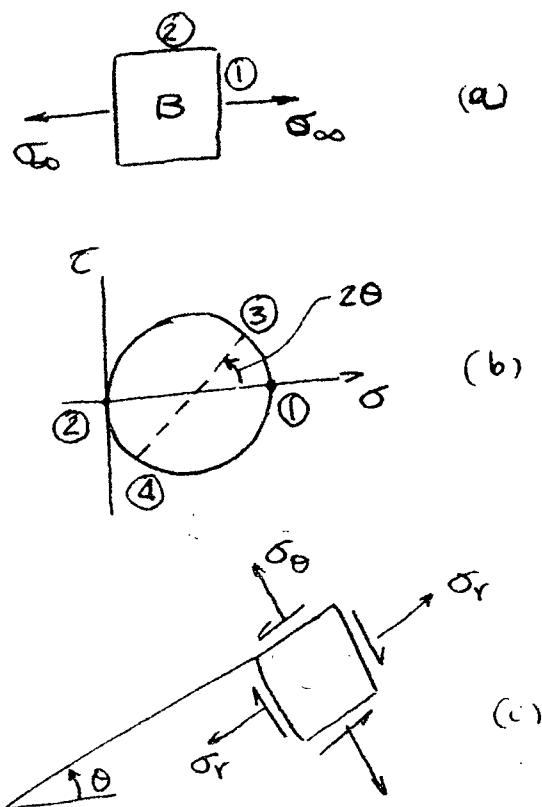
$$Eu = -\frac{A}{r} (1 - \nu) + 2C(1 - \nu)r \quad (3-2.15)$$

3-2.6 การเปลี่ยนแปลงของ Stress เนื่องมาจากการเจาะรูในแผ่นโลหะ

ถ้าเรานำเอาแผ่นโลหะมาใช้งานให้รับ stress แบบง่าย ๆ เช่น uniform uniaxial tension แต่เรามีความจำเป็นจะต้องเจาะรูกลมเล็ก ๆ เพื่อใช้ทำประโยชน์บางอย่างเช่นเพื่อยึดหมุดหัวเห็ด บริเวณที่เราเจาะรูจะมี stress เพิ่มขึ้นสูงกว่าที่บริเวณอื่น ๆ เรียกว่าเป็นบริเวณ stress concentration เราจะพยายามหาค่าของ stress ที่เปลี่ยนแปลงไปนี้



รูป 3-2.11



รูป 3-2.12

สมมติว่ามีแผ่นโลหะบางรับการดึง σ_{∞} อยู่และเจาะรูขนาดเล็กหนึ่งรู A - A มีรัศมี ของรู $= r_i$ อาศัยหลักการของ Saint Venant แล้วความเค้นที่บริเวณไกลจากรู A - A มาก ($r > 3 r_i$) จะไม่มีการเปลี่ยนแปลงใด ๆ ลองพิจารณาจุด B ซึ่งสมมติว่า $R \gg r_i$ ความเค้นบริเวณนี้ก็ยังคงมีค่า σ_{∞} ไปตามแกน x ดังที่แสดงในรูป 3-2.11a ใช้ Mohr's Circle เข้าช่วยแปลง stress ที่ B ไปตามแกน polar co-ordinates ดังรูป b และ c

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma_{\infty}}{2} (1 + \cos 2\theta) \\ \sigma_{\theta} &= \frac{\sigma_{\infty}}{2} (1 - \cos 2\theta) \\ \tau_{r\theta} &= \frac{-\sigma_{\infty}}{2} \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (3-2.16)$$

เครื่องหมายลบที่ τ_{θ} ได้มาจากการเทียบกับรูป 3-2.14

เราอาจแบ่ง stress ตามสมการ (3-2.16) ออกได้เป็นสองพวกดังนี้

$$(ก) \quad \sigma_r = \frac{\sigma_{\infty}}{2} \quad ; \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (3-2.17)$$

$$(จ) \sigma_r = \frac{\sigma_\infty}{2} \cos 2\theta \quad ; \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_\infty}{2} \sin 2\theta \quad (3-2.18)$$

ส่วน (ก) ให้ tension เท่า ๆ กันทุกทางบนวงกลมรัศมี R จะหา stress ได้จากวิธีของ Lamé ตามสูตร (3-2.12)

ส่วน (ข) Kirsch ทดลองหา stress function และพบว่าใช้ได้ในรูปแบบ

$$\Phi = f(r) \cos 2\theta \quad (3-2.19)$$

แทนค่าเข้าไปใน Biharmonic Equation 3-2.18

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \cos 2\theta \frac{df}{dr} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \cos 2\theta \frac{d^2 f}{dr^2} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = -4 \cos 2\theta f$$

$$\text{©D'Ne} \quad \nabla^2 = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) \cos 2\theta$$

ถ้าเราหารตลอดด้วย $\cos 2\theta \neq 0$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{4f}{r} \right) = 0$$

$$\left(r^4 \frac{d^4}{dr^4} + 2r^3 \frac{d^3}{dr^3} - 4r^2 \frac{d^2}{dr^2} + 4r \frac{d}{dr} \right) (f(r)) = 0$$

เราจะหาสมการได้ในรูปของ r

$$t(t-1)(t-2)(t-3) + 2t(t-1)(t-2) - 4t(t-1) + 4t = 0$$

$$t^4 - 4t^3 - 4t^2 + 16t = 0$$

$$t = 4, 2, 0, -2$$

ดังนั้นเราได้ solution

$$\Phi = \left(c_1 r^4 - c_2 r^2 + c_3 + \frac{c_4}{r^2} \right) \cos 2\theta \quad (3-2.20)$$

จากสมการ 3-2.2 stress จากชุด (ข) จะเป็นดังนี้

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \left(-2c_2 - \frac{4c_3}{r^2} - \frac{6c_4}{r^4} \right) \cos 2\theta \\ \sigma_\theta &= \left(12c_1 r^2 + 2c_2 + \frac{6c_4}{r^4} \right) \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= \left(6c_1 r^2 + 2c_2 - \frac{2c_3}{r^2} - \frac{6c_4}{r^4} \right) \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (3-2.21)$$

ตัวคงที่ต่าง ๆ จะหาได้จาก Boundary Conditions ดังนี้ คือ

$$r = r_i : \sigma_r = 0, \tau_{r\theta} = 0 \quad (\text{free surface})$$

$$r = R = \infty : \sigma_r = \frac{\sigma_\infty}{2} \cos 2\theta \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_\infty}{2} \sin 2\theta \quad (3-2.22)$$

$$\sigma_r \Big|_{r=r_i} = -2c_2 - \frac{4c_3}{r_i^2} - \frac{6c_4}{r_i^4} = 0$$

$$\tau_{r\theta} \Big|_{r=r_i} = 6c_1 r_i^2 + 2c_2 - \frac{2c_3}{r_i^2} - \frac{6c_4}{r_i^4} = 0$$

$$-2c_2 = \frac{\sigma_\infty}{2}; c_2 = \frac{-\sigma_\infty}{4}$$

$$6c_1 \times \infty + 2c_2 = -\frac{\sigma_\infty}{2} \Rightarrow c_1 = 0$$

$$c_3 = \frac{\sigma_\infty}{2} \cdot r_i^2$$

$$c_4 = -\frac{\sigma_\infty}{4} r_i^4$$

$$\sigma_r = \frac{\sigma_\infty}{2} \left[1 - 4 \frac{r_i^2}{r^2} + 3 \frac{r_i^4}{r^4} \right] \cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_\infty}{2} \left[-1 - 3 \frac{r_i^4}{r^4} \right] \cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sigma_\infty}{2} \left[-1 - 2 \frac{r_i^2}{r^2} + 3 \frac{r_i^4}{r^4} \right] \sin 2\theta$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{array} \right\} \quad (3-2.23)$$

Problems

23.1 (B). Given that the following strains exist at a point in a three-dimensional system determine the equivalent stresses which act at the point.

Take $E = 206 \text{ GN/m}^2$ and $\nu = 0.3$.

$$\epsilon_{xx} = 0.0010 \quad \gamma_{xy} = 0.0002$$

$$\epsilon_{yy} = 0.0005 \quad \gamma_{xz} = 0.0008$$

$$\epsilon_{zz} = 0.0007 \quad \gamma_{yz} = 0.0010$$

[420, 340, 372, 15.8, 63.4, 79.2 MN/m².]

23.2 (B). The following cartesian stresses act at a point in a body subjected to a complex loading system. If $E = 206 \text{ GN/m}^2$ and $\nu = 0.3$, determine the equivalent strains present.

$$\sigma_{xx} = 225 \text{ MN/m}^2 \quad \sigma_{yy} = 75 \text{ MN/m}^2 \quad \sigma_{zz} = 150 \text{ MN/m}^2$$

$$\tau_{xy} = 110 \text{ MN/m}^2 \quad \tau_{yz} = 50 \text{ MN/m}^2 \quad \tau_{zx} = 70 \text{ MN/m}^2$$

[764.6, 182, 291, 1388, 631, 883.5, all $\times 10^{-6}$.]

23.3 (B). Does a uniaxial stress field produce a uniaxial strain condition? Repeat Problem 23.2 for the following stress field:

$$\sigma_{xx} = 225 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

[No; 1092, -327.7, -327.7, 0, 0, 0, all $\times 10^{-6}$.]

23.4 (C). The state of stress at a point in a body is given by the following equations:

$$\sigma_{xx} = ax + by^2 + cz^3 \quad \tau_{xy} = l + mz$$

$$\sigma_{yy} = dx + ey^2 + fz^3 \quad \tau_{yz} = ny + pz$$

$$\sigma_{zz} = gx + hy^2 + kz^3 \quad \tau_{zx} = qx^2 + sz^2$$

If equilibrium is to be achieved what equations must the body-force stresses X , Y and Z satisfy?

[-(a + 2sz); -(p + 2ey); -(n + 2qx + 3kz²).]

23.5 (C). At a point the state of stress may be represented in standard form by the following:

$$(3x^2 + 3y^2 - z) \quad (z - 6xy - \frac{1}{2}) \quad (x + y - \frac{1}{2})$$

$$(z - 6xy - \frac{1}{2}) \quad 3y^2 \quad 0$$

$$(x + y - \frac{1}{2}) \quad 0 \quad (3x + y - z + \frac{1}{2})$$

Show that, if body forces are neglected, equilibrium exists.

23.6 (C). The plane stress distribution in a flat plate of unit thickness is given by:

$$\sigma_{xx} = yx^3 - 2axy + by$$

$$\sigma_{yy} = xy^3 - 2x^3y$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{3}{2}x^2y^2 + ay^2 + \frac{x^4}{2} + c$$

Show that, in the absence of body forces, equilibrium exists. The load on the plate is specified by the following boundary conditions:

$$\text{At } x = \pm \frac{w}{2}, \quad \sigma_{xy} = 0$$

$$\text{At } x = -\frac{w}{2}, \quad \sigma_{xx} = 0$$

where w is the width of the plate.

If the length of the plate is L , determine the values of the constants a , b and c and determine the total load on the edge of the plate, $x = w/2$.

[B.P.] $\left[\frac{3w^2}{8}; -\frac{w^3}{4}; -\frac{w^4}{32}; -\frac{w^3L^2}{4} \right]$

23.7 (C). Derive the stress equations of equilibrium in cylindrical coordinates and show how these may be simplified for plane strain conditions.

A long, thin-walled cylinder of inside radius R and wall thickness T is subjected to an internal pressure p . Show that, if the hoop stresses are assumed independent of radius, the radial stress at any thickness t is given by

$$\sigma_{rr} = \frac{pR}{(R+t)} \left[\frac{t}{T} - 1 \right]$$

23.8 (B). Prove that the following relationship exists between the direction cosines:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

23.9 (C). The six cartesian stress components are given at a point P for three different loading cases as follows (all MN/m²):

	Case 1	Case 2	Case 3
σ_{xx}	100	100	100
σ_{yy}	200	200	-200
σ_{zz}	300	100	100
τ_{xy}	0	300	200
τ_{yz}	0	100	300
τ_{zx}	0	200	300

Determine for each case the resultant stress at P on a plane through P whose normal is coincident with the X axis. [100, 374, 374 MN/m².]

23.10 (C). At a point in a material the stresses are:

$$\sigma_{xx} = 37.2 \text{ MN/m}^2 \quad \sigma_{yy} = 78.4 \text{ MN/m}^2 \quad \sigma_{zz} = 149 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_{xy} = 68.0 \text{ MN/m}^2 \quad \sigma_{yz} = -18.1 \text{ MN/m}^2 \quad \sigma_{zx} = 32 \text{ MN/m}^2$$

Calculate the shear stress on a plane whose normal makes an angle of 48° with the X axis and 71° with the Y axis. [41.3 MN/m².]

23.11 (C). At a point in a stressed material the cartesian stress components are:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -40 \text{ MN/m}^2 & \sigma_{yy} &= 80 \text{ MN/m}^2 & \sigma_{zz} &= 120 \text{ MN/m}^2 \\ \sigma_{xy} &= 72 \text{ MN/m}^2 & \sigma_{yz} &= 46 \text{ MN/m}^2 & \sigma_{zx} &= 32 \text{ MN/m}^2\end{aligned}$$

Calculate the normal, shear and resultant stresses on a plane whose normal makes an angle of 48° with the X axis and 61° with the Y axis. [135, 86.6, 161 MN/m².]

23.12 (C). Commencing from the equations defining the state of stress at a point, derive the general stress relationship for the normal stress on an inclined plane:

$$\sigma_n = \sigma_{xx}l^2 + \sigma_{yy}n^2 + 2\sigma_{xy}lm + 2\sigma_{yz}mn + 2\sigma_{zx}ln$$

Show that this relationship reduces for the plane stress system ($\sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$) to the well-known equation

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\cos 2\theta + \sigma_{xy}\sin 2\theta$$

where $\cos \theta = l$.

23.13 (C). At a point in a material a resultant stress of value 14 MN/m^2 is acting in a direction making angles of 43° , 75° and $50^\circ 53'$ with the coordinate axes X , Y and Z .

(a) Find the normal and shear stresses on an oblique plane whose normal makes angles of $67^\circ 13'$, 30° and $71^\circ 34'$, respectively, with the same coordinate axes.

(b) If $\sigma_{xy} = 1.5 \text{ MN/m}^2$, $\sigma_{yz} = -0.2 \text{ MN/m}^2$ and $\sigma_{zx} = 3.7 \text{ MN/m}^2$ determine σ_{xx} , σ_{yy} and σ_{zz} . [10, 9.8, 19.9, 3.58, 23.5 MN/m².]

23.14 (C). Three principal stresses of 250, 100 and -150 MN/m^2 act in directions X , Y and Z respectively. Determine the normal, shear and resultant stresses which act on a plane whose normal is inclined at 30° to the Z axis, the projection of the normal on the XY plane being inclined at 55° to the XZ plane. [−75.2, 134.5, 154.1 MN/m².]

23.15 (C). The following cartesian stress components exist at a point in a body subjected to a three-dimensional complex stress system:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 97 \text{ MN/m}^2 & \sigma_{yy} &= 143 \text{ MN/m}^2 & \sigma_{zz} &= 173 \text{ MN/m}^2 \\ \sigma_{xy} &= 0 & \sigma_{yz} &= 0 & \sigma_{zx} &= 102 \text{ MN/m}^2\end{aligned}$$

Determine the values of the principal stresses present at the point. [233.8, 143.2, 35.8 MN/m².]

23.16 (C). A certain stress system has principal stresses of 300 MN/m^2 , 124 MN/m^2 and 56 MN/m^2 .

(a) What will be the value of the maximum shear stress?

(b) Determine the values of the shear and normal stresses on the octahedral planes.

(c) If the yield stress of the material in simple tension is 240 MN/m^2 , will the above stress system produce failure according to the distortion energy and maximum shear stress criteria? [122 MN/m²; 104, 160 MN/m²; No, Yes.]

23.17 (C). A pressure vessel is being tested at an internal pressure of 150 atmospheres (1 atmosphere = 1.013 bar). Strains are measured at a point on the inside surface adjacent to a branch connection by means of an equiangular strain rosette. The readings obtained are:

$$\epsilon_0 = 0.23\% \quad \epsilon_{+120} = 0.145\% \quad \epsilon_{-120} = 0.103\%$$

Draw Mohr's circle to determine the magnitude and direction of the principal strains. $E = 208 \text{ GN/m}^2$ and $\nu = 0.3$. Determine also the octahedral normal and shear strains at the point.

$$[0.235\%, 0.083\%, -0.142\%, 9^\circ 28'; \epsilon_{\text{oct}} = 0.0589\%, \gamma_{\text{oct}} = 0.310\%]$$

23.18 (C). At a point in a stressed body the principal stresses in the X , Y and Z directions are:

$$\sigma_1 = 49 \text{ MN/m}^2 \quad \sigma_2 = 27.5 \text{ MN/m}^2 \quad \sigma_3 = -6.3 \text{ MN/m}^2$$

Calculate the resultant stress on a plane whose normal has direction cosines $l = 0.73$, $m = 0.46$, $n = 0.506$. Draw Mohr's stress plane for the problem to check your answer. [38 MN/m².]

23.19 (C). For the data of Problem 23.18 determine graphically, and by calculation, the values of the normal and shear stresses on the given plane.

Determine also the values of the octahedral direct and shear stresses. [30.3, 23 MN/m²; 23.4, 22.7 MN/m².]

23.20 (C). During tests on a welded pipe-tee, internal pressure and torque are applied and the resulting distortion at a point near the branch gives rise to shear components in the r , θ and z directions.

A rectangular strain gauge rosette mounted at the point in question yields the following strain values for an internal pressure of 16.7 MN/m^2 :

$$\epsilon_0 = 0.0013 \quad \epsilon_{45} = 0.00058 \quad \epsilon_{90} = 0.00187$$

Use the Mohr diagrams for stress and strain to determine the state of stress on the octahedral plane. $E = 208 \text{ GN/m}^2$ and $\nu = 0.29$.

What is the direct stress component on planes normal to the direction of zero extension?

$$[\sigma_{\text{oct}} = 310 \text{ MN/m}^2; \tau_{\text{oct}} = 259 \text{ MN/m}^2; 530 \text{ MN/m}^2.]$$

23.21 (C). During service loading tests on a nuclear pressure vessel the distortions resulting near a stress concentration on the inside surface of the vessel give rise to shear components in the r , θ and z directions. A rectangular strain gauge rosette mounted at the point in question gives the following strain values for an internal pressure of 5 MN/m^2 .

$$\epsilon_0 = 150 \times 10^{-6}, \epsilon_{45} = 220 \times 10^{-6} \text{ and } \epsilon_{90} = 60 \times 10^{-6}$$

Use the Mohr diagrams for stress and strain to determine the principal stresses and the state of stress on the octahedral plane at the point. For the material of the pressure vessel $E = 210 \text{ GN/m}^2$ and $\nu = 0.3$.

$$[\text{B.P.}] [52.5, 13.8, -5 \text{ MN/m}^2; \sigma_{\text{oct}} = 21 \text{ MN/m}^2, \tau_{\text{oct}} = 24 \text{ MN/m}^2.]$$

23.22 (C). From the construction of the Mohr strain plane show that the ordinate $\frac{1}{3}\gamma$ for the case of $\alpha = \beta = \gamma$ (octahedral shear strain) is

$$\frac{1}{3}[(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2]^{1/2}$$

23.23 (C). A stress system has three principal values:

$$\sigma_1 = 154 \text{ MN/m}^2 \quad \sigma_2 = 113 \text{ MN/m}^2 \quad \sigma_3 = 68 \text{ MN/m}^2$$

(a) Find the normal and shear stresses on a plane with direction cosines of $l = 0.732$, $m = 0.521$ with respect to the σ_1 and σ_2 directions.

(b) Determine the octahedral shear and normal stresses for this system. Check numerically. [126, 33.4 MN/m²; 112, 35.1 MN/m².]

23.24 (C). A plane has a normal stress of 63 MN/m^2 inclined at an angle of 38° to the greatest principal stress which is 126 MN/m^2 . The shear stress on the plane is 92 MN/m^2 and a second principal stress is 53 MN/m^2 . Find the value of the third principal stress and the angle of the normal of the plane to the direction of stress. [−95 MN/m²; 60° .]

23.25 (C). The normal stress σ_n on a plane has a direction cosine l and the shear stress on the plane is τ_n . If the two smaller principal stresses are equal show that

$$\sigma_1 = \sigma_n + \frac{\tau_n}{l} \sqrt{1-l^2} \quad \text{and} \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_n - \tau_n \frac{1}{\sqrt{1-l^2}}$$

If $\tau_n = 75 \text{ MN/m}^2$, $\sigma_n = 36 \text{ MN/m}^2$ and $l = 0.75$, determine graphically σ_1 and σ_2 . [102, −48 MN/m².]

23.26 (C). If the strains at a point are $\epsilon = 0.0063$ and $\gamma = 0.00481$, determine the value of the maximum principal strain ϵ_1 if it is known that the strain components make the following angles with the three principal strain directions:

$$\begin{aligned} \text{For } \epsilon: \quad \alpha &= 38.5^\circ & \beta &= 56^\circ & \gamma &= \text{positive} \\ \text{For } \gamma: \quad \alpha' &= 128^\circ 32' & \beta' &= 45^\circ 10' & \gamma' &= \text{positive} \end{aligned} \quad [0.0075]$$

23.27 (C). What is meant by the term deviatoric strain as related to a state of strain in three dimensions? Show that the sum of three deviatoric strains ϵ'_1, ϵ'_2 and ϵ'_3 is zero and also that they can be related to the principal strains ϵ_1, ϵ_2 and ϵ_3 as follows:

$$\epsilon'_1 + \epsilon'_2 + \epsilon'_3 = \frac{1}{3}[(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_1)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2] \quad [\text{C.E.I.}]$$

23.28 (C). The readings from a rectangular strain gauge rosette bonded to the surface of a strained component are as follows:

$$\epsilon_0 = 592 \times 10^{-6} \quad \epsilon_{45} = 308 \times 10^{-6} \quad \epsilon_{90} = -432 \times 10^{-6}$$

Draw the full three-dimensional Mohr's stress and strain circle representations and hence determine:

- the principal strains and their directions;
- the principal stresses;
- the maximum shear stress.

Take $E = 200 \text{ GN/m}^2$ and $\nu = 0.3$.

$$[640 \times 10^{-6}, -480 \times 10^{-6}; \text{at } 12^\circ \text{ and } 102^\circ \text{ to } A, 109, -63.5, 86.25 \text{ MN/m}^2]$$

23.29 (C). For a rectangular beam, unit width and depth $2d$, simple beam theory gives the longitudinal stress $\sigma_{xx} = CMy/I$ where

y = ordinate in depth direction (+ downwards)

M = BM in yx plane (+ sagging)

The shear force is Q and the shear stress τ_{xy} is to be taken as zero at top and bottom of the beam.

$\sigma_{yy} = 0$ at the bottom and $\sigma_{yy} = -w/\text{unit length}$, i.e. a distributed load, at the top.

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$$

Using the equations of equilibrium in cartesian coordinates and without recourse to beam theory, find the distribution of σ_{yy} and σ_{xy} .

$$[\text{U.L.}] \left[\sigma_{yy} = \frac{w}{2I} \left(d^2 y - \frac{y^3}{3} - \frac{2d^3}{3} \right); \sigma_{xy} = -\frac{Q}{2I} (d^2 - y^2) \right]$$

23.30 (C). Determine whether the following strain fields are compatible:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \epsilon_{xx} &= 2x^2 + 3y^2 + z + 1 & \text{(b)} \quad \epsilon_{xx} &= 3y^2 + xy \\ \epsilon_{yy} &= 2y^2 + x^2 + 3z + 2 & \epsilon_{yy} &= 2y + 4z + 3 \\ \epsilon_{zz} &= 3x + 2y + z^2 + 1 & \epsilon_{zz} &= 3zx + 2xy + 3yz + 2 \\ \gamma_{xy} &= 8xy & \gamma_{xy} &= 6xy \\ \gamma_{yz} &= 0 & \gamma_{yz} &= 2x \\ \gamma_{zx} &= 0 & \gamma_{zx} &= 2y \end{aligned}$$

[Yes]

[No]

23.31 (C). The normal stress σ_n on a plane has a direction cosine l and the shear stress on the plane is τ . If the two smaller principal stresses are equal show that

$$\sigma_1 = \sigma_n + \frac{\tau}{l} \sqrt{(1-l^2)} \quad \text{and} \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_n - \frac{\tau l}{\sqrt{(1-l^2)}}$$

23.32 (C). (i) A long thin-walled cylinder of internal radius R_0 , external radius R and wall thickness T is subjected to an internal pressure p , the external pressure being zero. Show that if the circumferential stress ($\sigma_{\theta\theta}$) is independent of the radius r then the radial stress (σ_{rr}) at any thickness t is given by

$$\sigma_{rr} = -p \frac{R_0}{T} \frac{(T-t)}{(R_0+t)}$$

The relevant equation of equilibrium which may be used is:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})}{r} + F_r = 0$$

(ii) Hence determine an expression for $\sigma_{\theta\theta}$ in terms of T .

(iii) What difference in approach would you adopt for a similar treatment in the case of a thick-walled cylinder? [B.P.] [$R_0 p/T$]

23.33 (C). Explain what is meant by the following terms and discuss their significance:

- Octahedral planes and stresses.
- Hydrostatic and deviatoric stresses.
- Plastic limit design.
- Compatibility.
- Principal and product second moments of area.

[B.P.]

23.34 (C). At a point in a stressed material the cartesian stress components are:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -40 \text{ MN/m}^2 & \sigma_{yy} &= 80 \text{ MN/m}^2 & \sigma_{zz} &= 120 \text{ MN/m}^2 \\ \sigma_{xy} &= 72 \text{ MN/m}^2 & \sigma_{yz} &= 32 \text{ MN/m}^2 & \sigma_{zx} &= 46 \text{ MN/m}^2 \end{aligned}$$

Calculate the normal, shear and resultant stresses on a plane whose normal makes an angle of 48° with the X axis and 61° with the Y axis. [B.P.] [$135.3, 86.6, 161 \text{ MN/m}^2$]

23.35 (C). The Cartesian stress components at a point in a three-dimensional stress system are those given in problem 23.33 above.

(a) What will be the directions of the normal and shear stresses on the plane making angles of 48° and 61° with the X and Y axes respectively?

$$[l'm'n' = 0.1625, 0.7010, 0.6914; l_i m_i n_i = -0.7375, 0.5451, 0.4053]$$

(b) What will be the magnitude of the shear stress on the octahedral planes where $l = m = n = 1/\sqrt{3}$?

$$[10.7 \text{ MN/m}^2]$$

23.36 (C). Given that the cartesian stress components at a point in a three-dimensional stress system are:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 20 \text{ MN/m}^2, & \sigma_{yy} &= 5 \text{ MN/m}^2, & \sigma_{zz} &= -50 \text{ MN/m}^2 \\ \tau_{xy} &= 0, & \tau_{yz} &= 20 \text{ MN/m}^2, & \tau_{zx} &= -40 \text{ MN/m}^2 \end{aligned}$$

(a) Determine the stresses on planes with direction cosines $0.8165, 0.4082$ and 0.4082 relative to the X, Y and Z axes respectively [B.P.] [$-14.2, 46.1, 43.8 \text{ MN/m}^2$]

(b) Determine the shear stress on these planes in a direction with direction cosines of $0, -0.707, 0.707$.

$$[39 \text{ MN/m}^2]$$

23.37 (C). In a finite element calculation of the stresses in a steel component, the stresses have been determined as follows, with respect to the reference directions X , Y and Z :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 10.9 \text{ MN/m}^2 & \sigma_{yy} &= 51.9 \text{ MN/m}^2 & \sigma_{zz} &= -27.8 \text{ MN/m}^2 \\ \tau_{xy} &= -41.3 \text{ MN/m}^2 & \tau_{yz} &= -8.9 \text{ MN/m}^2 & \tau_{zx} &= 38.5 \text{ MN/m}^2\end{aligned}$$

It is proposed to change the material from steel to unidirectional glass-fibre reinforced polyester, and it is important that the direction of the fibres is the same as that of the maximum principal stress, so that the tensile stresses perpendicular to the fibres are kept to a minimum.

