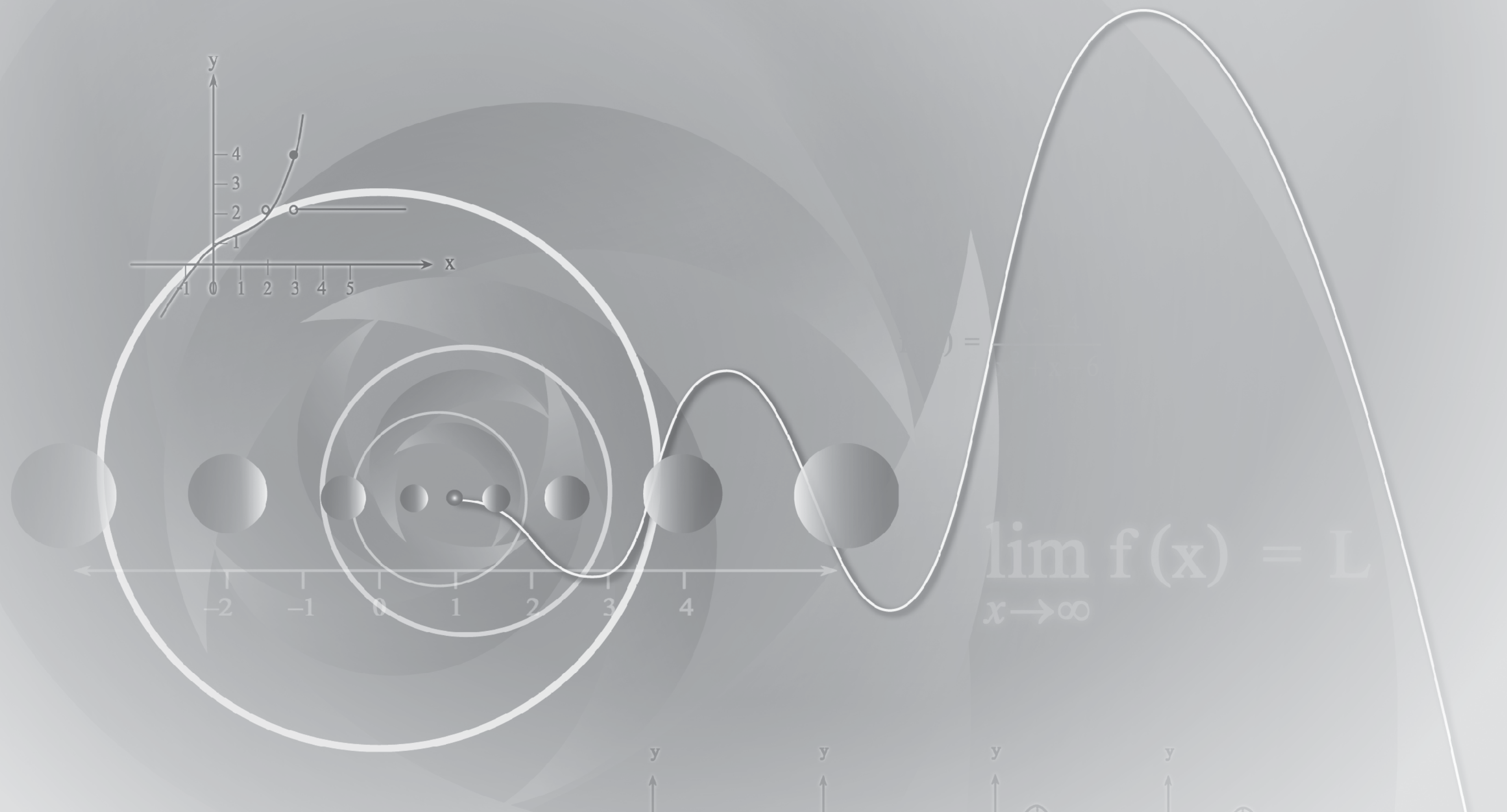
หลักสูตรลดระยะเวลาเรียน
สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ด้านคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

แผนการจัดการเรียนรู้

ลิมิตของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน และการอินติเกรต



โครงการความร่วมมือระหว่างสำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาและมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
ในการขยายเครือข่ายการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้

371.95 สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา
ส 691 ผ แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน และการอินติเกรด หลักสูตรลดระยะเวลาเรียนสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย กรุงเทพฯ : 2552
174 หน้า
ISBN 978-974-559-718-1
1. การศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ - หลักสูตร
2. การศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ-คณิตศาสตร์ 3. ชื่อเรื่อง

แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน และการอินติเกรด หลักสูตรลดระยะเวลาเรียนสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

สิ่งพิมพ์ สกศ.	อันดับที่ 38 /2552
พิมพ์ครั้งที่ 1	มิถุนายน 2552
จำนวน	1,000 เล่ม
จัดพิมพ์เผยแพร่	สำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้ สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา 99/20 ถนนสุโขทัย เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300 โทรศัพท์ 0-2668-7974 หรือ 0-2668-7123 ต่อ 2530 โทรสาร 0-2243-1129, 0-2668-7329 Web site: http:// www.onec.go.th และ http:// www.thaigifted.org
ผู้พิมพ์	บริษัท ออฟเซ็ท จำกัด 580 หมู่ 8 ซ.รามอินทรา 34 แยก 1 ถ.รามอินทรา แขวงท่าแร้ง เขตบางเขน กรุงเทพฯ 10230 โทรศัพท์ 0-2943-8373-4 โทรสาร 0-2510-7753

คำนำ

ตามที่พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ.2542 และแก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ.2545 มาตรา 10 วรรคสี่ กำหนดให้การจัดการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องจัดด้วยรูปแบบที่เหมาะสม โดยคำนึงถึงความสามารถของบุคคลนั้น และในมาตรา 28 ยังได้กำหนดให้หลักสูตรการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องมีลักษณะหลากหลาย ทั้งนี้ ให้จัดตามความเหมาะสมของแต่ละระดับ โดยมุ่งพัฒนาคุณภาพชีวิตของบุคคลให้เหมาะสมแก่วัยและศักยภาพ

สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา โดยความร่วมมือของมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่ ได้ดำเนินการวิจัยนำร่องขยายเครือข่ายการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้ ปีการศึกษา 2547) ซึ่งมีกระบวนการหนึ่งที่สำคัญคือ การจัดทำหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน (Acceleration Program) เป็นการจัดหลักสูตรสำหรับผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ โดยปรับหลักสูตรปกติให้กระชับ ใช้เวลาเรียนให้สั้นลง เหมาะสมกับศักยภาพของผู้เรียน และนำเวลาที่เหลือมาเพิ่มพูนประสบการณ์ในระดับที่กว้าง ยากและลึกซึ้งกว่าหลักสูตรปกติ ทั้งนี้จะเป็นการช่วยไม่ให้ผู้เรียนเกิดความเบื่อหน่ายการเรียนในวิชาปกติที่เขาสามารถเรียนรู้ได้เร็วกว่าเพื่อน รวมทั้งเป็นการป้องกันไม่ให้เกิดความถดถอยทางศักยภาพหรือทำลายศักยภาพของตัวเอง สำหรับการวัดและประเมินผลในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน โรงเรียนควรใช้มาตรฐานเดียวกันเหมือนเด็กกลุ่มปกติ

เอกสารเล่มนี้เป็น **แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน และการอินติเกรด ในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียนสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย** ซึ่งเป็นหนึ่งในสิบแปดเล่มที่ได้จากการวิจัยนำร่องฯ ดังกล่าวข้างต้น โดยกำหนดให้มีการเรียนการสอนเพียง 5 ภาคเรียนจากปกติใช้เวลาทั้งหมด 6 ภาคเรียน ซึ่งเนื้อหาที่ปรากฏอยู่ในเอกสารเล่มนี้เป็นเพียงตัวอย่างเพื่อเป็นแนวทางให้ครูผู้สอนสามารถนำไปใช้สำหรับการเรียนการสอน ทั้งนี้ ครูผู้สอนสามารถนำไปประยุกต์ใช้ ปรับเปลี่ยน ขยายเนื้อหา หรือเลือกเนื้อหาอื่นๆ ที่น่าสนใจ หรือเหมาะสมกับสภาพการณ์ของครูและนักเรียนในแต่ละโรงเรียนได้

ในโอกาสนี้ สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษาขอขอบคุณรองศาสตราจารย์อาริสา รัตนเพ็ชร์ และคณะ จากภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ผู้บริหารโรงเรียน คณะครู-อาจารย์ และนักเรียนที่อยู่ในโครงการฯ ตลอดจนคณะครูคณิตศาสตร์โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพฯ ที่เห็นคุณค่าของเอกสารนี้ จึงให้ความอนุเคราะห์ตรวจสอบความถูกต้องจนเสร็จสมบูรณ์ สำนักงานฯ หวังเป็นอย่างยิ่งว่าองค์ความรู้ที่ได้จากการวิจัยครั้งนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ของประเทศไทยต่อไป

(รศ.ธงทอง จันทรางศุ)
เลขาธิการสภาการศึกษา

คำชี้แจง

ตามที่พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 และที่แก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ.2545 ในมาตรา 10 (วรรค 4) ได้กำหนดให้การจัดการศึกษาสำหรับบุคคลที่มีความสามารถพิเศษ ต้องจัดด้วยรูปแบบที่เหมาะสมโดยคำนึงถึงความสามารถของบุคคลนั้น และมาตรา 28 ระบุว่า หลักสูตรการศึกษาระดับต่างๆ รวมทั้งหลักสูตรการศึกษาสำหรับบุคคลซึ่งมีความสามารถพิเศษต้องมีลักษณะหลากหลาย ทั้งนี้ให้จัดตามความเหมาะของแต่ละระดับ โดยมุ่งพัฒนาคุณภาพชีวิตของบุคคลให้เหมาะสมกับวัยและศักยภาพ นั้น

สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา จึงได้จัดทำโครงการวิจัยนำร่องและพัฒนาเด็กและเยาวชนที่มีความสามารถพิเศษมาตั้งแต่ปี 2543 เพื่อค้นหารูปแบบและพัฒนาหลักสูตรการจัดการศึกษาสำหรับผู้มีความสามารถพิเศษในสาขาวิชาต่างๆ ทั้งระดับประถมและมัธยมศึกษา ในลักษณะเรียนร่วมในโรงเรียนทั่วไป หรือที่เรียกว่า School in school Program โดยในปีการศึกษา 2547 ได้ขยายโรงเรียนเครือข่ายสู่ภูมิภาคในภาคเหนือและภาคใต้ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งกระบวนการจัดการศึกษานี้เน้นการจัด Gifted Education ขั้นตอนเริ่มตั้งแต่การเสาะหาและคัดเลือก มีการพัฒนาหลักสูตรที่ใช้วิธีการลดระยะเวลาเรียน (Acceleration Program) เป็นการย่นระยะเวลาเรียนให้น้อยลง แต่ยังคงเนื้อหาเท่าเดิมครบถ้วนตามหลักสูตรแกนที่กระทรวงศึกษาธิการกำหนด และจัดทำหลักสูตรเพิ่มพูนประสบการณ์ (Enrichment Program) เพิ่มเติมให้กับเด็กกลุ่มนี้ เป็นการขยายกิจกรรมในหลักสูตรให้กว้างและลึกซึ้งกว่าที่มีในหลักสูตรปกติ เพื่อช่วยกระตุ้นความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ทักษะในการคิด วิเคราะห์ การแก้ปัญหา การใช้สติปัญญาในการให้เหตุผล ฯลฯ เมื่อผู้เรียนสามารถจบหลักสูตรในแต่ละช่วงชั้นก่อนกำหนด (เช่น ด้านภาษาใช้เวลา 3 ภาคเรียน จาก 6 ภาคเรียนหรือด้านคณิตศาสตร์ ใช้เวลา 5 ภาคเรียน จาก 6 ภาคเรียน เป็นต้น) เวลาที่เหลือโรงเรียนหรือครูผู้สอนก็สามารถจัดหลักสูตรขยายประสบการณ์ (Extension Program) หรือให้นักเรียนที่มีประสบการณ์ทำงานร่วมกับผู้เชี่ยวชาญ (mentor) ซึ่งเป็นวิธีการจัดโปรแกรมการศึกษานอกหลักสูตรที่สามารถตอบสนองความสนใจและความสามารถเป็นรายบุคคล เช่น การจัด AP Program (Advanced Placement Program) หรือโครงการเรียนล่วงหน้า ที่เป็นการนำเอาเนื้อหาในหลักสูตรระดับอุดมศึกษามาเรียนในขณะที่ยังเรียนอยู่ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และสามารถเก็บหน่วยกิตไว้ได้ เป็นต้น นอกจากนี้ ยังต้องปรับวิธีการวัดและประเมินผลตามสภาพจริง มีการจัดสภาพแวดล้อมที่เหมาะสม และมีการบริหารจัดการที่เอื้อต่อการจัดการศึกษาให้กับเด็กกลุ่มนี้ด้วย

แผนการจัดการเรียนรู้เล่มนี้ เป็นหนึ่งใน 18 เล่ม ที่ใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย สำหรับผู้มีความสามารถพิเศษ ในหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน(Acceleration Program) โดยกำหนดให้มีการเรียนการสอนเพียง 5 ภาคเรียน (ปกติใช้เวลาทั้งหมด 6 ภาคเรียน) ของโรงเรียนที่เข้าร่วมโครงการฯ เขตพื้นที่การศึกษาภาคใต้ โดยแต่ละโรงเรียนจะใช้แผนการจัดการเรียนรู้ร่วมกัน แต่อาจจะมีลำดับในการสอนแตกต่างกัน ขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของแต่ละโรงเรียน (ดูรายละเอียดแผนการจัดการเรียนรู้ของแต่ละหน่วยการเรียนในตารางหน้าถัดไป) สำหรับการวัดและประเมินผลตามหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน เป็นการวัดความรู้ความเข้าใจของผู้เรียน โดยใช้ข้อสอบ Pre-test และ Post-test ที่ออกโดยคณะวิจัย และอาจารย์รับผิดชอบโครงการจากแต่ละโรงเรียน

ตารางแผนการจัดการเรียนรู้ของหลักสูตรลดระยะเวลาเรียน
ด้านคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

ระดับ		เนื้อหา	จำนวนคาบ	โรงเรียนที่รับผิดชอบเขียนแผนการจัดการเรียนรู้
มัธยมศึกษาปีที่ 4	ภาคเรียนที่ 1	1. เซต	10	โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย จ.สตูล
		2. การให้เหตุผล	6	โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
		3. ตรรกศาสตร์	24	โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
		4. จำนวนจริงและทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น	38	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
	ภาคเรียนที่ 2	5. เรขาคณิตวิเคราะห์	38	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		6. ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน	30	โรงเรียนสุราษฎร์ธานี
		7. ตรีโกณมิติ	48	โรงเรียนบูรณะรำลึกและมหาวชิราวุธ
		8. กำหนดการเชิงเส้น	6	โรงเรียนมหาวชิราวุธ
รวม			200	
มัธยมศึกษาปีที่ 5	ภาคเรียนที่ 1	9. ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและลอการิทึม	27	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		10. เมทริกซ์และดีเทอร์มินันท์	20	โรงเรียนสุราษฎร์ธานี
		11. เวกเตอร์ 2 และ 3 มิติ	36	โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
		12. จำนวนเชิงซ้อนและสมการพหุนาม	24	โรงเรียนมหาวชิราวุธ
	ภาคเรียนที่ 2	13. ทฤษฎีกราฟ	15	โรงเรียนบูรณะรำลึก
		14. ลำดับและอนุกรม	38	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
		15. ลิมิตของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน และการอินติเกรด	40	โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย จ.สตูล
รวม			200	
มัธยมศึกษาปีที่ 6	ภาคเรียนที่ 1	16. การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่	30	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้
		17. ความน่าจะเป็น	20	โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย
		18. สถิติและความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูล	50	
		■ การนำเสนอข้อมูลและค่ากลาง (12 คาบ)		โรงเรียนบูรณะรำลึก
		■ การกระจายของข้อมูล (25 คาบ)		โรงเรียนสุราษฎร์ธานี
		■ ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน (13 คาบ)		โรงเรียนพุนพินพิทยาคม
รวม			100	

สารบัญ

เรื่อง	*หน้า*
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชัน	**1**
ใบความรู้ที่ 1.1	8
ใบความรู้ที่ 1.2	9
ใบกิจกรรมที่ 1.1	10
ใบกิจกรรมที่ 1.2	11
ใบกิจกรรมที่ 1.3	13
ใบกิจกรรมที่ 1.4	18
แบบฝึกหัด	21
แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 1	22
แบบทดสอบเพื่อประเมินตนเองก่อนเรียน (1)	23
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 เรื่อง ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	**27**
ใบกิจกรรมที่ 2.1	31
ใบกิจกรรมที่ 2.2	33
ใบกิจกรรมที่ 2.3	35
แบบฝึกหัด	39
แบบฝึกหัดเสริม	40
แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 2	45
แบบทดสอบเพื่อประเมินตนเองหลังเรียน (1)	48
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 เรื่อง อัตราการเปลี่ยนแปลง	**52**
ใบความรู้ที่ 3	58
ใบกิจกรรมที่ 3.1	61
ใบกิจกรรมที่ 3.2	63
แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 3	69
แบบทดสอบเพื่อประเมินตนเองก่อนเรียน (2)	70
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	**73**
ใบความรู้ที่ 4	76
ใบกิจกรรมที่ 4.1	77
ใบกิจกรรมที่ 4.2	78

เรื่อง	*หน้า*
ใบกิจกรรมที่ 4.3	79
ใบกิจกรรมที่ 4.4	80
ใบกิจกรรมที่ 4.5	81
ใบกิจกรรมที่ 4.6	82
แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 4	84
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5 เรื่อง ความเร็วและความเร่ง	**85**
ใบความรู้ที่ 5	89
ใบกิจกรรมที่ 5.1	90
ใบกิจกรรมที่ 5.2	91
แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 5	92
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6	**93**
ใบความรู้ที่ 6	98
ใบกิจกรรมที่ 6	99
แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 6	103
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7 เรื่อง อนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชันและอนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิท	**104**
ใบความรู้ที่ 7	107
ใบกิจกรรมที่ 7	108
แบบฝึกหัดเสริม	109
แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 7	112
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8 เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน	**114**
ใบความรู้ที่ 8	118
ใบกิจกรรมที่ 8.1	119
ใบกิจกรรมที่ 8.2	122
แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 8	126
แบบทดสอบเพื่อประเมินตนเองหลังเรียน (2)	128
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9 เรื่อง กระบวนการตรงกันข้ามกับการหาอนุพันธ์	**131**
ใบกิจกรรมที่ 9	135
แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 9	136

เรื่อง	*หน้า*
แบบทดสอบเพื่อประเมินตนเองก่อนเรียน (3)	137
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10 เรื่อง อินทิกรัลไม่จำกัดเขต	**139**
ใบความรู้ที่ 10	142
ใบกิจกรรมที่ 10	143
แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 10	146
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11 เรื่อง อินทิกรัลจำกัดเขต	**147**
ใบความรู้ที่ 11	150
ใบกิจกรรมที่ 11	151
แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 11	154
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12 เรื่อง พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง	**155**
ใบความรู้ที่ 12	160
ใบกิจกรรมที่ 12	161
แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 12	162
แบบทดสอบเพื่อประเมินตนเองหลังเรียน (3)	163

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

เรื่อง **ลิมิตของฟังก์ชัน** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 4 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนหาลิมิตของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่ a เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f และจำนวนจริง a ให้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ ให้นักเรียนบอกได้ว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้มีลิมิตที่ a หรือไม่

1.2 เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ นักเรียนหาลิมิตทางด้านซ้ายของฟังก์ชันที่กำหนดให้ ที่ a ได้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้) เมื่อกำหนดจำนวนจริง a และกำหนดฟังก์ชัน f ให้ในรูป

ก. กราฟ

ข. สมการ

1.3 เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ นักเรียนหาลิมิตทางด้านขวาของฟังก์ชันที่กำหนดให้ ที่ a ได้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้) เมื่อกำหนดจำนวนจริง a และกำหนดฟังก์ชัน f ให้ในรูป

ก. กราฟ

ข. สมการ

1.4 เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ นักเรียนหาลิมิตของฟังก์ชันที่ a ได้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้) เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f ให้ในรูป

ก. กราฟ

ข. สมการ

2. แนวความคิดหลัก

ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ หมายถึง เมื่อ x เข้าใกล้ค่า ๆ หนึ่งแล้ว $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ค่าคงตัวค่าหนึ่ง ค่านั้น เรียกว่า ***ลิมิตของฟังก์ชัน***

3. เนื้อหาสาระ

- ความหมายของลิมิตในชีวิตประจำวัน
- ความหมายของลิมิตในแคลคูลัส

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

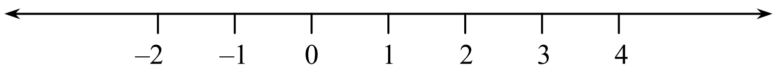
4.1 ทำแบบทดสอบเพื่อประเมินตนเองก่อนเรียน (1)

4.2 แจกใบความรู้ที่ 1.1 (ความหมายของลิมิตในชีวิตประจำวัน และความหมายของลิมิตในแคลคูลัส)

ขั้นสอน

4.3 ครูฝึกให้นักเรียนเกิดความเข้าใจในค่าของฟังก์ชันที่มีค่าเข้าใกล้ค่าใดค่าหนึ่ง เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ค่าที่กำหนดให้ทั้งทางด้านซ้ายและด้านขวา โดยใช้วิธีการสอนดังนี้

- ลากเส้นจำนวนดังรูป



จากนั้นครูกำหนดจำนวนๆ หนึ่งให้ เช่น 2 แล้วให้นักเรียนหาจำนวนที่มีค่ามากกว่า 2 และมีค่าเข้าใกล้ 2 โดยให้นักเรียนบอกค่าและกำหนดค่านั้นเป็นจุดบนเส้นจำนวน ครูบอกนักเรียนว่า ในกรณีเช่นนี้เป็นการพิจารณาจำนวนจริง x ที่มีค่ามากกว่า 2 และมีค่าเข้าใกล้ 2 ซึ่งจะเรียกว่า ***x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางด้านขวา*** และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\boxed{x \to 2^+}$ ในทำนองเดียวกัน ครูให้นักเรียนหาจำนวนที่มีค่าน้อยกว่า 2 และมีค่าเข้าใกล้ 2 ด้วย ครูบอกนักเรียนว่าจำนวนจริง x ที่มีค่าน้อยกว่า 2 และมีค่าเข้าใกล้ 2 ด้วย จะเรียกว่า ***x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางด้านซ้าย*** และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\boxed{x \to 2^-}$

4.4 ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปว่า สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ จำนวนจริง x ที่ $x < a$ เมื่อ x เข้าใกล้ a มากขึ้น จะกล่าวว่า ***x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย*** และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\boxed{x \to a^-}$ จำนวนจริง x ทั้งหมดที่ $x > a$ เมื่อ x เข้าใกล้ a จะกล่าวว่า ***x เข้าใกล้ a ทางด้านขวา*** เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\boxed{x \to a^+}$

4.5 เมื่อนักเรียนเข้าใจความหมายของคำว่า x เข้าใกล้ a แล้ว ครูให้นักเรียนพิจารณาค่าของฟังก์ชัน f ที่ x เมื่อ x เข้าใกล้จำนวนจริง a โดยใช้บัตรงาน ให้นักเรียนพิจารณาค่าของฟังก์ชัน

$f(x) = 2x - 6$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 5

บัตรงาน

กรณีที่ 1 $x > 5$ และ x เข้าใกล้ 5

x	2x	2x – 6
6.0		
5.5		
5.1		
5.01		
5.001		
5.0001		
5.00001		4.00002

กรณีที่ 1 $x < 5$ และ x เข้าใกล้ 5

x	2x	2x – 6
4		
4.5		
4.9		
4.99		
4.999		
4.9999		
4.99999		3.99998

จากบัตรงานที่แจกให้ ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม ช่วยกันหาค่าของ $f(x)$ จากค่าของ x ที่กำหนดให้ จากค่าที่ได้จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 5 ไม่ว่าทางด้านซ้ายหรือทางด้านขวา ค่าของ $f(x)$ จะมีค่าเข้าใกล้ 4 เพียงค่าเดียว

ครูบอกนักเรียนว่า ***"ค่าของ f (x) เมื่อ x เข้าใกล้ 5 ทางด้านซ้ายมีค่าเท่ากับ 4"*** จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\boxed{\lim_{x \to 5^-} f(x) = 4}$$

อ่านว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 5 ทางด้านซ้ายเท่ากับ 4

และ ***"ค่าของ f (x) เมื่อ x เข้าใกล้ 5 ทางด้านขวามีค่าเท่ากับ 4"*** จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\boxed{\lim_{x \to 5^+} f(x) = 4}$$

อ่านว่า ลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 5 ทางด้านขวาเท่ากับ 4

4.6 หลังจากนั้น ครูสรุปเป็นกรณีทั่วไปว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชัน และ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้จำนวนจริง L เพียงค่าเดียว เมื่อ x เข้าใกล้ a (ไม่ว่า $x > a$ หรือ $x < a$) เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน f มีลิมิตเป็น L ที่ a หรือกล่าวว่าลิมิตของฟังก์ชัน f ที่ $x = a$ มีค่าเท่ากับ L และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = L}$$

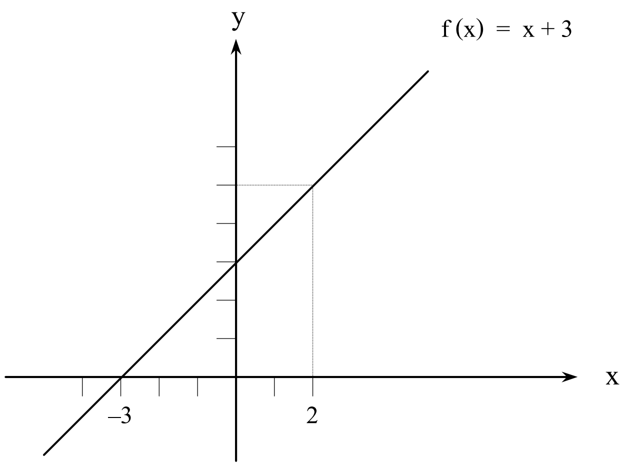
หรือกล่าวว่า ถ้า $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$

จะได้ว่า $\lim_{x\to a} f(x) = L$

4.7 ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 1.1

4.8 ครูอธิบายถึงการพิจารณา ลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ นอกจากจะพิจารณาตามวิธีการที่กล่าวมาแล้ว นักเรียนอาจพิจารณาค่าลิมิตของฟังก์ชัน โดยการพิจารณาจากกราฟประกอบ โดยยกตัวอย่างดังนี้

กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x + 3$ ให้นักเรียนช่วยกันเขียนกราฟของฟังก์ชัน



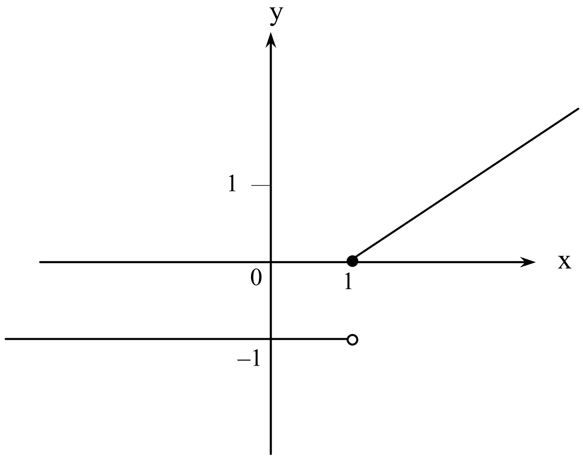
จากกราฟครูให้ผู้เรียนหา $\lim_{x\to 2}(x+3)$ ซึ่งนักเรียนจะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ไม่ว่าทางด้านซ้ายหรือทางด้านขวา ($\lim_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)$) ค่าของ $f(x)$

จากกราฟจะเข้าใกล้ค่าเดียวกัน คือ 5 ดังนั้น

$$\lim_{x\to 2}(x+3) = 5$$

ครูยกตัวอย่าง ฟังก์ชันที่หาค่าลิมิตไม่ได้ โดยเขียนกราฟให้ดูแล้วช่วยกันหาคำตอบ

จากกราฟของฟังก์ชัน f จงหา $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$



จากกราฟ $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$

จะเห็นว่า เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางด้านซ้าย และเข้าใกล้ 1 ทางด้านขวา f(x) มิได้เข้าใกล้ค่าใดค่าหนึ่งเพียงค่าเดียวทำให้ $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ หาค่าไม่ได้

4.9 ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 1.2

4.10 ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปความหมายของลิมิตของฟังก์ชัน

> ถ้า a และ L เป็นจำนวนจริง โดยที่ f(x) มีค่าเข้าใกล้หรือเท่ากับ L ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ a แล้ว เราเรียกว่า f(x) มีลิมิตเท่ากับ L ในขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ a ใช้สัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ แทนความหมายดังกล่าว

4.11 ครูยกตัวอย่าง ฟังก์ชัน $f(x) = x + 2$ แล้วให้นักเรียนหา

1) $\lim\limits_{x \to 2} x + 2$ โดยใช้ตาราง

2) $\lim\limits_{x \to 2} x + 2$ โดยใช้กราฟ

4.12 ตรวจใบกิจกรรม ทั้ง 2 กิจกรรม ถ้าพบนักเรียนทำผิดมาก ครูควรอธิบายซ้ำ เฉลยวิธีทำที่ถูกต้องให้นักเรียน

4.13 ครูชี้ให้นักเรียนเห็นว่า จากการที่ได้เรียนวิธีการหาลิมิตของฟังก์ชันมาทั้ง 2 วิธี คือ การใช้กราฟ หรือการคำนวณค่าของฟังก์ชันโดยการสร้างตาราง เพื่อดูแนวโน้มของ $f(x)$ ว่าเข้าใกล้ค่าใด ซึ่งจะทำได้สะดวกกับฟังก์ชันบางฟังก์ชัน ที่ผู้เรียนคุ้นเคย เช่น ฟังก์ชันเชิงเส้น ฟังก์ชันกำลังสอง เป็นต้น ถ้าเป็นฟังก์ชันบางประเภท การเขียนกราฟ หรือการสร้างตาราง เพื่อดูแนวโน้มจะยุ่งยาก จึงควรใช้วิธีอื่นในการหาลิมิตของฟังก์ชัน คือ อาศัยทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

4.14 ครูแจกใบความรู้ที่ 1.2 เกี่ยวกับสิ่งที่จะช่วยให้การหาลิมิตของฟังก์ชันง่ายขึ้น คือ ทฤษฎีเกี่ยวกับลิมิต

4.15 ครูยกตัวอย่างการนำทฤษฎีบท ทั้ง 11 แบบไปใช้

4.16 ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 1.3

4.17 ครูยกตัวอย่าง ฟังก์ชันที่ไม่สามารถนำทฤษฎีบทที่มีอยู่ไปใช้ได้ เช่น จงหา $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ เมื่อกำหนด

$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$ จากตัวอย่างนี้

สามารถหา $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ได้

แต่ไม่สามารถหา $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ได้ เพราะ

$$\lim_{x\to 2}(x^2+x-6) = 0$$

จึงไม่สามารถใช้ทฤษฎีบทข้อ 8 ได้ ดังนั้นเมื่อต้องการหา $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$

จึงจำเป็นต้องใช้ทฤษฎีบทอื่น ที่เป็นการเปลี่ยนรูป $f(x)$ เป็น $g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าเท่ากัน กับค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ แล้วจึงใช้ทฤษฎีบทข้อ 8 ได้ ทฤษฎีบทที่ต้องการนำมาใช้เพิ่ม คือ

> ถ้า $f(x) = g(x)$ สำหรับทุกค่า x ซึ่ง $0 < |x-a| < h$
> เมื่อ h คือจำนวนจริงบวกจำนวนหนึ่ง และถ้า
> $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ แล้วจะได้ว่า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

4.18 ให้นักเรียนทำกิจกรรมในใบกิจกรรมที่ 1.4

4.19 ตรวจสอบใบกิจกรรมที่ 1.4 และให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด ถ้าพบว่านักเรียนยังไม่เข้าใจจุดใด ครูควรอธิบายเพิ่มเติม พร้อมทั้งเฉลยวิธีที่ถูกต้องให้นักเรียน

4.20 ให้นักเรียนทำแบบทดสอบรายจุดประสงค์ 1

5. แหล่งเรียนรู้

- ใบความรู้ที่ 1.1 และ 1.2
- บัตรงาน
- ใบกิจกรรมที่ 1.1 ถึง 1.4
- แบบฝึกหัด
- แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 1
- แบบทดสอบเพื่อประเมินตนเองก่อนเรียน (1)

6. กระบวนการวัดและการประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	นักเรียนตอบคำถามถูกต้องเป็นส่วนใหญ่
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	นักเรียนสนใจเข้าร่วมกิจกรรมเกิน 90%
3. ทำโจทย์ตรวจสอบความเข้าใจ	นักเรียนทำถูกต้องเกิน 80%
4. ทำโจทย์แบบฝึกหัด	ทำแบบฝึกหัดเกิน 90%
5. ทำแบบทดสอบรายจุดประสงค์	นักเรียนทำถูกต้องเกิน 10 ข้อ
6. ทำแบบทดสอบก่อน / หลังเรียน	สนใจทำข้อสอบก่อนเรียน

7. บันทึกหลังสอน

....
....
....
....
....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....
....
....
....
....

ใบความรู้ที่ 1.1

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนหาลิมิตของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่ a เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f และจำนวนจริง a ให้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

เนื้อหา

- ความหมายของลิมิตในชีวิตประจำวัน
- ความหมายของลิมิตในแคลคูลัส

ในชีวิตประจำวันมีการใช้คำว่า ลิมิตของปริมาณ ในแง่ที่เป็นขีดจำกัด หรือค่าขอบเขต 1 ค่า ของปริมาณเหล่านั้น เช่น รถคันนี้มีลิมิตความเร็ว หรือวิ่งได้สูงสุด 160 กิโลเมตรต่อชั่วโมง หรือคนอ้วนคนนี้กินจุก็จริง แต่มีลิมิตอาหารไม่เกิน 7 จาน (กินได้ไม่เกิน 7 จาน) หรือรอบเครื่องยนต์มีลิมิตได้ 1000 รอบต่อวินาที ต่ำกว่านั้นเครื่องยนต์จะสั่น ตัวยาบางชนิดเก็บในตู้เย็นไม่ได้ จะเก็บในอุณหภูมิอย่างต่ำ 14 องศาเซลเซียส ฯลฯ ค่าที่เป็นลิมิตมี 2 ลักษณะ คือ เป็นค่าขอบเขตบนกับเป็นค่าขอบเขตล่าง

ในทางแคลคูลัสบ่อยครั้งใช้ลิมิตในแง่ที่เป็นค่ากั้น ทำนองเดียวกับตัวอย่างในชีวิตประจำวัน แต่เป็นการใช้กับปริมาณที่เป็นค่าของฟังก์ชัน ซึ่งต่างสถานการณ์ตรงที่เป็นลิมิตที่เกี่ยวข้องกับการแปรค่าตัวแปรอิสระเข้าสู่ค่าใดค่าหนึ่ง (เพราะค่าฟังก์ชัน เช่น $f(x)$ ขึ้นกับค่า x) เป็นค่าลิมิตในภาวะเช่นนั้น และใช้ได้กว้างขึ้น เช่น กล่าวถึงค่าลิมิต เมื่อมีค่าลิมิตที่เท่ากัน ขณะที่ตัวแปรอิสระเข้าสู่ค่าหนึ่งในทิศทางที่ต่างกัน

ลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ $x \to a^-$, $x \to a^+$, $x \to a$, $x \to \infty$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$x \to a^-$ แทนว่า x เข้าใกล้ a ทางซ้าย หมายถึง x แปรค่าเข้าใกล้ a $(x < a)$ ค่าที่แปรนี้จะเข้าใกล้ a มากขึ้น

$x \to a^+$ แทนว่า x เข้าใกล้ a ทางขวา หมายถึง x แปรค่าเข้าใกล้ a $(x > a)$ ค่าที่แปรนี้จะเข้าใกล้ a มากขึ้น

ใบความรู้ที่ 1.2

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนหาลิมิตของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่ a เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f และจำนวนจริง a ให้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

ทฤษฎีบท เมื่อ a, L และ M เป็นจำนวนจริงใด ๆ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง โดยที่ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ แล้ว

1. $\lim\limits_{x\to a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
2. $\lim\limits_{x\to a} x = a$
3. $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$, $n \in I^+$
4. $\lim\limits_{x\to a} c\,f(x) = c \lim\limits_{x\to a} f(x) = cL$, c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
5. $\lim\limits_{x\to a} [\,f(x) + g(x)\,] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = L + M$
6. $\lim\limits_{x\to a} [\,f(x) - g(x)\,] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = L - M$
7. $\lim\limits_{x\to a} [\,f(x) \cdot g(x)\,] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = L \cdot M$
8. $\lim\limits_{x\to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$, $M \neq 0$
9. $\lim\limits_{x\to a} [\,f(x)\,]^n = [\lim\limits_{x\to a} f(x)]^n = L^n$, $n = \in I^+$
10. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, $n = \in I^+$ และ $\sqrt[n]{L} \in R$
11. ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันโพลิโนเมียลแล้ว จะได้ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

หมายเหตุ ฟังก์ชันโพลิโนเมียล คือ ฟังก์ชันที่มีเลขชี้กำลังของตัวแปรเป็นจำนวนเต็มบวก เช่น $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 5$

ใบกิจกรรมที่ 1.1

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนหาลิมิตของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่ a เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f และจำนวนจริง a ให้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

กำหนด $f(x) = 2x + 1$ จงหา $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

โดยใช้ตารางแสดงการคำนวณค่าที่เข้าใกล้ 2 ทั้งทางซ้ายและทางขวา (ให้ได้ค่าที่เข้าใกล้ไม่น้อยกว่า 6 ค่า)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

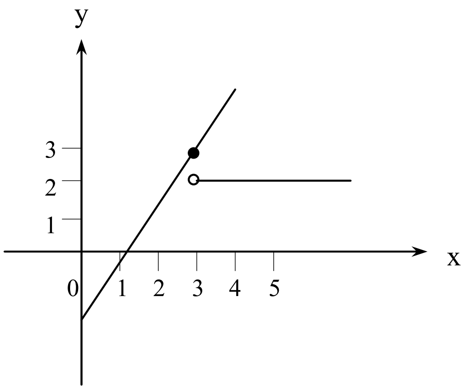
ใบกิจกรรมที่ 1.2

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนหาลิมิตของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่ a เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f และจำนวนจริง a ให้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

จงหาลิมิตจากกราฟต่อไปนี้

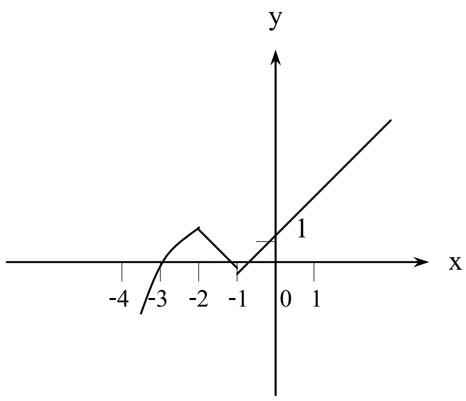
(1)



$\lim_{x \to 1} f(x)$ = ...

$\lim_{x \to 4} f(x)$ = ...

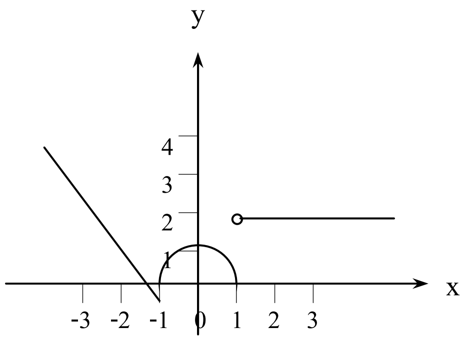
(2)



$\lim_{x \to -1} f(x)$ = ...

$\lim_{x \to -2} f(x)$ = ...

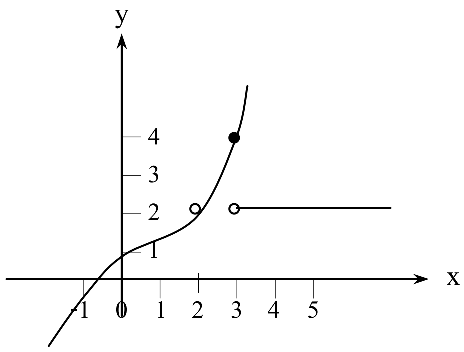
(3)



$\lim_{x \to -1} f(x)$ = ...

$\lim_{x \to 1} f(x)$ = ...

(4)



$\lim_{x \to -1} f(x)$ = ...

$\lim_{x \to 2} f(x)$ = ...

$\lim_{x \to 3} f(x)$ = ...

บัตรงาน

กรณีที่ 1 $x > 5$ และ x เข้าใกล้ 5

x	2x	2x – 6
6.0		
5.5		
5.1		
5.01		
5.001		
5.0001		
5.00001		4.00002

กรณีที่ 1 $x < 5$ และ x เข้าใกล้ 5

x	2x	2x – 6
4		
4.5		
4.9		
4.99		
4.999		
4.9999		
4.99999		3.99998

จงเขียนกราฟของ $f(x) = 2x - 6$ พร้อมทั้งหา $\lim_{x \to 5} f(x)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ใบกิจกรรมที่ 1.3

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนหาลิมิตของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่ a เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f และจำนวนจริง a ให้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

1. กำหนด $f(x) = x$ จงหา

1) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ ……………………………………………………………………………..………..

2) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ ……………………………………………………………………………..……..

3) หา $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าหาได้จะมีค่าเป็นเท่าไร

....

....

....

2. กำหนด $f(x) = x + 2$ จงหา

1) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ ……………………………………………………………………………..……..

2) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ ……………………………………………………………………………..……..

3) หา $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าหาได้จะมีค่าเป็นเท่าไร

....

....

....

3. กำหนด $f(x) = 3 - x$ จงหา

1) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ ……………………………………………………………………………..………..

2) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ ……………………………………………………………………………..……..

3) หา $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าหาได้จะมีค่าเป็นเท่าไร

....

....

....

4. กำหนด $f(x) = x^2$ จงหา

1) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ ………………………………………………………………………………..………..
2) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ ………………………………………………………………………………...……..
3) หา $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าหาได้จะมีค่าเป็นเท่าไร

....
....
....

5. กำหนด $f(x) = \sqrt{x}$ จงหา

1) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$ ………………………………………………………………………………..………..
2) $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$ ………………………………………………………………………………...……..
3) หา $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าหาได้จะมีค่าเป็นเท่าไร

....
....
....

6. กำหนด $f(x) = |x|$ จงหา

1) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ ………………………………………………………………………………..………..
2) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ ………………………………………………………………………………...……..
3) หา $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าหาได้จะมีค่าเป็นเท่าไร

....
....
....

7. กำหนด $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ จงหา

1) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ ………………………………………………………………………………..………..
2) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ ………………………………………………………………………………...……..
3) หา $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าหาได้จะมีค่าเป็นเท่าไร

....
....
....

8. กำหนด $f(x) = \frac{|x|}{x}$ จงหา

1) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ ………………………………………………………………………..………..

2) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ ………………………………………………………………………..……..

3) หา $\lim_{x \to 0} f(x)$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าหาได้จะมีค่าเป็นเท่าไร

…….

…….

…….

9. กำหนด $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{เมื่อ } x \le 2 \\ 5 & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$ จงหา

1) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ ………………………………………………………………………..………..

2) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ ………………………………………………………………………..……..

3) หา $\lim_{x \to 2} f(x)$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าหาได้จะมีค่าเป็นเท่าไร

…….

…….

…….

10. กำหนด $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{เมื่อ } x \le 3 \\ 2 & \text{เมื่อ } x > 3 \end{cases}$ จงหา

1) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ ………………………………………………………………………..………..

2) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ ………………………………………………………………………..……..

3) หา $\lim_{x \to 3} f(x)$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าหาได้จะมีค่าเป็นเท่าไร

…….

…….

…….

11. กำหนด $f(x) = \dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$ จงหา

1) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ ……………………………………………………………………………..………..

2) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ ……………………………………………………………………………...……..

3) หา $\lim_{x\to 3} f(x)$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าหาได้จะมีค่าเป็นเท่าไร

…….

…….

…….

12. กำหนด $f(x) = \begin{cases} X^2 & \text{เมื่อ } x \le 2 \\ 2x & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$ จงหา

1) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ ……………………………………………………………………………..………..

2) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ ……………………………………………………………………………...……..

3) หา $\lim_{x\to 2} f(x)$ ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด และถ้าหาได้จะมีค่าเป็นเท่าไร

…….

…….

…….

13. จงหาค่าของ

1) $\lim_{x\to 2} (x)$ = ……………………………………………………………………….

2) $\lim_{x\to 5} x^2$ = ……………………………………………………………………….

3) $\lim_{x\to 4} \sqrt{x}$ = ……………………………………………………………………….

4) $\lim_{x\to 0} (x+3)$ = ……………………………………………………………………….

5) $\lim_{x\to 5} (x^2+2x)$ = ……………………………………………………………………….

6) $\lim\limits_{x\to 3} (x^2 - 5x + 10)$ = ……………………………………………………………………..

7) $\lim\limits_{x\to 1} (x+2)(x+3)$ = ………………………………………………………………………

8) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x+3}{x+2}$ = ………………………………………………………………………

9) $\lim\limits_{x\to -2} \sqrt{x^2+2x+5}$ = ………………………………………………………………………

10) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ = ………………………………………………………………………

11) $\lim\limits_{x\to -5} (x+1)^2$ = ………………………………………………………………………

12) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-2x}{x}$ = ………………………………………………………………………

13) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2-2x-8}{x+2}$ = ………………………………………………………………………

14) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ = ………………………………………………………………………

15) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$ = ………………………………………………………………………

16) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ = ………………………………………………………………………

17) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ = ………………………………………………………………………

18) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ = ………………………………………………………………………

19) $\lim\limits_{x\to 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ = ………………………………………………………………………

20) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{4-x}$ = ………………………………………………………………………

21) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$ = ………………………………………………………………………

ใบกิจกรรมที่ 1.4

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนหาลิมิตของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่ a เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f และจำนวนจริง a ให้ (ถ้าลิมิตหาค่าได้)

ให้นักเรียนศึกษาเอกสารแนะแนวทางแล้วทำแบบฝึกหัด

เอกสารแนะแนวทาง

การหาลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อตัวแปรเข้าใกล้อนันต์

(ลิมิตที่อนันต์)

กำหนดฟังก์ชัน $f(x)$

ถ้า x มีค่าเพิ่มขึ้น โดยไม่มีขอบเขตแล้ว ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

ถ้า x มีค่าลดลง โดยไม่มีขอบเขตแล้ว ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

สรุปได้ว่า การหา $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ หรือ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

เรียกว่า **การหาลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อตัวแปรเข้าใกล้อนันต์ หรือลิมิตที่อนันต์**

การหาลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อตัวแปรเข้าใกล้อนันต์นั้น ก็ใช้วิธีเดียวกันกับการหาลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อตัวแปรเข้าใกล้จำนวนจริง a ใด ๆ คือ การสร้างตารางเพื่อดูแนวโน้มของ $f(x)$ ว่าเข้าสู่ค่าใด หรือโดยอาศัยกราฟ แต่วิธีที่สะดวกก็คือ การใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต ใช้ในการหาลิมิตของฟังก์ชัน โดยเปลี่ยนจาก $x \to a$ เป็น $x \to \infty$ หรือ $x \to -\infty$ และทฤษฎีบทเพิ่มเติมข้างล่างนี้

ทฤษฎีบทที่ 12 ถ้า p เป็นจำนวนจริงบวกแล้ว

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0 \quad \text{และ}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^p} = 0$$

ยกเว้นในกรณีที่ x^p ไม่มีความหมาย

ผลจากทฤษฎีบทที่ 12 คือ

$$\lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^p} = c\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p}\right) = c(0) = 0$$

และ

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{c}{x^p} = c\left(\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^p}\right) = c(0) = 0$$

วิธีการหา $\lim_{x\to\infty} f(x)$ หรือ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

โดยใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต และกฎเกณฑ์ **เพิ่มเติม** ดังต่อไปนี้

ถ้า $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ โดยที่ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม

1. ถ้าเลขชี้กำลังสูงสุดของตัวแปร x ของ p(x) มีค่าน้อยกว่าเลขชี้กำลังสูงสุดของตัวแปร x ของ q (x) จะได้ว่า

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \quad \text{และ}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

2. ให้ a เป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปร x ที่มีเลขชี้กำลังสูงสุดของ p (x)

b เป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปร x ที่มีเลขชี้กำลังสูงสุดของ q (x)

ถ้าเลขชี้กำลังสูงสุดของตัวแปร x ของ p (x) มีค่าเท่ากับเลขชี้กำลังสูงสุดของตัวแปร x ของ q (x) จะได้ว่า

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{a}{b}$$

3. ถ้าเลขชี้กำลังสูงสุดของตัวแปร x ของ p (x) มีค่ามากกว่าเลขชี้กำลังสูงสุดของตัวแปร x ของ q (x) จะได้ว่า f (x) ไม่มีลิมิต

ตัวอย่างที่ 1 $\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2-3}{5x^2+4} = \frac{7}{5}$ (กฎเกณฑ์ ข้อ 2)

และ $\lim_{x\to-\infty} \frac{7x^2-3}{5x^2+4} = \frac{7}{5}$

ตัวอย่างที่ 2 $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4-9}{7x^6+5} = 0$ (กฎเกณฑ์ ข้อ 1)

และ $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4-9}{7x^6+5} = 0$

ตัวอย่างที่ 3 $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^5-1}{7x^2+4}$ ไม่มีลิมิต (กฎเกณฑ์ ข้อ 3)

และ $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^5-1}{7x^2+4}$ ไม่มีลิมิต

แบบฝึกหัด

1. จงหา $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-3x+1}{3x^2-x}$

2. จงหา $\lim_{x\to\infty} \frac{7x+4}{2x+5}$

3. จงหา $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x+8}{6x^3-5x^2+11}$

4. จงหา $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-3x+2}{2x^3+2}$

5. จงหา $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+1}{4-x^3}$

6. จงหา $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x-3}$

7. จงหา $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+x-5}{x^2-x+7}$

8. จงหา $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^3+1}$

9. จงหา $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^4+9}{8x^6+5}$

10. จงหา $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3+4}{2x^2+6}$

แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 1

วิชา คณิตศาสตร์ **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชัน **เวลา 1 ชั่วโมง** **คะแนนเต็ม 10 คะแนน**

คำสั่ง ให้แสดงวิธีทำทุกข้อ

1. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3} & \text{เมื่อ } x \neq 3 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 3 \end{cases}$

   1.1 จงเขียนกราฟของ $f(x)$

   1.2 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

   1.3 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$

   1.4 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

2. จงหาค่าของ

   2.1 $\lim\limits_{x \to 1} (2x)$

   2.2 $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 4x + 1)$

   2.3 $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

3. จงหาค่าลิมิต (ถ้ามี) ของฟังก์ชันในข้อต่อไปนี้

   3.1 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^3}{x^2+1}$

   3.2 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2+1}{4x^2-1}$

   3.3 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x+1)^2}{x+2}$

   3.4 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2x+5}$

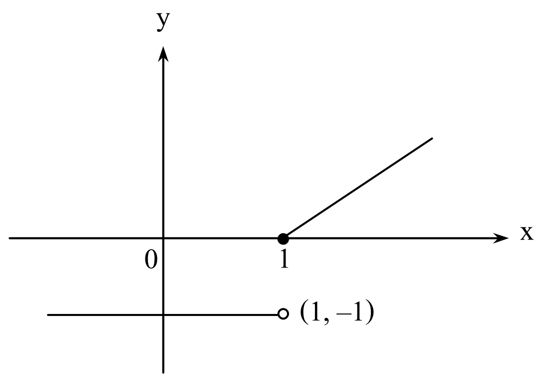
   3.5 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(2x-1)^3}{4x^3-1}$

แบบทดสอบเพื่อประเมินตนเองก่อนเรียน (1)

วัตถุประสงค์ เพื่อประเมินพื้นฐานความรู้เดิมของนักเรียน ***เรื่อง "ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน"*** ซึ่งทำให้นักเรียนได้สำรวจตนเองว่า มีพื้นฐานความรู้เกี่ยวกับเนื้อหาเหล่านี้มากน้อยเพียงใด

คำชี้แจง ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกที่สุด แล้วตอบลงในกระดาษคำตอบ

1. จากกราฟที่กำหนดให้ ข้อใด**ไม่ถูกต้อง**



ก. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -1$ ข. $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 0$

ค. $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ หาค่าไม่ได้ ง. $\lim\limits_{x\to1} = -1\,,\ 0$

2. กำหนด $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x > 0 \\ -1 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$

$f(x)$ มีลิมิตที่ 0 หรือไม่

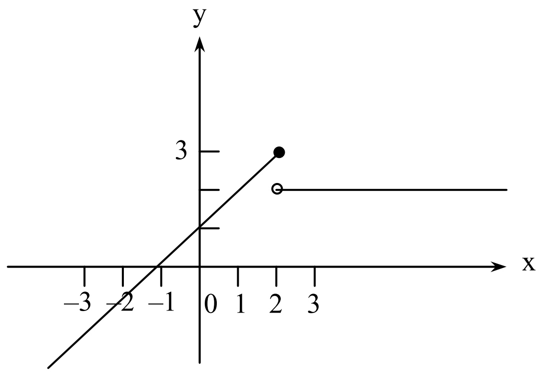
ก. มีเพราะ $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -1$

ข. มีเพราะ $\lim\limits_{x\to0^+} = 1$

ค. ไม่มีเพราะ $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

ง. ไม่มีเพราะ $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \pm1$

3. จากกราฟที่กำหนดให้ ข้อใด**ไม่ถูกต้อง**



ก. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$ ข. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$

ค. $\lim_{x\to 1} f(x) = 3, 2$ ง. $\lim_{x\to 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้

4. $\lim_{x\to 1} 5x^2 - 2x$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 3 ข. –1

ค. –3 ง. 1

5. $\lim_{x\to 5} (x^4)(x-1)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $4(5)^3$ ข. 5

ค. $5^4(4)$ ง. 5^7

6. $\lim_{x\to 3} \left[\frac{x+1}{2x-5}\right]$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 4 ข. $\frac{1}{4}$

ค. $\frac{4}{5}$ ง. $\frac{5}{4}$

7. $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{1-x}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. ∞ ข. 0

ค. 6 ง. –6

8. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $\frac{1}{2}$ ข. 1

ค. 2 ง. 0

9. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{(x^2-1)}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 1 ข. –1

ค. 0 ง. 2

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x-4}{2x+3}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $\frac{2}{5}$ ข. 0

ค. $\frac{3}{4}$ ง. $\frac{5}{2}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+4}{2x^2+6}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $\frac{3}{2}$ ข. $\frac{2}{3}$

ค. 2 ง. ไม่มีลิมิต

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2+4}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 0 ข. ∞

ค. $\frac{1}{2}$ ง. 2

13. ให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{เมื่อ} \quad x \neq 1 \\ 4 & \text{เมื่อ} \quad x = 1 \end{cases}$

ข้อความต่อไปนี้ ข้อใดถูกต้อง

ก. มี $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ข. มี $f(1)$

ค. $\lim\limits_{x\to 1}$ หาค่าไม่ได้ ง. ก และ ข ถูก

14. ให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 27}{x - 3} & \text{เมื่อ} \quad x \neq 3 \\ 9 & \text{เมื่อ} \quad x = 3 \end{cases}$

ข้อความต่อไปนี้ ข้อใด**ไม่ถูกต้อง**

ก. $\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} (x^2 + 3x + 9)$

ข. $f(3) = 9$

ค. $\lim_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$

ง. f ต่อเนื่องที่ $x = 3$

15. ข้อใด**ไม่เป็น**ฟังก์ชันต่อเนื่อง

ก. $f(x) = x^2 + 1$

ข. $g(x) = \sin x$

ค. $f(x) = x^n$

ง. $h(x) = \dfrac{x^2 + 16}{x - 4}$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

เรื่อง **ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 3 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

บอกได้ว่าฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่กำหนดให้ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ หรือไม่

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถบอกได้ว่า ฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่กำหนดให้ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

2. แนวความคิดหลัก

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (Continuity) ฟังก์ชัน $f(x)$ จะมีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$ ก็ต่อเมื่อ

1) สามารถหาค่า $f(a)$ ได้

2) สามารถหาค่า $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ได้

3) $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$

3. เนื้อหาสาระ

วิธีการตรวจสอบว่า $f(x)$ มีความต่อเนื่องที่จุด $x = a$ หรือไม่เพราะเหตุใด

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

4.1 ครูกำหนดฟังก์ชัน เช่น $f(x) = 2x$ แล้วให้นักเรียนเขียนกราฟ ครูชี้ให้นักเรียนเห็นว่ากราฟของฟังก์ชันดังกล่าวไม่ขาดตอนที่จุดใดเลย

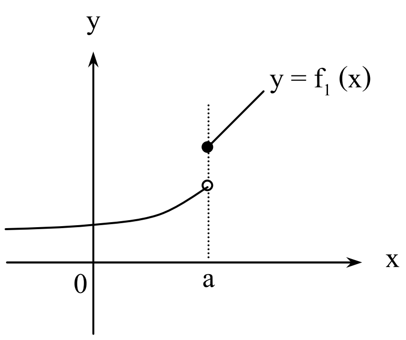
ขั้นสอน

4.2 ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 2.1 จากใบกิจกรรมที่ 2.1 ครูสรุปว่า ลักษณะของฟังก์ชันในใบกิจกรรมที่ 2.1 เป็นตัวอย่างที่แสดงให้เห็นถึงลักษณะการต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่องของฟังก์ชันที่จุด $x = a$ โดยดูจากกราฟ เพื่อให้นักเรียนเห็นภาพพจน์

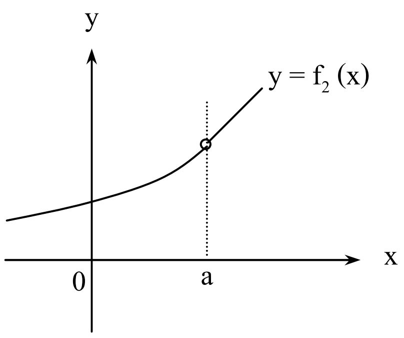
4.3 ครูกำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{เมื่อ } x \neq 4 \\ 7 & \text{เมื่อ } x = 4 \end{cases}$

แล้วให้นักเรียนเขียนกราฟของฟังก์ชัน ซึ่งนักเรียนควรตอบได้ว่า กราฟของฟังก์ชันขาดตอนที่ $x = 4$ จากนั้นครูอธิบายว่าฟังก์ชันในข้อ 1 เขียนกราฟ แล้วไม่ขาดตอนที่จุดใดเลย เรียกฟังก์ชันในลักษณะนี้ว่า ***ฟังก์ชันต่อเนื่อง*** สำหรับฟังก์ชันในข้อ 3 เขียนกราฟแล้วขาดตอนที่ $x = 4$ เรียกฟังก์ชันลักษณะนี้ว่า ***ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง*** ที่ $x = 4$

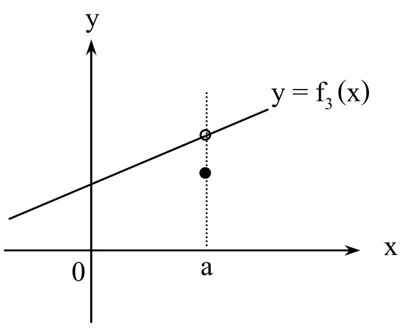
4.4 ครูยกตัวอย่างกราฟในรูป ก. ถึง ง. ให้นักเรียนพิจารณาว่า กราฟของฟังก์ชันในข้อใดต่อเนื่องที่ $x = a$



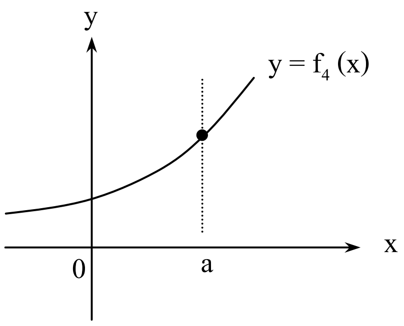
ก.



ข.



ค.



ง.

4.5 ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 2.2 โดยครูแนะแนวทางให้ 1 ข้อ

4.6 หลังจากทำใบกิจกรรมที่ 2.2 แล้ว ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปว่า ฟังก์ชัน f ที่สามารถหาค่า $\lim_{x \to a} f(x)$ ได้ และลิมิตมีค่าเท่ากับ f(a) จะเรียกฟังก์ชันที่มีลักษณะดังกล่าวว่า ฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x = a แล้วครูให้นิยามความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

4.7 ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันหลายๆ ฟังก์ชัน ให้นักเรียนหาว่าฟังก์ชันดังกล่าวเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ x = a หรือไม่ ซึ่งฟังก์ชันที่ยกตัวอย่างในที่นี้ ควรจะเป็นเฉพาะฟังก์ชันพหุนาม หรือฟังก์ชันตรรกยะเท่านั้น

4.8 ครูเน้นความเข้าใจกับนักเรียนในเรื่อง ลิมิตของฟังก์ชัน กับความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่ a ว่า เมื่อเราต้องการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันใด เราไม่จำเป็นต้องพิจารณาค่าของฟังก์ชันที่ x = a หรือพิจารณาว่า เมื่อ x = a ฟังก์ชันนั้น จะหาค่าได้หรือไม่ แต่ในเรื่องความต่อเนื่องของฟังก์ชันจะต้องพิจารณาค่าของฟังก์ชันที่ x = a พร้อมทั้งค่าลิมิตของฟังก์ชันด้วย

4.9 ครูและนักเรียน ช่วยกันสรุปว่าฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x = a นั้น ถ้าพิจารณาจากกราฟจะเห็นว่าเส้นกราฟของฟังก์ชันไม่ขาดตอนที่จุดดังกล่าว แต่ในกรณีที่เขียนกราฟได้ยาก จะพิจารณาโดยใช้บทนิยาม

4.10 ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 2.3 แบบฝึกหัดและแบบฝึกหัดเสริม

4.11 ตรวจเฉลยใบกิจกรรม และแบบฝึกหัด

4.12 ให้นักเรียนทำแบบทดสอบรายจุดประสงค์ 2

4.13 ให้นักเรียนทำแบบประเมินตนเองหลังเรียน (1)

5. แหล่งเรียนรู้

- ใบกิจกรรมที่ 2.1 ถึง 2.3
- แบบฝึกหัดและแบบฝึกหัดเสริม
- แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 2
- แบบทดสอบเพื่อประเมินตนเองหลังเรียน (1)

6. กระบวนการวัดและการประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	นักเรียนตอบคำถามถูกต้องเป็นส่วนใหญ่
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	นักเรียนสนใจเข้าร่วมกิจกรรมด้วยดี
3. ทำโจทย์ตรวจสอบความเข้าใจ	นักเรียนทำถูกต้องเกิน 80%
4. ทำโจทย์แบบฝึกหัด	นักเรียนทำแบบฝึกหัดเกิน 90%
5. ทำแบบทดสอบรายจุดประสงค์	นักเรียนทำถูกต้องไม่ต่ำกว่า 8 ข้อ
6. ทำแบบทดสอบก่อน / หลังเรียน	นักเรียนทำถูกต้องไม่ต่ำกว่า 13 ข้อ

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

....

....

....

....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....

....

....

....

....

....

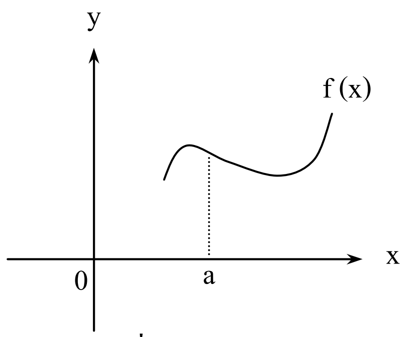
....