Determine the values of the three principal stresses, given that the value of the intermediate principal stress is 3.9 MN/m^2 . [-53.8; 3.9; 84.9 MN/m^2]

Compare them with the safe design tensile stresses for the glass-reinforced polyester of: parallel to the fibres, 90 MN/m^2 ; perpendicular to the fibres, 10 MN/m^2 .

Then take the direction cosines of the major principal stress as $l = 0.569$, $m = -0.781$, $n = 0.256$ and determine the maximum allowable misalignment of the fibres to avoid the risk of exceeding the safe design tensile stresses. (Hint: compression stresses can be ignored.) [15.9°]

23.38 (C). The stresses at a point in an isotropic material are:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 10 \text{ MN/m}^2 & \sigma_{yy} &= 25 \text{ MN/m}^2 & \sigma_{zz} &= 50 \text{ MN/m}^2 \\ \tau_{xy} &= 15 \text{ MN/m}^2 & \tau_{yz} &= 10 \text{ MN/m}^2 & \tau_{zx} &= 20 \text{ MN/m}^2\end{aligned}$$

Determine the magnitudes of the maximum principal normal strain and the maximum principal shear strain at this point, if Young's modulus is 207 GN/m^2 and Poisson's ratio is 0.3 . [280 $\mu\epsilon$; 419 $\mu\epsilon$]

23.39 (C). Determine the principal stresses in a three-dimensional stress system in which:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 40 \text{ MN/m}^2 & \sigma_{yy} &= 60 \text{ MN/m}^2 & \sigma_{zz} &= 50 \text{ MN/m}^2 \\ \sigma_{xx} &= 30 \text{ MN/m}^2 & \sigma_{xy} &= 20 \text{ MN/m}^2 & \sigma_{yz} &= 10 \text{ MN/m}^2\end{aligned}$$

[90 MN/m^2 , 47.3 MN/m^2 , 12.7 MN/m^2]

23.40 (C). If the stress tensor for a three-dimensional stress system is as given below and one of the principal stresses has a value of 40 MN/m^2 determine the values of the three eigen vectors.

$$\begin{bmatrix} 30 & 10 & 10 \\ 10 & 0 & 20 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

[0.816, 0.408, 0.408]

23.41 (C). Determine the values of the stress invariants and the principal stresses for the cartesian stress components given in Problem 23.2. [450; 423.75; 556.25; 324.8; 109.5; 15.6 MN/m^2]

23.42 (C). The stress tensor for a three-dimensional stress system is given below. Determine the magnitudes of the three principal stresses and determine the eigen vectors of the major principal stress.

$$\begin{bmatrix} 80 & 15 & 10 \\ 15 & 0 & 25 \\ 10 & 25 & 0 \end{bmatrix}$$

[85.3; 19.8; -25.1 MN/m^2 , 0.9592; 0.2206; 0.1771]

23.43 (C). A hollow steel shaft is subjected to combined torque and internal pressure of unknown magnitudes. In order to assess the strength of the shaft under service conditions a rectangular strain gauge rosette is mounted on the outside surface of the shaft, the centre gauge being aligned with the shaft axis. The strain gauge readings recorded from this gauge are shown in Fig. 23.47.

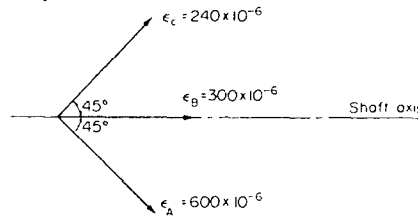


Fig. 23.47.

If E for the steel = 207 GN/m^2 and $\nu = 0.3$, determine:

- the principal strains and their directions;
- the principal stresses

Draw complete Mohr's circle representations of the stress and strain systems present and hence determine the maximum shear stresses and maximum shear strain.

[636 $\times 10^{-6}$ at 16.8° to A ; -204 $\times 10^{-6}$ at 106.8° to A ; -360 $\times 10^{-6}$ perp. to plane; 159, -90, 0 MN/m^2 ; 79.5 MN/m^2 , 996 $\times 10^{-6}$.]

23.44 (C). At a certain point in a material a resultant stress of 40 MN/m^2 acts in a direction making angles of 45° , 70° and 60° with the coordinate axes X , Y and Z . Determine the values of the normal and shear stresses on an oblique plane through the point given that the normal to the plane makes angles of 80° , 54° and 38° with the same coordinate axes.

If $\sigma_{xy} = 25 \text{ MN/m}^2$, $\sigma_{xz} = 18 \text{ MN/m}^2$ and $\sigma_{yz} = -10 \text{ MN/m}^2$, determine the values of σ_{xx} , σ_{yy} , and σ_{zz} , which act at the point. [28.75, 27.7 MN/m^2 ; -3.5, 29.4, 28.9 MN/m^2]

23.45 (C). The plane stress distribution in a flat plate of unit thickness is given by

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= x^3y - 2y^3x \\ \sigma_{yy} &= y^3x - 2pxy + qx \\ \sigma_{xy} &= \frac{y^4}{2} - \frac{3}{2}x^2y^2 + px^2 + s\end{aligned}$$

If body forces are neglected, show that equilibrium exists.

The dimensions of the plate are given in Fig. 23.48 and the following boundary conditions apply:

$$\text{at } y = \pm \frac{b}{2} \quad \sigma_{xy} = 0$$

and

$$\text{at } y = -\frac{b}{2} \quad \sigma_{yy} = 0$$

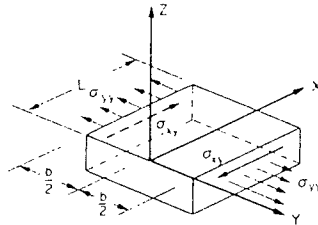


Fig. 23.48.

Determine

- (a) the values of the constants p , q and s ;
(b) the total load on the edge $y = \pm b/2$.

$$[\text{B.P.}] \left[\frac{3b^2}{8}, \frac{-b^3}{4}, \frac{-b^4}{32}, \frac{b^3 L^2}{4} \right]$$

23.46 (C). Derive the differential equation in cylindrical coordinates for radial equilibrium without body force of an element of a cylinder subjected to stresses σ_r , σ_θ .

A steel tube has an internal diameter of 25 mm and an external diameter of 50 mm. Another tube, of the same steel, is to be shrunk over the outside of the first so that the shrinkage stresses just produce a condition of yield at the inner surfaces of each tube. Determine the necessary difference in diameters of the mating surfaces before shrinking and the required external diameter of the outer tube. Assume that yielding occurs according to the maximum shear stress criterion and that no axial stresses are set up due to shrinking. The yield stress in simple tension or compression = 420 MN/m² and $E = 208 \text{ GN/m}^2$. [C.E.I.] [0.126 mm, 100 mm.]

23.47 (C). For a particular plane strain problem the strain displacement equations in cylindrical coordinates are:

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r}; \quad \epsilon_z = \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta z} = \gamma_{rz} = 0$$

Show that the appropriate compatibility equation in terms of stresses is

$$vr \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - (1 - \nu)r \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial r} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0$$

where ν is Poisson's ratio.

State the nature of a problem that the above equations can represent.

[C.E.I.]

23.48 (C). A bar length L , depth d , thickness t is simply supported and loaded at each end by a couple C as shown in Fig. 23.49. Show that the stress function $\phi = Ay^3$ adequately represents this problem. Determine the value of the coefficient A in terms of the given symbols. [A = $2C/td^3$]

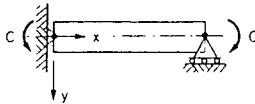


Fig. 23.49.

23.49 (C). A cantilever of unit width and depth $2d$ is loaded with forces at its free end as shown in Fig. 23.50. The stress function which satisfies the loading is found to be of the form:

$$\phi = ay^2 + by^3 + cxy^3 + exy$$

where the coordinates are as shown.

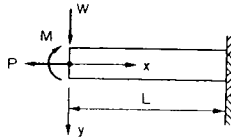


Fig. 23.50.

Determine the value of the constants a , b , c and e and hence show that the stresses are:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= P/2d + 3My/2d^3 - 3Wxy/2d^3; \\ \sigma_{yy} &= 0 \\ \tau_{xy} &= 3W/y^2/4d^3 - 3W/4d. \end{aligned}$$

23.50 (C) A cantilever of unit width length L and depth $2a$ is loaded by a linearly distributed load as shown in Fig. 23.51, such that the load at distance x is qx per unit length. Proceeding from the sixth order polynomial derive

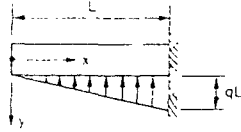


Fig. 23.51.

the 25 constants using the boundary conditions, overall equilibrium and the biharmonic equation. Show that the stresses are

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{qx^3}{4a^3} + \frac{q}{4a^3} (-2xy^3 + \frac{3}{2}a^2xy) \\ \sigma_{yy} &= -\frac{q}{2} + qx \left(\frac{y^3}{4a^3} - \frac{3y}{4a} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{3qx^2}{8a^3} (a^2 - y^2) - \frac{q}{8a^3} (a^4 - y^4) + \frac{3q}{20a} (a^2 - y^2)\end{aligned}$$

Examine the state of stress at the free end ($x = 0$) and comment on the discrepancy of the shear stress. Compare the shear stress obtained from elementary theory, for $L/2a = 10$, with the more rigorous approach with the additional terms.

23.51 (C). Determine if the expression $\phi = (\cos^3 \theta)/r$ is a permissible Airy stress function, that is, make sure it satisfies the biharmonic equation. Determine the radial and shear stresses (σ_{rr} and $\tau_{r\theta}$) and sketch these on the periphery of a circle of radius a

$$\left[\sigma_{rr} = \frac{2}{r^3} \cos \theta (3 - 5 \cos^2 \theta); \quad \tau_{r\theta} = -\frac{6}{r^3} \cos^2 \theta \sin \theta \right]$$

23.52 (C). The stress concentration factor due to a small circular hole in a flat plate subject to tension (or compression) in one direction is three. By superposition of the Kirsch solutions determine the stress concentration factors due to a hole in a flat plate subject to (a) pure shear, (b) two-dimensional hydrostatic tension. Show that the same result for case (b) can be obtained by considering the Lamé solution for a thick cylinder under external tension when the outside radius tends to infinity. [(a) 4; (b) 2.]

23.53 (C). Show that $\phi = Cr^2(\alpha - \theta + \sin \theta \cos \theta - \tan \alpha \cos^2 \theta)$ is a permissible Airy stress function and derive expressions for the corresponding stresses σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ and $\tau_{r\theta}$.

These expressions may be used to solve the problem of a tapered cantilever beam of thickness carrying a uniformly distributed load q /unit length as shown in Fig. 23.52.

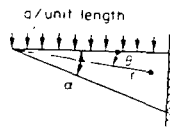


Fig. 23.52

Show that the derived stresses satisfy every boundary condition along the edges $\theta = 0^\circ$ and $\theta = \alpha$. Obtain a value for the constant C in terms of q and α and thus show that:

$$\sigma_{rr} = \frac{qr}{t(\tan \alpha - \alpha)} \quad \text{when } \theta = 0^\circ$$

Compare this value with the longitudinal bending stress at $\theta = 0^\circ$ obtained from the simple bending theory when $\alpha = 5^\circ$ and $\alpha = 30^\circ$. What is the percentage error when using simple bending?

$$\left[C = \frac{q}{2t(\tan \alpha - \alpha)}; \quad -0.2\% \text{ and } -7.6\% \text{ (simple bending is lower)} \right]$$

สัปดาห์ที่ 11

หัวข้อเรื่อง ทฤษฎีความล้มเหลวของความยืดหยุ่น (1)

(3 ชั่วโมง)

ความคิดรวบยอด

1. ทฤษฎีความแข็งแรงเป็นการศึกษาเกณฑ์ในการออกแบบสำหรับสถานะความเค้นที่ซับซ้อน เพื่อหาสูตรที่ใช้ในการออกแบบตามทฤษฎีต่างๆที่มีผู้ตั้งขึ้นมา
2. การใช้ทฤษฎีความแข็งแรงในหน่วยนี้จะกล่าวเฉพาะความแข็งแรงสถิตเท่านั้น
3. พื้นฐานที่สำคัญก่อนศึกษาหัวข้อนี้คือการวิเคราะห์ความเค้นและความเครียด

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. คำนวณหาเกณฑ์ในการออกแบบด้วยทฤษฎีความเค้นตั้งฉากสูงสุดได้
2. คำนวณหาเกณฑ์ในการออกแบบด้วยทฤษฎีความเครียดตั้งฉากสูงสุดได้
3. คำนวณหาเกณฑ์ในการออกแบบด้วยทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุดได้

สังเขปเนื้อหา

หน่วยที่ 8. ทฤษฎีความแข็งแรง

- ทฤษฎีความเค้นตั้งฉากสูงสุด
- ทฤษฎีความเครียดตั้งฉากสูงสุด
- ทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุด

หน่วยที่ 8. ทฤษฎีความแข็งแรง

4-1 นาท

ความเสียหาย(Failure) ของชิ้นส่วนที่ประกอบกันเป็นเครื่องจักรกลหรือโครงสร้างมีอยู่หลายแบบ เช่น วัสดุเกิดการคราก (Yield), ชิ้นส่วนเกิดการแตกหัก (Fracture), วัสดุเกิดการเสียรูปร่างอย่างถาวร (Permanent Set) มากเกินไป และชิ้นส่วนเกิดการโก่งเดาะ (Buckling) เป็นต้น สาเหตุที่ทำให้วัสดุเกิดการเสียหายไม่สามารถอธิบายได้ด้วยคำพูดโดยตรง แต่สามารถใช้ทฤษฎีความแข็งแรง (Strength Theory) ที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้อธิบายได้ว่าทำไมการเสียหายเนื่องจากการแตกหักหรือการครากจึงเกิดขึ้นกับวัสดุได้ ทฤษฎีความแข็งแรงหรือทฤษฎีความเสียหาย (Theory of Failure) นี้เป็นเพียงทฤษฎีเท่านั้น ไม่ใช่พฤติกรรมหรือกฎเกณฑ์ที่แท้จริงซึ่งเกิดขึ้นในขณะที่เกิดการเสียหาย ทฤษฎีเหล่านี้จะเป็นหลักการที่ชี้ให้เห็นแนวความคิดที่ใช้ในการออกแบบชิ้นส่วนที่รับภาระ (Load) แบบต่างๆได้ ทฤษฎีที่กล่าวต่อไปนี้จะอธิบายถึงความเสียหายที่เกิดขึ้นเนื่องจากการแตกหักและการเกิดการครากขึ้นในเนื้อวัสดุเท่านั้น ทฤษฎีนี้เป็นแนวทางและหลักการที่ช่วยให้วิศวกรสามารถคำนวณขนาดของชิ้นส่วนต่างๆได้

จากการวิเคราะห์ความเค้นบนหน้าตัดเอียงภายใต้แรงในแนวแกนของชิ้นส่วน ในหัวข้อ 1-1 นั้น จะเห็นว่า บนหน้าตัดเอียงนั้นจะเกิดความเค้นดัดงอกและความเค้นเฉือนขึ้นร่วมกันซึ่งทำให้ชิ้นส่วนเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างด้วยความเครียดดัดงอกและความเครียดเฉือน ด้วยเหตุนี้แม้ว่าจะเป็นสถานะของความเครียดแบบที่ง่ายที่สุด เช่น การดึงในทิศทางเดียว ก็จะทำให้วัสดุเกิดความเสียหายโดยความเครียดดัดงอกและความเครียดเฉือนมีค่าเกินกว่าค่าจำกัดของวัสดุที่แน่นอนค่าหนึ่ง ในการพิจารณาต่อไปนี้จะศึกษาการเสียหายของวัสดุเนื่องจากการเริ่มเกิดการครากของวัสดุเหนียวและการแตกหักของวัสดุเปราะ ซึ่งการพิจารณาต่อไปนี้จะง่ายขึ้นโดยการแบ่งวัสดุออกเป็นวัสดุเหนียวและวัสดุเปราะ วัสดุที่มีพฤติกรรมเป็นวัสดุเหนียวภายใต้การดึงในทิศทางเดียวอาจจะเกิดการแตกหักแบบวัสดุเปราะโดยไม่มีการเสียรูปร่างอย่างถาวรเกิดขึ้นมากภายใต้การดึงทุกทิศทาง แต่ในทำนองตรงกันข้าม วัสดุที่มีพฤติกรรมแบบวัสดุเปราะภายใต้การดึงในทิศทางเดียว อาจจะเป็นวัสดุเหนียวภายใต้ความเค้นสถานะอื่นๆก็ได้ เพราะฉะนั้น เพื่อความถูกต้องจึงไม่ควรเรียกวัดว่าเป็นวัสดุเหนียวหรือวัสดุเปราะ แต่ควรจะเรียกว่าวัสดุอยู่ในสถานะเหนียวหรือวัสดุอยู่ในสถานะเปราะ

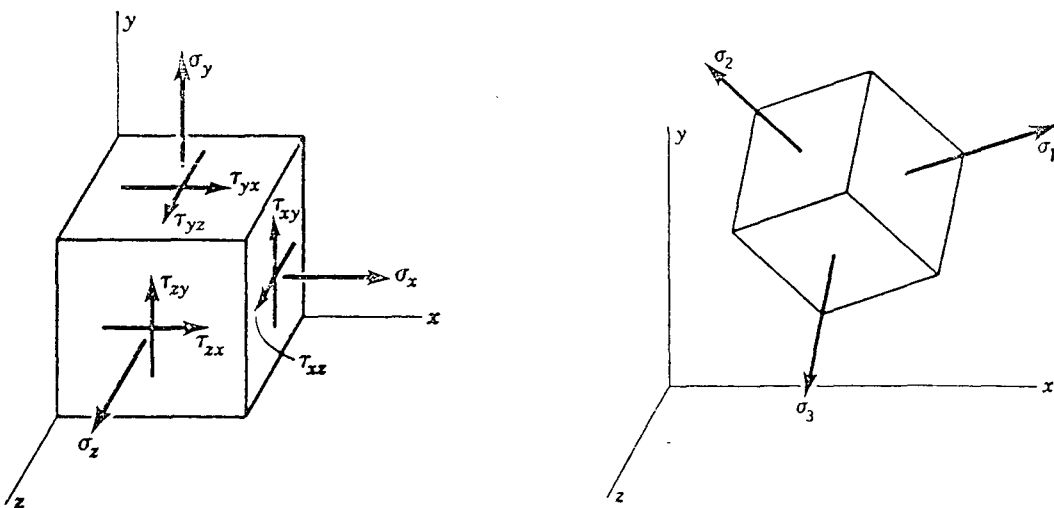
สำหรับวัสดุเปราะ เช่น เหล็กหล่อ ความต้านทานการแยกตัวของโมเลกุลมีค่าน้อยกว่าความต้านทานในการเลื่อนของโมเลกุล ดังนั้นแรงยึดเหนี่ยวระหว่างโมเลกุลจะมีค่าน้อย ทำให้โมเลกุลเกิดการแยกตัวโดยมีการเสียรูปร่างเพียงเล็กน้อย สำหรับวัสดุเหนียว เช่น เหล็กเหนียว ความต้านทานการเลื่อนตัวของโมเลกุลมีค่าน้อยกว่าความต้านทานการแยกตัว เพราะฉะนั้น Crystal Lattice ที่ประกอบกันขึ้นเป็นเนื้อวัสดุจึงเกิดการเลื่อนตัวออกจากกัน ทำให้เกิดการเสียรูปร่างอย่างถาวรขึ้น เมื่อเกิดการเสียรูปร่างอย่างถาวร ความต้านทานการเลื่อนจะเริ่มมีค่าเพิ่มมากขึ้น การแตกหักในขั้นสุดท้ายของวัสดุจะเกิดขึ้นพร้อมกันโดยเป็นการเสียรูปร่างอย่างไม่ยืดหยุ่น (Plastic Deformation)

ดังนั้นความแข็งแรงของวัสดุที่อยู่ในสถานะเปราะจะแสดงคุณลักษณะโดยความต้านทานการแตกตัวของโมเลกุล และความแข็งแรงของวัสดุในสถานะเหนียวจะแสดงคุณลักษณะโดยความต้านทานในการทำให้เกิดการเสียรูปร่างอย่างถาวร คือความต้านทานการเลื่อน

ในกรณีที่ชิ้นส่วนถูกดึงในแนวแกนในทิศทางเดียว เกณฑ์ (Criterion) ในการเสียหายอาจจะเป็นการที่วัสดุถูกดึงจนเกินขอบเขตความยืดหยุ่น หรือจนกระทั่งเกิดการแตกหักออกจากกัน ถ้าการเสียรูปร่างอย่างไม่ยืดหยุ่น (plastic) เป็นสาเหตุในการเสียหาย ก็อาจจะใช้ความแข็งแรงคราก (Yield Strength) เป็นค่าขีดจำกัดก็ได้ แต่ถ้าหากการแตกหักเป็นสาเหตุในการเสียหาย ก็อาจจะใช้ความแข็งแรงประลัย (Ultimate Strength) เป็นค่าขีดจำกัดของระดับความเค้นก็ได้ ความแข็งแรงครากและความแข็งแรงประลัยนี้เรียกว่าเป็นค่าวิกฤติ (Critical Value) หรือค่าจำกัด (Limiting Value) ในการเสียหาย ค่าจำกัดนี้ไม่จำเป็นต้องเป็นความเค้นก็ได้ เช่น อาจจะให้ความเครียดหรือพลังงานความเครียดในขณะที่เกิดการเสียหายเป็นค่าจำกัดของการเสียหายก็ได้

สำหรับชิ้นส่วนที่รับแรงในแนวแกน สาเหตุที่แท้จริงในการเสียหายของวัสดุทางปฏิบัติมักจะไม่สำคัญเท่าใดนัก เนื่องจากความเค้นใช้งาน (Working หรือ Allowable Stress) สามารถหาได้จากการทดสอบวัสดุโดยตรง

ในกรณีที่ชิ้นส่วนที่รับแรงหลายทิศทางเช่น เป็นการดึง 2 ทิศทาง หรือการดึงและการอัด 3 ทิศทาง โดยที่จุดๆหนึ่งของเนื้อวัสดุอยู่ภายใต้สถานะความเค้น $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ ทำให้เกิดความเค้นหลัก $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ($\tau = 0$) ดังแสดงไว้ในรูป 4-1.1 การกำหนดค่าจำกัดของการเสียหายจะแตกต่างกับชิ้นส่วนที่รับแรงในทิศทางเดียว ในกรณีเช่นนี้การหาค่าจำกัดที่แสดงคุณลักษณะในการเสียหายของวัสดุและทิศทางของการเสียหายของวัสดุโดยการทดลองจะพิจารณาได้ยากมาก เราจะกำหนด critical quantity ได้อย่างไร ? เราไม่สามารถที่จะกระทำทดลองได้ทุก combination ของความเค้นเหล่านี้ได้ ฉะนั้นเราจึงต้องการที่จะมีทฤษฎีของความเสียหายสำหรับสถานะของความเค้นใดๆ เพื่อใช้เป็นหลักในการคำนวณ



รูป 4-1.1

ในการทำนายการเสียหายของวัสดุภายใต้การกระทำของความเค้นหลายทิศทางจากความแข็งแรงครากและความแข็งแรงประลัยที่ได้จากการทดลองในการดึงทิศทางเดียวตามแนวแกน จำเป็นจะต้องกำหนดสาเหตุที่แท้จริงที่ทำให้วัสดุเกิดการเสียหาย การวิเคราะห์ความเสียหายของวัสดุทางทฤษฎีและการทดลองได้นำสมมติฐาน เข้ามาร่วมในการศึกษาอีกหลายอย่าง ข้อสมมติฐานเหล่านี้เรียกว่าทฤษฎีความแข็งแรงจุดประสงค์ของทฤษฎีความแข็งแรงก็เพื่อกำหนดความเสียหายของวัสดุ ที่เป็นไปได้ ภายใต้สถานะของความเค้น โดยใช้พื้นฐานของคุณลักษณะของวัสดุที่ได้จากการทดสอบการดึงหรือการอัดในทิศทางเดียว

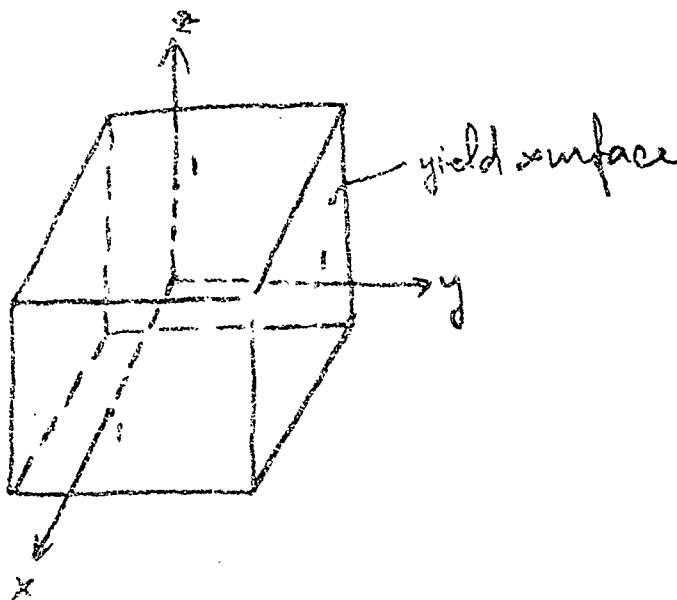
ทฤษฎีความแข็งแรงที่มีใช้อยู่ในปัจจุบันสำหรับการะสถิต คือ

1. ทฤษฎีความเค้นตึงจากสูงสุด
2. ทฤษฎีความเครียดตึงจากสูงสุด
3. ทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุด
4. ทฤษฎีความเค้นเฉือนออกตะฮีดรัล (Octahedral) สูงสุด
5. ทฤษฎีพลังงานความเครียดสูงสุด
6. ทฤษฎีพลังงานความเครียดในการเสียรูปร่างสูงสุด
7. ทฤษฎีสถานะของความเค้นจำกัด

4-2 ทฤษฎีความเค้นตั้งฉากสูงสุด

พื้นฐานของทฤษฎีความแข็งแรงนี้ถูกเสนอขึ้นโดยกาลิเลโอ กาลิเลอี โดยตั้งสมมติฐานว่าวัสดุจะเกิดการเสียหายเนื่องจากความเค้นตั้งฉากที่มีค่าสูงสุด ต่อมาทฤษฎีนี้ถูกเสนอโดย Lamé และถูกรื้อฟื้นขึ้นโดย W. J. Rankine (1820-1872) นักการศึกษาที่มีชื่อเสียงของอังกฤษ ทฤษฎีนี้นิยมเรียกอีกอย่างหนึ่งว่าเป็นทฤษฎีของแรงกิน ทฤษฎีนี้มีสมมติฐานดังนี้คือ

“ไม่ว่าสถานะของความเค้นจะเป็นอย่างไรก็ตาม การเสียหายของวัสดุจะเกิดขึ้นเมื่อความเค้นตั้งฉากในทิศทางใดทิศทางหนึ่งมีค่าเท่ากับความเค้นตั้งฉากที่ทำให้วัตถุที่รับแรงในทิศทางเดียวเกิดการเสียหาย”