ใบกิจกรรมที่ 2.1

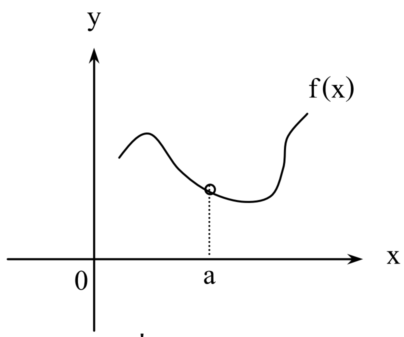
จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนบอกได้ว่า ฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ หรือไม่เพราะเหตุใด

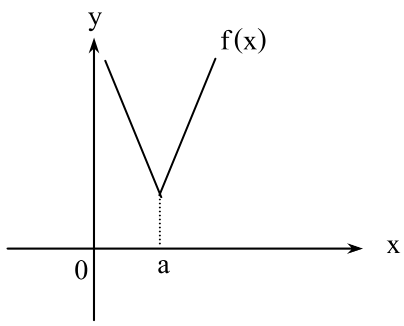
1. จงพิจารณา กราฟของฟังก์ชัน 6 ฟังก์ชัน กราฟในข้อใดต่อเนื่องที่จุด $x = a$ กราฟในข้อใดไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = a$



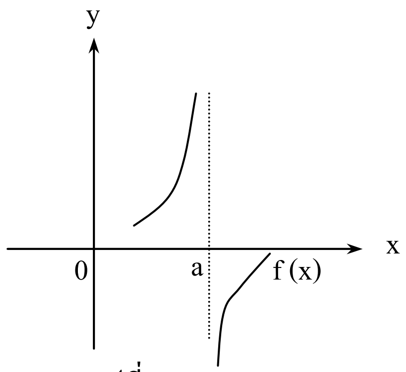
รูปที่ 1



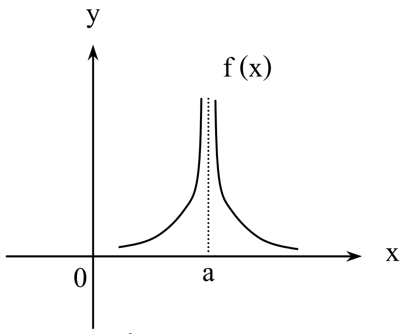
รูปที่ 2



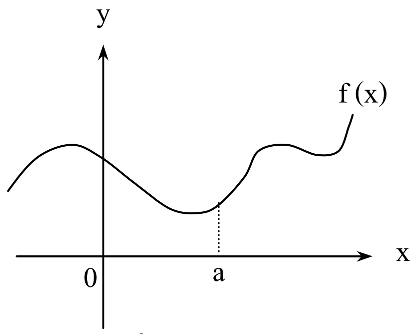
รูปที่ 3



รูปที่ 4



รูปที่ 5

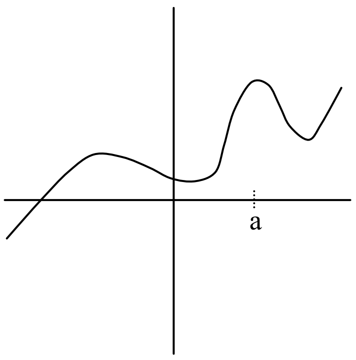


รูปที่ 6

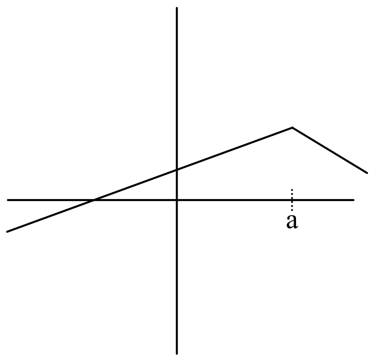
กราฟของฟังก์ชัน f ในรูปที่.. ต่อเนื่องที่จุด $x = a$

กราฟของฟังก์ชัน f ในรูปที่... ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = a$

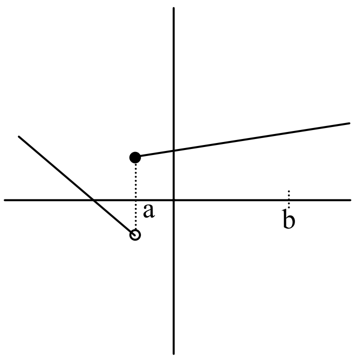
2. จงพิจารณาจากกราฟของฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้ว่า กราฟใดต่อเนื่องที่จุด $x = a$



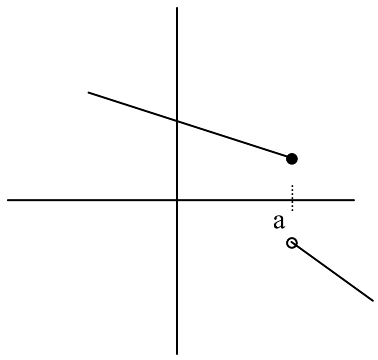
(a)



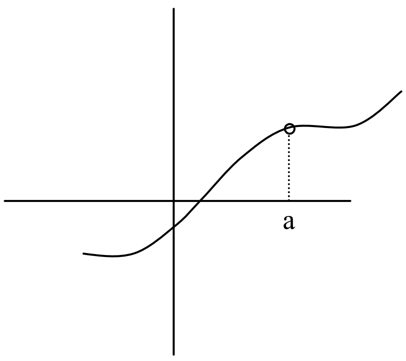
(b)



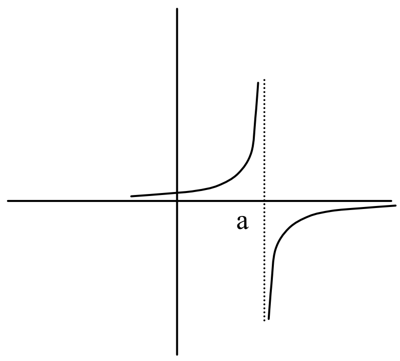
(c)



(d)



(e)



(f)

กราฟรูป.. ต่อเนื่องที่จุด $x = a$

กราฟรูป.. ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = a$

กราฟรูป c เป็นกราฟที่ต่อเนื่องที่จุด..

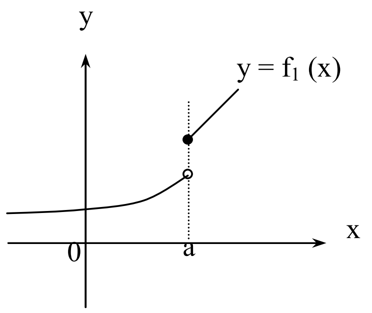
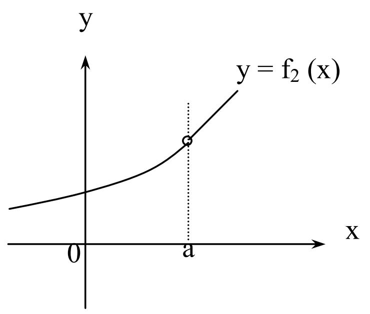
แต่เป็นกราฟที่ไม่ต่อเนื่องที่จุด..

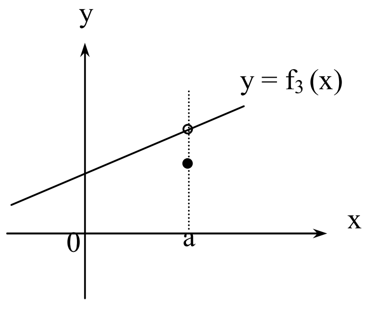
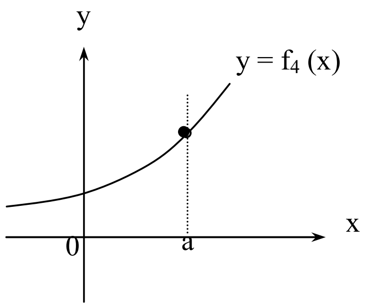
ใบกิจกรรมที่ 2.2

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนบอกได้ว่า ฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ หรือไม่เพราะเหตุใด

จงพิจารณาลิมิตของแต่ละฟังก์ชันที่ $x = a$ และค่าของ $f(a)$ ของกราฟตามตารางข้างล่างนี้

กราฟ	**ฟังก์ชัน**	$\lim\limits_{x \to a} \mathbf{f(x)}$	**f (a)**	$\lim\limits_{x \to a} \mathbf{f(x)}$ **เท่ากับ f (a) หรือไม่**
 ก.	f_1	หาค่าไม่ได้	หาค่าได้	ไม่เท่ากัน
 ข.	f_2			

กราฟ	**ฟังก์ชัน**	$\lim_{x \to a} \mathbf{f(x)}$	**f (a)**	$\lim_{x \to a} \mathbf{f(x)}$ **เท่ากับ f (a) หรือไม่**
 ค.	f_3			
 ง.	f_4			

ใบกิจกรรมที่ 2.3

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนบอกได้ว่า ฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ หรือไม่เพราะเหตุใด

ให้นักเรียนศึกษาจากเอกสารแนะแนวทางแล้วทำแบบฝึกหัด

เอกสารแนะแนวทาง

ตัวอย่างฟังก์ชันต่อเนื่อง	**ที่มา**
$f(x) = x$	ใช้บทนิยาม
$f(x) = cx$	
$f(x) = x^2$	ผลคูณของฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
$f(x) = x^n$	
$f(x) =$ พหุนาม	ผลบวกและผลคูณของฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
$f(x) =$ ตรรกยะ ณ บางที่	(บางที่ไม่ต่อเนื่อง)
$f(x) = \sqrt{x}\ ,\ \sqrt[n]{x}$	อินเวอร์สของฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
$f(x) = \sin x$	
$f(x) = \cos x$	
$f(x) = a^x$	
$f(x) = \log_a x$	
$f(x) = \sqrt{x+5}$	คอมโพสิทของฟังก์ชันต่อเนื่อง เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ข้อสังเกต ลิมิตและความต่อเนื่อง เน้นฟังก์ชันพหุนาม และฟังก์ชันตรรกยะตามบทนิยามที่ว่าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ a ก็ต่อเมื่อ

1. มี $\lim\limits_{x\to a} f(x)$
2. มี $f(a)$
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

จากสมบัติข้อที่ 3 เห็นได้ว่าเราสามารถหา $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ จากการแทนค่า $x = a$ ลงใน $f(a)$ ค่า $f(a)$ ที่ได้จะเป็นค่าลิมิต ผลจากทฤษฎีของลิมิต และความต่อเนื่อง ทำให้เราสามารถหาลิมิตของฟังก์ชันบางฟังก์ชันโดยการแทนค่า เช่น

ตัวอย่าง จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ ถ้ามี

1. $\lim\limits_{x\to 2} 4x \quad = \quad 4(2) \quad = \quad 8$

2. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{5x^2-10x+1}{x-1}$ ……………………………………………………

3. $\lim\limits_{x\to 3} (4x-1)(2x+3)$ ……………………………………………………

4. $\lim\limits_{x\to -1} (x+8)$ ……………………………………………………

5. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} (x+3) = 5$

6. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{|x-1|x^2}{x-1}$ ……………………………………………………

7. $\lim\limits_{x\to 2} 6$ ……………………………………………………

8. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$ ……………………………………………………

9. $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x^2+3x}$ ……………………………………………………

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$ ……………………………………………………

11. $\lim\limits_{x\to 3} (1-\dfrac{x^3}{3})(x^2+1)$ ……………………………………………………

12. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{1-x}$ ……………………………………………………

13. $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{x}{|x|}(1-x)$ ……………………………………………………

14. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{|x|}(1-x)$ ……………………………………………………

15. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$ ……………………………………………………

16. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\frac{1}{x}-\frac{1}{4}}$ ……………………………………………………

17. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x > 2 \\ 5-2x, & x < 2 \end{cases}$

18. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}^-} |x^2-x|$ ……………………………………………………

19. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{|x|}(1-x)$ ……………………………………………………

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

บทนิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันของจำนวนจริง f จะต่อเนื่องที่จุด $x = a$ ถ้า f มีสมบัติ ครบทั้ง 3 ประการดังต่อไปนี้

1. a ต้องอยู่ในโดเมนของ f และหาค่า $f(a)$ ได้
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

ตัวอย่าง ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(x) = x^2 + 4$

ให้ตรวจสอบว่า f ต่อเนื่องที่จุด $x = 2$ หรือไม่

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

ให้ตรวจสอบว่า f ต่อเนื่องที่จุด $x = 3$ หรือไม่

....

....

....

....

....

....

....

แบบฝึกหัด

1. ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{เมื่อ } x \neq 3 \\ 6 & \text{เมื่อ } x = 3 \end{cases}$$

จงตรวจสอบว่า f ต่อเนื่องที่จุด x = 3 หรือไม่

....

....

....

....

....

....

....

2. ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ 1 & \text{เมื่อ } x \geq 0 \end{cases}$$

จงตรวจสอบว่า f ต่อเนื่องที่จุด x = 0 หรือไม่

....

....

....

....

....

....

แบบฝึกหัดเสริม

1. กำหนด $f(x) = x+5$ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = -5$ หรือไม่

....

....

....

....

....

....

2. กำหนด $f(x) = \frac{1}{x+2}$ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 2$ หรือไม่

....

....

....

....

....

3. กำหนด $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{เมื่อ } x \neq 2 \\ 4 & \text{เมื่อ } x = 2 \end{cases}$

จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 2$ หรือไม่

....

....

....

....

....

....

4. กำหนด $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 1$ หรือไม่

....

....

....

....

....

....

5. กำหนด $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x-5} & \text{เมื่อ } x \neq 5 \\ 5 & \text{เมื่อ } x = 5 \end{cases}$

จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 5$ หรือไม่

....

....

....

....

....

....

6. กำหนด $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 3$ หรือไม่

....

....

....

....

....

7. กำหนด $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & \text{เมื่อ } x \neq 1 \\ k & \text{เมื่อ } x = 1 \quad (k \in R) \end{cases}$

f จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$ ก็ต่อเมื่อ k มีค่าเป็นเท่าไร

....

....

....

....

....

8. กำหนด $f(x) = \dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ เมื่อ $x \neq 8$ f จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 8$

เมื่อกำหนด $f(8)$ เป็นเท่าไร

....

....

....

....

....

9. กำหนด $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{เมื่อ } x \neq 0 \\ a & \text{เมื่อ } x = 0 \quad (a \in R) \end{cases}$

g จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 0$ เมื่อกำหนด a เป็นเท่าไร

....

....

....

....

....

10. กำหนด $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-15}{x-5} & \text{เมื่อ } x \neq 5 \\ m^2-1 & \text{เมื่อ } x = 5 \ (m \in R) \end{cases}$

g จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 5$ เมื่อกำหนด m เป็นเท่าไร

....

....

....

....

....

11. กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{เมื่อ } x \leq 2 \\ 2x & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$

จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$ หรือไม่

....

....

....

....

....

12. กำหนด $f(x) = \begin{cases} ax & \text{เมื่อ } x < 1 \\ 4 & \text{เมื่อ } x = 1 \\ x+b & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$ แล้ว a และ b มีค่าเท่าไร

....

....

....

....

13. กำหนด $g(x) = \begin{cases} 3x + a & \text{เมื่อ } x = 2 \text{ และ } a \in R \\ \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{เมื่อ } x \neq 2 \end{cases}$

ค่าของ a ที่ให้ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = 2$ เป็นเท่าไร

....

....

....

....

....

14. กำหนด $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{เมื่อ } 1 < x \leq 2 \\ 3 - x & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$

จงหา

1) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$ หรือไม่

....

....

....

....

....

2) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$ หรือไม่

....

....

....

....

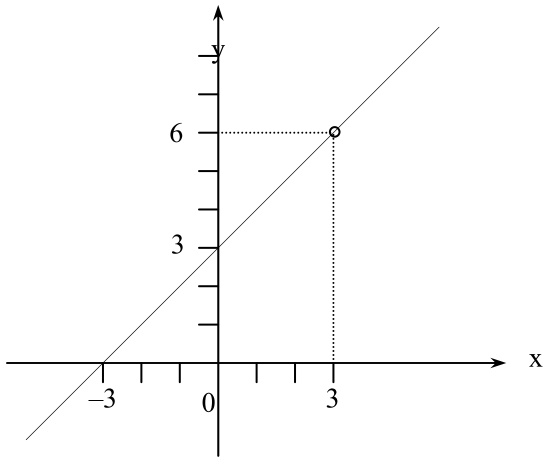
....

แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 2

วิชา คณิตศาสตร์ **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

เรื่อง ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน **เวลา 30 นาที** **คะแนนเต็ม 10 คะแนน**

คำชี้แจง ข้อสอบฉบับนี้มี 10 ข้อ เป็นข้อสอบปรนัยแบบเลือกตอบให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องเพียงข้อละ 1 คำตอบ โดยทำเครื่องหมายกากบาท ($\times$) ในกระดาษคำตอบที่แจกให้



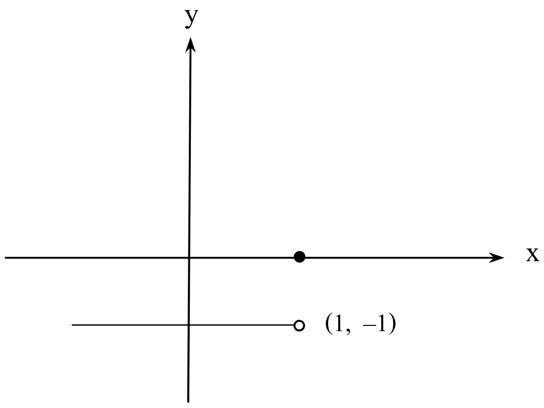
1. จากกราฟของ $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ ข. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

ค. 3 ง. 6

จ. ข้อ ก, ข, ง ถูก

2. จากกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ มีค่าเท่ากับข้อใด



ก. –1

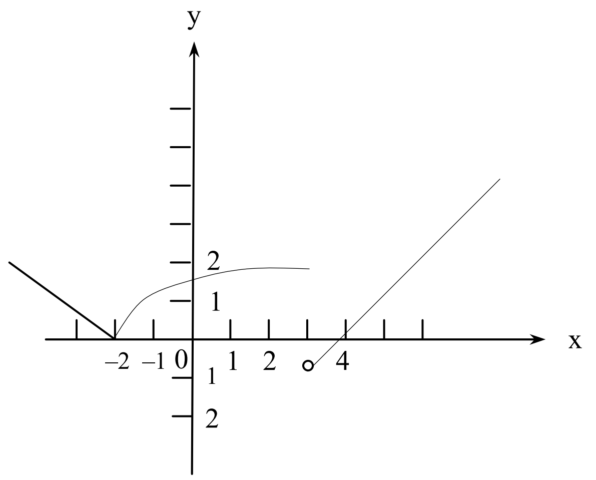
ข. 1

ค. 0

ง. ± 1

จ. ไม่มีลิมิต

3. จากกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ มีค่าเท่ากับข้อใด



ก. ไม่มีลิมิต

ข. 4

ค. 0

ง. –2

จ. 2

4. ค่าของ $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-9}{x^2+x-6}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. ∞ ข. $\frac{1}{4}$

ค. $\frac{2}{3}$ ง. 0

จ. ไม่มีลิมิตของ $f(x)$ ที่ 2

5. ค่าของ $\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{2x-5}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. –1 ข. 0

ค. 1 ง. 3

จ. 4

6. กำหนด $f(x) = \frac{|x|}{x}$ ข้อใดถูก

ก. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$ ข. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

ค. $\lim_{x\to 0} f(x) = \pm 1$ ง. ฟังก์ชันที่กำหนดให้ไม่มีลิมิตที่ 0

จ. ข้อ ก, ข, ง ถูก

7. $\lim_{x\to 3} (x^2+2x-4)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. –1 ข. 5

ค. 9 ง. 11

จ. 19

8. $\lim_{x \to -4} \frac{x^2 - 16}{x + 4}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. -8 ข. -4

ค. 0 ง. 8

จ. ไม่มีลิมิต

9. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & , \ x \neq 2 \\ 4 & , \ x = 2 \end{cases}$

$f(x)$ ต่อเนื่องที่ $x = 2$ หรือไม่

ก. ต่อเนื่องเพราะ $2 \in D_f$ และ $f(2)$ หาค่าได้

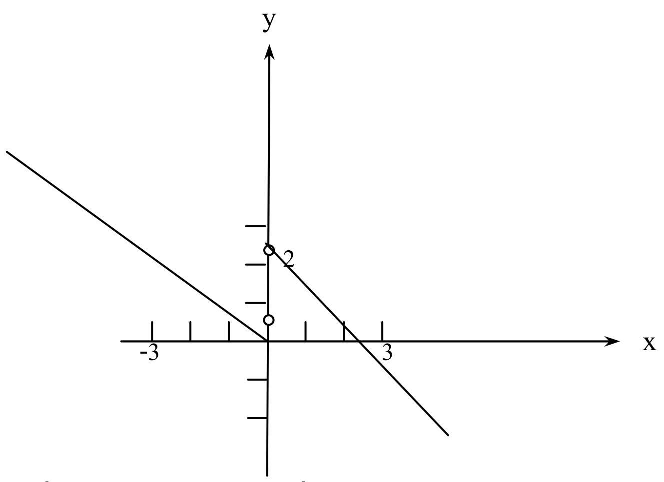
ข. ต่อเนื่องเพราะ $\lim_{x \to 2} f(x)$ หาค่าได้

ค. ต่อเนื่องเพราะ $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

ง. ต่อเนื่องเพราะมีสมบัติครบจาก ก – ค

จ. ไม่ต่อเนื่องเพราะ $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$

10.