รูป 4-2.1/

สมมติว่าเนื้อวัสดุอนุพันธ์ของชิ้นส่วนในรูป 4-2.1(a) ถูกดึงในทิศทางเดียวและเกิดการเสียหายเมื่อความเค้นตั้งฉากมีค่าเท่ากับ σ_{eq} ดังนั้นจากทฤษฎีความแข็งแรงนี้ ชิ้นส่วนที่ถูกดึง 3 ทิศทางซึ่งมีเนื้อวัสดุอนุพันธ์ดังแสดงไว้ในรูป 4-2.1(b) และเกิดความเค้นหลักขึ้นโดย $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ก็จะมีการเสียหายเมื่อ σ_1 มีค่าเท่ากับหรือมากกว่า σ_{eq} ความเค้น σ_2 และ σ_3 ซึ่งมีค่าน้อยกว่า σ_1 จะไม่นำมาพิจารณาในกรณีนี้ σ_{eq} คือความเค้นเทียบเท่า (Equivalent Stress) ซึ่งเป็นความเค้นที่ถือว่าทำให้ชิ้นส่วนที่รับแรงในแนวแกนเดียวเกิดการเสียหาย สำหรับวัสดุเหนียวส่วนมากจะให้ $\sigma_{eq} = \sigma_{yp}$ และวัสดุเปราะจะให้ $\sigma_{eq} = \sigma_u$

สำหรับวัสดุที่มีความแข็งแรงในการดึงและการอัดเท่ากัน ชิ้นส่วนจะเริ่มเกิดการเสียหายเมื่อ σ_{eq} มีค่าเท่ากับ σ_w คือ

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 \leq \sigma_w$$

4-2.1

สำหรับวัสดุที่มีความแข็งแรงในการอัดไม่เท่ากับความสามารถในการดึง สภาวะความแข็งแรงจะต้องพิจารณาทั้งการดึงและการอัด ยกตัวอย่างเช่น $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ และ $\sigma_3 < 0$ สภาวะความแข็งแรงจะเป็น

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 \leq \sigma_{wt} \tag{4-2.2}$$

$$\sigma_{eq} = \sigma_3 \leq \sigma_{wc}$$

กรณีทั่วไปสำหรับชิ้นส่วนที่มีสถานะความเค้นแบบ 3 มิติ โดยมีความเค้นหลักเกิดขึ้นเป็น σ_1 , σ_2 , และ σ_3 ถ้า $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ วัสดุจะไม่เกิดการเสียหายเมื่อ

$$- \sigma_{eq} \leq \sigma_1 \leq \sigma_{eq} \tag{1}$$

เช่นเดียวกันเมื่อ $\sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_3$ และ $\sigma_3 > \sigma_1 > \sigma_2$ วัสดุจะไม่เกิดการเสียหายเมื่อ

$$- \sigma_{eq} \leq \sigma_2 \leq \sigma_{eq} \tag{2}$$

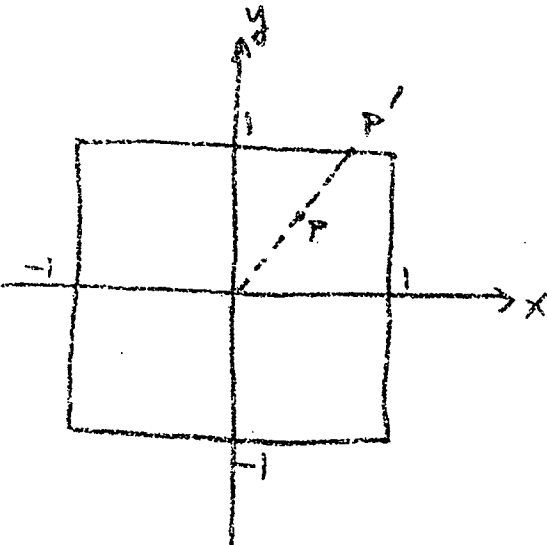
$$- \sigma_{eq} \leq \sigma_3 \leq \sigma_{eq} \tag{3}$$

ตามลำดับ จากสมการ (1), (2), และ (3) จะเห็นได้ว่าสภาวะขีดจำกัด(Limiting Condition) ซึ่งจะทำให้เกิดการเสียหายคือ

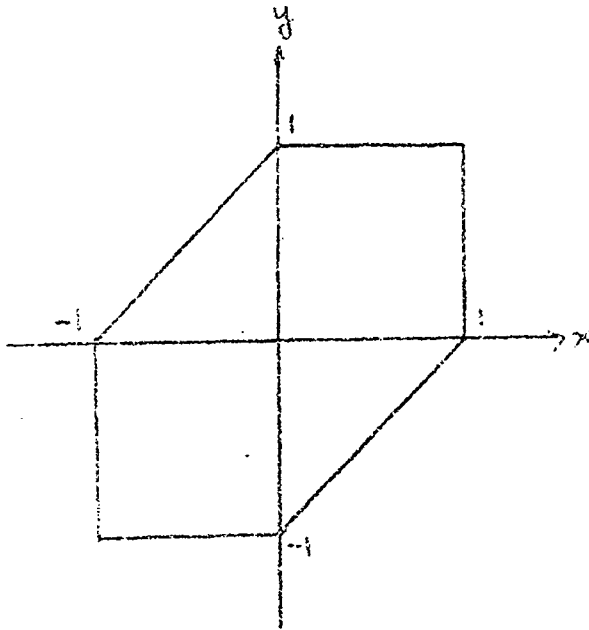
$$\sigma_1 / \sigma_{eq} = \pm 1, \quad \sigma_2 / \sigma_{eq} = \pm 1, \quad \sigma_3 / \sigma_{eq} = \pm 1$$

ดังนั้นYield Surface หรือ Failure Surface จึงสามารถแทนด้วยรูปลูกบาศก์ ดังแสดงไว้ในรูป

4-2.2(a)



รูป 4-2.2,



รูป 4-2.3

ในกรณีที่เป็นการเค้นบนระนาบ $\sigma_3 = 0$, รูปลูกบาศก์ในรูป 4-2.2 จะลดเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสดังแสดงไว้ในรูป 4-2.3(a)

ทุกสถานะของความเค้นที่อยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสนี้จะไม่เกิดความเสียหายขึ้น เช่น สถานะของความเค้นที่จุด A จะไม่เกิดการเสียหายเพราะว่าความเค้น σ_1 และ σ_2 ยังมีค่าน้อยกว่า σ_{eq} สถานะความเค้นตรงจุด B วัสดุจะเริ่มเกิดการเสียหายเพราะว่า $\sigma_1 = \sigma_{eq}$ โดยที่ σ_2 ยังน้อยกว่า σ_{eq} อยู่ เมื่อเปรียบเทียบจุด A กับจุด B จะเห็นได้ว่าเส้นตรง AB คือ Margin of Safety ของจุด A นั่นเอง

ทฤษฎีความเค้นตั้งฉากสูงสุดนี้เป็นทฤษฎีความแข็งแรงทฤษฎีแรกที่ถูกเสนอขึ้นก่อนทฤษฎีอื่นๆ ในขณะที่เสนอทฤษฎีนี้นั้น วิศวกรทางวิศวกรรมที่ใช้ส่วนใหญ่เป็นวัสดุเปราะ (คือเหล็กหล่อ, หิน และอื่นๆ) แนวความคิดของทฤษฎีนี้ได้มาจากการสังเกตการเสียหายของวัสดุทุกชนิดซึ่งเกิดขึ้นเนื่องจากความเค้นตั้งฉากสูงสุด ทฤษฎีนี้จะให้ผลลัพธ์เป็นที่น่าพอใจเฉพาะกับชิ้นส่วนที่ทำขึ้นจากวัสดุเปราะเท่านั้น การเริ่มต้นเสียหายของวัสดุเหนียวซึ่งเริ่มต้นขึ้นเมื่อเกิดการครากเนื่องจากความเค้นเฉือนไม่สามารถอธิบายด้วยทฤษฎีนี้ได้ ยิ่งไปกว่านั้น ผลจากการทดลองได้คัดค้านทฤษฎีนี้ คือชิ้นส่วนที่รับการอัดทุกทิศทางจะแข็งแรงกว่าชิ้นส่วนที่รับการอัดทิศทางเดียวหลายเท่าตัว สำหรับวัสดุเปราะซึ่ง $\sigma_{yc} > \sigma_{yt}$ failure surface จะเป็นดังในรูป 4-2.3(b)

4-3 ทฤษฎีความเครียดตั้งฉากสูงสุด

ทฤษฎีนี้เริ่มกล่าวคร่าวๆ ในรูปแบบทั่วไปประมาณปี 1900 ของคริสต์ศตวรรษที่ 17 และในศตวรรษที่ 19 ถูกเสนอขึ้นโดย B. de St. Venant (1797-1886) นักค้นคว้าทางด้าน Elasticity ชาวฝรั่งเศส ทฤษฎีนี้บางครั้งเรียกว่าเป็นทฤษฎีของ St. Venant ทฤษฎีนี้มีข้อสมมติฐานว่า

“ไม่ว่าสถานะของความเค้นจะเป็นอย่างไรก็ตาม วัสดุจะเกิดความเสียหายเมื่อความเครียดดึงหรือความเครียดอัดในทิศทางใดทิศทางหนึ่งมีค่าเท่ากับค่าของความเครียดตั้งฉากที่เกิดขึ้นในขณะทีวัสดุเกิดการเสียหายด้วยการดึงหรือการอัดในทิศทางเดียว”

ถ้าชิ้นส่วนเกิดสภาวะความเค้น 3 มิติ และทำให้เกิดความเค้นหลักเป็น σ_1, σ_2 และ σ_3 ความเครียดตั้งฉากสูงสุดจะเกิดขึ้นในทิศทางของความเค้นหลักทั้ง 3 นี้ ทิศทางใดทิศทางหนึ่ง ในกรณีของความเค้นในสถานะ 3 มิติ ความเครียดหลักที่เกิดขึ้นคือ

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_1}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_2}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_3 + \sigma_1)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_3}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

ซึ่งจากสมการทั้ง 3 นี้จะต้องสังเกตเครื่องหมายของ σ_1, σ_2 และ σ_3 ด้วย จากค่าของ σ_1, σ_2 และ σ_3 จะหาค่าของความเครียดสูงสุดได้จากสมการทั้ง 3 นี้ จากสมมติฐานของทฤษฎีนี้จะเห็นได้ว่า $\varepsilon_{\max}$ จะต้องไม่มากกว่าความเครียดที่ถือว่าวัสดุเกิดความเสียหาย คือ ε_{eq}

สมมติว่า $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ความเครียดที่มีค่ามากที่สุดคือความเครียด ε_1 ดังนั้น

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{eq} = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3)$$

แทนค่า $\varepsilon_{eq} = \frac{\sigma_{eq}}{E}$ ลงในสมการนี้จะได้

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า ε_2 เป็นความเครียดที่มีค่าสูงสุดก็จะได้

$$\sigma_{eq} = \sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)$$

และถ้า ε_3 มีค่าสูงสุดจะได้

$$\sigma_{eq} = \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)$$

การเสียหายอาจเกิดขึ้นในทิศทางใดก็ได้ขึ้นอยู่กับค่าสูงสุดของความเครียดหลัก ซึ่งในกรณีทั่วไปความเค้นที่ถือว่าวัสดุเกิดการเสียหายเนื่องจากเกิดความเครียดสูงสุดจะหาได้จาก

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{eq} &= \begin{aligned} &\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \\ &\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1) \\ &\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \end{aligned} \leq \sigma_w \end{aligned} \right\} \quad (4-3.1)$$

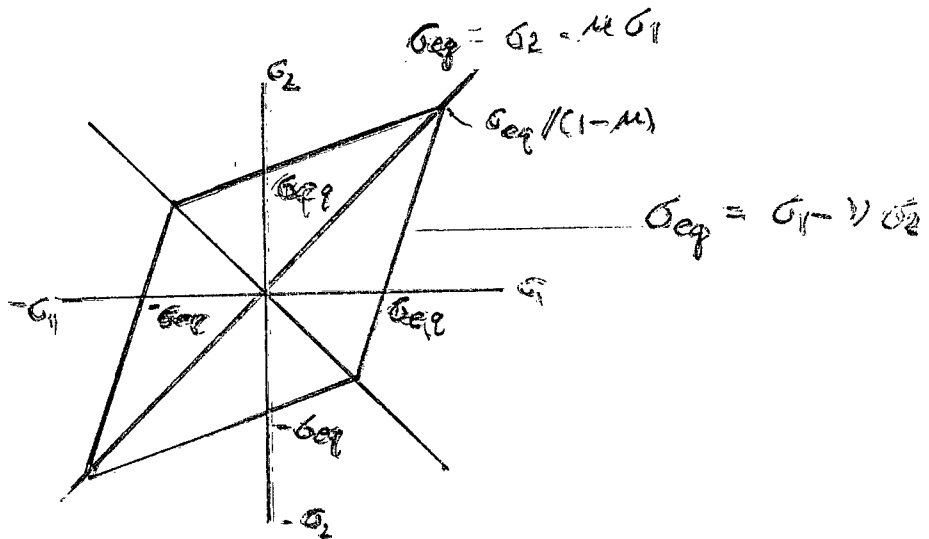
ดังนั้นการใช้ทฤษฎีความแข็งแรงทฤษฎีนี้จะหาความเค้น σ_{eq} สูงสุดซึ่งมีค่าไม่เกิน σ_w จากสมการ (4-3.1) σ_{eq} ไม่ได้เกิดขึ้นภายในชิ้นส่วนอย่างแท้จริง σ_{eq} จะมีค่าเท่ากับความเค้นที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนที่รับแรงในทิศทางเดียว โดยทำให้เกิดความเครียดเท่ากับความเครียดสูงสุดที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนที่รับแรงหลายทิศทาง

ในกรณีที่ความเค้นบนระนาบ $\sigma_3 = 0$, สมการ (4-3.1) จะเปลี่ยนไปเป็น

$$\sigma_{eq} = \frac{\sigma_1 - \nu \sigma_2}{1 - \nu} \leq \sigma_w \quad (4-3.2)$$

$$\frac{\sigma_2 - \nu \sigma_1}{1 - \nu}$$

และจะเขียน Failure Surface ได้เป็นรูปขนมเปียกปูนดังแสดงไว้ในรูป 4-3.1



รูป 4-3.1

ทฤษฎีนี้แม้ว่าจะใช้ความเค้นหลักทั้ง 3 ค่ามาเป็นเหตุผลก็ไม่ตรงกับผลที่ได้จากการทดลองและบางครั้งจะขัดแย้งกับผลจากการทดลอง ยกตัวอย่างเช่น ชิ้นส่วนที่ถูกดึงในทิศทางตั้งฉากกัน 2 ทิศทางตามทฤษฎีนี้วัสดุจะสามารถรับภาระได้มากกว่ากรณีที่เกิดในทิศทางเดียว (σ_y , 2 ทิศทางจะสูงกว่า σ_y , ทิศทางเดียว)

สาเหตุเช่นนี้เกิดขึ้นเนื่องจากการยึดตัวในแต่ละทิศทางจะลดน้อยลงเนื่องจากการดึงในทิศทางที่ตั้งฉากกัน อีกทิศทางหนึ่ง ซึ่งการทดลองไม่ได้ผลเป็นไปตามทฤษฎีนี้

การทดสอบวัสดุภายใต้ Hydrostatic Pressure ที่สม่ำเสมอ หรือ Hydrostatic Stress ก็เป็นอีกกรณีหนึ่งที่ค้ำกับทฤษฎีนี้ ในกรณี Hydrostatic Stress $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$ สมการ(4-3.1)จะได้

$$\sigma_{eq} = (1 - 2 \nu) p$$

หรือ
$$p = \sigma_{eq} / (1 - 2 \nu) \tag{1}$$

ถ้าวัสดุเกิดการเสียหายเมื่อ $\sigma_{eq} = \sigma_{yp}$ จากสมการ(1) จะได้

$$p = \sigma_{yp} / (1 - 2 \nu) \tag{2}$$

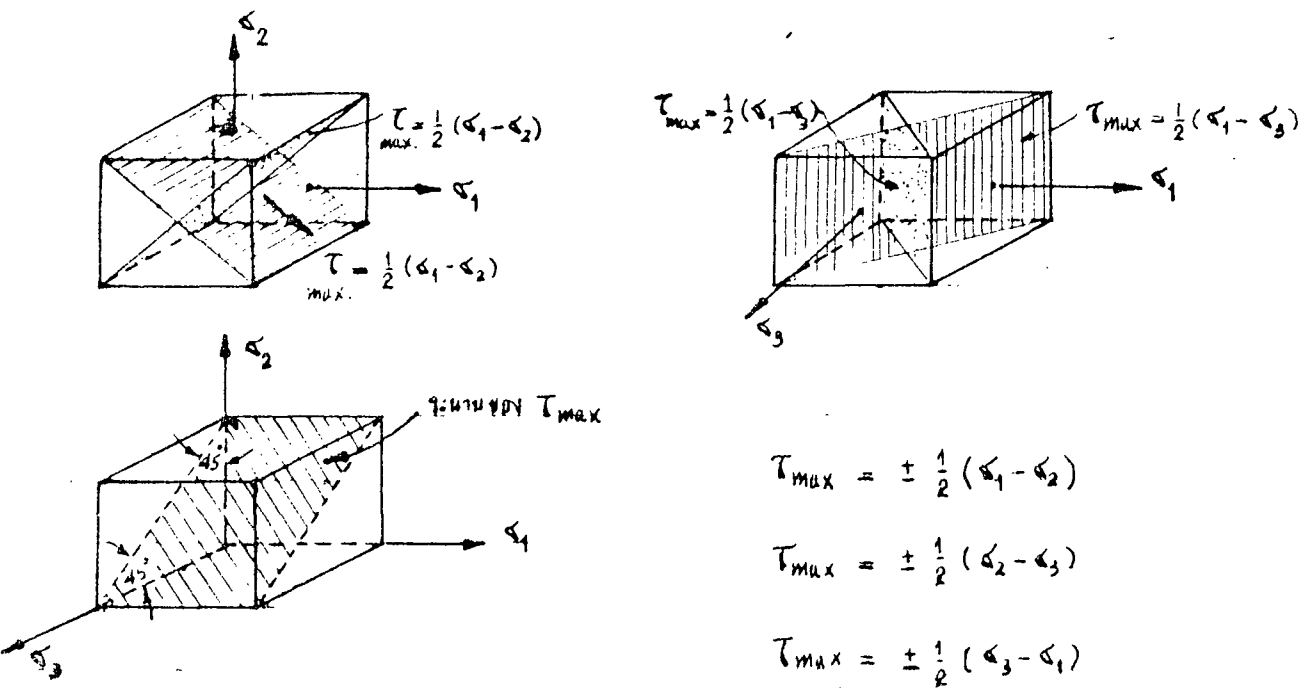
จากการทดลองพบว่า สำหรับวัสดุที่ Homogeneous isotropic ภายใต้การอัดอย่างสม่ำเสมอ สามารถต้านทานความเค้นได้มากกว่าผลจากทฤษฎีนี้ (สมการ 2) และยังคงอยู่ภายในช่วงขอบเขตความยืดหยุ่นอีกด้วย

4-4 ทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุด

ทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุดถูกเสนอเป็นครั้งแรกโดย C. A. Coulomb ในปี คศ.1774 ต่อมาในปี คศ. 1864 H. Tresca ได้เสนอผลของงานวิจัยเกี่ยวกับการครากของโลหะภายใต้ความดันสูงของเขาแก่ French Academy ในปัจจุบันทฤษฎีนี้นิยมเรียกว่าทฤษฎีของ Tresca หรือ Tresca Yield Criterion ทฤษฎีนี้ตั้งขึ้นจากสมมติฐานที่ว่าสาเหตุใหญ่ในการเสียหายเนื่องจากการครากของวัสดุเหนียวเกิดจากความเค้นเฉือนสูงสุด ทฤษฎีนี้มีใจความว่า

“ไม่ว่าสถานะของความเค้นจะเป็นอย่างไรก็ตาม การครากของวัสดุจะเกิดขึ้นเมื่อความเค้นเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นมีค่าเท่ากับค่าความเค้นเฉือนที่ทำให้เกิดความเสียหาย (การคราก) ขึ้นในเนื้อวัสดุชนิดเดียวกันที่ถูกดึงในทิศทางเดียว”

ให้ความเค้นหลักที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนเป็น σ_1, σ_2 และ σ_3 โดยที่ $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ดังนั้นค่าความเค้นเฉือนสูงสุดจะมีค่าเป็น



รูป 4-4.1

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (1)$$

ในกรณีที่เป็นการดึงในทิศทางเดียว $\sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$ ดังนั้นความเค้นเฉือนสูงสุดในกรณีนี้จะ

เป็น

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2} \tag{2}$$

เมื่อกำหนดให้

$$\tau_{eq} = \frac{\sigma_{eq}}{2}$$

ดังนั้นวัสดุจะถือว่าเริ่มเกิดการเสียหายเมื่อ

$$\tau_{max} = \tau_{eq} = \frac{\sigma_{eq}}{2} \tag{3}$$

ใช้สมมติฐานของทฤษฎีนี้กับสมการ(1)จะได้

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_w \tag{4-4.1}$$

ดังนั้นตามทฤษฎีนี้การเสียหายจะเกิดขึ้นเมื่อผลต่างของความเค้นหลักสูงสุดกับต่ำสุดมีค่าสูงถึงค่าจำกัดสำหรับวัสดุค่าหนึ่ง

สำหรับกรณีทั่วไปเมื่อ $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ จากสมการ(4-4.1)จะเห็นได้ว่าสภาวะขีดจำกัดที่วัสดุจะเกิดความเสียหายคือ

$$-\sigma_{eq} \leq \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{eq} \tag{4}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $\sigma_2 > \sigma_3 > \sigma_1$ วัสดุจะเสียหายเมื่อ

$$-\sigma_{eq} \leq \sigma_2 - \sigma_1 \leq \sigma_{eq} \tag{5}$$

และถ้า $\sigma_3 > \sigma_1 > \sigma_2$ วัสดุจะเสียหายเมื่อ

$$-\sigma_{eq} \leq \sigma_3 - \sigma_2 \leq \sigma_{eq} \tag{6}$$

ค่าขีดจำกัดที่วัสดุจะเริ่มเกิดการครากจากสมการ(4), (5) และ (6) คือเมื่อ

$\sigma_1 / \sigma_{eq} - \sigma_3 / \sigma_{eq} = \pm 1$ $\sigma_2 / \sigma_{eq} - \sigma_1 / \sigma_{eq} = \pm 1$ $\sigma_3 / \sigma_{eq} - \sigma_2 / \sigma_{eq} = \pm 1$

}

(7)

ดังนั้น Failure Surface จะเป็นรูป Regular Hexagonal Prism ซึ่งเกิดจากระนาบทุกระนาบในสมการ(7) โดยมีระนาบ

$$\sigma_1 / \sigma_{eq} = \sigma_2 / \sigma_{eq} = \sigma_3 / \sigma_{eq}$$

เป็น Geometric Axis ดังแสดงไว้ในรูป 4-4.2

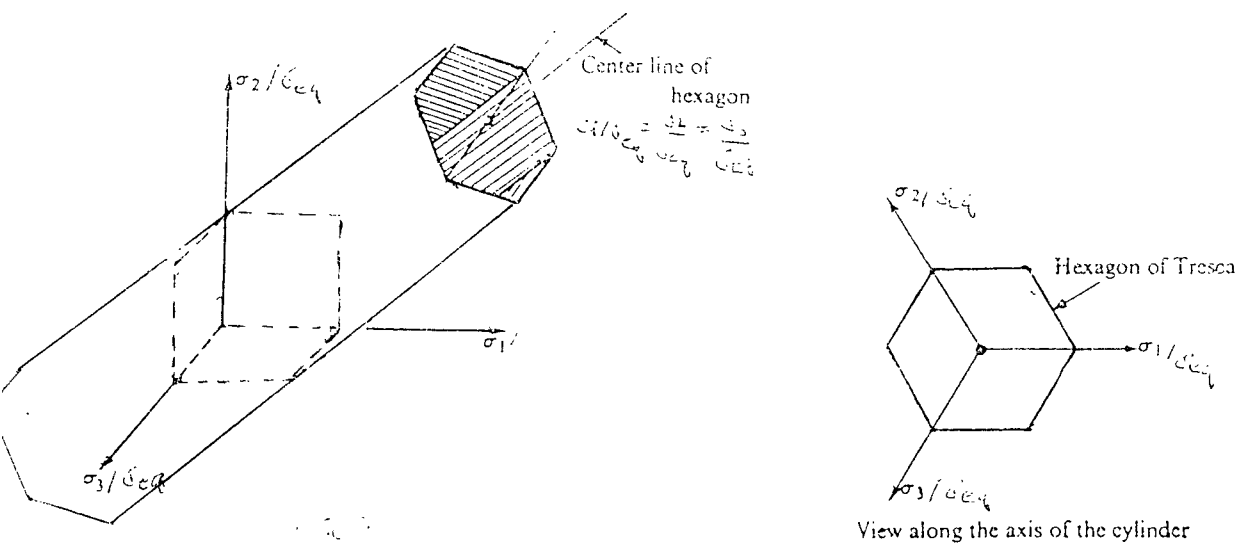


Figure 4-4.2

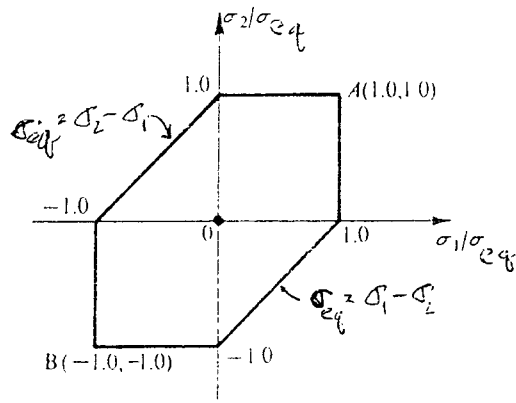


Figure 4-4.3

ในกรณีที่เป็นการเค้นแบบระนาบ ให้ $\sigma_3 = 0$ สภาวะขีดจำกัดจากสมการ(7)จะเป็น

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 / \sigma_{eq} &= \pm 1 \\ \sigma_2 / \sigma_{eq} &= \pm 1 \\ \sigma_1 / \sigma_{eq} - \sigma_2 / \sigma_{eq} &= \pm 1 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

จากสมการ(8)จะได้ Failure Surface เป็นรูป Irregular Hexagonal ดังในรูป 4-4.3

ทฤษฎีนี้ได้ผลตรงกับการทดลองเป็นอย่างดีสำหรับวัสดุเหนียวเช่นเหล็กเหนียวและวัสดุอื่นๆ สำหรับวัสดุเปราะ เช่น เหล็กหล่อซึ่ง $\sigma_{eq_t} \neq \sigma_{eq_c}$ จะต้องมีการแก้ไข (Correction Factor) ใช้กับสมการ(4-4.1)

ทฤษฎีความแข็งแรงที่ใช้ในกรณี $\sigma_{eq_t} \neq \sigma_{eq_c}$ เรียกว่าทฤษฎีความแข็งแรงของโมร์(Mohr's Strength Theory) หรือทฤษฎีสถานะของความเค้นจำกัด (Theory of Limiting State of Stress) ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อที่ 4-8 สำหรับกรณีที่ $\sigma_3 < 0$ และ $\sigma_{eq_t} \neq \sigma_{eq_c}$ จากทฤษฎีของโมร์ จะได้

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 \frac{\sigma_{eq_t}}{\sigma_{eq_c}} \leq \sigma_{cl}$$

กรณีจำเพาะของทฤษฎีความแข็งแรงของโมร์ เมื่อ $\sigma_{eq_t} = \sigma_{eq_c}$ ทฤษฎีความแข็งแรงของโมร์จะได้ผลเหมือนกับทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุด ทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุดและทฤษฎีความแข็งแรงของโมร์จะได้ผลตรงกับผลจากการทดลองมากกว่าทฤษฎีความเค้นดัดฉากสูงสุดและทฤษฎีความเครียดดัดฉากสูงสุด อย่างไรก็ตาม ทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุดและทฤษฎีของโมร์ก็ยังไม่ใช้ทฤษฎีที่สมบูรณ์ที่สุด ดังจะดูได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

ในกรณีที่เป็นการ Hydrostatic Stress $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ จากสมการ(1) จะเห็นได้ว่าจะไม่เกิดการเสียหายขึ้น เพราะว่าไม่เกิดความเค้นเฉือนขึ้นในเนื้อวัสดุ ไม่ว่าความเค้นดัดฉากจะเป็นเท่าใด ข้อสรุปนี้ไม่ถูกต้อง เพราะว่าวัตถุที่ถูกกระทำด้วย Hydrostatic Pressure อย่างเดียวกั้เกิดการเสียหายได้ แต่การเสียหายจะเกิดจาก Brittle Fracture แทนที่จะเป็นการคราก

จะสังเกตได้ว่าทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุดจะเหมือนกับทฤษฎีความเค้นดัดฉากสูงสุดถ้าความเค้นหลักมีเครื่องหมายเหมือนกัน

สัปดาห์ที่ 12

หัวข้อเรื่อง ทฤษฎีความล้มเหลวของความยืดหยุ่น (2)

(3 ชั่วโมง)

ความคิดรวบยอด

1. ทฤษฎีความแข็งแรงเป็นการศึกษาเกณฑ์ในการออกแบบสำหรับสถานะความเค้นที่ซับซ้อน เพื่อหาสูตรที่ใช้ในการออกแบบตามทฤษฎีต่างๆที่มีผู้ตั้งขึ้นมา
2. การใช้ทฤษฎีความแข็งแรงในหน่วยนี้จะกล่าวเฉพาะความแข็งแรงสถิตเท่านั้น
3. พื้นฐานที่สำคัญก่อนศึกษาหัวข้อนี้คือการวิเคราะห์ความเค้นและความเครียด

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. คำนวณหาเกณฑ์ในการออกแบบด้วยทฤษฎีพลังงานความเครียดสูงสุดได้
2. คำนวณหาเกณฑ์ในการออกแบบด้วยทฤษฎีพลังงานความเครียดในการเสียรูปร่างสูงสุดได้
3. คำนวณหาเกณฑ์ในการออกแบบด้วยทฤษฎีความเค้นเฉือนอ็อกตะฮีดรัลสูงสุดได้

สังเขปเนื้อหา

หน่วยที่ 8. ทฤษฎีความแข็งแรง (ต่อ)

- ทฤษฎีพลังงานความเครียดสูงสุด
- ทฤษฎีพลังงานความเครียดในการเสียรูปร่างสูงสุด
- ทฤษฎีความเค้นเฉือนอ็อกตะฮีดรัลสูงสุด

4-5 ทฤษฎีพลังงานความเครียดสูงสุด

ทฤษฎีนี้เสนอเป็นครั้งแรกโดย Beltrami ในปี ค.ศ. 1885 และต่อมาโดย Girtler ในปี ค.ศ. 1907 และต่อมาในปี ค.ศ. 1920 โดย B. P. Haigh ทฤษฎีนี้มีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า ทฤษฎีของ Beltrami-Haigh ทฤษฎีนี้มีสมมติฐานว่า

“ภายใต้สถานะของความเค้นใดๆก็ตาม วัสดุจะเริ่มเกิดการเสียหายก็ต่อเมื่อพลังงานความเครียดต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรสูงสุดที่ถูกซึมซับไว้โดยวัสดุนั้นมีค่าเท่ากับพลังงานความเครียดสูงสุดที่ถูกซึมซับโดยวัสดุชนิดเดียวกันในขณะที่เกิดการเสียหาย ภายใต้การกระทำของแรงในทิศทางเดียว”

จากสมการ(2-4.10) พลังงานความเครียด u ที่ถูกซึมซับไว้ในวัตถุที่อยู่ในสถานะ 3 มิติคือ

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$$

ซึ่งในกรณีที่วัตถุเกิดการเสียหายเนื่องจากการกระทำของแรงในทิศทางเดียว โดยเกิดความเค้นขึ้นเท่ากับ σ_{eq} พลังงาน u ที่ถูกซึมซับไว้จะมีค่าเป็น

$$u = \sigma_{eq}^2 / (2E)$$

เมื่อ $\sigma_1 = \sigma_{eq}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

ดังนั้นจากสมมติฐานของสมการนี้ สภาวะขีดจำกัดที่จะเริ่มเกิดการเสียหายก็คือ

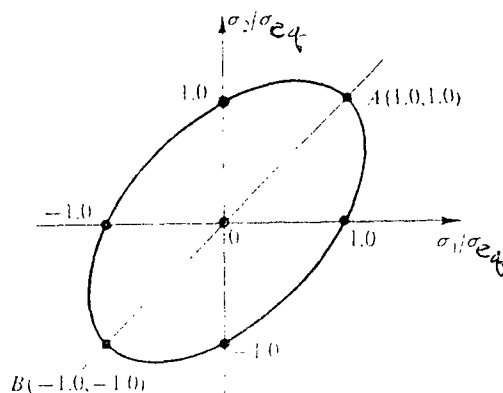
$$\frac{\sigma_{eq}^2}{2E} = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$$

$$\sigma_{eq}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \leq \sigma_{al}^2 \quad (4-5.1)$$

ในกรณีที่เป้นความเค้นบนระนาบ $\sigma_3 = 0$ จะได้

$$\sigma_{eq}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2 \leq \sigma_w^2 \quad (4-5.2)$$

เมื่อนำสมการ(4-5.2)ไปเขียนเป็นกราฟจะได้วงรีดังแสดงไว้ในรูป4-5.1



รูป4-5.1

เมื่อเปรียบเทียบกับรูปแปลงเหลี่ยมที่แสดงทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุด จะเห็นได้ว่ามีส่วนที่ต่างออกไปเพียงเล็กน้อย

เมื่อวัตถุถูกกระทำด้วยHydrostatic Pressure ทุกทิศทาง $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$ จากสมการ(4-5.1)จะได้

$$p = \frac{\sigma_{eq}}{\sqrt{3(1-2\nu)}}$$

ถ้าวัตถุเสียหายเมื่อ $\sigma_{eq} = \sigma_{UT}$

$$p = \frac{\sigma_{UT}}{\sqrt{3(1-2\nu)}}$$

ผลลัพธ์ที่ได้จากทฤษฎีนี้ไม่ตรงกับผลที่ได้จากการทดลองภายใต้การอัดอย่างสม่ำเสมอทุกทิศทาง ดังได้

กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 4.3 ว่า Homogeneous Isotropic materials สามารถต้านทาน Hydrostatic Pressure ได้มากกว่าผลลัพธ์ที่ได้จากทฤษฎีนี้ และยังคงอยู่ในช่วงขอบเขตความยืดหยุ่น

4-6 ทฤษฎีพลังงานความเครียดในการเสียรูปร่างสูงสุด

ทฤษฎีนี้ถูกเสนอเป็นครั้งแรกโดย M.T. Huber ในปี ค.ศ. 1904 ในประเทศโปแลนด์และภายหลังถูกเสนอในประเทศเยอรมันโดย Von Mises ในปี ค.ศ. 1925 ทฤษฎีนี้จึงมีชื่อเรียกอีกว่าเป็นทฤษฎีของ Von Mises-Hencky เกณฑ์การครากของ Huber-Von Mises-Hencky หรือ เกณฑ์การครากของ Von Mises และ ทฤษฎีพลังงานการเฉือน (Shear-Energy Theory) มีใจความว่า

“ภายใต้สถานะของความเค้นใดๆก็ตาม วัสดุจะเกิดการเสียหายเมื่อพลังงานความเครียดในการเสียรูปร่าง (Distortion Energy) สูงสุดในวัสดุมีค่าเท่ากับพลังงานการเสียรูปร่างในขณะที่เกิดการเสียหายของวัสดุนิดเดียวกันภายใต้การกระทำของแรงในแนวแกนเดียว”

ทฤษฎีนี้เป็นทฤษฎีที่ต่อเนื่องมาจากทฤษฎีพลังงานสูงสุด เพื่อให้ผลทางทฤษฎีตรงกับผลของการทดลองมากขึ้น Huber จึงเสนอว่าพลังงานความเครียดรวมสามารถแบ่งออกเป็น 2 ส่วนคือพลังงานความเครียดที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงปริมาตร และพลังงานความเครียดที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง ดังได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ 2-4 จากหัวข้อ 2-4 พลังงานความเครียดที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง จากสมการ 2-4.13 คือ

$$u_d = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

สมมติว่าชิ้นส่วนที่ถูกกระทำด้วยแรงในแนวแกนเดียวมีค่าความเค้นเป็น

$$\sigma_1 = \sigma_{eq}, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

ซึ่งจะได้

$$u_d = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_{eq}^2$$

ดังนั้นจากสมมติฐานของสมการนี้จะได้

$$\frac{1+\nu}{3E} \sigma_{eq}^2 = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

$$2\sigma_{eq}^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$$

หรือ

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \quad (4-6.1)$$

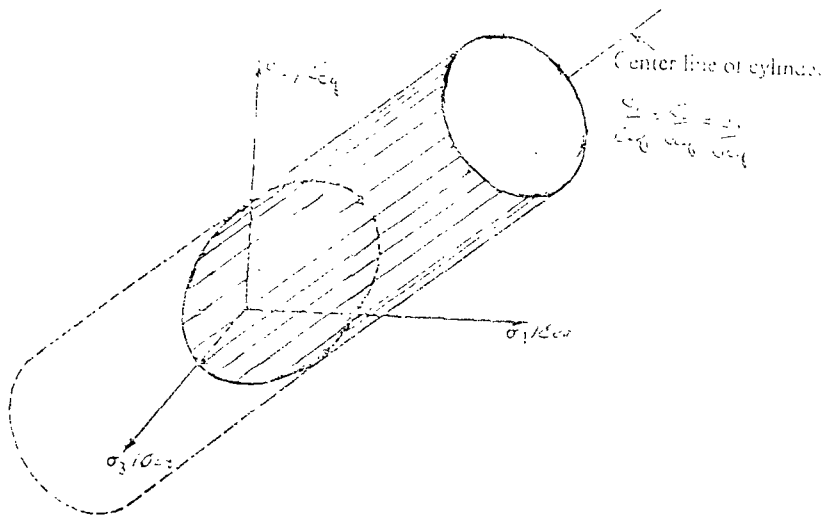
ในกรณีเฉพาะเมื่อ $\sigma_3 = 0$ (ความเค้นบนระนาบ) สมการ(4-6.1)จะลดเป็น

$$\sigma_{eq}^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 \quad (4-6.2)$$

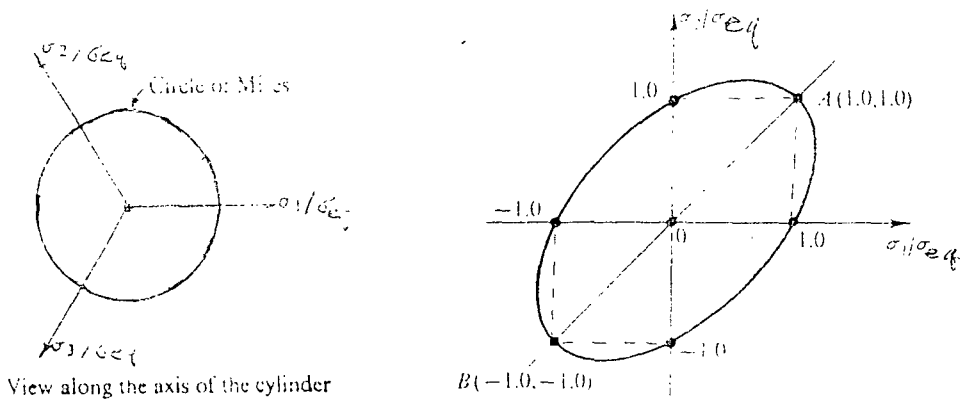
สมการ(4-6.1)จะให้ Failure Surface เป็นพื้นผิวของทรงกระบอกกลมหน้าตัดฉาก ซึ่งมีสมการ

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{eq}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_{eq}} = \frac{\sigma_3}{\sigma_{eq}} \text{ เป็น Geometric Axis และมีรัศมีเท่ากับ } \sqrt{2}/3 \text{ ดังแสดงในรูป 4-6.1}$$

ทฤษฎีนี้ได้ผลตรงกับผลที่ได้จากการทดลอง การเกิดการครากในสมการ(4-6.1)โดยทั่วไปเป็นที่ยอมรับในการนำไปใช้กับวัสดุเหนียวและสมมติให้วัสดุเริ่มเกิดการครากเมื่อ u_d มีค่าสูงถึงค่าจำกัดค่าหนึ่ง



รูป 4-6.1



รูป 3-6.2

และเมื่อเขียนสมการ(4-6.2)เป็นกราฟ จะได้รูปวงรีดังแสดงในรูป 4-6.2 ซึ่งมี Semi Major Axis ยาว

$\sqrt{2} \sigma_{eq}$ Semi Minor Axis ยาว $\sqrt{2} / 3$ และแกน Major Axis จะมีสมการเป็น $\sigma_1 = \sigma_2$

4-7 ทฤษฎีความเค้นเฉือนออกตะฮีดรัลสูงสุด

ในปี ค.ศ.1926 A. Eichinger ได้เสนอทฤษฎีนี้โดยได้แสดงว่าทฤษฎีความเค้นเฉือนออกตะฮีดรัลสูงสุดจะให้ผลเท่ากับทฤษฎีพลังงานความเครียดในการเปลี่ยนแปลงรูปร่างสูงสุด ทฤษฎีนี้มีสมมติฐานว่า

“ไม่ว่าวัสดุจะอยู่ในสถานะของความเค้นแบบใดก็ตาม วัสดุจะเกิดการเสียหายเมื่อค่าของความเค้นเฉือนออกตะฮีดรัลสูงสุดที่เกิดขึ้นบนระนาบออกตะฮีดรัลมีค่าเท่ากับค่าของความเค้นเฉือนออกตะฮีดรัลสูงสุดที่ทำให้วัสดุชนิดเดียวกันเกิดการเสียหายในการรับภาระในทิศทางเดียว”

จากหัวข้อที่ 1-10 ความเค้นเฉือนบนระนาบออกตะฮีดรัลจากสมการ(1-10.3)คือ

$$\tau_0 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

ในกรณีที่เป้นความเค้นแกนเดียว $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ความเค้นที่ทำให้เกิดการเสียหาย $\sigma_1 = \sigma_{eq}$ ดังนั้นขณะที่เกิดการเสียหายขึ้นจะได้

$$\begin{aligned} \tau_{01} &= \frac{1}{3} \sqrt{\sigma_{eq}^2 + \sigma_{eq}^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{eq} \end{aligned}$$

จากสมมติฐานของทฤษฎีนี้จะได้

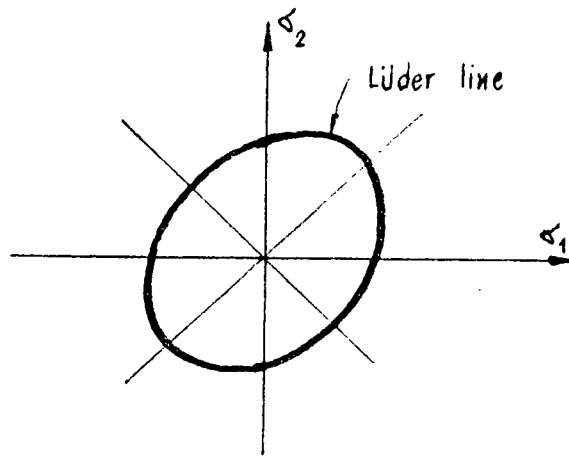
$$\begin{aligned} \tau_{01} &= \tau_0 \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{eq} &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ 2\sigma_{eq}^2 &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \end{aligned}$$

ซึ่งเหมือนกับสมการ(4-6.1)ทุกประการ ดังนั้นทฤษฎีนี้จะได้ผลเหมือนกับการคำนวณโดยใช้ทฤษฎีพลังงานความเครียดในการเปลี่ยนแปลงรูปร่างสูงสุดทุกประการ

ในกรณีความเค้น 2 มิติ $\sigma_3 = 0$ จะได้

$$\sigma_{eq}^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$$

กราฟของสมการความเสียหาย ($\sigma_3 = 0$) yield line จะเป็นรูปวงรีดังรูป 4-7.1



รูป 4-7.1

Lüder ทดสอบ Ductile material แล้วเขียนกราฟออกมาใกล้เคียงกับทฤษฎีที่ 5 มากที่สุด

สัปดาห์ที่ 13

หัวข้อเรื่อง ทฤษฎีความล้มเหลวของความยืดหยุ่น (3)

(3 ชั่วโมง)

ความคิดรวบยอด

- 1. ทฤษฎีความแข็งแรงเป็นการศึกษาเกณฑ์ในการออกแบบสำหรับสถานะความเค้นที่ซับซ้อน เพื่อหาสูตรที่ใช้ในการออกแบบตามทฤษฎีต่างๆที่มีผู้ตั้งขึ้นมา
- 2. การใช้ทฤษฎีความแข็งแรงในหน่วยนี้จะกล่าวเฉพาะความแข็งแรงสถิตเท่านั้น
- 3. พื้นฐานที่สำคัญก่อนศึกษาหัวข้อนี้คือการวิเคราะห์ความเค้นและความเครียด

จุดประสงค์การเรียนรู้

- 1. คำนวณหาเกณฑ์ในการออกแบบด้วยทฤษฎีสถานะของความเค้นจำกัดได้
- 2. เปรียบเทียบเกณฑ์ในการออกแบบด้วยทฤษฎีความแข็งแรงต่างๆได้

สังเขปเนื้อหา

หน่วยที่ 8. ทฤษฎีความแข็งแรง (ต่อ)

- ทฤษฎีสถานะของความเค้นจำกัด
- การเปรียบเทียบทฤษฎีความแข็งแรงต่างๆ

4-7 ทฤษฎีความเค้นเฉือนนอกตะฮีดรัลสูงสุด

ในปี คศ.1926 A. Eichinger ได้เสนอทฤษฎีนี้โดยได้แสดงว่าทฤษฎีความเค้นเฉือนนอกตะฮีดรัลสูงสุดจะให้ผลเท่ากับทฤษฎีพลังงานความเครียดในการเปลี่ยนแปลงรูปร่างสูงสุด ทฤษฎีนี้มีสมมติฐานว่า

“ไม่ว่าวัสดุจะอยู่ในสถานะของความเค้นแบบใดก็ตาม วัสดุจะเกิดการเสียหายเมื่อค่าของความเค้นเฉือนนอกตะฮีดรัลสูงสุดที่เกิดขึ้นบนระนาบออกตะฮีดรัลมีค่าเท่ากับค่าของความเค้นเฉือนนอกตะฮีดรัลสูงสุดที่ทำให้วัสดุชนิดเดียวกันเกิดการเสียหายในการรับภาระในทิศทางเดียว”

จากหัวข้อที่ 1-10 ความเค้นเฉือนบนระนาบออกตะฮีดรัลจากสมการ(1-10.3)คือ

$$\tau_0 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

ในกรณีที่เป็นความเค้นแกนเดียว $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ความเค้นที่ทำให้เกิดการเสียหาย $\sigma_1 = \sigma_{eq}$ ดังนั้นขณะที่เกิดการเสียหายขึ้นจะได้

$$\begin{aligned} \tau_{01} &= \frac{1}{3} \sqrt{\sigma_{eq}^2 + \sigma_{eq}^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{eq} \end{aligned}$$

จากสมมติฐานของทฤษฎีนี้จะได้

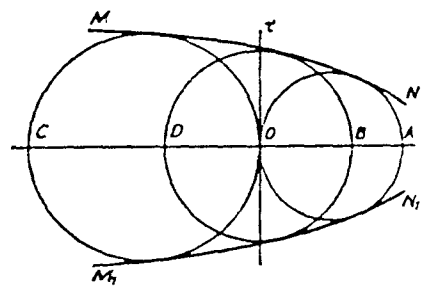
$$\begin{aligned} \tau_{01} &= \tau_0 \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{eq} &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ 2\sigma_{eq}^2 &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \end{aligned}$$

ซึ่งเหมือนกับสมการ(4-6.1)ทุกประการ ดังนั้นทฤษฎีนี้จะได้ผลเหมือนกับการคำนวณโดยใช้ทฤษฎีพลังงานความเครียดในการเปลี่ยนแปลงรูปร่างสูงสุดทุกประการ

ในกรณีความเค้น 2 มิติ $\sigma_3 = 0$ จะได้

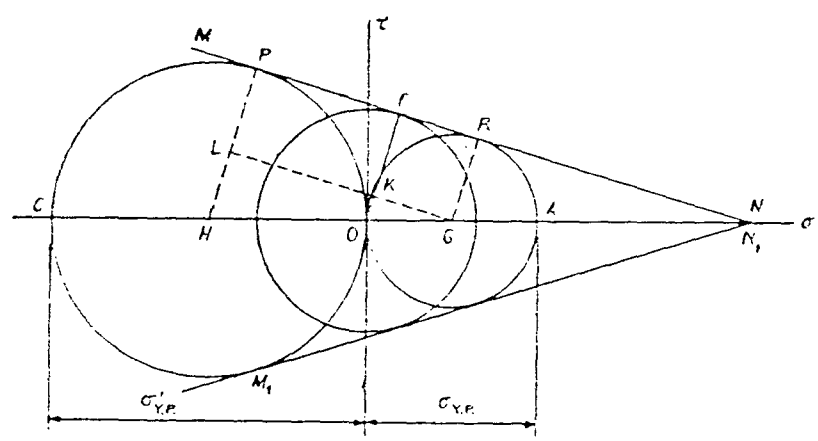
$$\sigma_{eq}^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$$

กราฟของสมการความเสียหาย ($\sigma_3 = 0$) yield line จะเป็นรูปวงรีดังรูป 4-7.1



รูป 4-8.2

สมมติว่าต้องการหาความเค้นที่ทำให้เกิดการคราก ในรูป 4-8.2 วงกลมซึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางเป็น OA จะแสดงสภาวะสำหรับการครากในการดึงทิศทางเดียว วงกลมซึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางเป็น OC จะแสดงสภาวะของความเค้นในการครากเนื่องจากการอัดในทิศทางเดียว และวงกลมซึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางเป็น BD จะแสดงสภาวะของความเค้นในการครากในสถานะ Pure Shear ถ้าวงกลมของโมร์หลายๆอันนี้ได้จากการทำการทดลองสำหรับวัสดุแบบต่างๆถูกสร้างขึ้น เส้น Envelopes MN และ M_1 N_1 ก็จะสร้างขึ้นได้ ดังนั้น โมร์จึงสมมติว่าการครากจะเริ่มเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อสถานะของความเค้นแสดงได้โดยวงกลมใดวงกลมหนึ่งที่สัมผัสกับเส้น Envelopes นี้เท่านั้น



รูป 4-8.3

ดังกตัวอย่างเช่นสมมติว่าเส้น Envelopes MN และ M_1 , N_1 เป็นเส้นตรงดังแสดงไว้ในรูปที่ 4-8.3 ดังนั้นเมื่อหาสถานะขีดจำกัดในการดึงทิศทางเดียว ($\sigma_1 = \sigma_{yt}$) และในการอัดทิศทางเดียว ($\sigma_3 = -\sigma_{yc}$) สถานะในการครากโดยสถานะความเค้นแบบ Pure Shear จะสามารถหาได้อย่างง่ายดาย เพียงแต่เขียนรัศมี OF ตั้งฉากกับเส้น MN แล้วเขียนวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ OF ก็จะได้วงกลมที่แทนสถานะของความเค้นแบบ Pure Shear จากรูป 4-8.3 จะเห็นได้ว่า

$$OK = OF - KF = \tau_y - \frac{\sigma_{yt}}{2}$$

และ

$$HL = HP - LP = \frac{\sigma_{yc}}{2} - \frac{\sigma_{yt}}{2}$$

เนื่องจากสามเหลี่ยม HGL และสามเหลี่ยม OGK เป็นสามเหลี่ยมคล้ายคลึงกัน ดังนั้น

$$\frac{OK}{HL} = \frac{OG}{HG}$$

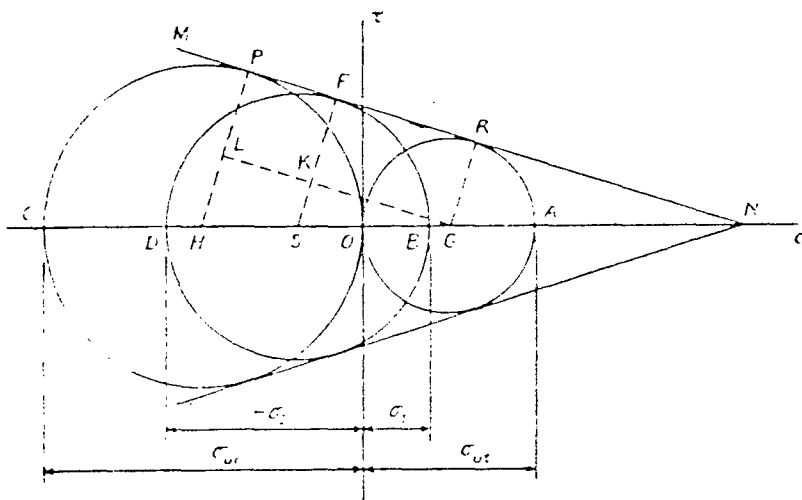
หรือ

$$\frac{2\tau_y - \sigma_{yt}}{\sigma_{yc} - \sigma_{yt}} = \frac{\sigma_{yt}}{\sigma_{yc} + \sigma_{yt}}$$

ซึ่งจะได้

$$\tau_y = \frac{\sigma_{yt}\sigma_{yc}}{\sigma_{yt} + \sigma_{yc}} \quad 4-8.1$$

เมื่อ $\sigma_{yt} = \sigma_{yc}$ สมการ(4-8.1)จะได้ผลเหมือนกับทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุด



รูป 4-8.4

สมมติว่าต้องการประยุกต์ทฤษฎีของโมร์กับวัสดุเปราะที่เกิดความเค้นในสถานะ 2 มิติ ในรูป 4-8.4 OA จะแสดงความแข็งแรงประลัยในการดึง σ_{ut} และ OC แสดงความแข็งแรงประลัยในการอัด σ_{uc} ที่มีความเค้นสูงสุดและต่ำสุดเป็น σ_1 และ σ_3 ใดๆ ค่าสูงสุดของความเค้นเหล่านี้จะหาได้โดยการเขียนวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง BD = $\sigma_1 - \sigma_3$ สัมผัสกับเส้นตรง MN ที่จุด F จากรูป 4-8.4 จะได้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้คือ

$$SK = SF - FK = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) - \frac{\sigma_{ut}}{2}$$

$$HL = HP - PL = \frac{\sigma_{uc}}{2} - \frac{\sigma_{ut}}{2}$$

$$GS = GO + OS = \frac{\sigma_{ut}}{2} + \left(\frac{-\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)$$

$$GH = GO + OH = \frac{\sigma_{ut}}{2} + \frac{\sigma_{uc}}{2}$$

จากสามเหลี่ยมคล้ายคลึง GSK และ GHL จะได้

$$SK/HL = GS/GH$$

หรือ

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_{ut}}{\sigma_{uc} - \sigma_{ut}} = \frac{\sigma_{ut} - \sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_{ut} + \sigma_{uc}}$$