จากกราฟที่กำหนดให้ $f(x)$ ต่อเนื่องบนช่วงเปิด $(-3, 3)$ หรือไม่

ก. ต่อเนื่องเพราะ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

ข. ต่อเนื่องเพราะ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$

ค. ต่อเนื่องเพราะ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$

ง. ไม่ต่อเนื่องเพราะ $f(2) = 0$, $f(-2) = 2$

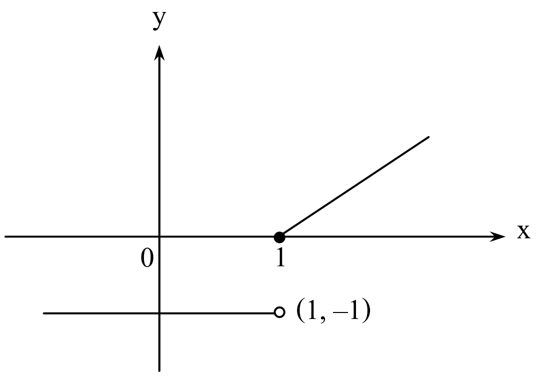
จ. ไม่ต่อเนื่องเพราะฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$

แบบทดสอบเพื่อประเมินตนเองหลังเรียน (1)

วัตถุประสงค์ เพื่อเปรียบเทียบความก้าวหน้าในการเรียนรู้ของนักเรียน ***เรื่อง "ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน"*** ซึ่งจะทำให้ทราบว่าหลังจากที่ได้ดำเนินการสอนตามแผนการสอนที่ได้จัดทำขึ้น นักเรียนมีความรู้ถึงเกณฑ์ที่ได้กำหนดไว้หรือไม่

คำชี้แจง ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกที่สุด แล้วตอบลงในกระดาษคำตอบ

1. จากกราฟที่กำหนดให้ ข้อใด**ไม่ถูกต้อง**



ก. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1$ ข. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$

ค. $\lim_{x\to 1} f(x)$ หาค่าไม่ได้ ง. $\lim_{x\to 1} = -1\,,\ 0$

2. กำหนด $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x > 0 \\ -1 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$

$f(x)$ มีลิมิตที่ 0 หรือไม่

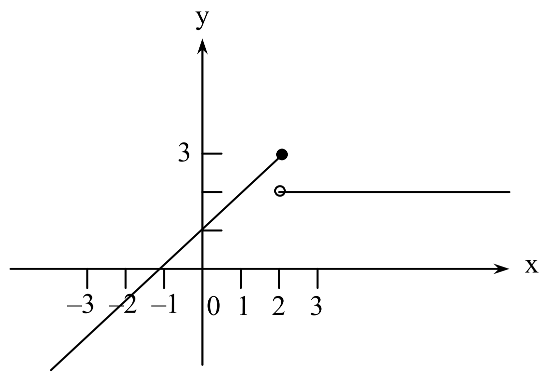
ก. มีเพราะ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$

ข. มีเพราะ $\lim_{x\to 0^+} = 1$

ค. ไม่มีเพราะ $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$

ง. ไม่มีเพราะ $\lim_{x\to 0} f(x) = \pm 1$

3. จากกราฟที่กำหนดให้ ข้อใด**ไม่ถูกต้อง**



ก. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$

ข. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$

ค. $\lim_{x\to 1} f(x) = 3, 2$

ง. $\lim_{x\to 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้

4. $\lim_{x\to 1} 5x^2 - 2x$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 3 ข. –1

ค. –3 ง. 1

5. $\lim_{x\to 5} (x^4)(x-1)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $4(5)^3$ ข. 5

ค. $5^4(4)$ ง. 5^7

6. $\lim_{x\to 3} \left[\frac{x+1}{2x-5}\right]$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 4 ข. $\frac{1}{4}$

ค. $\frac{4}{5}$ ง. $\frac{5}{4}$

7. $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{1-x}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. ∞ ข. 0

ค. 6 ง. –6

8. $\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $\frac{1}{2}$ ข. 1

ค. 2 ง. 0

9. $\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{(x^2-1)}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 1 ข. –1

ค. 0 ง. 2

10. $\lim_{x\to \infty} \frac{5x-4}{2x+3}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $\frac{2}{5}$ ข. 0

ค. $\frac{3}{4}$ ง. $\frac{5}{2}$

11. $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^3+4}{2x^2+6}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $\frac{3}{2}$ ข. $\frac{2}{3}$

ค. 2 ง. ไม่มีลิมิต

12. $\lim_{x\to \infty} \frac{2x+1}{x^2+4}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 0 ข. ∞

ค. $\frac{1}{2}$ ง. 2

13. ให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{เมื่อ } x \neq 1 \\ 4 & \text{เมื่อ } x = 1 \end{cases}$

ข้อความต่อไปนี้ ข้อใดถูกต้อง

ก. มี $\lim_{x\to 1} f(x)$

ข. มี $f(1)$

ค. $\lim_{x\to 1}$ หาค่าไม่ได้

ง. ก และ ข ถูก

14. ให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-27}{x-3} & \text{เมื่อ } x \neq 3 \\ 9 & \text{เมื่อ } x = 3 \end{cases}$

ข้อความต่อไปนี้ ข้อใด**ไม่ถูกต้อง**

ก. $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}(x^2+3x+9)$

ข. $f(3) = 9$

ค. $\lim\limits_{x\to 3} f(x) \neq f(3)$

ง. f ต่อเนื่องที่ $x = 3$

15. ข้อใด**ไม่เป็น**ฟังก์ชันต่อเนื่อง

ก. $f(x) = x^2+1$

ข. $g(x) = \sin x$

ค. $f(x) = x^n$

ง. $h(x) = \dfrac{x^2+16}{x-4}$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

เรื่อง **อัตราการเปลี่ยนแปลง** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 5 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนสามารถหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วงเวลา t_1 ไป t_2

นักเรียนสามารถหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y ขณะ x ใดๆ

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 เมื่อกำหนดสมการการเคลื่อนที่ให้นักเรียนหาความเร็วขณะเวลาใดๆ ได้

1.2 เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ ให้นักเรียนหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x + h$ และอัตราการเปลี่ยนแปลงขณะ x ใดๆ ได้

2. แนวความคิดหลัก

ในการแก้ปัญหาที่มีความสัมพันธ์กับเวลา เช่น การละลายของสารเคมี การเคลื่อนที่ของวัตถุ และปัญหาอื่นๆ บางปัญหาสามารถใช้ความรู้เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันมาช่วยในการแก้ปัญหาดังกล่าว การศึกษาเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันในบทนี้ จะเริ่มจากปัญหาที่เกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ปล่อยจากที่สูง เพื่อให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างความเร็ว อัตราการเปลี่ยนแปลง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน ความชันของเส้นโค้ง จากนั้นจึงกล่าวถึงการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยการใช้สูตร และการประยุกต์ของอนุพันธ์ โดยนำไปใช้แก้โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาค่าต่ำสุด หรือค่าสูงสุด

3. เนื้อหาสาระ

- ความเร็วเฉลี่ย
- ความเร็วขณะเวลา t ใด ๆ
- สูตรความเร็วเฉลี่ย $\frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$, $t_2 > t_1$
- อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x + h$
- อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y ขณะ x ใดๆ
- สูตรการหาพื้นที่ปริมาตรพื้นที่ผิวของรูปทรงเรขาคณิต

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

4.1 ให้นักเรียนทำแบบทดสอบเพื่อประเมินตนเองก่อนเรียน (2)

4.2 ให้นักเรียนอภิปรายถึงวิธีการหาความเร็ว ที่เคยเรียนมาแล้วในวิชาวิทยาศาสตร์ระดับชั้น ม.ต้น เน้นว่าที่จะเรียนเพิ่มขึ้น คือ ทิศทางของการเคลื่อนที่ ดังนั้น ก่อนเรียนเรื่องนี้ ให้นักเรียนไปอ่านเนื้อหาที่เกี่ยวกับเรื่องที่จะเรียนในบทนี้มาก่อน เช่น เรื่องการหาความเร็ว เป็นต้น

ขั้นสอน

4.3 ครูแจกใบความรู้ที่ 3

ครูสรุปจากข้อ 4.2 ได้ว่า อัตราส่วนของระยะห่างของวัตถุจากตำแหน่งเดิม (โดยคิดทิศทาง) ต่อเวลาทั้งหมดที่วัตถุใช้ในการเคลื่อนที่จากตำแหน่งเดิม ไปตำแหน่งใหม่ เรียกว่า ***ความเร็วเฉลี่ย*** ครูเน้นให้นักเรียนเห็นว่า ระยะทางของการเคลื่อนที่ของวัตถุจะอยู่ในรูปของฟังก์ชันของเวลา ซึ่งจะเขียนเป็น***สมการการเคลื่อนที่***ได้ว่า $\boxed{S = f(t)}$

ถ้าสมมุติว่า ปล่อยวัตถุจากที่สูงไปแล้ว t_1 วินาที ได้ระยะทาง $f(t_1)$ และขณะเวลา t_2 วินาที ได้ระยะทาง $f(t_2)$

ดังนั้น ความเร็วเฉลี่ยในช่วงจาก t_1 ถึง t_2 = $\dfrac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$ ครูเน้นย้ำว่า สูตรข้างบนนี้ คือ สูตรการหาความเร็วเฉลี่ยในช่องเวลา $t_1 \to t_2$

4.4 ครูทำตารางแสดงการหาความเร็วเฉลี่ยในช่วงต่างๆ เมื่อกำหนดสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ $S = 5t^2$

ช่วงเวลา (วินาที)	**ความเร็วเฉลี่ย เมตร / วินาที**
0 – 1	5
1 – 2	15
2 – 3	25
3 – 4	35
4 – 5	45

จากตาราง ครูอธิบายให้ได้ข้อสรุปว่า ความเร็วขณะเวลาใด ๆ ย่อมน้อยกว่าความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลาที่เริ่มนับจากเวลานั้นเป็นต้นไป เช่น ความเร็วขณะวินาทีที่ 3 ย่อมน้อยกว่าความเร็วเฉลี่ยในช่วงวินาทีที่ 3 ถึงวินาทีที่ 4 การพิจารณาเช่นนี้ ทำให้การประมาณค่าความเร็วขณะวินาทีที่ 3 ดีกว่าเดิม ถ้ากำหนดช่วงเวลาในการคำนวณความเร็วเฉลี่ยให้สั้นลง

ดังนั้น ถ้าพิจารณาความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา $t = 3$ ถึง $t = 3+h$ (เข้าใกล้ 3 ทางขวา) และในช่วงเวลา $t = 3-h$ ถึง $t = 3$ (เข้าใกล้ 3 ทางซ้าย) โดยที่ h เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ จะได้

1) ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา $t = 3-h$ ถึง $t = 3$ = $30-5h$ เมตร/วินาที

2) ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา $t = 3$ ถึง $t = 3+h$ = $30+5h$ เมตร/วินาที

เมื่อเราแทนค่า h ที่มีค่าน้อยลงมาก ๆ จนเข้าใกล้ 0 ความเร็วเฉลี่ยทั้ง 1) และ 2) จะเข้าใกล้ 30 เมตร/วินาที ดังนั้น ความเร็วขณะวินาทีที่ 3 = 30 เมตร/วินาที

4.5 ครูอธิบายต่อเพื่อที่จะหาสูตรความเร็วขณะเวลา t ใดๆ โดยกำหนดว่า ถ้าให้ h เป็นจำนวนจริงลบ จะได้

ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา $t = 3$ ถึง $t = 3+h$

$$= \frac{f(3+h)-f(3)}{h} \qquad \text{เมื่อ} \quad h < 0$$

ถ้าให้ h เป็นจำนวนจริงบวก จะได้

ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา $t = 3$ ถึง $t = 3+h$

$$= \frac{f(3+h)-f(3)}{h} \qquad \text{เมื่อ} \quad h > 0$$

นั่นคือ ความเร็วขณะวินาทีที่ 3 = $\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ เมื่อ h เข้าใกล้ 0

หรือ ความเร็วขณะวินาทีที่ 3 = $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$

สรุปได้ว่า สำหรับการเคลื่อนที่ในแนวตรง โดยทั่วไปนั้น ถ้าวัตถุมีสมการการเคลื่อนที่ คือ $S = f(t)$ แล้ว

ความเร็วขณะเวลา t ใดๆ = $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$

4.6 ครูทบทวนขั้นตอนการหาสูตรความเร็วขณะเวลา t ใดๆ อีกครั้ง โดย

1) ยกตัวอย่างสมการการเคลื่อนที่ พร้อมทั้งแสดงภาพของการเคลื่อนที่ ต่อจากนั้นให้นักเรียนแสดงภาพของการเคลื่อนที่ของสมการการเคลื่อนที่ที่ครูกำหนดให้ใหม่

2) จากแผนภาพสรุปวิธีหาความเร็วเฉลี่ยที่มาของสูตร

$$\frac{S_2-S_1}{t_2-t_1}\ , \ t_2 > t_1$$

3) ให้นักเรียนหาความเร็วเฉลี่ยจากสมการที่ครูกำหนดให้

4) จากสูตรการหาความเร็วเฉลี่ย โยงเข้าสู่การหาความเร็วขณะเวลา t ใดๆ

5) ครูสรุปสูตรการคำนวณหาความเร็วขณะเวลา t ใดๆ พร้อมทั้งยกตัวอย่างการคำนวณหาความเร็วของขณะเวลา t ใดๆ เมื่อกำหนดสมการการเคลื่อนที่ให้

4.7 ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 3.1 พร้อมทั้งตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนจากการทำกิจกรรม

4.8 ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน – ขั้นสอน ตามจุดประสงค์การเรียนรู้ข้อ 1.2

ครูกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x) = x^2 + 2$

ถ้า $x = 1$ จะได้ $y = f(1) = 3$

ถ้า $x = 3$ จะได้ $y = f(3) = 11$

จะเห็นได้ว่า

ค่า x เปลี่ยนจาก 1 ไปเป็น 3 แสดงว่า ค่า x เปลี่ยนไป 2 หน่วย

ค่า y เปลี่ยนจาก 3 ไปเป็น 11 แสดงว่า ค่า y เปลี่ยนไป 8 หน่วย

ครูกำหนดค่า x เป็น 3 และ 5 จะได้ y เป็น 11 และ 27

ให้นักเรียนสังเกตว่า ค่า x เปลี่ยนไปเป็นจำนวนเท่ากัน คือ 2 หน่วย แต่ค่า y เปลี่ยนไปเป็นจำนวนไม่เท่ากัน ทั้งๆ ที่มาจากฟังก์ชันเดียวกัน จึงต้องบอกให้ชัดเจนว่า ลักษณะการเปลี่ยนแปลงของค่า y นั้น เกิดขึ้นช่วงที่ x มีค่าเท่าใด

4.9 ครูเขียนกราฟของ $y = x^2$ จากกราฟให้นักเรียนสังเกตว่า ค่า x เปลี่ยนจาก 1 ไปเป็น 2 ค่า y จะเปลี่ยนจาก 2 ไปเป็น 4 การเปลี่ยนแปลงในลักษณะที่ x เปลี่ยนเท่ากัน แต่ y เปลี่ยนไปไม่เท่ากันนี้ เราจะศึกษาถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เมื่อเทียบกับ x ในช่วงต่างๆ

4.10 ครูทบทวนจากฟังก์ชันในข้อ 4.8 จะเห็นว่า ค่า x เปลี่ยนไป 2 หน่วย ทำให้ค่า y เปลี่ยนไป 8 หน่วย

ดังนั้น ค่า x เปลี่ยนไป 1 หน่วย ทำให้ค่า y เปลี่ยนไป $\frac{8}{2} = 4$ เรียก 4 นี้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เมื่อเทียบกับ x ตั้งแต่ $x = 1$ ถึง $x = 3$

4.11 ครูกับนักเรียนพิจารณาถึงอัตราการเปลี่ยนแปลง เฉลี่ยของฟังก์ชันทั่ว ๆ ไป

ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชัน

ถ้า $x = x_1$ จะได้ $y = f(x_1)$ ….. (1)

$x = x_1 + h$ จะได้ $y = f(x_1 + h)$ ….. (2)

จะได้ว่า ค่า x เปลี่ยนแปลง h หน่วย ค่า y จะเปลี่ยนไป $f(x_1 + h) - f(x_1)$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เมื่อเทียบกับ x

ตั้งแต่ $x = x_1$ ถึง $x = x_1 + h$ คือ $\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$

4.12 ครูบอกบทนิยามของอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เมื่อเทียบกับ x ตั้งแต่ x ถึง $x+h$ คือ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ และอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x มีค่าใด ๆ โดยโยงมาจากการหาความเร็วเฉลี่ย และความเร็วขณะเวลา t ใดๆ นั่นเอง

โดยเน้นว่า ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ ที่ไม่ใช่สมการการเคลื่อนที่ เราจะเรียกว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงนั่นเอง คือ เป็นเรื่องเดียวกันแต่ต่างกันตรงฟังก์ชัน

4.13 ครูกำหนดตัวอย่าง 2 – 3 ตัวอย่าง แล้วช่วยกันหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย และอัตราการเปลี่ยนแปลงขณะ x ใดๆ

4.14 ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 3.2

4.15 ตรวจสอบใบกิจกรรมที่ 3.2 และอธิบายเพิ่มเติมจากคำตอบให้นักเรียนเห็นความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด และอัตราการเปลี่ยนแปลง ซึ่งถ้าอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน $y = f(x)$ เป็นจำนวนบวก แสดงว่า เมื่อ x เพิ่มขึ้น ค่าของ y เพิ่มขึ้น หรือกล่าวได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และถ้าอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน $y = f(x)$ เป็นจำนวนลบ แสดงว่า เมื่อ x เพิ่มขึ้น ค่าของ y ลดลง หรือกล่าวได้ว่า y เป็นฟังก์ชันลด

จากความหมายนี้ เมื่อนักเรียนคำนวณหาอัตราการเปลี่ยนแปลงจากโจทย์ปัญหาได้ว่าเป็นจำนวนบวกหรือลบ นักเรียนควรบรรยายลักษณะการเปลี่ยนแปลงได้ โดยครูยกตัวอย่าง เช่น เมื่อคำนวณอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาณน้ำในแก้ว ตั้งแต่เวลา 9.00 น. ถึง 10.00 น. เท่ากับ – 3 ลบ.ซม. ต่อนาที แสดงว่าในช่วงเวลาดังกล่าว เมื่อเวลาเพิ่มขึ้นปริมาณของน้ำในแก้วจะลดลง

4.16 ทำแบบทดสอบรายจุดประสงค์ 3

5. แหล่งเรียนรู้

- ใบความรู้ที่ 3
- แผนภาพ
- ใบกิจกรรมที่ 3.1 และ 3.2
- แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 3
- แบบทดสอบเพื่อประเมินตนเองก่อนเรียน (2)

6. กระบวนการวัดและการประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	นักเรียนตอบคำถามถูกต้องเป็นส่วนใหญ่
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	นักเรียนสนใจเข้าร่วมกิจกรรมด้วยดี
3. ทำโจทย์ตรวจสอบความเข้าใจ	นักเรียนทำถูกต้องเกิน 80%
4. ทำโจทย์แบบฝึกหัด	นักเรียนทำแบบฝึกหัดเกิน 90%
5. ทำแบบทดสอบรายจุดประสงค์	นักเรียนทำถูกทุกข้อ
6. ทำแบบทดสอบก่อน / หลังเรียน	นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียนด้วยความสนใจ

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

....

....

....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....

....

....

....

....

....

ใบความรู้ที่ 3

จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 เมื่อกำหนดสมการการเคลื่อนที่ ให้นักเรียนหาความเร็วขณะเวลาใดๆ ได้

1.2 เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ ให้นักเรียนหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x+h$ และอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y ขณะ x ใดๆ ได้

เนื้อหา

ให้ $S = f(t)$ เป็นสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวเส้นตรง อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของระยะทาง เมื่อเทียบกับเวลาในช่วง t_1 ถึง t_1+h คือ ความเร็วโดยเฉลี่ยในช่วง t_1 ถึง t_1+h ซึ่งสามารถหาได้จาก $\dfrac{f(t_1+h)-f(t_1)}{h}$

ในทำนองเดียวกัน ความเร็วโดยเฉลี่ย ในช่วง t ถึง $t+h$ หาได้จาก $\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$

ความเร็วขณะเวลา t ใด ๆ $= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$

สำหรับฟังก์ชันโดยทั่ว ๆ ไป มีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ เมื่อค่าของ x เปลี่ยนเป็น $x+h$ โดยที่ $h \neq 0$ ค่าของ y เปลี่ยนจาก $f(x)$ เป็น $f(x+h)$ แล้ว

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x+h$ คือ $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x มีค่าใดๆ คือ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

การเคลื่อนที่ของวัตถุ ในทางฟิสิกส์ใช้ S แทนระยะทาง และ t แทนเวลา

ดังนั้น $S = f(t)$ คือ สมการหรือฟังก์ชันการเคลื่อนที่ของวัตถุ ในเรื่องการเคลื่อนที่ของวัตถุจะกล่าวเฉพาะการเคลื่อนที่ของในแนวเส้นตรง ตัวอย่างเช่น ให้วัตถุเคลื่อนที่เป็นแนวเส้นตรง โดยที่มีสมการการเคลื่อนที่ คือ $S = \frac{1}{2}t^3+2t$ เราสามารถแสดงภาพการเคลื่อนที่ของวัตถุได้ง่ายๆ ดังแผนภาพต่อไปนี้

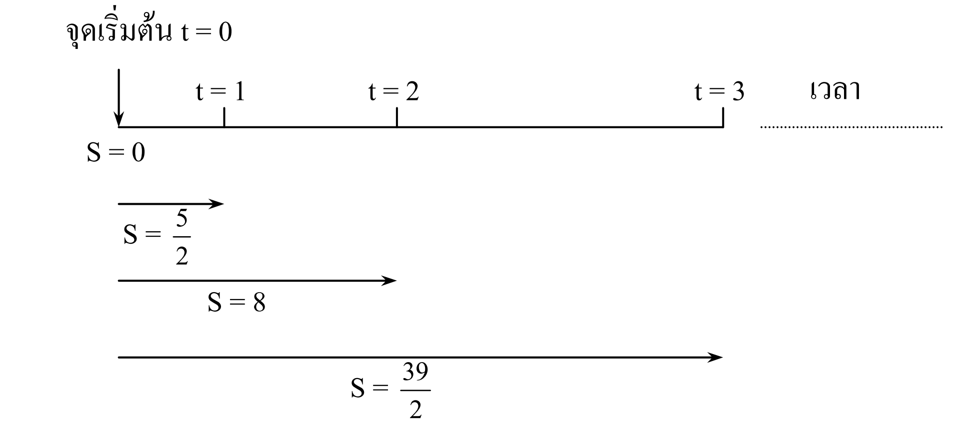
แผนภาพแสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุ

จากสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุที่เคลื่อนที่ไปในแนวเส้นตรง $S = \frac{1}{2}t^3 + 2t$

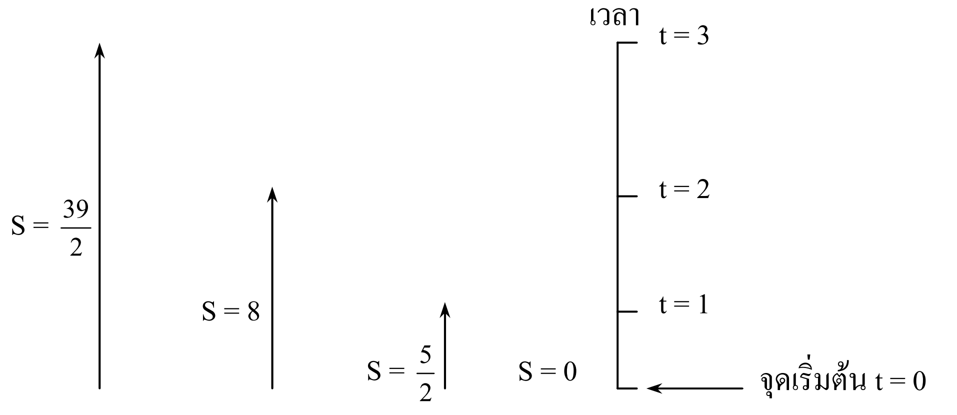
โดยที่ t แทนเวลาที่เป็นวินาที นับจากจุดเริ่มต้น และ S มีระยะทางเป็นเมตร

$t = 0$	จะได้	$S = 0$	เมตร
$t = 1$	จะได้	$S = \frac{5}{2}$	เมตร
$t = 2$	จะได้	$S = 8$	เมตร
$t = 3$	จะได้	$S = \frac{39}{2}$	เมตร

ซึ่งจะแสดงภาพการเคลื่อนที่ของวัตถุ ดังนี้



รูปที่ 1



รูปที่ 2

จากสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ จะพบว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงโดยเฉลี่ยของระยะทาง เมื่อเทียบกับเวลาช่วง $t = 1$ ถึง $t = 3$ คือ $\frac{17}{2} = 8.5$ หน่วย ทำนองเดียวกัน ถ้าพิจารณาในช่วงอื่น ๆ จะได้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงโดยเฉลี่ยของระยะทางเมื่อเทียบกับเวลาในช่วง $t = 2$ ถึง $t = 6$ คือ $\frac{120-8}{6-2} = 28$ หน่วย

สรุป

ให้ $S = f(t)$ เป็นสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวเส้นตรงเว้นวรรค อัตราการเปลี่ยนแปลงโดยเฉลี่ยของระยะทาง เมื่อเทียบกับเวลาในช่วง t_1 ถึง $t_1 + h$ คือ ความเร็วโดยเฉลี่ยในช่วง t_1 ถึง $t_1 + h$ ซึ่งหาได้จาก $\frac{f(t_1+h)-f(t_1)}{h}$ ในทำนองเดียวกัน ความเร็วโดยเฉลี่ยในช่วง t_1 ถึง $t_1 + h$ ได้จาก $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$

ใบกิจกรรมที่ 3.1

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อกำหนดสมการการเคลื่อนที่ ให้นักเรียนหาความเร็วขณะเวลาใดๆ ได้

---

1. ให้ $S = t^2 - 5t + 4$ เป็นสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวเส้นตรง โดยที่ S มีหน่วยเป็นเมตร และ t มีหน่วยเป็นวินาที
   1) จงหาความเร็วโดยเฉลี่ย ในช่วง $t = 2$ ถึง $t = 5$
   2) จงหาความเร็วของวัตถุที่เวลา $t = 2$

วิธีทำ $S = f(t) = t^2 - 5t + 4$

1) ความเร็วเฉลี่ยในช่วง t ถึง $t+h$ คือ $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ โจทย์ต้องการให้หาความเร็วเฉลี่ย ในช่วง $t = 2$ ถึง $t = 5$ นั่นคือ $t = 2$, $t+h = 5$ และ $h = 3$

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \frac{f(5)-f(2)}{2}$$

$$= \frac{\left[5^2-5(5)+4\right]-\left[2^2-5(2)+4\right]}{3}$$

$$= 2$$

นั่นคือ ความเร็วโดยเฉลี่ยในช่วง $t = 2$ ถึง $t = 5$ $= 2$ เมตรต่อวินาที

2) ความเร็วขณะเวลา t ใดๆ $= \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(t+h)^2-5(t+h)+4-(t^2-5t+4)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(t^2+2th+h^2-5t-5h+4-t^2+5t-4)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2th+h^2-5h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2t+h-5)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(2t+h-5)$$

ความเร็วขณะเวลา t ใดๆ $= 2t-5$ เมตรต่อวินาที

$\therefore$ ความเร็วขณะเวลา $t = 2$ $= 2(2)-5$ $= -1$ เมตรต่อวินาที

2. วัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ไปตามแนวเส้นตรง โดยที่สมการของการเคลื่อนที่คือ $S = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$ เมื่อ S มีหน่วยเป็นเมตร และ t มีหน่วยเป็นวินาที

   1) จงหาความเร็วเฉลี่ยของวัตถุ ในช่วงเวลา $t = 1$ ถึง $t = 3$
   2) จงหาความเร็วของวัตถุที่เวลา $t = 1$
   3) จงหาความเร็วของวัตถุที่เวลา $t = 1.5$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ใบกิจกรรมที่ 3.2

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ ให้นักเรียนหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ในช่วง x ถึง $x+h$ และอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y ขณะ x ใดๆ ได้

1. กำหนด $y = f(x)$ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ขณะ x เปลี่ยนจาก x เป็น $x+h$ คือ

....

....

....

....

2. กำหนด $y = f(x) = 3x+1$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ขณะ x เปลี่ยนจาก 1 เป็น 3

....

....

....

....

3. กำหนด $y = f(x) = x^2$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ขณะ x เปลี่ยนจาก 1 เป็น 5

....

....

....

....

....

4. กำหนด $y = f(x) = x^2 + 2x + 5$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ขณะ x เปลี่ยนจาก 1 เป็น 4

....

....

....

....

5. กำหนด $y = f(x) = \frac{1}{x}$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ขณะ x เปลี่ยนจาก x เป็น $x + h$

....

....

....

....

6. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เมื่อเทียบกับความยาวของด้าน เมื่อความยาวของด้านเปลี่ยนจาก 8 เซนติเมตร เป็น 10 เซนติเมตร

....

....

....

....

7. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่ของรูปวงกลม เมื่อเทียบกับความยาวของรัศมีของวงกลมนั้น เมื่อความยาวของรัศมีเปลี่ยนจาก 10 เซนติเมตร เป็น 12 เซนติเมตร

....

....

....

....

....

8. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่ง เทียบกับความยาวของด้าน เมื่อความยาวของด้านเปลี่ยนจาก 10 เซนติเมตร ไปเป็น 12 เซนติเมตร

....

....

....

....

9. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรของทรงกลมเทียบกับรัศมี เมื่อความยาวของรัศมี เปลี่ยนจาก 8 เซนติเมตร ไปเป็น 10 เซนติเมตร

....

....

....

....

10. ทรงกระบอกอันหนึ่ง มีส่วนสูงยาวเท่ากับความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของฐาน จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรของทรงกระบอกเมื่อเทียบกับรัศมีของฐาน เมื่อความยาวของรัศมีของฐาน เปลี่ยนจาก 5 เซนติเมตร ไปเป็น 8 เซนติเมตร

....

....

....

....

11. กรวยกลมอันหนึ่ง ซึ่งมีส่วนสูงยาวเท่ากับความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของฐาน จงหา
    1) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรกรวยกลมเทียบกับความยาวของรัศมีของฐาน เมื่อความยาวของรัศมี เปลี่ยนจาก 8 เซนติเมตร ไปเป็น 10 เซนติเมตร

....

....

....

....

2) อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของปริมาตรกรวยกลมเทียบกับความสูงของกรวย เมื่อความสูง เปลี่ยนจาก 6 เซนติเมตร ไปเป็น 8 เซนติเมตร

....

....

....

....

12. กำหนด $S = f(t)$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ เมื่อ S แทนระยะทาง และ t แทนเวลา ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา t ถึง $t+h$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ S เทียบกับ t เมื่อ t เปลี่ยนจาก t ไปเป็น $t+h$ คือ

....

....

....

....

13. กำหนด $S = f(t) = t^2 + 2t + 5$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ เมื่อ S แทนระยะทาง มีหน่วยเป็นเมตร และ t เป็นเวลามีหน่วยเป็นวินาที จงหาความเร็วเฉลี่ยของวัตถุในช่วงเวลา $t = 2$ วินาที ถึง $t = 5$ วินาที

....

....

....

....

14. กำหนด $y = f(x) = x$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x ใดๆ

....

....

....

....

....

15. กำหนด $y = f(x) = x^2$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x ใดๆ

....

....

....

....

....

16. กำหนด $y = f(x) = x^2 + 2x + 5$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x ใดๆ

....

....

....

....

....

17. กำหนด $y = f(x) = \frac{1}{x}$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x ใดๆ

....

....

....

....

....

18. กำหนด $y = f(x) = x^2 + 1$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ $x = 2$

....

....

....

....

....

19. กำหนด $y = f(x) = x^2 - 5x + 1$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ $x = 3$

....

....

....

....

....

....

....

....

20. กำหนด $S = f(t) = t^2 + 2t + 5$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ S เทียบกับ t ขณะ $t = 2$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 3

วิชา คณิตศาสตร์ **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

เรื่อง อัตราการเปลี่ยนแปลง **เวลา 30 นาที** **คะแนนเต็ม 10 คะแนน**

คำสั่ง ให้แสดงวิธีทำเป็นขั้นตอน

1. วัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ไปในแนวเส้นตรง โดยมีสมการการเคลื่อนที่ คือ $S = \frac{1}{3}t^3 - 2t$ เมื่อ S แทนระยะทาง มีหน่วยเป็นฟุต และ t แทนเวลานับจากวัตถุเริ่มเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้น มีหน่วยเป็นวินาที จงหา 1) ความเร็วขณะเวลา t ใดๆ
   2) ความเร็วขณะเวลา $t = 2$

....

....

....

....

....

2. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ $f(x) = 4x + 1$ เมื่อ $x_1 = 2$ และ $x_1 + h = 5$

....

....

....

....

....

3. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x) = x^2 - 2x$ ขณะ $x = 1$

....

....

....

....

....

แบบทดสอบเพื่อประเมินตนเองก่อนเรียน (2)

วัตถุประสงค์ เพื่อประเมินพื้นฐานความรู้เดิมของนักเรียน ***เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน*** ซึ่งจะทำให้นักเรียนได้สำรวจตนเองว่ามีพื้นฐานความรู้เกี่ยวกับเนื้อหาเหล่านี้มากน้อยเพียงใด

คำชี้แจง ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกที่สุด แล้วตอบลงในกระดาษคำตอบ

1. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ $f(x)$ เมื่อ x เปลี่ยนจาก x ไปเป็น $x+h$ คือ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ถ้า $f(x) = 4x+1$ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x)$ เมื่อ x เปลี่ยนจาก 2 เป็น 5 มีค่าเท่ากับข้อใด

   ก. 4 ข. $\frac{14}{3}$

   ค. 12 ง. 14

2. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = x^2(x-3)+2$ คือข้อใด

   ก. $2x$ ข. $3x^2 - 6x$

   ค. $3x^2 - 6x + 2$ ง. $2x(x-3)$

3. กำหนด $f(x) = 3x+1$, $g(x) = x^2$ $\frac{d}{dx}(g\,o\,f)(x)$ คือข้อใด

   ก. $18x - 16$ ข. $18x + 16$

   ค. $16x + 8$ ง. $16x - 8$

4. อนุพันธ์ของ $f(x)$ เมื่อ $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}}$ คือข้อใด

   ก. $2x^{\frac{1}{3}}$ ข. $2x^{-\frac{1}{3}}$

   ค. $\frac{2}{x^3}$ ง. $3x^{\frac{1}{3}}$

5. วัตถุเคลื่อนที่ตามสมการ $S = t^3 - 2t + 5$ ความเร็วขณะเวลา t ใด ๆ คือข้อใด

   ก. $3t$ ข. $6t$

   ค. $3t^2 + 5$ ง. $3t^2 - 2$

6. ถ้ากำหนด $S = t^3 - 3t^2 + 4t + 8$ ความเร็วในขณะเวลา $t = 2$ คือข้อใด

ก. -4	ข. 2
ค. 4	ง. 12

7. กำหนด $S = t^5 - t^4 + t^3 + 2t - 1$ ความเร่งในขณะเวลา $t = 1$ คือข้อใด

ก. -4	ข. 6
ค. 11	ง. 14

8. กำหนด $y = 3x^3 - 4x^2 - x + 9$ ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(-2, 5)$ คือข้อใด

ก. 51	ข. 20
ค. 12	ง. -21

9. จากสมการ $y = 3x^2 - 5x + 1$ สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งนี้ที่จุด $(1, -1)$ คือข้อใด

ก. $y = x$	ข. $y = x - 1$
ค. $y = x - 2$	ง. $y = x + 1$

10. สมการเส้นตรงซึ่งตั้งฉากกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $xy = 4$ ณ จุดสัมผัส $(-1, -4)$ คือข้อใด

ก. $4x - y + 8 = 0$	ข. $4x + y - 8 = 0$
ค. $4x + y + 8 = 0$	ง. $x - 4y - 15 = 0$

11. ถ้า $f(x) = 5x^3 - 3x^5$ แล้ว $f'(x)$ และ $f''(x)$ คือข้อใด

ก. $5x^2 - 3x^4,\ 5x - 3x^3$

ข. $15x^2 - 15x^4,\ 30x - 60x^3$

ค. $5x^4 - 3x^6,\ 5x^5 - 3x^7$

ง. $15x^2 - 15x^4,\ 15x - 15x^3$

12. ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $y = 7 - 6x - x^2$ คือข้อใด

ก. 16	ข. 7
ค. -3	ง. -20

13. จาก $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$ ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน คือข้อใด

ก. -4 และ 8 ข. 4 และ -8

ค. -8 และ -4 ง. -4 และ -8

14. ถ้าผลบวกของเลขสองจำนวน คือ 12 และผลคูณของเลขสองจำนวนนี้มีค่ามากที่สุด เลขสองจำนวนนี้คือข้อใด

ก. 7 , 5 ข. 9 , 3

ค. 8 , 4 ง. 6 , 6

15. ในการวิจัยยาชนิดหนึ่งพบว่า เมื่อนำยานี้มา 10 c.c ทดลองฉีดเข้าไปในคนใดคนหนึ่ง จะพบว่าหลังจากนั้น x ชั่วโมง ความดันโลหิตของคนๆ นั้นเปลี่ยนไปตามสมการ $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x$ สมการนี้เป็นจริงเฉพาะ เมื่อ $0 \le x \le 6$ เพราะจะหมดฤทธิ์ยาหลังจากฉีดยาแล้ว 6 ชั่วโมง ภายใน 6 ชั่วโมงพบว่า ความดันโลหิตของผู้นั้นเป็นไปตามข้อใด

ก. ลดลงใน 2 ชั่วโมงแรก และเพิ่มขึ้นใน 2 ชั่วโมงถัดมา แล้วลดลงใน 2 ชั่วโมงสุดท้าย

ข. เพิ่มขึ้นใน 2 ชั่วโมงแรก และลดลงใน 2 ชั่วโมงถัดมา แล้วเพิ่มขึ้นใน 2 ชั่วโมงสุดท้าย

ค. ลดลงต่ำสุดเมื่อเวลาผ่านไป 2 ชั่วโมง และเพิ่มขึ้นภายใน 4 ชั่วโมงสุดท้าย

ง. เพิ่มขึ้นสูง เมื่อเวลาผ่านไป 2 ชั่วโมง และลดลงต่ำภายใน 4 ชั่วโมงสุดท้าย

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

เรื่อง **อนุพันธ์ของฟังก์ชัน** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 4 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้นิยามได้
นักเรียนสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตรได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้นักเรียนหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

2. แนวความคิดหลัก

ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมน และเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง และ $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ หาค่าได้ เรียกค่าลิมิตที่ได้ว่า “อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x” เขียนแทนด้วย $f'(x)$

3. เนื้อหาสาระ

3.1 อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x มีค่าใดๆ คือ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ เมื่อ $h \to 0$

3.2 $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

3.3 สูตรการหาอนุพันธ์

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

4.1 ครูทบทวนเรื่องการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน โดยให้นักเรียนบอกถึงความเข้าใจในแง่ที่ว่า

1) อัตราการเปลี่ยนแปลงในขณะใดๆ ของฟังก์ชัน ถ้า $y = f(x)$ มีค่าเท่ากับ $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
2) อัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะทางในขณะเวลา t ใดๆ ที่ได้จากสมการของการเคลื่อนที่ $S = f(t)$ คือความเร็วในขณะเวลา t ใดๆ และมีค่าเท่ากับ $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

ขั้นสอน

4.2 ครูบอกนักเรียนว่า สัญลักษณ์ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ อ่านว่าลิมิตของ $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ เมื่อ h เข้าใกล้ศูนย์ ดังนั้น นักเรียนควรบอกได้ว่า ความเร็วในขณะเวลา t ใดๆ ของสมการเคลื่อนที่ S = f (t) จะเท่ากับ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$

4.3 ครูบอกนักเรียนว่า ถ้า y = f(x) เป็นฟังก์ชันซึ่งสามารถหา $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ได้สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน f เราสามารถสร้างความสัมพันธ์ใหม่จากฟังก์ชันที่ได้โดยให้ความสัมพันธ์ใหม่ คือ $\left\{(x,z)\,\middle|\, z=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}$ และจากเรื่องอัตราการเปลี่ยนแปลงในขณะใดๆ ของฟังก์ชันที่สามารถหา $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ นักเรียนควรบอกได้ว่า เมื่อกำหนด x ให้ 1 ค่า จะหา $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ดังนั้น นักเรียนควรสรุปได้ว่า $\left\{(x,z)\,\middle|\, z=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}$ เป็นฟังก์ชัน

ครูบอกนักเรียนว่า ฟังก์ชันใหม่นี้ได้มาจากฟังก์ชัน f และจะให้ชื่อฟังก์ชันนี้ว่า **อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f** เขียนแทนด้วย f' (อ่านว่าเอฟไพร์ม)

ดังนั้น $$\boxed{f' = \left\{(x,z)\,\middle|\, z=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}}$$

เนื่องจาก $(x,z)\in f'$ นักเรียนควรบอกได้ว่า z เป็นค่าของ f' ที่ x หรือที่เขียนได้ว่า

$$Z = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ครูบอกนักเรียนว่า เรียก $f'(x)$ ว่า อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x

4.4 ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปบทนิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ x

4.5 ครูแนะนำสัญลักษณ์ $\dfrac{dy}{dx}$

4.6 ครูให้นักเรียนฝึกหา $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d}{dx}f(x)$, $f'(x)$ และ y' เมื่อกำหนด y = f (x) ให้ จากใบกิจกรรมที่ 4.1

4.7 ครูให้นักเรียนหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะทางในขณะเวลา t ใดๆ จากสมการของการเคลื่อนที่ S = f (t) ที่กำหนดให้โดยใช้บทนิยามของอนุพันธ์ นักเรียนควรจะหาได้ และบอกว่าค่าที่หาได้ก็คืออนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ t และอัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะทางในขณะเวลาใดๆ ของสมการการเคลื่อนที่นี้ก็คือความเร็วขณะเวลา t ใด ๆ

4.8 ครูให้สูตรสำหรับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

4.9 ครูอธิบายวิธีการนำสูตรไปใช้ในการแก้ปัญหา

4.10 ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 4.2 ถึง 4.6 โดยใช้สูตรจากใบความรู้ที่ 4

4.11 ตรวจสอบความถูกต้องของใบกิจกรรมที่ 4.2 ถึง 4.6

4.12 ให้นักเรียนทำแบบทดสอบรายจุดประสงค์ 4

5. แหล่งเรียนรู้

- ใบความรู้ที่ 4
- ใบกิจกรรมที่ 4.1 ถึง 4.6
- แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 4

6. กระบวนการวัดและการประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	นักเรียนตอบคำถามถูกต้องเป็นส่วนใหญ่
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	นักเรียนสนใจเข้าร่วมกิจกรรมด้วยดี
3. ทำโจทย์ตรวจสอบความเข้าใจ	นักเรียนทำถูกต้องเกิน 80%
4. ทำโจทย์แบบฝึกหัด	นักเรียนทำแบบฝึกหัดเกิน 90%
5. ทำแบบทดสอบรายจุดประสงค์	นักเรียนทำถูกต้องไม่ต่ำกว่า 5 ข้อ
6. ทำแบบทดสอบก่อน / หลังเรียน	–

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....

....

....

ใบความรู้ที่ 4

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้นักเรียนหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้

เนื้อหา

- สูตรในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

สูตรที่ 1 ถ้า $y = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวแล้ว $\frac{dy}{dx} = 0$ นั่นคือ $\frac{d(c)}{dx} = 0$

สูตรที่ 2 ถ้า $y = x$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = 1$ นั่นคือ $\frac{dx}{dx} = 1$

สูตรที่ 3 ถ้า $y = x^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริงแล้ว $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

นั่นคือ $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$

สูตรที่ 4 ถ้า $y = f(x) + g(x)$ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

สูตรที่ 5 ถ้า $y = f(x) - g(x)$ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

สูตรที่ 6 ถ้า $y = cf(x)$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวแล้ว

$$\frac{dy}{dx} = c\frac{d}{dx}f(x)$$

สูตรที่ 7 ถ้า $y = f(x) \cdot g(x)$ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

สูตรที่ 8 ถ้า $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ โดยที่ $g(x) \neq 0$ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}$$

สูตรที่ 9 ถ้า $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{df(x)}g(f(x)) \cdot \frac{d}{dx}f(x)$$

ใบกิจกรรมที่ 4.1

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้นักเรียนหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้

ให้นักเรียนหา $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, y' , $g'(x)$ จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ โดยใช้ **บทนิยาม**

1. $f(x) = x^2$ จงหา $f'(x)$
2. $y = 4x + 5$ จงหา y'
3. $y = 2x^2 + x - 4$ จงหา $\frac{dy}{dx}$
4. $g(x) = \frac{1}{x}$ จงหา $g'(x)$

ใบกิจกรรมที่ 4.2

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้นักเรียนหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้

จากสมการ $S = t^2 - 2t + 5$ เมื่อ s มีหน่วยเป็นเมตร และ t มีหน่วยเป็นวินาที การหาความเร็ว V ในขณะเวลา t = 3 วินาที มีขั้นตอนการคำนวณ ดังนี้

ความเร็วขณะเวลาใดๆ $= \dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$ เมื่อ $h \to 0$

$=$ ① เมื่อ $h \to 0$

$= \dfrac{t+2th+h^2-2t-2h+5-t^2+2t-5}{h}$ เมื่อ $h \to 0$

$= \dfrac{2th+h^2-2h}{h}$ เมื่อ $h \to 0$

$=$ ②

V $= 2t-2$

เมื่อ t $= 3$ วินาที

V $= \boxed{③}$ เมตร/วินาที

จากการคำนวณข้างต้น

ข้อความที่เหมาะสมใน ① คือ..