ซึ่งจะได้

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{ut}} - \frac{\sigma_3}{\sigma_{uc}} = 1 \quad 4-8.2$$

ดังนั้นเมื่อกำหนดค่าของอัตราส่วน σ_1 / σ_3 ค่าของ σ_1 และ σ_3 ก็จะหาค่าได้

ในย่อหน้าที่แล้วได้สมมติว่า σ_1 เป็นความเค้นหลักสูงสุด σ_{max} และ σ_3 เป็นความเค้นหลักต่ำสุด σ_{min} เนื่องจากความเค้นหลัก $\sigma_2 = 0$ ในกรณีของความเค้น 2 มิติ ดังนั้น σ_1 และ σ_3 จะมีเครื่องหมายตรงกันข้ามดังแสดงไว้ในรูป 4-8.4 และอัตราส่วน σ_1 / σ_3 จะมีเครื่องหมายเป็นลบ อย่างไรก็ตาม ในกรณีของการดึง 2 ทิศทางตั้งฉากกันโดย $\sigma_3 = 0$ เป็น σ_{min} และวงกลมของโมร์ที่เป็นสภาวะขีดจำกัดในกรณีนี้จะเป็นวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง OA ในรูป 4-8.4 การแตกหักจะเกิดขึ้นเมื่อความเค้นค่าใดค่าหนึ่งในความเค้นหลักทั้ง 2 ที่มีค่าสูงกว่า มีค่าเท่ากับ σ_{ut} ในทำนองคล้ายกัน ถ้าเป็นกรณีการอัดในทิศทางที่ตั้งฉากกัน 2 ทิศทาง ความเค้น $\sigma_1 = 0$ เป็น σ_{max} และวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลาง OC ในรูป 4-8.4 จะเป็นสภาวะขีดจำกัดในกรณีนี้ การแตกหักจะเกิดขึ้นเมื่อความเค้นอัด 1 ใน 2 ที่มีขนาดมากกว่ามีค่าเท่ากับ σ_{uc}

วงกลมของโมร์ที่ขยายขึ้นนี้จะเป็นวงกลมขีดจำกัดที่สัมผัสกับเส้นEnvelope ขีดจำกัดที่จุด C ยิ่งไปกว่านั้นตามสถานะของการเพิ่มขนาดของความเค้นเป็นสัดส่วน วงกลมของ σ_1^* และ σ_3^* จะสัมผัสกับเส้น OA ที่จุด B เขียนเส้นในแนวระดับ CEG จะได้สัดส่วน

$$\frac{DE}{CE} = \frac{FG}{CG} \quad (2)$$

แต่ Segment DE และ FG แทนความแตกต่างระหว่างรัศมีของวงกลมที่กำลังพิจารณา ดังนั้น

$$DE = \frac{\sigma_{yt}}{2} - \frac{\sigma_1^* - \sigma_3^*}{2}$$

$$FG = \frac{\sigma_{yc}}{2} - \frac{\sigma_1^* - \sigma_3^*}{2}$$

และ

$$CE = \frac{\sigma_1^* + \sigma_3^*}{2} - \frac{\sigma_{yt}}{2}$$

$$CG = \frac{\sigma_1^* + \sigma_3^*}{2} + \frac{\sigma_{yc}}{2}$$

จากสัดส่วน(2) จะได้

$$\sigma_{yt} = \sigma_1^* - \frac{\sigma_{yt}}{\sigma_{yc}} \sigma_3^* \quad (3)$$

เมื่อแทนค่าสมการ(1)ลงในสมการ(3)จะได้

$$n = \frac{\sigma_{yt}}{\sigma_1 - \frac{\sigma_{yt}}{\sigma_{yc}} \sigma_3}$$

สำหรับการดึงที่เทียบเท่ากัน

$$n = \sigma_{yt} / \sigma_{eq}$$

ดังนั้นจากสถานะของการเทียบเท่า เกณฑ์ความปลอดภัย n เท่ากัน ดังนั้น

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - k \sigma_3 \quad 4-8.5$$

เมื่อ k คืออัตราส่วนระหว่างจุดครากในการดึงและการอัด

$$k = \sigma_{yt} / \sigma_{yc}$$

สำหรับวัสดุเปราะ อัตราส่วน $\sigma_{yt} / \sigma_{yc}$ จะถูกแทนด้วย $\sigma_{ut} / \sigma_{uc}$

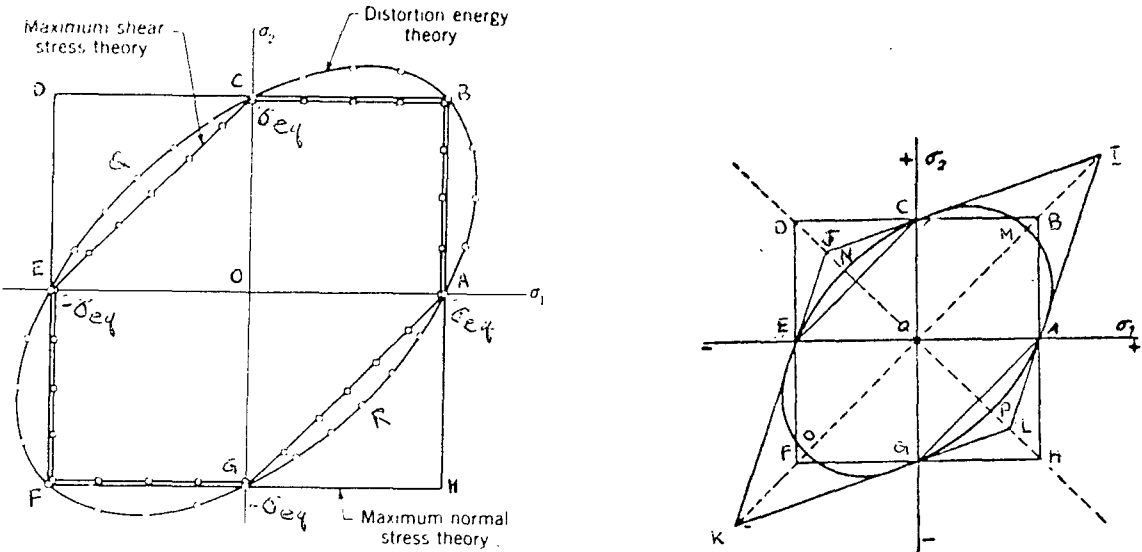
ในกรณีเฉพาะ เมื่อวัสดุมีจุดครากในการดึงและการอัดเท่ากัน $k=1$ สมการ(4-8.5)จะเหมือนกับสมการ(4-4.1)ซึ่งเป็นของทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุด

4-9 การเปรียบเทียบทฤษฎีความแข็งแรงต่างๆ

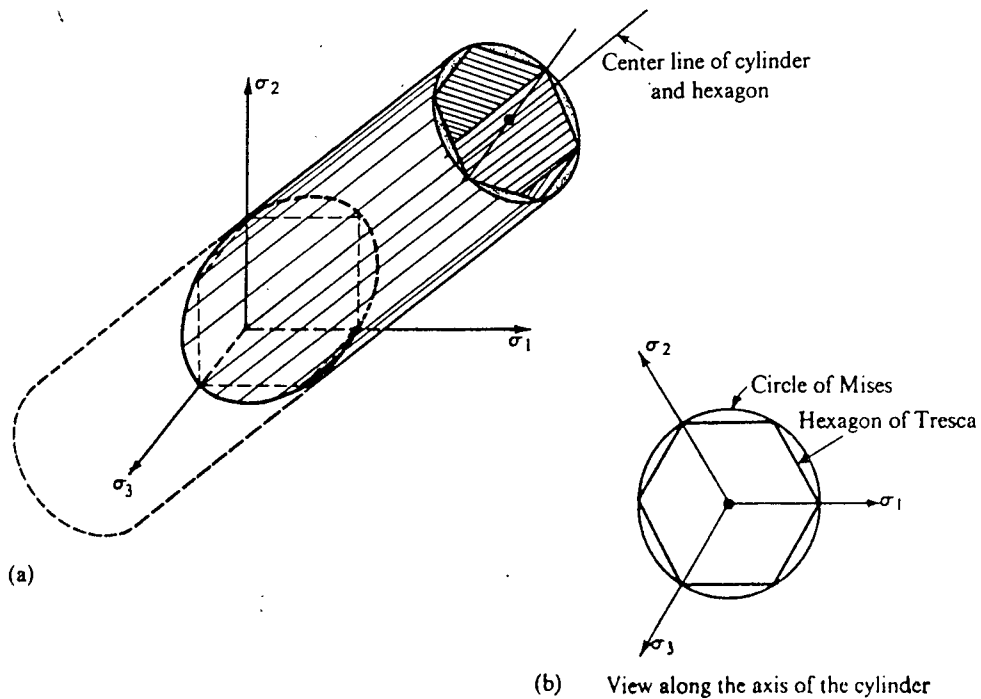
4-9.1 การเปรียบเทียบทฤษฎีความแข็งแรงสำหรับวัสดุที่มีความแข็งแรงในการดึงและการอัดเท่ากัน
ทฤษฎีความแข็งแรงต่างๆสำหรับวัสดุที่มีความแข็งแรงในการดึงและการอัดเท่ากันที่มีสถานะความเค้น 2 มิติ
ได้แสดงไว้ในรูป 4-9.1 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCDEFGH เป็น Failure Surface ตามทฤษฎีความเค้นดึงจากสูง
สุด รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน AICJKL เป็น Failure Surface ตามทฤษฎีความเครียดดึงจากสูงสุด รูปหก
เหลี่ยม ABCEFG เป็น Failure Surface ตามทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุด และทฤษฎีสถานะของความเค้น
จำกัด วงรี AMCNEOGP เป็น Failure Surface ตามทฤษฎีพลังงานความเครียดสูงสุด และวงรี ABCQEFGR
เป็น Failure Surface ตามทฤษฎีพลังงานการเสียรูปร่างสูงสุดและทฤษฎีความเค้นเฉือนออกตะฮิตร์สูงสุด

เมื่อเปรียบเทียบทฤษฎีเหล่านี้กับผลที่ได้จากการทดลองจะเห็นได้ว่าทฤษฎีพลังงานความเครียดใน
การเสียรูปร่างสูงสุดจะตรงกับผลของการทดลองของวัสดุเหนียวดีที่สุดและทฤษฎีความเค้นดึงจากสูงสุดดีที่
สุดสำหรับวัสดุเปราะ แต่ไม่ปลอดภัยสำหรับวัสดุเหนียว

ทฤษฎีทั้งหลายเมื่อใช้กับความเค้นแกนเดียวจะได้ผลตรงกับผลของการทดลองทุกทฤษฎีเนื่องจาก
ใช้การทดสอบการดึงเป็นมาตรฐานในการเปรียบเทียบ เพราะฉะนั้น ถ้าความเค้นหลักอันหนึ่งมีค่ามากกว่า
อีกอันหนึ่งมากๆ ทางปฏิบัติแล้วทุกทฤษฎีจะให้ผลออกมาเหมือนกันหมด ความแตกต่างของทฤษฎีเหล่านี้
ส่วนใหญ่จะอยู่ที่ควอเทรนต์ที่ 2 และ 4 เมื่อความเค้นหลักทั้ง 2 มีค่าเท่ากันแต่เครื่องหมายต่างกัน



รูป 4-9.1



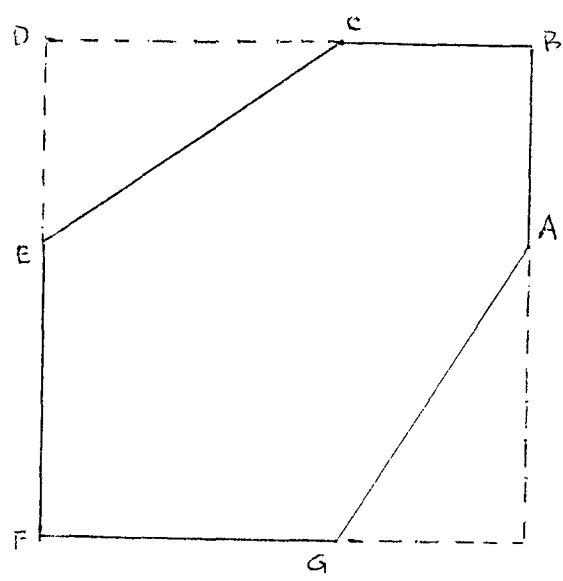
รูป 4-9.2

สำหรับความเค้นใน 3 มิติ ทฤษฎีพลังงานการเสียรูปร่างสูงสุด และทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุดได้แสดงไว้ในรูป 4-9.2 จะเห็นได้ว่าทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุดกับทฤษฎีพลังงานการเสียรูปร่างสูงสุดจะให้ค่าแตกต่างกันน้อยมาก

ในการออกแบบจะสังเกตได้ว่าทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุดจะให้นิยามของชิ้นส่วนใหญ่ที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับทฤษฎีอื่นๆ ส่วนทฤษฎีพลังงานความเครียดในการเสียรูปร่างสูงสุดนั้นจะใช้วัสดุอย่างประหยัดและปลอดภัย โดยได้ผลตรงกับการทดลองมากที่สุด ทฤษฎีทั้ง 2 นี้ปลอดภัยทุกทวิภาค ดังนั้นจึงนิยมใช้ทฤษฎีทั้ง 2 นี้มากในการออกแบบ

หลังจากทำการพิจารณาข้อเท็จจริงที่เกี่ยวข้องในการแก้ปัญหาการออกแบบแล้ว นักออกแบบจะต้องตัดสินใจด้วยตนเองว่าจะเลือกใช้ทฤษฎีใดเพื่อที่จะให้ได้รับผลลัพธ์ที่ดีที่สุด

3-9.2 การเปรียบเทียบทฤษฎีความแข็งแรงสำหรับวัสดุที่มีความแข็งแรงในการดึงและการอัดไม่เท่ากัน



รูป 4-9.3

รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCDEFGH ในรูป 4-9.3 เป็น Failure Surface ตามทฤษฎีความเค้นดึงจากสูงสุด รูปหกเหลี่ยม ABCEFG เป็น Failure Surface ตามทฤษฎีสถานะของความเค้นจำกัด จะเห็นได้ว่าการออกแบบโดยใช้ทฤษฎีของโมร์จะปลอดภัยกว่าทฤษฎีความเค้นดึงจากสูงสุด เมื่อความเค้นหลักมีเครื่องหมายตรงกันข้ามแม้ว่าทฤษฎีของโมร์จะพิจารณาจากสถานะจำกัดของสถานะของความเค้นที่เกิดความเค้นเฉือนสูงสุด ในการทำให้วัสดุเหนียวเกิดการคราก ทฤษฎีนี้อาจไม่ให้ผลตรงกับการทดลองเสมอไป ทฤษฎีของโมร์จึงถูกแนะนำให้ใช้กับวัสดุเปราะ

สัปดาห์ที่ 14

หัวข้อเรื่อง ทฤษฎีความล้มเหลวของความยืดหยุ่น (4)

(3 ชั่วโมง)

ความคิดรวบยอด

1. ทฤษฎีความแข็งแรงเป็นการศึกษาเกณฑ์ในการออกแบบสำหรับสถานะความเค้นที่ซับซ้อน เพื่อหาสูตรที่ใช้ในการออกแบบตามทฤษฎีต่างๆที่มีผู้ตั้งขึ้นมา
2. การใช้ทฤษฎีความแข็งแรงในหน่วยนี้จะกล่าวเฉพาะความแข็งแรงสถิตเท่านั้น
3. พื้นฐานที่สำคัญก่อนศึกษาหัวข้อนี้คือการวิเคราะห์ความเค้นและความเครียด

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. เขียนสูตรที่ใช้ในการออกแบบจากทฤษฎีความแข็งแรงต่างๆตามสถานะของความเค้นที่กำหนดได้

สังเขปเนื้อหา

หน่วยที่ 8. ทฤษฎีความแข็งแรง (ต่อ)

- สูตรที่ใช้ในการออกแบบ

4-10 สูตรที่ใช้ในการออกแบบ

4-10.1 ความเค้นตึงฉากอนุญาต

ในการออกแบบนั้นไม่ต้องการให้ชิ้นส่วนที่กำลังออกแบบหาขนาดถูกกระทำด้วยภาระจนเกิดความเค้นเกินขอบเขตความยืดหยุ่นดังนั้นจึงต้องใช้เกณฑ์ความปลอดภัยเพื่อที่จะจำกัดขนาดของความเค้นที่จะเกิดขึ้นในเนื้อของวัสดุถ้าต้องการให้ σ_y เป็นความเค้นสูงสุดที่วัสดุนั้นควรจะรับได้ความเค้นอนุญาต (Allowable Stress) หรือความเค้นใช้งาน (Working Stress)ที่จะใช้ในการคำนวณคือ

$$\sigma_w = \frac{\sigma_y}{n}$$

และเนื่องจาก σ_{eq} เป็นความเค้นที่ถือว่าวัสดุเกิดการเสียหาย ดังนั้น σ_{eq} จะมีค่าเกินกว่า σ_{al} ไม่ได้ ดังนั้นจากทฤษฎีทั้ง 7 จะได้

ทฤษฎีความเค้นตึงฉากสูงสุด

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 \quad \text{หรือ} \quad \sigma_{\max} \leq \sigma_w \tag{4-10.1}$$

หรือ

$$\begin{aligned} \sigma_{eq} &= \sigma_{\max} \leq \sigma_w \\ \sigma_{eq} &= \sigma_{\min} \leq \sigma_{wc} \end{aligned} \tag{4-10.1a}$$

เมื่อความแข็งแรงในการดึงและการอัดไม่เท่ากัน

ทฤษฎีความเครียดตึงฉากสูงสุด

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{eq} &= \sigma_1 - v(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_w \\ \sigma_{eq} &= \sigma_2 - v(\sigma_3 + \sigma_1) \leq \sigma_w \\ \sigma_{eq} &= \sigma_3 - v(\sigma_1 + \sigma_2) \leq \sigma_w \end{aligned} \right\} \tag{4-10.2}$$

และในกรณีความเค้นบนระนาบจะได้

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - v\sigma_2 \leq \sigma_w \tag{4-10.2a}$$

ทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุด

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_w \tag{4-10.3a}$$

ทฤษฎีพลังงานสูงสุด

$$\sigma_{eq}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2v(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \leq \sigma_w^2 \tag{4-10.4}$$

และในกรณีความเค้นบนระนาบจะได้

$$\sigma_{eq}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2v(\sigma_1\sigma_2) \leq \sigma_w^2 \tag{4-10.4a}$$

ทฤษฎีพลังงานการเสียรูปร่างสูงสุด และ ทฤษฎีความเค้นเฉือนออกตะฮีดรัลสูงสุด

$$2\sigma_{eq}^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leq 2\sigma_w^2 \tag{4-10.5}$$

และในกรณีความเค้นบนระนาบจะได้

$$\sigma_{eq}^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 \leq \sigma_w^2 \tag{4-10.5a}$$

ทฤษฎีสถานะของความเค้นจำกัด

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 - k\sigma_3 \leq \sigma_w \quad (4-10.6)$$

เมื่อ $k = \sigma_{yt} / \sigma_{yc}$ สำหรับวัสดุเหนียว และ $k = \sigma_{ut} / \sigma_{uc}$ สำหรับวัสดุเปราะ

การใช้สูตรในการออกแบบจากทฤษฎีทั้ง 7 นี้จะเข้าใจได้ดีขึ้นโดยพิจารณาจากตัวอย่างในหัวข้อต่อไป

4-10.2 ความเค้นเฉือนอนุญาต

การเลือกความเค้นอนุญาตในการเฉือนเป็นปัญหาที่ซับซ้อนกว่าในกรณีของการดึงและการอัด การเลือกความเค้นอนุญาตในการเฉือนนี้จะพิจารณาจากความแข็งแรงครากหรือความแข็งแรงประลัย อย่างไรก็ตาม การหาคุณสมบัติของวัสดุต่างๆเหล่านี้ในการเฉือนโดยตรงจะยุ่งยาก เพราะทางปฏิบัติแล้วเป็นการยากที่จะทำให้เกิด Pure Shear โดยไม่มีผลของการดัดหรือผลทางด้านอื่นที่มีผลต่อผลลัพธ์จากการทดลอง ด้วยเหตุนี้ ความเค้นอนุญาตในการเฉือนจึงตั้งขึ้นจากการพิจารณาทางทฤษฎีที่ได้รับการยอมรับจากประสบการณ์

ในกรณีที่ป็นสถานะของความเค้น 2 มิติ ความเค้นหลักในกรณีทั่วไปของความเค้นในสถานะ 2 มิติ คือ

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Pure Shear เป็นกรณีเฉพาะของกรณีทั่วไปในสถานะความเค้นบนระนาบเมื่อ $\sigma_x = \sigma_y = 0$ คือผิวหน้าของเนื้อวัสดุถูกกระทำด้วยความเค้นเฉือนเพียงอย่างเดียว ดังนั้นความเค้นหลักในกรณี Pure Shear คือ

$$\sigma_{\max} = \tau_{xy} = \tau$$

$$\sigma_{\min} = -\tau_{xy} = -\tau$$

ในสถานะความเค้นบนระนาบ ความเค้นหลักทั้งสามค่าจะมีค่าเป็นศูนย์ เนื่องจาก $\sigma_{\min}$ มีค่าเป็นลบมันจึงเป็นความเค้นหลักที่มีน้อยที่สุดในความเค้นหลักทั้ง 3 และจะต้องแทนด้วย $(\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3)$

ดังนั้นในกรณี Pure Shear

$$\sigma_1 = \tau \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = -\tau$$

ตามทฤษฎีความเค้นตั้งฉากสูงสุดจะได้สภาวะของการเสียหายเป็น

$$\sigma_{eq} = \sigma_1 \leq \sigma_w$$

ดังนั้น

$$\tau = \sigma_1 = \sigma_{eq} \leq \sigma_w \quad (1)$$

คือ ความเค้นเฉือนจะต้องมีค่าไม่เกิน σ_w ในการดึง คือ

$$\tau_w \leq \sigma_w \tag{1a}$$

ตามทฤษฎีความเครียดตั้งฉากสูงสุดจะได้

$$\begin{aligned} \sigma_{eq} &= \sigma_1 - \nu \sigma_3 \leq \sigma_w \\ &= \tau + \nu \tau \\ \tau &= \frac{\sigma_{eq}}{1 + \nu} \leq \frac{\sigma_w}{1 + \nu} \end{aligned} \tag{2}$$

สำหรับเหล็กกล้า $\nu = 0.3$ ความเค้นเฉือนอนุญาตจะเป็น

$$\tau_w = 0.77 \sigma_w \tag{2a}$$

ตามทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุด และทฤษฎีของโมร์ (เมื่อ $\sigma_{ut} = \sigma_{uc}$)

$$\begin{aligned} \sigma_{eq} &= \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_w \\ &= \tau + \tau \\ \tau &= \frac{\sigma_{eq}}{2} \leq \frac{\sigma_w}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

ดังนั้น

$$\tau_w = 0.5 \sigma_w \tag{3a}$$

ตามทฤษฎีพลังงานสูงสุดจะได้

$$\begin{aligned} \sigma_{eq}^2 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \leq \sigma_w^2 \\ &= 2\tau^2 + 2\nu\tau^2 = 2\tau^2 (1 + \nu) \\ \tau &= \frac{\sigma_{eq}}{\sqrt{2(1 + \nu)}} \leq \frac{\sigma_w}{\sqrt{2(1 + \nu)}} \end{aligned} \tag{4}$$

ดังนั้น

$$\tau_w = 0.62 \sigma_w \tag{4a}$$

ตามทฤษฎีพลังงานการเสียดรูปร่างสูงสุดและทฤษฎีความเค้นเฉือนออกตะฮีดรัลสูงสุดจะได้

$$2\sigma_{eq}^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \leq 2\sigma_w^2$$

หรือ

$$\begin{aligned} \sigma_{eq} &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \leq \sigma_w \\ &= \sqrt{\tau^2 + \tau^2 + \tau^2} = \sqrt{3}\tau \\ \tau &= \frac{\sigma_{eq}}{\sqrt{3}} \leq \frac{\sigma_w}{\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{5}$$

หรือ

$$\tau_w = 0.577 \sigma_w \tag{5a}$$

นำสมการความเค้นอนุญาตในการเฉือนตามทฤษฎีต่างๆมาเปรียบเทียบกับตามลำดับจะเห็นได้ว่า

ทฤษฎีความเค้นดึงฉากสูงสุด	$\tau_w = \sigma_w$
ทฤษฎีความเครียดดึงฉากสูงสุด	$\tau_w = 0.77 \sigma_w$
ทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุดและทฤษฎีของโมร์	$\tau_w = 0.50 \sigma_w$
ทฤษฎีพลังงานความเครียดสูงสุด	$\tau_w = 0.62 \sigma_w$
ทฤษฎีพลังงานการเสีรูปร่างสูงสุดทฤษฎีความเค้นเฉือนออกตะฮีดรัลสูงสุด	$\tau_w = 0.577 \sigma_w$
ทางปฏิบัติมักจะสมมติให้	

$$\tau_w = (0.7 \text{ ถึง } 1.0) \sigma_w$$

สำหรับวัสดุเปราะ และ

$$\tau_w = (0.5 \text{ ถึง } 0.6) \sigma_w$$

สำหรับวัสดุเหนียว ดังได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 2-3.2

วัสดุที่เป็นเส้นใย (Fibrous Materials) เช่น ไม้ ด้านทานการเฉือนในแนวนอนเส้นใยได้ต่างกับ Isotropic Material ไม้จะเกิดความเค้นเฉือนระหว่างชั้น (Fiber) การเลือกความเค้นอนุญาตสำหรับวัสดุประเภทนี้จะทำโดยใช้ผลจากการทดลอง

ดังนั้นสำหรับไม้สน (Pine) คุณสมบัติปานกลาง ความเค้นอนุญาตในการเฉือนขนานกับเส้นใยคือ $\tau_w = 10 \text{ kg/cm}^2$ และความเค้นอนุญาตในการดึงขนานกับเส้นใย $\sigma_w = 100 \text{ kg/cm}^2$ ดังนั้น τ_w สำหรับ pine จะมีค่าเพียง $0.1 \sigma_w$

ในกรณีที่ต้องการหาความเค้นเฉือนที่ทำให้เกิดการคราก ซึ่งในขณะที่เกิดการครากความเค้นเทียบเท่า σ_{cy} มีค่าเท่ากับ σ_{yp} ดังนั้นความเค้นเฉือนที่ทำให้เกิดการครากจะแทนด้วย τ_{yp} และตามทฤษฎีความแข็งแรงต่างๆเหล่านี้ จากสมการ 1,2,3,4 และ 5 เป็น

ทฤษฎีความเค้นดึงฉากสูงสุด	$\tau_{yp} = \sigma_{yp}$
ทฤษฎีความเครียดดึงฉากสูงสุด	$\tau_{yp} = 0.77 \sigma_{yp}$
ทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุดและทฤษฎีของโมร์	$\tau_{yp} = 0.50 \sigma_{yp}$
ทฤษฎีพลังงานความเครียดสูงสุด	$\tau_{yp} = 0.62 \sigma_{yp}$
ทฤษฎีพลังงานการเสีรูปร่างสูงสุดและทฤษฎีความเค้นเฉือนออกตะฮีดรัลสูงสุด	$\tau_{yp} = 0.577 \sigma_{yp}$