ข้อความที่เหมาะสมใน ② คือ..

ข้อความที่เหมาะสมใน ③ คือ..

ใบกิจกรรมที่ 4.3

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้นักเรียนหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้

คำสั่ง จงหา $\frac{dy}{dx}$ โดยใช้สูตร

1. $y = 5$, $\frac{dy}{dx} =$ ……………………………………………………………
2. $y = 7$ ……………………………………………………………
3. $y = -2$ ……………………………………………………………
4. $y = \frac{1}{2}$ ……………………………………………………………
5. $y = 0.7$ ……………………………………………………………
6. $y = -\frac{3}{4}$ ……………………………………………………………
7. $y = x$ ……………………………………………………………
8. $y = x^4$ ……………………………………………………………
9. $y = x^{10}$ ……………………………………………………………
10. $y = x^{12}$ ……………………………………………………………
11. $y = x^9$ ……………………………………………………………
12. $y = x^{-5}$ ……………………………………………………………
13. $y = x^{-11}$ ……………………………………………………………
14. $y = x^{-\frac{1}{2}}$ ……………………………………………………………

ใบกิจกรรมที่ 4.4

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้นักเรียนหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้

คำสั่ง จงหา $\frac{dy}{dx}$ โดยใช้สูตร

1. $y = x^{-7}$, $\frac{dy}{dx}$ = ………………………………………………………………

2. $y = x^{\frac{1}{2}}$ ………………………………………………………………

3. $y = x^{\frac{3}{4}}$ ………………………………………………………………

4. $y = x^{-8}$ ………………………………………………………………

5. $y = x^{-\frac{1}{4}}$ ………………………………………………………………

6. $y = \sqrt{x}$ ………………………………………………………………

7. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ………………………………………………………………

8. $y = x^{-10}$ ………………………………………………………………

9. $y = \sqrt[3]{x}$ ………………………………………………………………

10. $y = x^{2}$ ………………………………………………………………

ใบกิจกรรมที่ 4.5

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้นักเรียนหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้

คำสั่ง จงหา $\frac{dy}{dx}$ โดยใช้สูตร

1. $y = 2x^3$, $\frac{dy}{dx}$ = ……………………...……………………………………………..
2. $y = 3x^4$ ……………………...…………………………………………………………..
3. $y = 4x^5$ ……………………...…………………………………………………………..
4. $y = 2x^6$ ……………………...…………………………………………………………..
5. $y = 5x^2$ ……………………...…………………………………………………………..
6. $y = 4x^3$ ……………………...…………………………………………………………..
7. $y = -2x^6$ ……………………...…………………………………………………………..
8. $y = 6x^{-5}$ ……………………...…………………………………………………………..
9. $y = 6x^{\frac{1}{2}}$ ……………………...…………………………………………………………..
10. $y = \frac{5}{x^4}$ ……………………...…………………………………………………………..

ใบกิจกรรมที่ 4.6

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้นักเรียนหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้

คำสั่ง จงหา $\frac{dy}{dx}$ โดยใช้สูตร

1. $y = 3x^{\frac{2}{3}}$, $\frac{dy}{dx}$ = ………………………………………………………………

2. $y = \frac{3}{7}x^{-7}$ ………………………………………………………………

3. $y = 2x^2 + x - 7$ ………………………………………………………………

4. $y = 3x^5 + 2$ ………………………………………………………………

5. $y = 3x^2 + 2x - 1$ ………………………………………………………………

6. $y = 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 7$ ………………………………………………………

7. $y = 5x^4 + 7x^3 - 8x^2 - 3x + 25$ …………………………………………………

8. $y = 6x^7 - 8x^5 + 3x^2 - 4x - 18$ …………………………………………………

9. $y = 4x^2 + 3x - 4\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}$ ……………………………………………………

10. $y = -2 + 3x - 3x^{-\frac{2}{3}}$ ……………………………………………………

11. กำหนด $y = 5x^4$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

12. กำหนด $f(x) = 3x^{-5} + 2$ จงหา $f'(x)$ และ $f'(0)$

13. กำหนด $y = 3x^2 - 2x + 15$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

14. กำหนด $y = 5x^4 + 7x^3 - 8x^2 - 3x + 25$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

15. กำหนด $f(x) = 6x^7 - 8x^5 + 3x^2 - 4x - 18$ จงหา $f'(x)$

16. จงหา y' เมื่อ $y = (2x+1)^2$

17. จงหา $f'(x)$ เมื่อ $f(x) = \frac{1}{2x+5}$

18. จงหา y' เมื่อ $y = (5x-7)(3x+2)$

19. จงหา y' เมื่อ $y = \frac{7x+2}{14x-1}$

20. จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $y = x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{3}{2}}$

21. จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $y = x\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}$

22. จงหา $f'(2)$ เมื่อ $f(x) = 3x^2 - 2$

23. จงหา $\frac{ds}{dt}$ เมื่อ $f(t) = 16t - 32t^2$

24. ให้ $y = (4x+1)^3$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

25. ให้ $y = (2x+5)^8$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

26. จงหา y' เมื่อ $y = (5x-2)^{10}$

27. จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $y = \sqrt{3x-7}$

28. จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $y = \frac{1}{(1-2x)^8}$

29. จงหา y' เมื่อ $y = (x+3)^5(2x-4)^4$

30. จงหา $f'(-1)$ เมื่อ $f(x) = 3(x^2 - x + 2)^3$

แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 4

วิชา คณิตศาสตร์ **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน **เวลา 30 นาที** **คะแนนเต็ม 10 คะแนน**

คำสั่ง ให้แสดงวิธีทำทุกข้อ

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = 3x^2 + 7$ โดยใช้บทนิยาม
2. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้สูตร เมื่อกำหนดฟังก์ชัน

2.1 $y = 2x^2 + x$

2.2 $y = x^{-3} + 4x^{-5}$

2.3 $y = \dfrac{7}{8\times 6}$

2.4 $y = (x+3)^5$

2.5 $y = \dfrac{x}{(4x+1)}$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5

เรื่อง **ความเร็วและความเร่ง** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 3 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนแก้ปัญหาเกี่ยวกับความเร็ว ความเร่งโดยใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชันได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อกำหนดสมการการเคลื่อนที่ให้นักเรียนหาความเร็ว และความเร่งได้

2. แนวความคิดหลัก

ถ้า $S = f(t)$ เป็นสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ

$f'(t)$ คือความเร็วของวัตถุ ที่เวลา t ใด ๆ

$f''(t)$ คือความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t

3. เนื้อหาสาระ

ให้ $S = f(t)$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง เมื่อ t เป็นเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ และ S เป็นระยะทางวัดจากจุดเริ่มต้นเมื่อเวลา t

1) ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2 เมื่อ $t_2 > t_1$ เท่ากับ $\dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$

2) อัตราเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2 เมื่อ $t_2 > t_1$ เท่ากับ $\left|\dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}\right|$

3) ความเร็วขณะเวลา t $= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h} = f'(t)$

ให้ $V(t)$ แทนความเร็วขณะเวลา t จะได้ว่า

$$V(t) = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

4) อัตราเร็วในขณะเวลา t เท่ากับ $|V(t)|$

5) ความเร่งในขณะเวลา t เท่ากับ $\dfrac{dv}{dt}$ ให้ $a(t)$ แทนความเร่งขณะเวลา t จะได้ว่า

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{dS^2}{dt^2} = f''(t)$$

6) อัตราเร่งในขณะเวลา t เท่ากับ $|a(t)|$

ข้อสังเกต

(1) ถ้าความเร็วเป็นบวก แสดงว่าในขณะนั้นวัตถุเคลื่อนที่โดยทำให้ระยะทางเพิ่มขึ้น

(2) ถ้าความเร็วเป็นลบ แสดงว่าในขณะนั้นวัตถุเคลื่อนที่โดยทำให้ระยะทางลดลง

(3) ถ้าความเร็วเป็นศูนย์ แสดงว่าในขณะนั้นวัตถุหยุดนิ่ง

(4) ถ้าความเร่งเป็นบวก แสดงว่าในขณะนั้นวัตถุเคลื่อนที่โดยทำให้ความเร็วเพิ่มขึ้น

(5) ถ้าความเร่งเป็นลบ แสดงว่าในขณะนั้นวัตถุเคลื่อนที่โดยทำให้ความเร็วลดลง

(6) ถ้าความเร่งเป็นศูนย์ แสดงว่าในขณะนั้นวัตถุเคลื่อนที่ โดยทำให้ความเร็วคงที่ หรือวัตถุหยุดนิ่ง

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

4.1 ครูทบทวนบทนิยามการหาความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใดๆ และบอกนักเรียนว่า ในทางวิทยาศาสตร์ เรานิยมใช้ V แทนความเร็วของวัตถุ ดังนั้น ถ้า $S = f(t)$ เป็นสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุจะได้ว่า $V = \frac{ds}{dt} = f'(t)$ ความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใดๆ

4.2 ความเร็วของวัตถุ จะมีได้ทั้งค่าบวกและค่าลบ ทั้งนี้เพราะการเคลื่อนที่ของวัตถุนั้น เราคำนึงถึงทิศทางการเคลื่อนที่ด้วย ปัญหาก็คือว่า วัตถุต้องมีลักษณะการเคลื่อนที่อย่างใดจึงจะทำให้ความเร็วเป็นบวกหรือเป็นลบ เพื่อความเข้าใจในเรื่องนี้ ครูทบทวนเรื่องฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด

ถ้า $f'(t) > 0$ แล้ว $f(t)$ มีค่าเพิ่มขึ้น แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ถ้า $f'(t) < 0$ แล้ว $f(t)$ มีค่าน้อยลง แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันลด

แสดงว่า $\boxed{\text{ถ้า} \quad V > 0}$ แล้ว S มีค่ามากขึ้น นั่นคือ **ถ้าความเร็วเป็นบวก** ลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุนั้น จะอยู่ในลักษณะที่ว่า ยิ่งเวลาผ่านไปมากเท่าใด ก็จะได้ระยะทางเพิ่มขึ้นมากเท่านั้น

$\boxed{\text{ถ้า} \quad V < 0}$ แล้ว S มีค่าน้อยลง นั่นคือ **ถ้าความเร็วเป็นลบ** ลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุนั้น จะอยู่ในลักษณะที่ว่า ยิ่งเวลาผ่านไปมากเท่าใด ระยะทางกลับลดน้อยลงทุกที

ขั้นสอน

4.3 ครูกำหนดให้ $V = g(t)$ เป็นสมการความเร็วของวัตถุ จากการที่ได้เคยศึกษาเรื่องอัตราการเปลี่ยนแปลงมาแล้วจะได้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงโดยเฉลี่ยของความเร็ว เมื่อเทียบกับเวลาในช่วง t_1 ถึง $t_1 + h$ คือ $\frac{g(t_1 + h) - g(t_1)}{h}$

ในทางฟิสิกส์ เราเรียกอัตราการเปลี่ยนแปลงโดยเฉลี่ยของความเร็ว เมื่อเทียบกับเวลาภายในช่วงเวลา t ถึง $t+h$ ว่าความเร่งโดยเฉลี่ย t ถึง $t+h$ นั่นคือ

ถ้า V = g(t) เป็นสมการความเร็วของวัตถุแล้ว ความเร่งเฉลี่ย ภายในช่วง t ถึง t + h คือ $\frac{g(t+h)-g(t)}{h}$

ถ้า h เข้าสู่ 0 ความเร็วเฉลี่ยภายในช่วง t ถึง t+h ก็จะเข้าใกล้ความเร่ง ณ เวลา t สรุปได้ว่า $\frac{g(t+h)-g(t)}{h}$ ขณะที่ h เข้าใกล้ 0 คือ ความเร่ง ณ เวลา t หรือ

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h} \quad = \quad \text{ความเร่ง ณ เวลา } t}$$

นั่นคือ $g'(t)$ = ความเร่ง ณ เวลา t

ดังนั้น ถ้าให้ S = f(t) เป็นสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ

จะได้ V = $f'(t)$ คือความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t

ถ้าให้ V = g(t) = $f'(t)$

ดังนั้น $g'(t)$ = $f''(t)$ คือความเร่งของวัตถุ ณ เวลา t

ในทางฟิสิกส์ เรานิยมใช้ a แทนความเร่งของวัตถุ ณ เวลา t จะได้ว่า

ถ้า	S	=	f(t) เป็นสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุแล้ว
	a	=	$f''(t)$
		=	ความเร่งของวัตถุ ณ เวลา t

4.4 ครูแจกใบความรู้ที่ 5 ให้นักเรียนศึกษาแล้วให้นักเรียนช่วยกันสรุป

4.5 ครูกำหนดสมการการเคลื่อนที่ให้ แล้วให้นักเรียนช่วยกันหาความเร็ว $\left(\frac{ds}{dt}\right)$ และความเร่ง $\left(\frac{dv}{dt}\right)$

4.6 ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 5.1 และ 5.2 โดยครูช่วยให้คำแนะนำและตรวจสอบความถูกต้อง

4.7 ครูให้นักเรียนทำแบบทดสอบรายจุดประสงค์ 5

5. แหล่งเรียนรู้

- ใบความรู้ที่ 5
- ใบกิจกรรมที่ 5.1 และ 5.2
- แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 5

6. กระบวนการวัดและการประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	นักเรียนตอบคำถามถูกต้องเป็นส่วนใหญ่
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	นักเรียนสนใจเข้าร่วมกิจกรรมด้วยดี
3. ทำโจทย์ตรวจสอบความเข้าใจ	นักเรียนทำถูกต้องเกิน 80%
4. ทำโจทย์แบบฝึกหัด	นักเรียนทำแบบฝึกหัดเกิน 90%
5. ทำแบบทดสอบรายจุดประสงค์	นักเรียนทำถูกต้องทุกข้อ
6. ทำแบบทดสอบก่อน / หลังเรียน	–

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

....

....

....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....

....

....

....

....

....

ใบความรู้ที่ 5

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อกำหนดสมการการเคลื่อนที่ให้ นักเรียนหาความเร็ว และความเร่งได้

เนื้อหา

ถ้า $S = f(t)$ เป็นสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ

$f'(t)$ คือ ความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใดๆ

$f''(t)$ คือ ความเร่งของวัตถุ ณ เวลา t

ตัวอย่าง ให้ $S = t^3 - 3t^2 - 9t + 5$ เป็นสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ โดยที่ S คือ ระยะทาง มีหน่วยเป็นฟุต t คือ เวลา มีหน่วยเป็นวินาที จงหา

1. ความเร็วของวัตถุ เมื่อ $t = 1$
2. ความเร่งของวัตถุ เมื่อ $t = 2$

วิธีทำ จาก $S = t^3 - 3t^2 - 9t + 5$

จะได้ $V = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 6t - 9$

ดังนั้น ความเร็วของวัตถุ ณ เวลา $t = 1$ คือ

$3(1)^2 - 6(1) - 9 = -12$ ฟุตต่อวินาที

ความเร่งของวัตถุ $= a = \frac{dv}{dt} = 6t - 6$

ดังนั้น ความเร่งของวัตถุ ณ เวลา $t = 2$ คือ $(6 \times 2) - 6 = 6$ ฟุตต่อวินาที ^{2}

ใบกิจกรรมที่ 5.1

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อกำหนดสมการการเคลื่อนที่ให้ นักเรียนหาความเร็ว และความเร่งได้

จากข้อ 1 – 6 ให้วัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ในแนวนอน (เคลื่อนที่ไปทางขวา ถือว่าเป็นบวก เคลื่อนที่ไปทางซ้าย ถือว่าเป็นลบ) จงพิจารณาจากสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ และเวลาที่กำหนดให้ขณะนั้น วัตถุกำลังเคลื่อนที่ไปทางขวาหรือทางซ้าย

1. $S = t^2 - 2t + 7$, $t = 3$

วิธีทำ $S = 3^2 - 2(3) + 7 = 9 - 6 + 7 = 10$

ค่า S เป็นบวกแสดงว่าวัตถุเคลื่อนที่ไปทางขวา

2. $S = t^2 + t - 5$, $t = 1$

3. $S = t^3 - 2t^2 + 7t + 6$, $t = 1$

4. $S = t^3 - 5t^2 + 4$, $t = 3$

5. $S = t^3 - 4t^2 - 2t - 1$, $t = 2$

6. $S = t^4 + 2t - 1$, $t = 1$

ใบกิจกรรมที่ 5.2

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อกำหนดสมการการเคลื่อนที่ให้ นักเรียนหาความเร็ว และความเร่งได้

จากข้อ 1 – 3 จงหาความเร็วและความเร่งของวัตถุ ณ เวลาใดๆ และหาว่า ณ เวลาใด ที่มีความเร็วเท่ากับ 0 จากสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $S = t^2 - 4t + 2$

วิธีทำ $S = t^2 - 4t + 2$

$$V = \frac{dS}{dt} = 2t - 4$$

ดังนั้น ความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใดๆ $= 2t - 4$

จาก $V = 2t - 4$

$$a = \frac{dv}{dt} = 2$$

ดังนั้น ความเร่งของวัตถุ ณ เวลา t ใดๆ $= 2$

ถ้า $V = 0$ จะได้ $2t - 4 = 0$, $t = 2$

ดังนั้น ณ เวลา $t = 2$ ความเร็วของวัตถุ $= 0$

2. $S = 6 - 2t - 16t^2$

3. $S = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t - 5$

แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 5

วิชา คณิตศาสตร์ **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

เรื่อง ความเร็ว และความเร่ง **เวลา 30 นาที** **คะแนนเต็ม 10 คะแนน**

คำสั่ง ให้แสดงวิธีทำเป็นขั้นตอน

1. กำหนด $S = t^3 - 3t^2 + 4t + 8$ จงหาความเร็วขณะเวลา $t = 2$

2. วัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ตามสมการ $S = \frac{1}{2}t^3 - 2t$ โดยที่ S เป็นระยะทางจากจุดเริ่มต้นเมื่อวัตถุเคลื่อนที่ไป t วินาที มีหน่วยเป็นเมตร จงหาความเร่งในขณะเวลา $t = 2$

3. ให้ $S = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$ โดยที่ S มีหน่วยเป็นฟุต และ t มีหน่วยเป็นวินาที จงหา
   1) ความเร็วของวัตถุที่ $t = 2$
   2) อัตราเร็วของวัตถุที่ $t = 2$
   3) ระยะทางเมื่อความเร็วของวัตถุเท่ากับ 0

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6

เรื่อง **ความชันของเส้นโค้ง** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 3 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนแก้ปัญหาเกี่ยวกับความชันของเส้นโค้ง ณ จุดใดๆ และความชันเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดใดๆ โดยใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อกำหนดสมการเส้นโค้ง ให้นักเรียนหาความชันของเส้นโค้ง และสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดใดๆ ได้

2. แนวความคิดหลัก

- ความชันของเส้นโค้งที่จุด P ใดๆ คือ ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P
- อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่ $x = x_1$ คือ ความชันของเส้นสัมผัสกราฟ $y = f(x)$ ที่จุด $p(x_1, y_1)$ หรือกล่าวว่า $f'(x_1)$ = ความชันของเส้นสัมผัสกราฟ $y = f(x)$ ที่จุด $x = x_1$ สรุปว่า
- $f'(x)$ = ความชันของเส้นสัมผัสกราฟ $y = f(x)$ ที่จุด (x, y) ใด ๆ

3. เนื้อหาสาระ

3.1 รูปทั่วไปของสมการเส้นตรง $y = mx + C$ เมื่อ m คือ ความชันของเส้นตรง และ C คือค่าคงตัว และ $y - y_1 = m(x - x_1)$

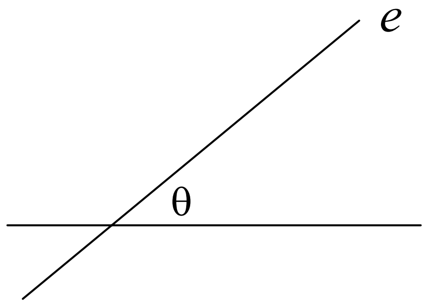
3.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

3.3 นิยามเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $P(x, y)$ ใด ๆ และนิยามความชันเส้นโค้ง ที่จุด $P(x, y)$ใดๆ

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

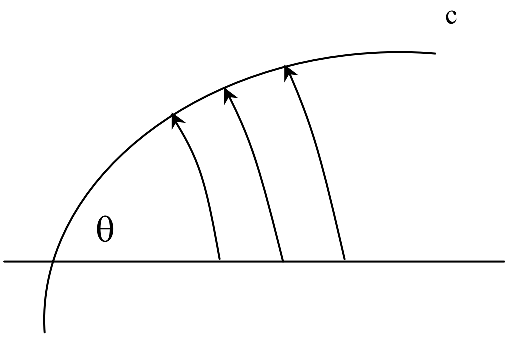
ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

4.1 ครูทบทวนการหาความชันของเส้นตรงจากค่าของ tan ของมุมของเส้นตรงที่ทำกับแกน x



จะได้ว่าความชันของเส้นตรง $e = \tan\theta$

4.2 กำหนดเส้นโค้งดังรูป

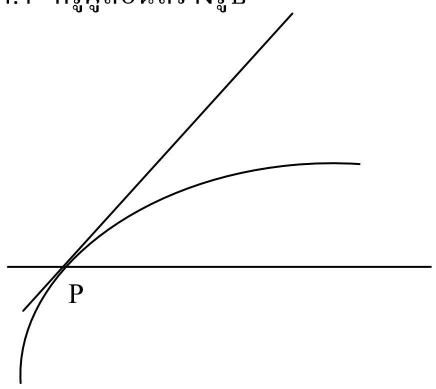


จากรูป ครูบอกว่าเราไม่สามารถหามุม θ ได้ เนื่องจากมุมในแต่ละตำแหน่งของปลายลูกศรไม่เท่ากัน ทำให้เราหา tan θ ไม่ได้ แสดงว่าโดยทั่วไปจะหาความชันของเส้นตรงเท่านั้น