สำหรับวัสดุเปราะที่มี $\sigma_{yt} \neq \sigma_{yc}, \sigma_{ut} \neq \sigma_{uc}, \tau_t$ และ τ_u จะได้จากทฤษฎีของโมร์ ดังได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อที่ 4-8 คือ

$$\tau_t = \frac{\sigma_{yt} \cdot \sigma_{yc}}{\sigma_{yt} + \sigma_{yc}}$$

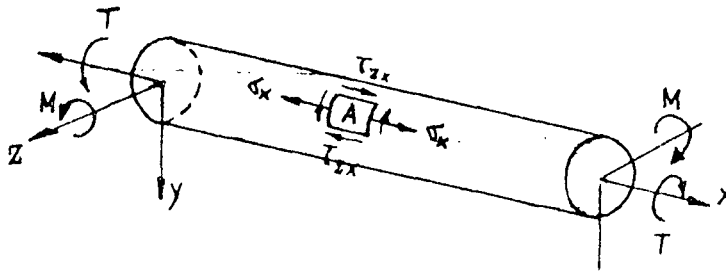
$$\tau_u = \frac{\sigma_{ut} \cdot \sigma_{uc}}{\sigma_{ut} + \sigma_{uc}}$$

เมื่อใช้ $\sigma_{uc} = 4 \sigma_{ut}$ จะได้

$$\tau_u = 0.80 \sigma_{ut}$$

4-10.3 สูตรที่ใช้ในการออกแบบ

ในการใช้ทฤษฎีของความเสียหายที่กล่าวมาแล้วทั้งเจ็ดทฤษฎี เราไม่ต้องการที่จะให้ชิ้นส่วนซึ่งเรากำลังคำนวณหาขนาด ถูกกระทำด้วยแรงจนถึงขอบเขตความยืดหยุ่น ฉะนั้นเราจึงต้องใช้ตัวประกอบความปลอดภัยเพื่อที่จะลดขนาดของความเค้นที่จะเกิดขึ้นในชิ้นส่วน ให้ n เป็นตัวประกอบความปลอดภัย และ σ_y เป็นขอบเขตความยืดหยุ่น หรือ จุดคราก หรือ ความเค้นสูงสุดที่วัสดุนั้นควรจะรับได้ ดังนั้นความเค้นออกแบบ หรือ ความเค้นใช้งานที่เราจะใช้ในการคำนวณ คือ $\sigma_w = \sigma_y/n$ ดังจะได้นำมาประยุกต์กับทฤษฎีต่างๆต่อไปนี้ โดยพิจารณาในกรณีของเพลาทิ้งท้ายได้แรงบิด T และโมเมนต์ดัด M ดังแสดงไว้ในรูป 4-10.1



รูป 4-10.1

1. Maximum Principal Stress Theory หรือ Ranking's Theory

ในทฤษฎีนี้ เราใช้ค่าของ maximum principal stress เท่ากับ working stress

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \sigma_w$$

$$\sigma_w = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

2. Maximum Principal Strain Theory

สมการที่เราต้องใช้ในการคำนวณก็คือ

$$\sigma_w = \sigma_1 - V(\sigma_2 + \sigma_3)$$

ถ้า $\sigma_3 = 0$

$$\sigma_w = \sigma_1 - V\sigma_2 \quad (1)$$

แทนค่า $\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{zx}^2}$ ลงใน (1)

$$\sigma_w = \frac{1-\nu}{2} \sigma_x + \frac{1+\nu}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{zx}^2} \tag{2}$$

ในกรณีของเหล็กซึ่งมี $\nu = \frac{1}{3}$ สมการ (2) จะมีค่าเป็น

$$\sigma_w = \frac{1}{3} \left(\sigma_x + 2\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{zx}^2} \right)$$

3. Maximum shear Stress Theory หรือ Terrace’s Theory

โดยทั่วไปแล้ว ถ้า allowable τ_{max} ถูกกำหนดให้มาใช้ในการคำนวณ

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} (\sigma_{max} - \sigma_{min}) = \sigma_w$$

ใน simple tensile test $\tau_{max} = \frac{1}{2} \sigma_y$ (ครึ่งหนึ่งของค่า maximum normal stress $\tau_{max} = \frac{1}{2} \sigma_w$)

$$\sigma_w = \sigma_{max} - \sigma_{min}$$

สำหรับ shaft ดังรูป 4-10.1 ความเค้นเฉือนสูงสุด

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2}$$

ฉะนั้น $\sigma_w = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{zx}^2}$

$$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 + 4\tau_{zx}^2$$

4. Total Strain Energy Theory หรือ Maximum Strain Energy Density

สมการที่ใช้ในการคำนวณ คือ

$$\sigma_w^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2 \nu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)$$

ในกรณีของ shaft ที่ $\sigma_3 = 0$ เราจะได้

$$\sigma_w^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2 \nu \sigma_1 \sigma_2 \tag{1}$$

สำหรับกรณีของ shaft ตามรูป 4-10.1 แทนค่า σ_1 และ σ_2 ลงใน (1)

$$\sigma_w^2 = \sigma_1^2 + 2 (1 + \nu) \tau_{zx}^2$$

5. Distortion Energy Theory หรือ Von Miss's Theory

สำหรับทฤษฎีนี้ สมการที่ใช้ในการคำนวณเป็นสมการเดียวกันกับทฤษฎีของ Maximum Octahedral Shear Stress ฉะนั้นสมการที่ใช้ในการคำนวณโดยทั่วไป คือ

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 \sigma_y^2$$

สำหรับกรณีที่ $\sigma_3 = 0$ และ $\sigma_y = \sigma_w$ เราจะได้ว่า

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_w^2 \quad \text{-----(1)}$$

ในกรณีของเพลาดังรูป 4-10.1 principal stress

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2}$$

แทนค่า σ_1 และ σ_2 ลงในสมการ (1) เราจะได้สมการที่ใช้ในการคำนวณออกแบบเพล

$$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 + 3 \tau_{xy}^2$$

ตัวอย่าง 4-10.1 เพลกลมตันส่งแรงบิด 2250 N.m ในขณะเดียวกันเพลานี้ก็รับโมเมนต์ดัด 1700 N.m วัสดุของเพลามีค่าความแข็งแรงครากเท่ากับ 400 MN/m² ให้ใช้ค่าตัวประกอบความปลอดภัยเท่ากับ 2.5 จงหาขนาดของเพลานี้โดยใช้ทฤษฎีของความแข็งแรงทั้งหลาย กำหนดให้อัตราส่วนของPoissonของวัสดุเท่ากับ 0.30

วิธีทำ ความเค้นดัด

$$\sigma_x = \frac{My}{I} = \frac{1700 \cdot 10^3}{\frac{\pi}{32} \cdot d^3} = \frac{17316 \cdot 10^3}{d^3} \text{ N/mm}^2$$

ความเค้นเฉือน

$$\tau_{xy} = \frac{Tr}{J} = \frac{2250 \cdot 10^3}{\frac{\pi}{32} \cdot d^4} \cdot \frac{d}{2} = \frac{11459 \cdot 10^3}{d^3} \text{ N/mm}^2$$

ความเค้นใช้งาน

$$\sigma_w = \frac{\sigma_y}{n} = \frac{400}{2.5} \text{ N/mm}^2$$

1. โดยทฤษฎี Maximum Principal Stress หรือ Rankine's Theory

$$\sigma_w = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$160 = \frac{17316 \cdot 10^3}{2d^3} + \sqrt{\left(\frac{17316 \cdot 10^3}{2d^3}\right)^2 + \left(\frac{11459 \cdot 10^3}{d^3}\right)^2}$$

$$d = 52.4 \text{ mm}$$

ตอบ

2. โดยใช้ทฤษฎี Maximum Principal Strain

$$\sigma_w = \frac{1-\nu}{2} \sigma_x + \frac{1+\nu}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$160 = \frac{1-0.3}{2} \cdot \frac{17316 \cdot 10^3}{d^3} + \frac{1+0.3}{2} \sqrt{\left(\frac{17316 \cdot 10^3}{d^3}\right)^2 + 4\left(\frac{11459 \cdot 10^3}{d^3}\right)^2}$$

$$d = 53.7 \text{ mm} \quad \text{ตอบ}$$

3. โดยใช้ทฤษฎี Maximum shear stress หรือ Tresca's Theory

$$\sigma_w = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$160 = \sqrt{\left(\frac{17316 \cdot 10^3}{d^3}\right)^2 + 4\left(\frac{11459 \cdot 10^3}{d^3}\right)^2}$$

$$d = 56.4 \text{ mm} \quad \text{ตอบ}$$

4. โดยใช้ทฤษฎี Maximum Strain Energy Density

$$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 + 2(1+\nu)\tau_{xy}^2$$

$$(160)^2 = \left(\frac{17316 \cdot 10^3}{d^3}\right)^2 + 2(1+0.3)\left(\frac{11459 \cdot 10^3}{d^3}\right)^2$$

$$d = 54.1 \text{ mm} \quad \text{ตอบ}$$

5. โดยใช้ทฤษฎี Distortion Energy Theory หรือ Von Mises's Theory

$$\sigma_w = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2}$$

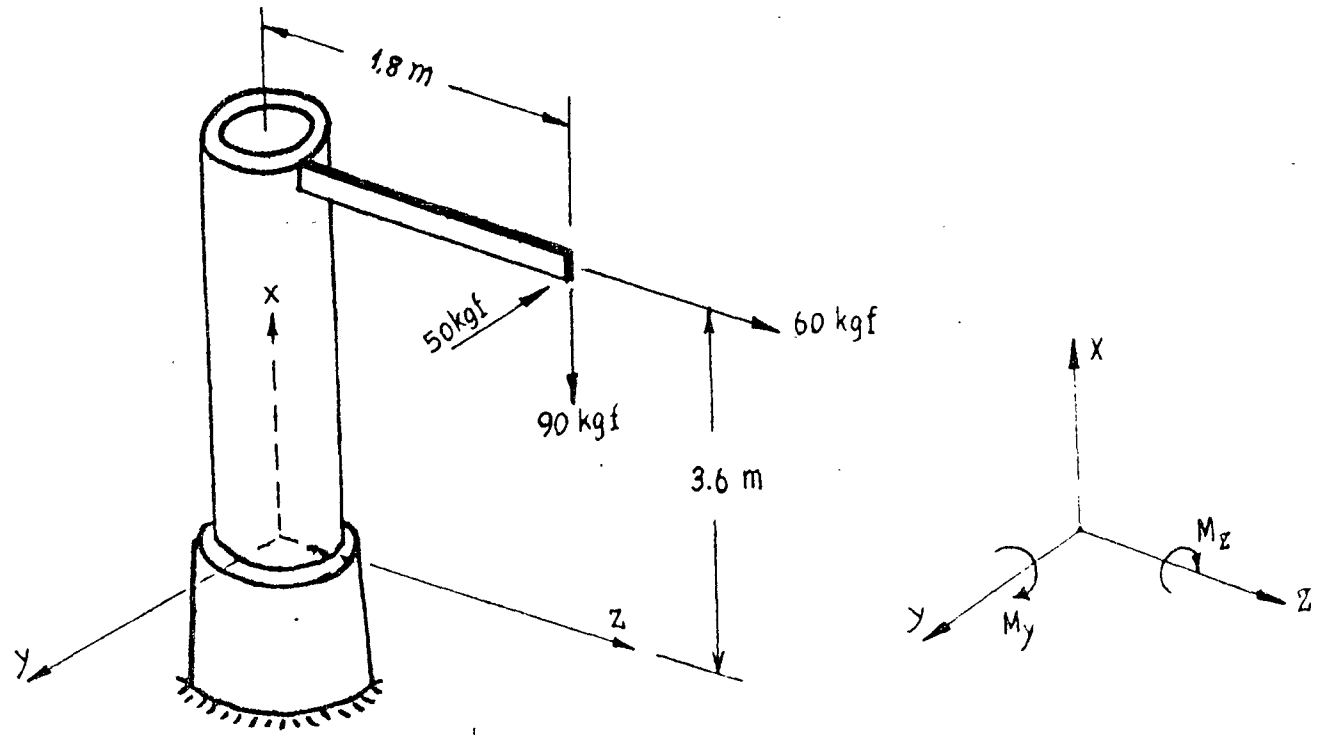
$$160 = \sqrt{\left(\frac{17316 \cdot 10^3}{d^3}\right)^2 + 3\left(\frac{11459 \cdot 10^3}{d^3}\right)^2}$$

$$d = 54.8 \text{ mm} \quad \text{ตอบ}$$

จะสังเกตได้ว่า ทฤษฎี Maximum shear stress ให้ขนาดของเพลตที่ใหญ่ที่สุด

ตัวอย่าง 4-10.2 เสากลมกลวงตามรูปข้างล่างนี้ทำด้วยโลหะ ซึ่งมีความแข็งแรงครากเท่ากับ 390 MN/m^2 เส้นผ่านศูนย์กลางภายนอกของเสาเท่ากับ 20 cm ให้ใช้ค่าความปลอดภัยเท่ากับ 3 จงหาความหนาของเสาที่ฐานเสา โดยใช้

1. ทฤษฎี Maximum shear stress
2. ทฤษฎี Maximum Distortion Energy



รูป E4-10.2

วิธีทำ โมเมนต์รอบแกน y ที่ฐาน

$$M_y = (90)(9.81)(1800) + (60)(9.81)(3600) = 3708 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

โมเมนต์รอบแกน z ที่ฐาน

$$M_z = (50)(9.81)(3600) = 1766 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

แรงบิดรอบแกน x

$$T = (50)(9.81)(1800) = 833 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

โมเมนต์รวม

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(3708 \cdot 10^3)^2 + (1766 \cdot 10^3)^2} \\ &= 4107 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm} \end{aligned}$$

ความเค้นดัด

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I} = \frac{M(d_o/2)}{\frac{\pi}{64}(d_o^4 - d_i^4)} = \frac{4107 \times 10^3 \cdot 100}{\frac{\pi}{64}(200^4 - d_i^4)} = \frac{8367 \times 10^6}{200^4 - d_i^4}$$

ความเค้นเฉือน

$$\tau_{xy} = \frac{Tr}{J} = \frac{T(d_o/2)}{\frac{\pi}{32}(d_o^4 - d_i^4)} = \frac{833 \times 10^3 \cdot 100}{\frac{\pi}{32}(200^4 - d_i^4)} = \frac{899 \times 10^6}{200^4 - d_i^4}$$

ความเค้นใช้งาน

$$\sigma_w = \frac{\sigma_y}{n} = \frac{390}{3} = 130 \text{ N/mm}^2$$

1. ทฤษฎี Maximum shear stress

$$\begin{aligned} \sigma_w^2 &= \sigma_x^2 + 4 \tau_{xy}^2 \\ (130)^2 &= \left(\frac{8367 \times 10^6}{200^4 - d_i^4} \right)^2 + 4 \left(\frac{899 \times 10^6}{200^4 - d_i^4} \right)^2 \\ d_i &= 197.9 \text{ mm} \end{aligned}$$

∴ ความหนาของเสา $t = \frac{d_o - d_i}{2} = \frac{200 - 197.9}{2} = 1.05 \text{ mm}$ ตอบ

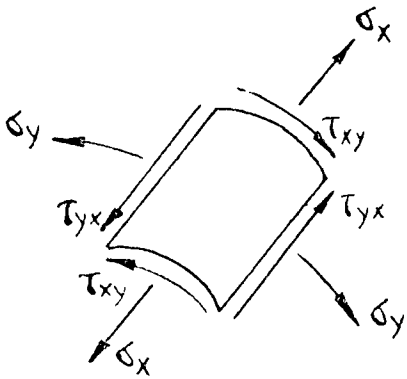
2. ทฤษฎีของ Von Mises

$$\begin{aligned} \sigma_w^2 &= \sigma_x^2 + 3 \tau_{xy}^2 \\ (130)^2 &= \left(\frac{8367 \times 10^6}{200^4 - d_i^4} \right)^2 + 3 \left(\frac{899 \times 10^6}{200^4 - d_i^4} \right)^2 \\ d_i &= 197.9 \text{ mm} \end{aligned}$$

∴ ความหนาของเสา $t = \frac{d_o - d_i}{2} = \frac{200 - 197.9}{2} = 1.05 \text{ mm}$ ตอบ

ในที่นี้ไม่ได้คิด direct compressive stress เนื่องจากแรง 90 kgf เมื่อเปรียบเทียบกับ bending stress และเพื่อหลีกเลี่ยงการหา d_i แบบ Trial - and - error

ตัวอย่าง 4-10.3 หม้อความดันผนังบางซึ่งมีฝาปิด มีเส้นผ่าศูนย์กลางเฉลี่ย 15 cm ความดันของก๊าซภายในหม้อน้ำเท่ากับ 3 MPa นอกจากนี้ยังมีแรงบิดขนาด 1000 N.m มากระทำตามแนวแกนอีกด้วย ถ้ากำหนดให้ $\nu = 0.3$ และค่าความเค้นดึงอนุญาตในวัสดุเท่ากับ 140 MN/m² จงหาความหนาของผนังโดยใช้ทฤษฎีความแข็งแรงทั้งหลาย ค่า J ของหม้อน้ำผนังบางอาจจะประมาณได้เท่ากับ $2\pi R^3 h$ เมื่อ R เป็นรัศมี และ h เป็นความหนา



รูป E4-10.3

วิธีทำ

Longitudinal stress

$$\sigma_x = \frac{PR}{2h} = \frac{3 \text{ N/mm}^2 \cdot 75 \text{ mm}}{2h} = \frac{112.5}{h} \text{ N/mm}^2$$

Hoop stress

$$\sigma_y = \frac{PR}{h} = \frac{3 \text{ N/mm}^2 \cdot 75 \text{ mm}}{h} = \frac{225}{h} \text{ N/mm}^2$$

Shear stress

$$\tau_{xy} = \frac{TR}{J} = \frac{TR}{2\pi R^3 h} = \frac{T}{2\pi R^2 h} = \frac{10^6}{2\pi 75^2 h} = \frac{28.3}{h} \text{ N/mm}^2$$

จากสูตร principal stress

$$\begin{aligned}\sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_{1,2} &= \frac{112.5 + 225}{2h} \pm \sqrt{\left(\frac{112.5 - 225}{2h}\right)^2 + \left(\frac{28.3}{h}\right)^2} \\ \sigma_1 &= \frac{231.7}{h} \text{ N/mm}^2, \sigma_2 = \frac{105.8}{h} \text{ N/mm}^2, \sigma_3 = 0\end{aligned}$$

1. ทฤษฎี Maximum principal stress

$$\sigma_{\max} = \sigma_w$$

$$\frac{231.7}{h} = 140$$

$$h = 1.66 \text{ mm}$$

ตอบ

2. ทฤษฎี Maximum principal strain

$$\sigma_w = \sigma_1 - \nu \sigma_2$$

$$140 = \frac{231.7}{h} - 0.3 \left(\frac{105.8}{h} \right)$$

$$h = 1.43 \text{ mm}$$

ตอบ

3. ทฤษฎี Maximum Shear stress หรือ Tresca's Theory

$$\sigma_w = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$$

$$140 = \frac{231.7}{h} - 0$$

$$h = 1.66 \text{ mm}$$

ตอบ

4. ทฤษฎี Maximum Strain Energy Density

$$\sigma_w^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2$$

$$(140)^2 = \left(\frac{231.7}{h}\right)^2 + \left(\frac{105.8}{h}\right)^2 - 2(0.3)\left(\frac{231.7}{h}\right)\left(\frac{105.8}{h}\right)$$

$$h = 1.60 \text{ mm} \qquad \text{ตอบ}$$

5. ทฤษฎี Maximum Distortion Energy หรือ Von Miss's theory

$$\sigma_w^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$$

$$(140)^2 = \left(\frac{231.7}{h}\right)^2 - \left(\frac{231.7}{h}\right)\left(\frac{105.8}{h}\right) + \left(\frac{105.8}{h}\right)^2$$

$$h = 1.44 \text{ mm} \qquad \text{ตอบ}$$

แบบฝึกหัด

- 8.67** A ductile steel has a yield strength of 36 ksi. Determine if it will fail based on (1) the maximum shear stress theory and (2) the distortion-energy theory, for each of the following stress states:

- (a) $\sigma_x = 10$ ksi, $\sigma_y = -3$ ksi, $\tau_{xy} = 0$
 (b) $\sigma_x = 10$ ksi, $\sigma_y = 3$ ksi, $\tau_{xy} = 0$
 (c) $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 8$ ksi
 (d) $\sigma_x = 15$ ksi, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 5$ ksi

- 8.68** A ductile machine part has a yield strength of 350 MPa. It is loaded so that the following stresses below result. Determine if the machine part will fail based on (1) the maximum shear stress theory and (2) based on the distortion energy theory.

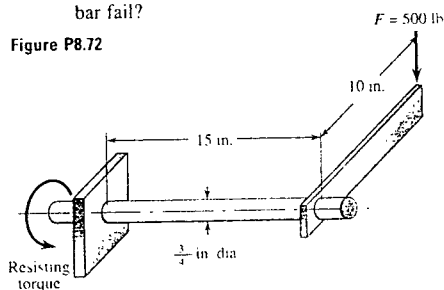
- (a) $\sigma_x = 70$ MPa, $\sigma_y = -70$ MPa, $\tau_{xy} = 0$
 (b) $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 100$ MPa
 (c) $\sigma_x = 70$ MPa, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 100$ MPa
 (d) $\sigma_x = -100$ MPa, $\sigma_y = -100$ MPa, $\tau_{xy} = 0$

- 8.69** A thin-walled cylindrical pressure vessel of American Society for Testing Metals (ASTM) A36 steel has an outer diameter of 100 mm and a wall thickness of 5 mm. Determine the internal pressure that would fail the material by yielding based on the distortion energy theory.

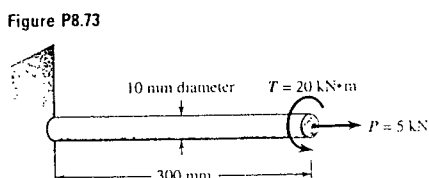
- 8.70** A 1.5-in.-diameter shaft is made of steel with a yield strength of 36 ksi. Using the maximum shear stress theory, determine the magnitude of the torque T at which yielding first occurs.

- 8.71** Solve Problem 8.70 using the distortion energy theory.

- 8.72** A lever is subjected to a downward force of 500 lb. It is keyed to a round bar of 3/4 in. diameter as shown. The round bar is made of 36 ksi yield strength material. Based on the maximum shear stress theory will the bar fail?



- 8.73** A solid aluminum bar of 10 mm diameter is built into a wall at one end and subjected to a torsional moment $T = 20$ kN·m and an axial load $P = 5$ kN at the free end. Based on the maximum shear stress theory will the bar yield?



- 8.74** A thin-walled pressure vessel is made of an aluminum alloy tubing with a yield strength of 138 MPa. The vessel has an outer diameter of 60 mm and a wall thickness of 1.5 mm. What internal pressure would

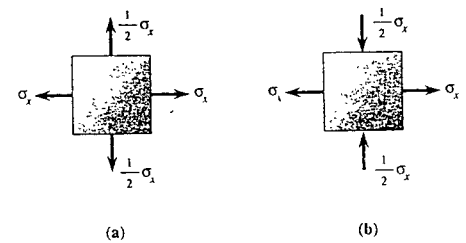
cause the material to yield based on the distortion energy theory?

- 8.75** A cast iron press, with ultimate strength in tension of 60 MPa and ultimate strength in compression of 170 MPa, is subjected to loadings that result in the following states of plane stress. Based on the Coulomb-Mohr theory, will the press rupture?

- (a) $\sigma_x = 10$ MPa, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 10$ MPa
 (b) $\sigma_x = 10$ MPa, $\sigma_y = -10$ MPa, $\tau_{xy} = 0$
 (c) $\sigma_x = 40$ MPa, $\sigma_y = 40$ MPa, $\tau_{xy} = 0$
 (d) $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 50$ MPa

- 8.76** A cast aluminum machine part, with ultimate tensile strength of 10 ksi and ultimate compressive strength of 20 ksi, is subjected to a state of plane stress shown. Determine the normal stress σ_x at which failure may be expected based on the Coulomb-Mohr theory.

Figure P8.76



สัปดาห์ที่ 15

หัวข้อเรื่อง ทรงกระบอกผ้นงหนาและแผ่นจานหมุน (1)

(3 ชั่วโมง)

ความคิดรวบยอด

1. สมการในการคำนวณของทรงกระบอกผ้นงหนาและจานหมุนสามารถสร้างขึ้นจากกรณีทั่วไปอันเดียวกันได้ โดยนำพื้นฐานจากทฤษฎีความยืดหยุ่นมาช่วยในการวิเคราะห์ปัญหา
2. ปัญหาของทรงกระบอกผ้นงหนาและจานหมุนแบบต่างๆเป็นเพียงกรณีเฉพาะเมื่อมีการหมุน ไม่มีการหมุน มีความดันภายใน มีความดันภายนอก เท่านั้น
3. ทฤษฎีความแข็งแรงสามารถนำมาใช้ในการออกแบบปัญหาของทรงกระบอกผ้นงหนาและจานหมุนได้ด้วย

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. เขียนสมการทั่วไปสำหรับทรงกระบอกผ้นงหนาและจานหมุนภายใต้ภาวะต่างๆได้
2. เขียนสมการในกรณีเฉพาะที่ไม่มีการหมุนได้
3. วิเคราะห์กรณีเฉพาะของท่อผ้นงหนาที่ถูกกระทำด้วยความดันในสภาวะต่างๆได้

สังเขปเนื้อหา

หน่วยที่ 9. ทรงกระบอกผ้นงหนาและจานหมุน

- กรณีทั่วไปของทรงกระบอกผ้นงหนาและจานหมุน
- กรณีที่ไม่มีการหมุน (ท่อผ้นงหนา)
- การสวมอัด
- ความเค้นสูงสุดเมื่อถูกกระทำด้วยความดันภายนอกและภายใน

หน่วยที่ 9. ทรงกระบอกผนังหนา และจานหมุน

1. น้าบท

จากความหมายของถ้อยคำ คำว่าทรงกระบอกผนังบางหรือผิวบางนั้นหมายถึงทรงกระบอกซึ่งความเค้นในแนวเส้นรอบวง(นิยมเรียกว่า Hoop-Tension Stress) ในผนังอาจจะสมมติได้ว่ามีค่าคงที่ตลอดทั้งความหนาของผนัง เมื่อถูกกระทำด้วยความดันภายในของของไหล โดยไม่ทำให้เกิดความผิดพลาดในการวิเคราะห์มากเกินไป

หม้อน้ำ, ถัง, ท่อไอน้ำ, และท่อน้ำ, ฯลฯ ส่วนใหญ่สามารถพิจารณาให้เป็นทรงกระบอกกลมผิวบางได้อย่างน่าพอใจ แต่ถ้าความหนาของเปลือกหรือผนังมีค่าค่อนข้างสูง ดังเช่นเป็นกรณีของปากกระบอกปืน, ท่อน้ำมันไฮดรอลิก, เครื่องจักรกลใช้ไฮดรอลิก, และเครื่องจักรหรืออุปกรณ์ที่ใช้ไอน้ำ การแปรผันของความดันจากผิวด้านในไปสู่ผิวด้านนอกจะมีค่าค่อนข้างมาก และการหาค่าของความเค้นโดยใช้สูตรสำหรับทรงกระบอกผนังบางธรรมดาไม่สามารถหาค่าของความเค้นที่สำคัญในทรงกระบอกผนังหนาได้แม่นยำมีผลเป็นที่น่าพอใจ

ปัญหาในบทนี้คือการพิจารณาที่จะหาความเค้นในแนวเส้นรอบวง และความเค้นในแนวเส้นรัศมี ที่จุดใดๆในเนื้อวัสดุของทรงกระบอกผนังหนา ในเทอมของความดันภายในและภายนอกกับรัศมีของผิวภายในและภายนอกและระยะห่างจากแกนศูนย์กลางไปยังจุดที่ต้องการหาความเค้น นอกจากนี้เรายังจะพิจารณาถึงผลจากการหมุนของทรงกระบอกหนาด้านขึ้น ซึ่งเรียกว่าจานหมุน(Rotating Disk)อีกด้วย

2. กรณีทั่วไปของทรงกระบอกผนังหนาและจานหมุน

พิจารณาทรงกระบอกซึ่งสมมาตรตามแนวแกนรอบแกน z ดังแสดงไว้ในรูปที่ 2-1(1) ทรงกระบอกอาจจะถูกกระทำด้วยความดันที่ $r=r_i$ และ/หรือ $r=r_o$ หรือมันอาจจะหมุนรอบแกน z สถานะเหล่านี้จะทำให้เกิดความเค้นขึ้นภายในเนื้อวัสดุ แต่เนื่องจากการสมมาตรของมัน ความเค้นเฉือน $\tau_{r,\theta}$ จะไม่เกิดขึ้น และ σ_θ จะมีค่าคงที่สำหรับค่าของ r ที่กำหนด เพราะฉะนั้นเนื้อวัสดุอนุพันธ์เล็กๆ ที่แยกออกมาพิจารณาที่ตำแหน่ง (r, θ) ใดๆจะปรากฏความเค้นดังแสดงไว้ในรูปที่ 2-1(2)

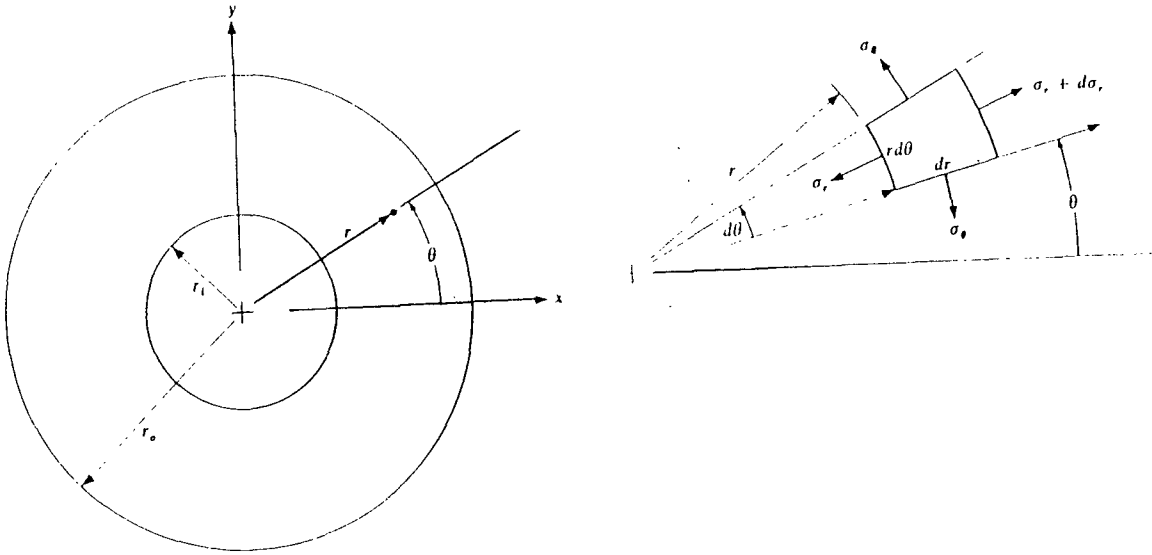
พิจารณาให้เนื้อวัสดุอนุพันธ์มีมวลโดยความหนาแน่นเป็น ρ และหมุนรอบแกน z ด้วยความเร็วเชิงมุม ω คงที่ สมการการเคลื่อนที่ในแนวรัศมีคือ

$$F_r = m a_r = -\rho \, r \, d\theta \, dr \, dz \, r \, \omega^2 = -\rho \, \omega^2 \, r^2 \, d\theta \, dr \, dz$$

แรงใบทิศทาง r จะหาได้จากรูปที่ 2-1(2) โดยคูณความเค้นด้วยพื้นที่ที่มันกระทำ ดังนั้น

$$F_r = (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) \, d\theta \, dz - r \, d\theta \, 0 \, dz - 2\sigma_\theta \, dr \, dz \sin(d\theta/2)$$

จับให้สมการทั้ง 2 นี้เท่ากัน เนื่องจาก $d\theta$ มีค่าน้อยมาก, $\sin(d\theta/2) = d\theta/2$ และเมื่อตัดเทอมที่มีอันดับสูง $d\sigma_r \, dr \, d\theta \, dz$ ทิ้งไป ผลลัพธ์จะได้



รูปที่ 2-1

$$\sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr} - \sigma_\theta = -\rho \omega^2 r^2 \quad (2-1)$$

ในการที่จะแก้สมการ(2-1)จะต้องกำจัดความเค้นในแนวสัมผัส σ_θ ออกไป ถ้าทรงกระบอก
นี้บางในทิศทาง z, $\sigma_z = 0$; ดังนั้น

$$\varepsilon_r = \frac{\partial}{\partial r} u_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) \quad (2-2)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \quad (2-3)$$

หาค่าของ u ในสมการ(2-3)แล้วหาอนุพันธ์ จะได้

$$\frac{du_r}{dr} = \frac{1}{E} \left[r \frac{d\sigma_\theta}{dr} + \sigma_\theta - \nu \left(r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r \right) \right] \quad (2-4)$$

จับสมการ(2-2)กับสมการ(2-4)ให้เท่ากัน จะได้

$$r \frac{d\sigma_\theta}{dr} - \nu r \frac{d\sigma_r}{dr} + (1 + \nu) (\sigma_\theta - \sigma_r) = 0 \quad (2-5)$$

จากสมการ(2-1)

$$\sigma_\theta = r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r + \rho \omega^2 r^2 \quad (2-6)$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ r จะได้

$$\frac{d\sigma_\theta}{dr} = r \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + 2 \frac{d\sigma_r}{dr} + 2 \rho \omega^2 r^2 \quad (2-7)$$

แทนสมการ(2-6)และ(2-7)ลงในสมการ(2-5) จะได้

$$r \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + 3 \frac{d\sigma_r}{dr} = -(3 + \mu) \rho \omega^2 r^2 \quad (2-8)$$

3. กรณีที่ไม่มีการหมุน (ท่อนิ่งหนา) ($\omega = 0$)

ถ้าทรงกระบอกถูกกระทำด้วยความดัน ดังแสดงไว้ในรูปที่ 3-1 โดย $\omega = 0$, สมการ(2-8)จะลดลงเหลือ

$$r \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + 3 \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad (3-1)$$

รูปแบบของคำตอบ(Solution)ของสมการ(3-1)คือ $\sigma_r = C r^n$ แทนค่าสมการนี้ลงในสมการ(3-1) จะได้ $n = 0$ และ $n = -2$ ดังนั้นคำตอบคือ

$$\sigma_r = C_1 + C_2 / r^2 \quad (3-2)$$

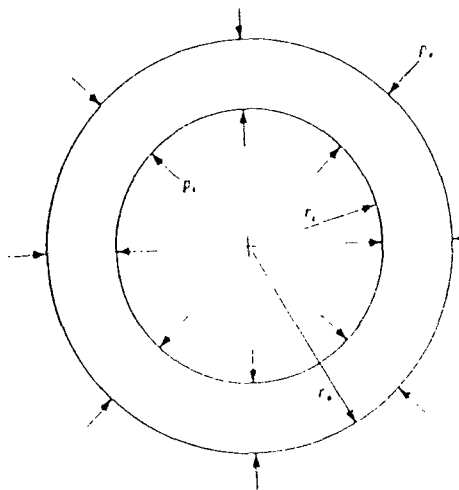
แทนค่าสมการนี้ลงในสมการ(2-6) โดย $\omega = 0$ จะได้

$$\sigma_\theta = C_1 - C_2 / r^2 \quad (3-3)$$

ใช้เงื่อนไขที่ว่า

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -p_i \quad \text{ที่ } r = r_i \\ &= -p_o \quad \text{ที่ } r = r_o \end{aligned}$$

กับสมการ(3-2) จะได้



รูปที่ 3-1

$$C_1 = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2}$$

$$C_2 = \frac{(r_i r_o)^2 (p_o - p_i)}{r_o^2 - r_i^2}$$

ดังนั้น

$$\sigma_r = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2 + (r_i r_o / r)^2 (p_o - p_i)}{r_o^2 - r_i^2} \quad (3-4)$$

และ

$$\sigma_\theta = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2 - (r_i r_o / r)^2 (p_o - p_i)}{r_o^2 - r_i^2} \quad (3-5)$$

สำหรับกรณีจานตัน เมื่อ $r = 0$ จะเห็นได้ว่าสมการ(3-4) และ (3-5) ลดลงเป็น

$$\sigma_r = -p_o \quad (3-6)$$

และ

$$\sigma_\theta = -p_o \quad (3-7)$$

ซึ่งหมายความว่าสถานะของความเค้นเท่ากันตลอดทั้งจาน

ถ้าทรงกระบอกเป็นทรงกระบอกปิด หรือมีฝาปิดที่ปลาย และอยู่ภายใต้อิทธิพลของความดันภายใน p และความดันภายนอก p ความเค้นในแนวแกน z จะเกิดขึ้น สมมติว่าความเค้นนี้แผ่กระจายอย่างสม่ำเสมอ และ p กระทำที่ฝาปิด เราจะพบว่าการประยุกต์ของเงื่อนไขการสมดุลจะเป็น

$$\sigma_z = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \quad (3-8)$$

ตัวอย่างที่ 3-1 จงหาการแผ่กระจายความเค้นในทรงกระบอกซึ่งมีเส้นผ่าศูนย์กลางภายใน 50 mm และเส้นผ่าศูนย์กลางภายนอก 150 mm โดยความดัน $p_i = 34.5 \text{ N/mm}^2$ และ $p_o = 0$

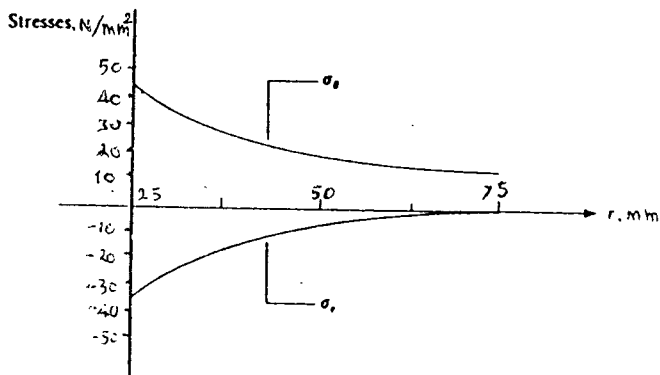
วิธีทำ จากสมการ(3-4)

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (34.5)(25)^2 - 0 + [(25)(75)/r]^2 (0 - 34.5) \\ &= 4.3125 - 24\,257.8/r^2 \end{aligned}$$

และจากสมการ(3-5)

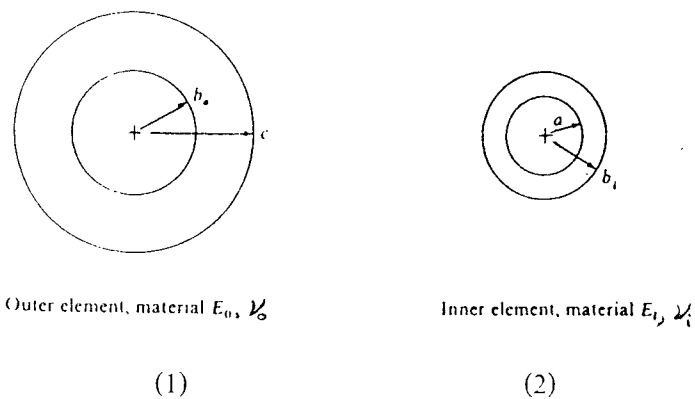
$$\sigma_\theta = 4.3125 + 24\,257.8/r^2$$

การแผ่กระจายความเค้นได้แสดงไว้ในรูปที่ 3-2



รูปที่ 3-2

3.1 การสวมอัด การสวมอัดเป็นตัวอย่างที่ดีมากของทรงกระบอกผนังหนาที่ถูกกระทำด้วยความดัน ความดันที่กระทำระหว่างชั้นส่วน 2 ชั้นที่สวมอัดติดอยู่ด้วยกันไม่สามารถหาได้จากสมการการสมดุล เนื่องจากเป็นปัญหาที่ไม่สามารถแก้ทางสถิตยศาสตร์ได้ ดังนั้นคำตอบจะต้องได้จากการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงรูปร่าง



รูปที่ 3-3

พิจารณาชั้นส่วนที่จะนำมาสวมอัดเข้าด้วยกัน ดังแสดงในรูปที่ 3-3 เมื่อ $b_i > b_o$

การเปลี่ยนตำแหน่ง(Displacement)ในแนวรัศมีคือ u ซึ่ง(สมมติว่า $\sigma_z = 0$)จะหาได้จาก

$$u_i = \frac{r}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \quad (3-9)$$

การเปลี่ยนตำแหน่งในแนวรัศมี u สำหรับชั้นส่วนชั้นในที่ $r = b_i$ เป็น $(u_i)_{b_i}$ และสำหรับชั้นส่วนชั้นนอกที่ $r = b_o$ เป็น $(u_o)_{b_o}$ จะเห็นได้ว่า

$$(u_r)_{b_o} - (u_r)_{b_i} = b_i - b_o = \delta \quad (3-10)$$

เมื่อ คือ Radial Interference เมื่อขึ้นส่วนทั้ง 2 สวมเข้าด้วยกัน ความดัน p จะเกิดขึ้นตรงผิวบริเวณที่สวมอัดเข้าด้วยกัน ความดัน p มีค่าเป็น p สำหรับขึ้นส่วนขึ้นใน และมีค่าเป็น p สำหรับขึ้นส่วนขึ้นนอก ดังนั้นสำหรับขึ้นส่วนขึ้นใน ที่ $r = b$ สมการ(3-5)จะได้

$$(\sigma_\theta)_{b_i} = -p \frac{b_i^2 + a^2}{b_i^2 - a^2} \quad (3-11)$$

ในขณะที่สำหรับขึ้นส่วนขึ้นนอก ที่ $r = b_o$

$$(\sigma_\theta)_{b_o} = p \frac{c^2 + b_o^2}{c^2 - b_o^2} \quad (3-12)$$

เนื่องจากส่วนใหญ่ b_i กับ b_o จะมีค่าใกล้เคียงกันมาก ให้ $b_o = b_i = b$ [ยกเว้นในสมการ(3-10)] ดังนั้นสมการ(3-11)และ(3-12) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$(\sigma_\theta)_{b_i} = -p \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} \quad (3-13)$$

และ $(\sigma_\theta)_{b_o} = p \frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} \quad (3-14)$

ความเค้นในแนวรัศมีที่หน้าสัมผัสของขึ้นส่วนทั้ง 2 แต่ละขึ้นจะมีค่าเป็นค่าลบของความดันในระหว่างหน้าสัมผัส กล่าวคือ

$$(\sigma_r)_{b_i} = (\sigma_r)_{b_o} = -p \quad (3-15)$$

แทนค่าสมการ(3-13)และ(3-15)ลงในสมการ(3-9) จะได้

$$(u_r)_{b_i} = \frac{-bp}{E_i} \frac{(b^2 + a^2 - v_i)}{b^2 - a^2} \quad (3-16)$$

เช่นเดียวกัน แทนค่าสมการ(3-14)และ(3-15)ลงในสมการ(3-9) จะได้

$$(u_r)_{b_o} = \frac{-bp}{E_o} \frac{(c^2 + b^2 + \mu_o)}{c^2 - b^2} \quad (3-17)$$

เนื่องจาก $(u_r)_{b_o} - (u_r)_{b_i} = \delta$ เอาสมการ(3-16)ไปลบสมการ(3-17)แล้วให้เท่ากับ จากนั้นหาค่าของ p ออกมา จะได้

$$p = \frac{\delta}{b \left[\frac{1}{E_o} \left(\frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} + \nu_o \right) + \frac{1}{E_i} \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \nu_i \right) \right]} \quad (3-18)$$

เมื่อ δ = Radial Interference ของชิ้นส่วนที่สวมอัดกัน, b - b

b = รัศมีร่วมกันโดยประมาณของพื้นผิวที่สวมอัดเข้าด้วยกัน

c = รัศมีภายนอกของชิ้นส่วนชั้นนอก

a = รัศมีภายในของชิ้นส่วนชั้นใน

E_o, E_i = โมดูลัสของความยืดหยุ่นของชิ้นส่วนชั้นนอกกับชิ้นส่วนชั้นใน ตามลำดับ

ν_o, ν_i = อัตราส่วนของปัวซองของชิ้นส่วนชั้นนอกกับชั้นใน ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 3-2 ทรงแท่งประกอบอลูมิเนียม ($E_o = 7 \times 10^{10}$ N/m², $\nu_o = 0.33$) มีรัศมีภายนอก 150 mm และรัศมีภายใน 100 mm ถูกนำไปสวมอัดอยู่รอบทรงแท่งประกอบเหล็กกล้า ($E_i = 20 \times 10^{10}$ N/m², $\nu_i = 0.29$) ซึ่งมีรัศมีภายนอก 100.25 mm และรัศมีภายใน 50 mm จงหาความดัน p ที่เกิดขึ้นระหว่างหน้าสัมผัสของชิ้นส่วนทั้งคู่

วิธีทำ $\delta = 0.25$ mm, $b \approx 100$ mm, $c = 150$ mm, $a = 50$ mm

$$E_o = 70 \times 10^3 \text{ N/mm}^2, E_i = 200 \times 10^3 \text{ N/mm}^2, \nu_o = 0.33, \nu_i = 0.29$$

ดังนั้น จากสมการ(3-18) ความดันระหว่างหน้าสัมผัสคือ

$$p = \frac{(0.25)}{100 \left[\frac{1}{70 \times 10^3} \left(\frac{150^2 + 100^2}{150^2 - 100^2} + 0.33 \right) + \frac{1}{200 \times 10^3} \left(\frac{100^2 + 50^2}{100^2 - 50^2} - 0.29 \right) \right]}$$

$$= 51.3 \text{ N/mm}^2$$

3.2 ความเค้นสูงสุดเมื่อถูกกระทำด้วยความดันภายนอกและภายใน โดยการแทนค่า r ในสมการ(3-4)และ(3-5)เท่ากับ r_i , ความเค้นสูงสุด(ที่ผิวด้านใน)จะมีค่าเป็น

$$(\sigma_r)_{\max} = -p_i \quad (3-19)$$

$$(\sigma_\theta)_{\max} = p_i (r_i^2 + r_o^2) - 2 p_o r_o^2 \quad (3-20)$$

กรณีเฉพาะ:เมื่อมีความดันภายในเท่านั้น ถ้าความดันภายในเป็น p และความดันภายนอกเป็นศูนย์ ($p_o = 0$) ซึ่งใช้ในกรณีของท่อไฮดรอลิก, ถัง, ฯลฯ ส่วนใหญ่ สมการ(3-4)และ(3-5)จะลดลงเหลือ

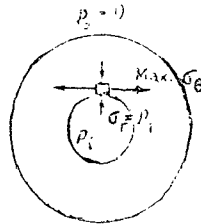
$$\sigma_r = p_i \frac{r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_o^2}{r^2} \right) \quad (3-21)$$

$$\sigma_\theta = p_i \frac{r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_o^2}{r^2} \right) \quad (3-22)$$

สมการเหล่านี้แสดงว่าค่าสูงสุดของ σ_θ และ σ_r เกิดขึ้นที่ผิวด้านใน นั่นคือเมื่อ r มีค่าน้อยที่สุด คือ $r = r_i$ มันยังแสดงให้เห็นอีกด้วยว่า สำหรับค่าใดๆของ r ค่าของ σ_θ จะมีค่ามากกว่า σ_r เสมอ ค่าสูงสุดของ σ_θ เมื่อหาจากสมการ(3-22) โดยให้ $r=r_i$ คือ

$$(\sigma_\theta)_{\max} = p_i \frac{(r_o^2 + r_i^2)}{r_o^2 - r_i^2} \quad (3-23)$$

และค่าสูงสุดของ σ_r สำหรับกรณีนี้คือ $\sigma_r = -p_i$ ความเค้นสูงสุดเหล่านี้ได้แสดงไว้ในรูปที่ 3-4 ความเค้นเฉือนสูงสุดในทรงกระบอกผนังหนาจะพิจารณาในภายหลัง



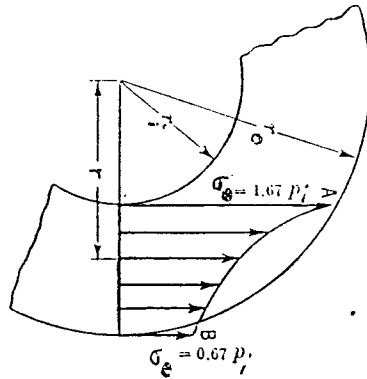
รูปที่ 3-4

สิ่งที่สำคัญคือจะสังเกตได้ว่าสมการ(3-23)แสดงให้เห็นว่า σ_θ มีค่ามากกว่า p_i เสมอ ดังนั้น p_i จะต้องมิต่ำกว่าขอบเขตความยืดหยุ่นของวัสดุเสมอ เพราะฉะนั้น เมื่อต้องการความดันภายในสูงๆ เช่นในปืน จะมีการใช้ปลอกกรัดสวมอัดเข้ากับปากกระบอกปืน เพื่อทำให้เกิด Initial Compressive Stress หรือ Underbored Gun ถูกทำให้เกิดความเครียดเกินขอบเขตความยืดหยุ่นด้วยความดันไฮดรอลิก ซึ่งเมื่อระบายความดันออกแล้วเนื้อโลหะของปากกระบอกจะอยู่ในสถานะที่เกิด Initial Compression โดย Layer นอกสุดจะอยู่ใน Moderate Initial Tension

ในตารางต่อไปนี้ได้แสดงอัตราส่วนระหว่างความเค้นที่หาได้จากสมการ(3-23)กับความเค้นที่ได้จากสูตรของทรงกระบอกผนังบาง ($\sigma_{thin} = p r / t$) สำหรับอัตราส่วน r_o / r_i ต่างๆ

r_o / r_i	=	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.5
$\sigma_{thick} / \sigma_{thin}$	=	1	1.10	1.23	1.37	1.51	1.67	2.07

ยกตัวอย่าง ความเค้นในแนวเส้นรอบวงของทรงกระบอกผนังหนาซึ่ง $r_o = 1.4 r_i$ จะมีค่าเป็น 1.23 เท่าของค่าความเค้นที่คำนวณจากสูตรของทรงกระบอกผนังบาง(รูปที่ 3-5 แสดงการแปรผันของความเค้นในแนวเส้นรอบวงบนหน้าตัดของทรงกระบอกที่ $r_o = 2 r_i$)



รูปที่ 3-5

กรณีเฉพาะ: เมื่อมีความดันภายนอกเท่านั้น ถ้าความดันภายนอกเป็น p_o และความดันภายในเป็น ศูนย์ ($p_i = 0$) สมการ(3-4)และ(3-5) จะลดลงเป็น

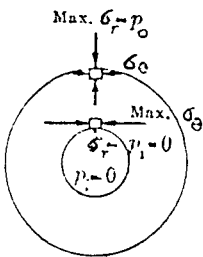
$$\sigma_r = -p_o \frac{r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right) \quad (3-24)$$

$$\sigma_\theta = -p_o \frac{r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right) \quad (3-25)$$

สมการทั้ง 2 นี้จะแสดงค่าสูงสุดของ σ_θ เกิดขึ้นที่ผิวในสุด(เมื่อ $r = r_i$) และเป็นความเค้นอัด (เป็นลบ) มีค่าเป็น

$$(\sigma_\theta)_{\max} = -2p_o \frac{r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \quad (3-26)$$

ค่าสูงสุดของ σ_θ แน่แน่นอนว่าจะต้องเกิดขึ้นที่ผิวในสุด และมีค่าเป็น $\sigma_r = -p_o$ ดังแสดงไว้ในรูปที่ 3-6 ค่าสูงสุดของ σ_θ และ σ_r ไม่ได้เกิดที่จุดเดียวกันสำหรับทรงกระบอกในกรณีนี้



รูปที่ 3-6

ตัวอย่างที่ 3-3 กระบอกปืนใหญ่สนามมีเส้นผ่าศูนย์กลางภายใน 117.5 mm และเส้นผ่าศูนย์กลางภายนอก 193 mm ขอบเขตความยืดหยุ่นในการดึงและการอัดของวัสดุมีค่า 345 N/mm²

- (1) จงหาความดันภายในสูงสุดซึ่งจะสามารถกระทำกับกระบอกปืนใหญ่โดยไม่ทำให้เกิดความเค้นในเนื้อวัสดุเกินขอบเขตความยืดหยุ่น
- (2) จงหาความดันภายนอกสูงสุดซึ่งจะสามารถกระทำกับกระบอกปืนใหญ่(โดยการสวมอัดหรือรัดปลอก)โดยไม่ทำให้เกิดความเค้นสูงกว่าขอบเขตความยืดหยุ่น

วิธีทำ(1) โดยการใช้สมการ(3-23)ในการหาค่าของ p

$$(\sigma_\theta)_{\max} = p_i \frac{(r_o^2 + r_i^2)}{r_o^2 - r_i^2}$$

$$345 = p_i \frac{[(96.5)^2 + (58.75)^2]}{(96.5)^2 - (58.75)^2}$$

$$p = 345/2.18 = 158.26 \text{ N/mm}^2$$

ดังนั้นความดันภายในสูงสุดที่สามารถกระทำกับกระบอกปืน โดยความดันภายนอกเป็นศูนย์คือ 158.26 N/mm²

(2) โดยการใช้สมการ(3-26)ในการหาค่าของ p_o

$$(\sigma_r)_{\max} = -2p_o \frac{r_o^2}{r_o^2 - r_i^2}$$

$$345 = -2p_o \left[\frac{(96.5)^2}{(96.5)^2 - (58.75)^2} \right]$$

$$p_o = 345/3.18 = 108.5 \text{ N/mm}^2$$

ดังนั้น ความดันภายนอกสูงสุดซึ่งสามารถกระทำกับกระบอกปืนโดยความดันภายในเป็นศูนย์ คือ 108.5 N/mm²

สัปดาห์ที่ 16

หัวข้อเรื่อง ทรงกระบอกผ้นหงาและแผ่นจานหมุน (2)

(3 ชั่วโมง)

ความคิดรวบยอด

1. สมการในการคำนวณของทรงกระบอกผ้นหงาและจานหมุนสามารถสร้างขึ้นจากกรณีทั่วไปอันเดียวกันได้ โดยนำพื้นฐานจากทฤษฎีความยืดหยุ่นมาช่วยในการวิเคราะห์ปัญหา
2. ปัญหาของทรงกระบอกผ้นหงาและจานหมุนแบบต่างๆเป็นเพียงกรณีเฉพาะเมื่อมีการหมุน ไม่มีการหมุน มีความดันภายใน มีความดันภายนอก เท่านั้น
3. ทฤษฎีความแข็งแรงสามารถนำมาใช้ในการออกแบบปัญหาของทรงกระบอกผ้นหงาและจานหมุนได้ด้วย

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. เขียนสมการสำหรับจานหมุนได้
2. ออกแบบจานหมุนสวมอัดเข้ากับเพลลาได้
3. บ่งยุคที่ใช้ทฤษฎีความแข็งแรงกับการออกแบบท่อผ้นหงาและจานหมุนได้

สังเขปเนื้อหา

หน่วยที่ 9. ทรงกระบอกผ้นหงาและจานหมุน (ต่อ)

- กรณีที่ไม่มีมีความดัน (จานหมุน)
- กรณีที่มีทั้งความดันและการหมุน (จานหมุนสวมอัดเข้ากับเพลลา)
- ความเค้นเฉือนสูงสุด
- ความเครียดสูงสุดและค่าสูงสุดของ $E\epsilon$

4. กรณีที่ไม่มีมีความดัน (งานหมุน) ($\omega \neq 0$, $p_i = p_o = 0$)

คำตอบของสมการ(2-8)คือ

$$\sigma_r = C_1 + C_2 / r^2 - \left(\frac{3+\nu}{8} \right) \rho \omega^2 r^2 \quad (4-1)$$

แทนค่าสมการนี้ลงในสมการ(2-6) จะได้

$$\sigma_\theta = C_1 - C_2 / r^2 - \left(\frac{1+3\nu}{8} \right) \rho \omega^2 r^2 \quad (4-2)$$

ใช้เงื่อนไขที่ว่า $\sigma_r = 0$ ที่ $r=r_i$ และ $r=r_o$ จะได้

$$\sigma_r = \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 [r_i^2 + r_o^2 - (r_i r_o / r)^2 - r^2] \quad (4-3)$$

$$\sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 \left[r_i^2 + r_o^2 + (r_i r_o / r)^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2 \right] \quad (4-4)$$

ความเค้นในแนวรัศมีสูงสุด $(\sigma_r)_{\max}$ เกิดขึ้นที่ $r = \sqrt{r_i r_o}$ ซึ่งมีค่าเป็น

$$(\sigma_r)_{\max} = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (r_o^2 - r_i^2) \quad (4-5)$$

ความเค้นในแนวสัมผัส $(\sigma_\theta)_{\max}$ จะเกิดขึ้นที่ผิวด้านใน ซึ่ง $r=r_i$ และมีค่าเป็น

$$(\sigma_\theta)_{\max} = \frac{\rho \omega^2}{4} [(3+\nu)r_o^2 + (1-\nu)r_i^2] \quad (4-6)$$

ถ้าทรงกระบอกเป็นจานตัน $r_i = 0$ สมการ(4-3)และ(4-4)จะลดลงเป็น

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (r_o^2 - r^2) \quad (4-7)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\rho \omega^2}{8} [(3+\nu)r_o^2 - (1+3\nu)r^2] \quad (4-8)$$

5. กรณีที่มีทั้งความดันและการหมุน ($\omega \neq 0$, $p \neq 0$, $p_o \neq 0$)

ตัวอย่างคืองานหมุนสวมอัดเข้ากับเพลลา ผลของกรณีที่ 1 และที่ 2 สามารถนำมาใช้ร่วมกันโดยการ Superposition ของสมการ(3-4)และ(3-5)กับสมการ(4-3)และ(4-4) ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 5-1 จานซึ่งมีรัศมี $r_o = 150 \text{ mm}$ และ $r_i = 25 \text{ mm}$ ถูกสวมอัดเข้ากับเพลาคู่ซึ่งมีรัศมี 25.075 mm ชิ้นส่วนทั้ง 2 เป็นเหล็กกล้า ซึ่งมี $E = 20 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $\nu = 0.29$ และความหนาแน่น 7750 kg/m^3 จงหา

(1) การแผ่กระจายความเค้นของจานที่ความเร็วรอบ $n = 5000 \text{ rpm}$ และ

(2) ความเร็วรอบซึ่งจะทำให้ความดันระหว่างหน้าสัมผัสเป็นศูนย์

วิธีทำ(1) ตอนแรกหาการสวมอัดที่ 5000 rpm

$$\omega = \frac{2\pi(5000)}{60} = 523.6 \text{ rad/s}$$

เนื่องจากการหมุน ความเค้นที่รัศมีภายนอกของเพลามีค่าเป็น [หาได้จากสมการ(4-7)และ(4-8)] $\sigma_\theta = 0$ และ

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \frac{\rho\omega^2}{4}(1-\nu)r_o^2 = \frac{(7750)(523.6)^2}{4}(1-0.29)\frac{(25.075)^2}{1000} \\ &= 237.13 \times 10^3 \text{ N/m}^2\end{aligned}$$

การเปลี่ยนตำแหน่งในแนวรัศมีจะหาได้จากสมการ(2-3)คือ

$$\begin{aligned}u_r &= \frac{r}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) = \frac{(25.075)}{(20 \times 10^{10})}(237.12 \times 10^3 - 0) \\ &= 29.73 \times 10^{-6} \text{ mm}\end{aligned}$$

รัศมีของเพลานี้เมื่อหมุน โดยไม่มีงานสวมอยู่จะมีค่าประมาณ

$$(r_o)_{\text{shaft}} = 25.075 \text{ mm}$$

ต่อไป ใช้วิธีการเดียวกันนี้กับจาน ที่รัศมีภายในของมัน ดังนั้น ที่ $r = r_i$, $\sigma_r = 0$ เนื่องจากการหมุน และ

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left[r_i^2 + r_o^2 \frac{(r_i r_o)^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu}r_i^2\right] \\ \sigma_\theta &= \left(\frac{3+0.29}{8}\right)(7750)(523.6)^2[(0.025)^2 + (0.15)^2 - (0.15)^2 - \left[\frac{1+3(0.29)}{3+0.29}\right](0.025)^2] \\ &= 39.6 \times 10^6 \text{ N/m}^2\end{aligned}$$

การเปลี่ยนตำแหน่งในแนวรัศมีที่รัศมีภายในคือ

$$u_i = \frac{r\sigma_\theta}{E} = \frac{(25)(39.6 \times 10^6)}{(20 \times 10^{10})} = 0.0049445 \text{ mm}$$

ดังนั้นรัศมีภายในของจานเนื่องจากการหมุนคือ

$$(r_i)_{\text{disk}} = 25 + 0.0049445 = 25.0049445 \text{ mm}$$

ดังนั้น Interference ในแนวรัศมีที่ $n = 5000 \text{ rpm}$ คือ

$$\delta = 25.075 - 25.0049445 = 0.0700555 \text{ mm}$$

ความดันในการสวมอัดที่ความเร็ว 5000 rpm จะหาได้โดยใช้สมการ(3-18) ดังนั้นที่ความเร็ว 5000 rpm ความดันคือ

$$p = \frac{0.0700555}{25 \left[\frac{1}{20 \times 10^{10}} \left(\frac{0.15^2 + 0.025^2}{0.15^2 - 0.025^2} + 0.29 \right) + \frac{1}{20 \times 10^{10}} \left(\frac{0.25^2 + 0^2}{0.25^2 - 0^2} - 0.29 \right) \right]}$$

$$p = 280.22 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

ด้วยค่าของความดันระหว่างหน้าสัมผัส สมการ(3-4)และ(3-5)สามารถใช้ในการหาความเค้นในงานเนื่องจากการInterferenceที่ 5000 rpm ใช้ $p_i = p$ และ $p_o = 0$ เราจะได้

$$\sigma_r = (280.22 \times 10^6) \left[(0.025)^2 - \left(\frac{0.15}{r^2} \right)^2 \right] = 8.006 \times 10^6 - \frac{288.23 \times 10^6}{r^2} \quad (1)$$

$$\text{และ} \quad \sigma_\theta = 8.006 \times 10^6 + \frac{288.23 \times 10^6}{r^2} \quad (2)$$

ความเค้นในงานเนื่องจากการหมุนจะหาได้จากสมการ(4-3)และ(4-4)คือ

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \left(\frac{3+0.29}{8} \right) (7750)(523.6)^2 \left[(0.025)^2 + (0.15)^2 - \left(\frac{0.15}{r^2} \right)^2 - r^2 \right] \\ &= 20.206 \times 10^6 - \frac{19.66 \times 10^6}{r^2} - 873.79 \times 10^6 r^2 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{และ} \quad \sigma_\theta = 20.206 \times 10^6 + \frac{19.66 \times 10^6}{r^2} - 496.65 \times 10^6 r^2 \quad (4)$$

สุดท้าย ความเค้นของสมการ(1)กับ(3) และ (2)กับ(4) จะถูกนำมารวมกัน จะได้

$$\sigma_r = 28.212 \times 10^6 - \frac{307.89 \times 10^6}{r^2} - 873.79 \times 10^6 r^2$$

$$\sigma_\theta = 28.212 \times 10^6 + \frac{307.89 \times 10^6}{r^2} - 496.65 \times 10^6 r^2$$

(2) ความเร็วซึ่งจะทำให้ความดันระหว่างหน้าสัมผัสเป็นศูนย์จะเกิดขึ้นเมื่อ $(r_o)_{\text{Shaft}} = (r_i)_{\text{dish}}$ หรือจะเกิดขึ้นเมื่อ $(u_r)_{\text{dish}} - (u_r)_{\text{Shaft}} = 0.075 \text{ mm}$ ที่หน้าสัมผัส

โดยการใช้สมการ(4-6) เราจะหาความเค้นในแนวสัมผัสที่รัศมีภายในของงาน

$$\sigma_\theta = \frac{(7750)(\omega^2)}{4} [(3 + 0.29)(0.15) + (1 - 0.29)(0.025)]$$

$$= 144.3 \omega^2 \text{ N/m}^2$$

ดังนั้นการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวรัศมีของงานที่รัศมีภายใน (โดย $\sigma_r = 0$) คือ

$$(u_r)_{\text{dish}} = \frac{r}{E} \sigma_\theta = \frac{(0.025)(144.3\omega^2)}{(20 \times 10^{10})} = \frac{3.6075\omega^2}{(20 \times 10^{10})} \text{ m}$$

ความเค้นในแนวสัมผัสที่รัศมีภายนอกของเพลาค้นหาได้โดยใช้สมการ(4-8)

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{(7750)\omega^2}{8} [(3 + 0.29)(0.025075) - (1 + 3 \times 0.29)(0.025075)^2] \\ &= 0.865 \omega^2 \text{ N/m}^2 \end{aligned}$$

และการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวรัศมีของเพลารัศมีภายนอกคือ

$$(u_r)_{\text{Shaft}} = \frac{r\sigma_\theta}{E} = \frac{(0.025)(0.865\omega^2)}{(20 \times 10^{10})} = \frac{0.021625\omega^2}{(20 \times 10^{10})} \text{ m}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{3.6075\omega^2}{(20 \times 10^{10})} - \frac{0.021625\omega^2}{(20 \times 10^{10})} = 0.075/1000$$

แก้สมการเพื่อหาค่าของ ω จะได้

$$\omega = 2045 \text{ rad/s}$$

และความเร็วรอบคือ

$$n = \frac{60(2045)}{2\pi} = 19\,528 \text{ rpm}$$

ความเค้นสูงสุดที่ความเร็วค่านี้จะหาได้จากสมการ(4-5)และ(4-6) มีค่าเป็น $(\sigma_r)_{\text{max}} = 291.6 \times 10^6 \text{ N/m}^2$

และ $(\sigma_\theta) = 603.4 \times 10^6 \text{ N/m}^2$

6. ความเค้นเฉือนสูงสุด

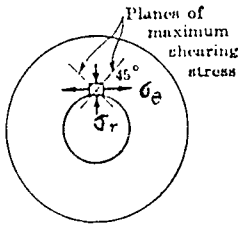
ตามทฤษฎีความเค้นเฉือนสูงสุด วัสดุที่ถูกกระทำด้วยความเค้นไม่ว่าจะเป็นสถานะใดก็ตาม จะเกิดการเสียหายก็ต่อเมื่อความเค้นเฉือนสูงสุดมีค่าสูงถึงขอบเขตความยืดหยุ่นในการเฉือนของวัสดุ

ดังได้แสดงมาแล้วว่าความเค้นเฉือนสูงสุดที่จุดใดก็ตามจะมีค่าเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลต่างทางพีชคณิตระหว่างความเค้นหลักสูงสุดและต่ำสุดที่จุดนั้น ความเค้นหลักสูงสุดจะเป็น σ_θ และความเค้นหลักต่ำสุดคือ σ_r ดังนั้น

$$\tau_{\text{max}} = \frac{1}{2} (\sigma_\theta - \sigma_r)$$

ถ้าใช้ค่าของ σ_θ และ σ_r จากสมการ (3-4) และ (3-5) สมการสำหรับความเค้นเฉือนสูงสุดที่จุดใด ๆ ตรงระยะทาง r ที่วัดจากจุดศูนย์กลางของทรงกระบอกจะกลายเป็น

$$\tau_{\text{max}} = \frac{(r r_o / r)^2 (p_i - p_o)}{r_o^2 - r_i^2} \quad (6-1)$$



รูปที่ 6-1

ความเค้นนี้เกิดขึ้นบนระนาบที่เอียงทำมุม 45° กับทิศทางของ σ_θ และ σ_r ดังแสดงไว้ในรูปที่ 6-1 ค่าสูงสุดของความเค้นเฉือนสูงสุดเกิดขึ้นที่ผิวผิวด้านใน นั่นคือเมื่อ $r=r_i$ และ ดังนั้นจะสามารถหาค่าได้โดยง่ายจากสมการ(6-1)

กรณีเฉพาะ: มีเฉพาะความดันภายในเท่านั้น มีลักษณะเป็นท่อซึ่งถูกกระทำด้วยความดันภายในเท่านั้น ความเค้นเฉือนสูงสุดจะหาได้โดยให้ $r=r_i$ และ $p_o = 0$ สมการ(6-1)จะกลายเป็น

$$\tau_{\max} = \frac{r_o^2 p_i}{r_o^2 - r_i^2} \tag{6-2}$$

ความเค้นเฉือนสูงสุดสำหรับกรณีที่มีทั้ง p_i และ p_o สามารถหาได้ในทำนองเดียวกัน

7. ความเครียดสูงสุด และค่าสูงสุดของ $E \epsilon$

ตามทฤษฎีความเครียดตั้งฉากสูงสุด วัสดุจะเกิดการเสียหายก็ต่อเมื่อวัสดุมีความเค้นเกิดขึ้นจนความเครียดตั้งฉากมีค่าสูงถึงจุดที่เป็นขีดจำกัด จุดที่เป็นขีดจำกัดคือค่าความเครียดที่เกิดขึ้นเมื่อวัสดุเกิดการเสียหายโดยการดึงในทิศทางเดียว ค่าขีดจำกัดของความเครียด ϵ_c นี้คือความเครียดที่เกิดขึ้นในขณะที่เกิดความเค้นถึงขอบเขตความยืดหยุ่น และมีค่าเท่ากับ σ_c / E เมื่อ σ_c คือขอบเขตความยืดหยุ่น

เพราะฉะนั้นจึงสำคัญที่จะได้สมการสำหรับความเครียดสูงสุด ($\epsilon_{\max}$) ในทรงกระบอกผนังหนา เพราะว่าค่าของ $E \epsilon_{\max}$ ตามทฤษฎีความเครียดตั้งฉากสูงสุดจะต้องมีค่าไม่เกินค่าของ σ_c ถ้าไม่ต้องการให้เกิดความเสียหายขึ้น

การเกิดความเครียดที่มีค่าสูงส่วนมากเกิดขึ้นที่เส้นใยผิวนอกสุดของด้านในของทรงกระบอก ซึ่งความเค้นในแนวเส้นรอบวงมีค่าสูงสุด และทิศทางของความเครียดสูงสุดจะเหมือนกับทิศทางของความเค้นในแนวเส้นรอบวง (รูปที่ 3-4) ค่าความเครียดสูงสุดคือ

$$\epsilon_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{E} - \nu \frac{\sigma_{\min}}{E}$$

$$= \frac{\sigma_\theta}{E} - \nu \frac{\sigma_{\min}}{E} \quad (7-1)$$

โดยการแทนค่าของ σ_r จากสมการ(3-4)และ(3-5)สำหรับความดันภายใน p_i และความดันภายนอก p_o ลงไป จะสามารถหาค่าสูงสุดของความเครียด($\varepsilon_{\max}$) หรือ $E\varepsilon_{\max}$ ออกมาได้

กรณีเฉพาะ: มีเฉพาะความดันภายในเท่านั้น สมมติว่าความดันภายนอก $p_o = 0$ ดังนั้นจากสมการ (3-23)และ(7-1) ค่าของ $E\varepsilon_{\max}$ คือ

$$E\varepsilon_{\max} = p_i \frac{[(r_o^2 + r_i^2) + \nu]}{r_o^2 - r_i^2} \quad (7-2)$$

สำหรับเหล็กกล้า ν มีค่าประมาณ 1/4 ดังนั้นสำหรับทรงกระบอกเหล็กกล้า

$$E\varepsilon_{\max} = p_i \frac{[(r_o^2 + r_i^2) + 1/4]}{r_o^2 - r_i^2} \quad (7-3)$$

และดังได้กล่าวมาแล้ว ค่าที่ยอมรับได้ของ $E\varepsilon_{\max}$ จะต้องน้อยกว่าขอบเขตความยืดหยุ่นในการดึงของวัสดุ

แบบฝึกหัด

1. ทรงกระบอกเหล็กกล้าถูกกระทำด้วยความดันภายใน $35 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ และความดันภายนอก $70 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ เส้นผ่าศูนย์กลางภายในของทรงกระบอกคือ 50 mm และเส้นผ่าศูนย์กลางภายนอกคือ 150 mm $E_s = 20 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$

(1) จงหาและเขียนเป็นกราฟการแผ่กระจายของความเค้นในแนวรัศมีและในแนวสัมผัส

(2) จงหาการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งในแนวรัศมีของผิวภายนอกและผิวภายใน

2. ทรงกระบอกเหล็กกล้ามีเส้นผ่าศูนย์กลางภายใน 100 mm และเส้นผ่าศูนย์กลางภายนอก 300 mm ถูกสวมอัดเข้ากับเพลาลูกกลิ้งที่มีเส้นผ่าศูนย์กลาง 100 mm ถ้าInterferenceในแนวรัศมีมีค่า 0.125 mm จงหาความเค้นตึงจากที่มีค่าสูงสุดในทรงกระบอกและเพลาลูกกลิ้ง

3. ทรงกระบอก 2 อันถูกนำมาสวมอัดเข้าด้วยกันโดยไม่ทำให้ความเค้นหลักที่มีค่าสัมบูรณ์สูงสุดมีค่าไม่เกิน 60% ของความแข็งแรงจุดครากของวัสดุ ชิ้นส่วนทั้ง 2 ทำขึ้นจากเหล็กกล้า ซึ่งมีความแข็งแรงจุดคราก $550 \times 10^6 \text{ N/m}^2$, $E = 20 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, และ $\nu = 0.29$ เส้นผ่าศูนย์กลางของทรงกระบอกมีค่าเป็น 25, 37.5, และ 50 mm

(1) จงหาInterferenceสูงสุดในแนวรัศมีที่ยอมรับได้ และความเค้นที่เกิดขึ้นระหว่างผิวสัมผัส

(2) ภายใต้อาณัติตามข้อ(1) จงเขียนกราฟการแผ่กระจายความเค้นของแต่ละชิ้นส่วน

(3) ถ้าภายใต้สภาวะตามข้อ(1) ทรงกระบอกทั้งคู่เมื่อประกอบเข้าด้วยกันแล้วถูกกระทำด้วยความดันภายใน $34.5 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ จงหาการแผ่กระจายความเค้นรวมในชิ้นส่วนทั้ง 2 โดยวิธี Superposition

4. ชิ้นส่วนกลม 2 ชิ้นที่ถูกนำมาสวมอัดเข้าด้วยกัน ไม่มีการเคลื่อนที่ในแนวแกนหรือแนวสัมผัส เนื่องจากความฝืดและความดัน p ที่เกิดขึ้นระหว่างหน้าสัมผัส โดยการพิจารณาว่าเป็นความฝืดแห้งและสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานระหว่างชิ้นส่วนทั้ง 2 ที่สวมอัดเข้าด้วยกันเป็น f จงแสดงว่า

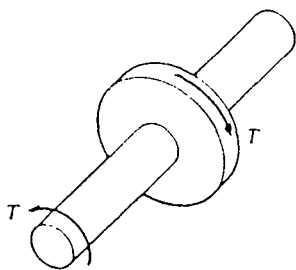
(1) แรง F ที่จะใช้ในการทำให้เกิดการเคลื่อนที่ในแนวแกนระหว่างชิ้นส่วนที่สวมอัดเข้าด้วยกันมีค่าเป็น $F = 2 \pi f t b p$

(2) แรงบิดสูงสุดที่ยอมให้เกิดขึ้นได้ ซึ่งจะถ่ายทอดจากชิ้นส่วนหนึ่งไปยังชิ้นส่วนอีกชิ้นหนึ่งจะหาได้จาก $T_{\max} = 2 \pi f t b^2 p$

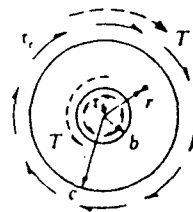
เมื่อ t = ความกว้างของชิ้นส่วนที่แคบที่สุด

b = Interference Radius

5. ในข้อที่ 2. ทรงกระบอกเหล็กกล้าถูกสวมอัดอยู่กับเพลาลูกกลิ้ง ชิ้นส่วนทั้งคู่สามารถใช้ในการถ่ายทอดแรงบิดดังแสดงในรูป ถ้าแรงบิด T ที่รัศมีภายนอกของทรงกระบอกสามารถกระทำได้อย่างสม่ำเสมอ จงพิสูจน์ว่าภาระในแนวสัมผัสที่กระจายอย่างสม่ำเสมอ(แรงต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่) คือ $\tau_c = T / 2 \pi t c^2$ สำหรับการสมดุล จงแสดงว่าภาระในแนวสัมผัสที่กระจายอย่างสม่ำเสมอที่รัศมีภายในของทรงกระบอกเป็นสิ่งที่จำเป็น เมื่อ $\tau_b = T / 2 \pi t b^2$ สุดท้าย จงพิสูจน์ว่าการแผ่กระจายความเค้นเฉือนในทรงกระบอกหาได้จาก $\tau_{r\theta} = T / 2 \pi t r$



(a)



(b)

6. โดยการใช้ผลลัพธ์จากข้อที่ 2. และข้อที่ 5. จงแสดงก่อนเนื้อวัสดุอนุพันธ์และอธิบายสถานะของความเค้นที่รัศมีภายในของทรงกระบอก ถ้ามีแรงบิด 1130 N.m ถ่ายทอดระหว่างชิ้นส่วนทั้ง 2 ความกว้างของทรงกระบอกคือ 25 mm และสัมประสิทธิ์แรงเสียดทานระหว่างชิ้นส่วนทั้ง 2 คือ $f = 0.05$

7. จงเขียนเส้นโค้ง(คล้ายกับเส้น AB ในรูปที่ 3-5) โดยให้ออร์ดิเนตแสดงค่าของความเค้นในแนวเส้นรอบวงที่ระยะทางต่างๆจากจุดศูนย์กลางของทรงกระบอก
- (1) ให้ $r_i = 25 \text{ mm}$, $r_o / r_i = 1.2$, $p_i = 6.897 \times 10^6 \text{ N/m}^2$, และ $p_o = 0$
- (2) เขียนเส้นโค้งในทำนองเดียวกันโดยใช้ค่า $r_o / r_i = 4$, โดยข้อมูลต่างๆยังคงเหมือนเดิม ในการได้เส้นโค้งตามรูปที่ 3-5 ค่าที่ใช้คือ $r_o / r_i = 2$
- 8 ทรงกระบอกซึ่งมีเส้นผ่าศูนย์กลางภายใน 200 mm และเส้นผ่าศูนย์กลางภายนอก 600 mm ถูกกระทำด้วยความดันภายในเพียงอย่างเดียวมีค่า $68.97 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ จงหาความเค้นสูงสุดในแนวเส้นรอบวงและในแนวรัศมี และจงบอกด้วยว่ามันเกิดขึ้นที่ตรงตำแหน่งใดในทรงกระบอก
- 9 ถ้าทรงกระบอกในข้อที่ 8. ถูกกระทำด้วยความดันภายนอกมีค่า $68.97 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ และไม่มี ความดันภายใน จงหาความเค้นสูงสุดในแนวเส้นรอบวงและแนวรัศมี และระบุด้วยว่ามันเกิดขึ้นตรงตำแหน่งใดในทรงกระบอก
- 10 ถังลมเหล็กกล้ามีเส้นผ่าศูนย์กลางภายใน 1500 mm ต้องต้านทานความดันภายใน $34.49 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ ขอบเขตความยืดหยุ่นในการดึงและการอัดของวัสดุคือ $206.9 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ ความหนาของผนังถังลมจะมีค่าเท่าใด ถ้าค่าของความเค้นในแนวเส้นรอบวงมีค่าเป็น 2 ใน 3 ของขอบเขตความยืดหยุ่น(ซึ่งเรียกว่ามีตัวประกอบความปลอดภัย 1.5 เมื่อคิดจากขอบเขตความยืดหยุ่น)
- 11 ขอบเขตความยืดหยุ่นในการเฉือนของวัสดุที่ทำเป็นปิ่นซึ่งกล่าวไว้ในตัวอย่างที่ 3-3 มีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของขอบเขตความยืดหยุ่นในการดึง ถ้าความเค้นเฉือนอนุญาตสูงสุดในปิ่นถูกกำหนดให้เป็น 3 ใน 4 ของขอบเขตความยืดหยุ่นในการเฉือน จงหาความดันภายในสูงสุดที่ยอมให้กระทำได้ สมมติว่าความดันภายนอกเป็นศูนย์
- 12 จงหาความเค้นเฉือนสูงสุดของทรงกระบอกในข้อที่ 8. และระบุด้วยว่าความเค้นนี้เกิดตรงตำแหน่งใดในทรงกระบอก และทิศทางของระนาบที่ความเค้นเฉือนสูงสุดกระทำ อยู่ในทิศทางใด
- 13 ขอบเขตความยืดหยุ่นในการเฉือนของวัสดุที่ใช้ทำถังลมที่ระบุในข้อที่ 10. มีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของขอบเขตความยืดหยุ่นในการดึง จงหาความหนาของถังลมนี้ ถ้าค่าความเค้นเฉือนสูงสุดที่ยอมให้เกิดขึ้นได้มีค่าเป็น 2 ใน 3 ของขอบเขตความยืดหยุ่นในการเฉือน

- 14 ทรงกระบอกที่ระบุไว้ในข้อที่ 8. ทำขึ้นจากเหล็กกล้า ค่าความเครียดสูงสุดที่ยอมให้เกิดขึ้นได้ถูกกำหนดให้เป็น $\frac{2}{3}$ ของค่าความเครียดที่ขอบเขตความยืดหยุ่นในการดึงของวัสดุ จงหาค่าความดันภายในสูงสุดที่ยอมให้เกิดขึ้นได้ สมมติว่าความดันภายนอกเป็นศูนย์ ใช้ $\nu = 0.25$
- 15 ความเครียดที่ยอมได้สูงสุดของปิ่นในตัวอย่างที่ 3-3 มีค่าตรงกับขอบเขตความยืดหยุ่น(หรือ $E\epsilon_{\max} = \sigma_c = 344.9 \times 10^6 \text{ N/m}^2$) ถ้าความดันภายนอกเป็น $108 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ จงหาค่าความดันภายในสูงสุดที่ยอมให้กระทำได้
- 16 ค่าความเครียดสูงสุดที่ยอมได้ของปิ่นที่ระบุไว้ในตัวอย่างที่ 3-3 คือ $\frac{3}{4}$ ของขอบเขตความยืดหยุ่น. $\epsilon_{\max} = (3/4) \sigma_c / E$ จงหาความดันภายในสูงสุดที่ยอมได้ซึ่งปิ่นจะรับได้ สมมติว่าความดันภายนอกเป็นศูนย์