ขั้นสอน

4.3 ครูกระตุ้นให้นักเรียนมีความต้องการที่จะทราบว่า ถ้าเราจำเป็นต้องหาความชันของ เส้นโค้งควรทำอย่างไร

4.4 ครูผู้สอนสร้างรูป



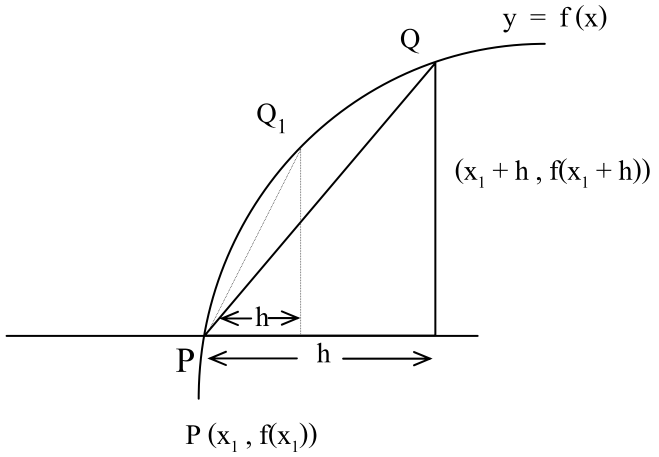
บอกนักเรียนว่า ถ้าจำเป็นต้องหาความชันเส้นโค้ง เราต้องใช้เส้นตรงที่ใกล้เคียงกับเส้นโค้งที่สุดมาเป็นตัวแทน ซึ่งเส้นตรงดังกล่าว คือ **เส้นสัมผัส** นั่นเอง

จากรูปถ้าจะหาความชันของเส้นโค้ง ณ จุด P ก็หาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P แทน

ครูให้นิยาม

ความชันของเส้นโค้งที่จุด P ใดๆ คือ ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P

4.5 ครูอธิบายถึงวิธีการหาความชันของเส้นสัมผัส โดยใช้กราฟของเส้นโค้ง



ตามรูปหาความชันของเส้นตรง

$$PQ = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{x_1 + h - x_1}$$

$$= \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

จากนั้นครูแสดงให้นักเรียนเห็นว่า ขณะที่ Q เปลี่ยนมาอยู่ที่ Q_1 และเปลี่ยนมาเรื่อยๆ จนทับจุด P ส่วนของเส้นตรง PQ จะเป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด P และขณะที่ Q เข้าใกล้ P ค่า h จะเข้าใกล้ O ครูผู้สอนสรุปเป็นหลักการ ดังนี้

จากการที่จุด Q เคลื่อนเข้าหาจุด P ตามแนวเส้นโค้ง $y = f(x)$ ผลที่ตามมาก็คือ

1. ส่วนของเส้นตรง PQ จะเข้าใกล้เส้นสัมผัสกราฟที่จุด P
2. ระยะห่าง PQ ตามแนวแกน x จะเข้าใกล้ 0 $(h \to 0)$

ดังนั้น ความชันของส่วนของเส้นตรง PQ จะกลายเป็นความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่จุด P ขณะที่ $h \to 0$ จะได้ว่า

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \quad = \quad \text{ความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่จุด P}$$

แต่จากบทนิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} \quad = \quad f'(x)$$

สรุปได้ว่า

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	$y = f(x)$ ที่	$x = x_1$ คือ
ความชันของเส้นสัมผัสกราฟ	$y = f(x)$ ที่จุด	$P = (x_1, y_1)$

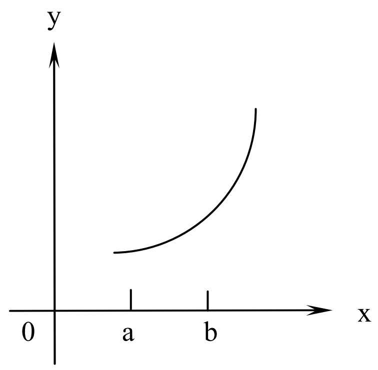
หรือ $f'(x)$ = ความชันของเส้นสัมผัสกราฟ $y = f(x)$ ที่จุด (x, y) ใดๆ

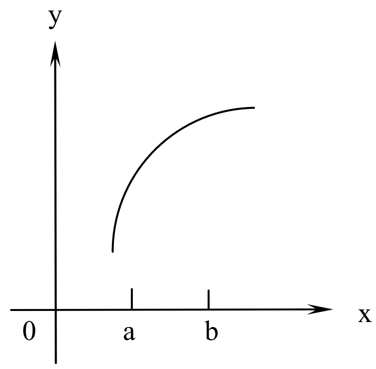
4.6 ครูให้นักเรียนหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง จากสมการเส้นโค้งที่กำหนดให้ เช่น กำหนดฟังก์ชัน $y = x^2 - 4x$ ครูให้นักเรียนช่วยกันหาความชันของเส้นโค้งที่จุด (4 , 0) และสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (4 , 0)

4.7 แจกใบความรู้ที่ 6 ให้นักเรียนศึกษาเพื่อตรวจสอบความเข้าใจในเนื้อหาที่เรียน

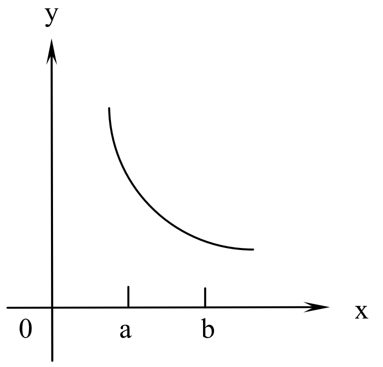
4.8 ครูบอกนักเรียนว่า ความชันของเส้นโค้งหรือความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันอย่างหนึ่ง ความชันของเส้นโค้งที่เป็นจำนวนบวก หรือจำนวนลบ หรือศูนย์ ในช่วงที่กำหนดให้นั้น ทำให้รู้ว่าฟังก์ชันในช่วงนั้น ๆ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลด โดยสรุปจากกราฟ ดังนี้

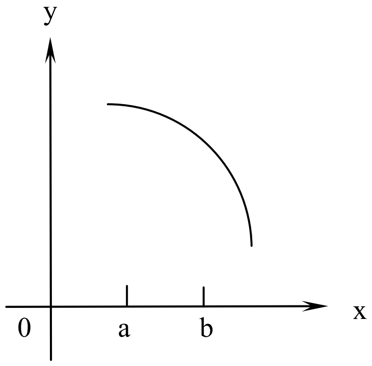
1) ถ้าความชันของเส้นโค้งเป็นจำนวนบวกในช่วง (a, b) ฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ดังกราฟ



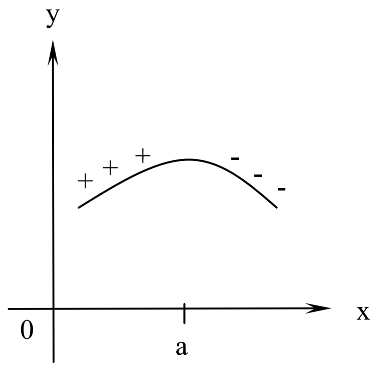


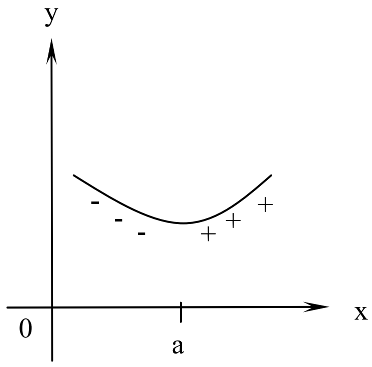
2) ถ้าความชันของเส้นโค้งเป็นลบในช่วง (a, b) ฟังก์ชันในช่วงนี้เป็นฟังก์ชันลด ดังกราฟ





ในทางกลับกัน เมื่อกำหนดกราฟของฟังก์ชันมาให้ นักเรียนควรบอกได้ว่าความชันของเส้นโค้ง ณ จุดนั้นเป็นบวกหรือลบ โดยอาศัยความรู้ข้างต้น เช่น





แล้วสรุปให้นักเรียนว่า ความรู้เรื่องฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด จะใช้เป็นพื้นฐานการเรียนเรื่องการประยุกต์อนุพันธ์

4.9 ให้นักเรียนทำกิจกรรมในใบกิจกรรมที่ 6

4.10 ตรวจสอบความถูกต้องในใบกิจกรรมที่ 6

4.11 ทำแบบทดสอบวัดรายจุดประสงค์ 6

5. แหล่งเรียนรู้

- ใบความรู้ที่ 6
- ใบกิจกรรมที่ 6
- แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 6

6. กระบวนการวัดและการประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	นักเรียนตอบคำถามถูกต้องเป็นส่วนใหญ่
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	นักเรียนสนใจเข้าร่วมกิจกรรมด้วยดี
3. ทำโจทย์ตรวจสอบความเข้าใจ	นักเรียนทำถูกต้องเกิน 80%
4. ทำโจทย์แบบฝึกหัด	นักเรียนทำแบบฝึกหัดเกิน 90%
5. ทำแบบทดสอบรายจุดประสงค์	นักเรียนทำถูกต้องทุกข้อ
6. ทำแบบทดสอบก่อน / หลังเรียน	–

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

....

....

....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....

....

....

....

....

....

ใบความรู้ที่ 6

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อกำหนดสมการเส้นโค้งให้ นักเรียนหาความชันของเส้นโค้ง และสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดใดๆ ได้

เนื้อหา

กำหนด $y = f(x)$ เป็นสมการของเส้นโค้ง ถ้า f มีอนุพันธ์ที่ a แล้ว

a. ความชันของเส้นโค้งที่จุด (a, b) คือ $f'(a)$

b. ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (a, b) คือ $f'(a)$

c. ถ้า f ไม่มีอนุพันธ์ที่ a แล้ว เส้นโค้งไม่มีความชันที่จุด (a, b)

d. เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (a, b) ไม่มีความชัน

สมการของเส้นสัมผัส

กำหนด L_1 เป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด (a , b)

ถ้า f มีอนุพันธ์ที่ a จะได้ว่า L_1 มีความชัน $= f'(a)$

ถ้า f ไม่มีอนุพันธ์ที่ a จะได้ว่า L_1 ไม่มีความชัน

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัส (L_1) คือ

1. $y - b = f'(a)\ (x - a)$ ถ้า $f'(a)$ มี

2. $x = a$ ถ้า $f'(a)$ ไม่มี (เส้นตรงขนานกับแกน y)

ใบกิจกรรมที่ 6

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อกำหนดสมการเส้นโค้งให้ นักเรียนหาความชันของเส้นโค้ง และสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดใดๆ ได้

1. กำหนดสมการเส้นโค้งเป็น $y = x^2 + 2x - 1$ จงหาความชันของเส้นโค้งที่จุด (1 , 2)

วิธีทำ $y = x^2 + 2x - 1$

$\frac{dy}{dx} = 2x + 2$

ที่จุด (1, 2) จะได้ $\frac{dy}{dx} = 2(1) + 2 = 4$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด (1, 2) = 4

2. กำหนดสมการเส้นโค้งเป็น $y = x^2 - 4x + 3$ จงหาความชันของเส้นโค้งที่จุด (–1 , 8)

....

....

....

....

....

....

3. กำหนดเส้นโค้งมีสมการเป็น $y = x^2 - 2x + 1$ จงหาสมการของเส้นสัมผัส ซึ่งสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (1, 0)

วิธีทำ $y = x^2 - 2x + 1$

$y' = 2x + 1$

ที่จุด (1,0) จะได้ $y' = 2(1) + 1 = 3$ ดังนั้น ความชัน = 3

สมการเส้นสัมผัส $y - y_1 = m(x - x_1), (x_1, y_1) = (1, 0)$

$y - 0 = 3(x - 1)$

$y = 3x - 3$

สมการเส้นสัมผัส คือ $y - 3x + 3 = 0$

4. จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3 - 2x^2 + 3$ ที่จุด (2, 3)

....

....

....

....

....

5. กำหนด $y = f(x) = x^2 + 2x + 5$ จงหาความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด (2, 13)

....

....

....

....

....

6. กำหนด $y = 2x^2 - x + 5$ จงหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด (1, 6)

....

....

....

....

....

7. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 - 3x + 5$ ที่จุด (4, 9)

....

....

....

....

....

8. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $xy = 1$ ที่จุด $(2, \frac{1}{2})$

....

....

....

....

....

9. จงหาสมการเส้นตรงที่ลากมาตั้งฉากกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = 2x^2 + x + 3$ ที่จุดสัมผัส $(1, 6)$

....

....

....

....

....

10. เส้นตรงซึ่งขนานกับเส้นตรง $2x + y + 4 = 0$ จะสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 - 4x + 5$ ที่จุดใด

....

....

....

....

....

11. เส้นตรงซึ่งตั้งฉากกับเส้นตรง $x + 4y - 5 = 0$ จะสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 + 6x + 10$ ที่จุดใด

....

....

....

....

....

12. จงหาสมการเส้นตรงซึ่งสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 - 3x + 5$ และขนานกับเส้นตรง $x + y - 5 = 0$

....

....

....

....

13. จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \frac{4}{x}$ ซึ่งเส้นสัมผัสเส้นโค้งนี้ตั้งฉากกับเส้นตรง $x - y - 5 = 0$

....

....

....

....

14. ถ้าเส้นตรง $y = ax + b$ สัมผัสเส้นโค้ง $y = 2x^2 - x + 6$ ที่จุด (1, 7) จงหาค่า a

....

....

....

....

15. ถ้าเส้นตรง $4x - y + 2 = 0$ สัมผัสเส้นโค้ง $y = -x^2 + 1$ ที่จุด (a, b) จงหาค่าของ a + b

....

....

....

....

16. จงหาสมการเส้นตรงที่ลากผ่านจุด (2, 3) และตั้งฉากกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = 2x - x^2$ ที่จุด (-1, -3)

....

....

....

....

....

แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 6

วิชา คณิตศาสตร์ **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

เรื่อง ความชันของเส้นโค้ง **เวลา 30 นาที** **คะแนนเต็ม 10 คะแนน**

คำสั่ง ให้แสดงวิธีทำเป็นขั้นตอน

1. กำหนด $y = -x^3 + 3x + 1$ จงหาความชันของเส้นโค้งที่จุด $(2, -1)$

2. จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3 - 2x^2 + 4$ ที่จุด $(2, 4)$

3. กำหนดสมการเส้นโค้ง $y = x^2 - 2x + 1$ จงหาความชัน และสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(2, 1)$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7

เรื่อง **อนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชัน และอนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิท** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 3 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนสามารถหาอนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชันได้
นักเรียนสามารถหาอนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชันคอมโพสิทได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้นักเรียนหาอนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชัน และอนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิทได้

2. แนวความคิดหลัก

ถ้า f เป็นฟังก์ชันแล้ว f' จะเป็นฟังก์ชัน ซึ่งมีโดเมนเป็น $\{ x \in D_f | f$ มีอนุพันธ์ที่ $x \}$

ถ้า f' มีอนุพันธ์ที่ x เรียกอนุพันธ์ของ f' ที่ x ว่า**อนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ f ที่ x** เขียนแทนด้วย $f''(x)$

ถ้า f'' มีอนุพันธ์ที่ x เรียกอนุพันธ์ของ f'' ที่ x ว่า**อนุพันธ์อันดับที่ 3 ของ f ที่ x** เขียนแทนด้วย $f^{(3)}(x)$

ถ้า $f^{(3)}(x)$ มีอนุพันธ์ที่ x เรียกอนุพันธ์ของ $f^{(3)}$ ที่ x ว่า**อนุพันธ์อันดับที่ 4 ของ f ที่ x** เขียนแทนด้วย $f^{(4)}(x)$

ในกรณีทั่วไป สำหรับ $n \geq 3$ ถ้า $f^{(n)}$ มีอนุพันธ์ที่ x เรียกอนุพันธ์ของ $f^{(n)}$ ที่ x ว่า **อนุพันธ์อันดับที่ $(n+1)$ ของ f ที่ (x)** เขียนแทนด้วย $f^{(n+1)}(x)$

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนอนุพันธ์อันดับที่ n ของ f ที่ x คือ

$$f^{(n)}(x)\ ,\ \frac{d^n y}{dx^n}\ ,\ \frac{d^n}{dx^n}(f(x))\ ,\ y^{(n)}, y^{(n)}(x)$$

3. เนื้อหาสาระ

- อนุพันธ์ที่มีอันดับมากกว่า 1
- อนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิท

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

4.1 ครูทบทวนให้นักเรียนว่า เมื่อกำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ ถ้าสามารถหาอนุพันธ์ของ f ที่ x ได้ เรียก f' ว่าเป็นฟังก์ชันใหม่ของ f เราอาจหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f' ที่ x ได้อีก

ขั้นสอน

4.2 ครูยกตัวอย่างฟังก์ชันบางฟังก์ชันมาให้ เช่น $f(x) = x^2 - 2x$ ให้นักเรียนหา $f'(x)$ ซึ่งนักเรียนควรจะบอกได้ว่า $f'(x) = 2x - 2$ จากนั้นอธิบายว่าเนื่องจาก $f'(x) = 2x - 2$ เป็นฟังก์ชันๆ หนึ่ง สมมุติให้ $g(x) = f'(x)$ ดังนั้น $g(x) = 2x - 2$ ให้นักเรียนหา $g'(x)$ จะได้ $g'(x) = 2$ ครูบอกนักเรียนว่า $g'(x)$ คืออนุพันธ์ของฟังก์ชันของ f' ที่ (x)

4.3 ครูแจกใบความรู้ที่ 7 ให้นักเรียนศึกษาแล้วช่วยกันสรุปความหมายของอนุพันธ์อันดับ 2 ของฟังก์ชัน $f(x)$ คือ

$$f''(x) \text{ หรือ } \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$$

4.4 ครูกำหนดฟังก์ชัน f และให้นักเรียนฝึกหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน f

4.5 ครูบอกนักเรียนว่า เรียกอนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่ 2 ว่าอนุพันธ์อันดับที่ 3 ของฟังก์ชัน f สัญลักษณ์ที่ใช้แทน คือ $f^{(3)}(x)$

4.6 ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปว่า อนุพันธ์ของอนุพันธ์อันดับที่ $n - 1$ คืออนุพันธ์อันดับที่ n ของฟังก์ชัน f สัญลักษณ์ที่ใช้แทน คือ $f^{(n)}(x)$

4.7 ครูให้นักเรียนศึกษากฎลูกโซ่ พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบเพื่อให้นักเรียนเข้าใจในการใช้สูตร

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

4.8 ให้นักเรียนทำกิจกรรมในใบกิจกรรม 7

4.9 ตรวจสอบความถูกต้องและอธิบายเพิ่มเติม ถ้านักเรียนยังไม่เข้าใจในจุดใด

4.10 ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเสริม พร้อมทั้งตรวจสอบความถูกต้อง

4.11 ทำแบบทดสอบรายจุดประสงค์ 7

5. แหล่งเรียนรู้

- ใบความรู้ที่ 7
- ใบกิจกรรมที่ 7
- แบบฝึกหัดเสริม
- แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 7

6. กระบวนการวัดและการประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	นักเรียนตอบคำถามถูกต้องเป็นส่วนใหญ่
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	นักเรียนสนใจเข้าร่วมกิจกรรมด้วยดี
3. ทำโจทย์ตรวจสอบความเข้าใจ	นักเรียนทำถูกต้องเกิน 80%
4. ทำโจทย์แบบฝึกหัด	นักเรียนทำแบบฝึกหัดเกิน 90%
5. ทำแบบทดสอบรายจุดประสงค์	นักเรียนทำถูกต้องไม่ต่ำกว่า 4 ข้อ
6. ทำแบบทดสอบก่อน / หลังเรียน	–

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

....

....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....

....

....

....

....

ใบความรู้ที่ 7

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้ นักเรียนหาอนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชันได้

เนื้อหา

- **อนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชัน**

ได้กล่าวมาแล้วว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันแล้ว f' จะเป็นฟังก์ชัน ซึ่งมีโดเมนเป็น $\{ x \in D_f \mid f$ มีอนุพันธ์ที่ $x \}$ ดังนั้น เราสามารถกล่าวถึงอนุพันธ์ของ f' โดยทั่วไปจะได้ว่า

ถ้า f' มีอนุพันธ์ที่ x เรียกอนุพันธ์ของ f' ที่ x ว่า อนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ f ที่ x เขียนแทนด้วย $f''(x)$ หรือ $\frac{d^2y}{dx^2}$

ถ้า f'' มีอนุพันธ์ที่ x เรียกอนุพันธ์ของ f'' ที่ x ว่า อนุพันธ์อันดับที่ 3 ของ f ที่ x เขียนแทนด้วย $f^{(3)}(x)$ หรือ $\frac{d^3y}{dx^3}$

ถ้า $f^{(3)}(x)$ มีอนุพันธ์ที่ x เรียกอนุพันธ์ของ $f^{(3)}(x)$ ที่ x ว่า อนุพันธ์อันดับที่ 4 ของ f ที่ x เขียนแทนด้วย $f^{(4)}(x)$ หรือ $\frac{d^4y}{dx^4}$

ในกรณีทั่วไปสำหรับ $n \geq 3$ ถ้า $f^{(n)}$ มีอนุพันธ์ที่ x เรียกอนุพันธ์ของ $f^{(n)}$ ที่ x ว่าอนุพันธ์อันดับที่ $(n + 1)$ ของ f ที่ (x) เขียนแทนด้วย $f^{(n+1)}(x)$ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนอนุพันธ์อันดับที่ n ของ f ที่ x นอกจาก $f^{(n)}(x)$ ได้แก่ $\frac{d^n y}{dx^n}$, $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$, $y^{(n)}$, $y^{(n)}(x)$

- **อนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิท**

กฎลูกโซ่ (The Chain Rule) ฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้ที่ a และฟังก์ชัน g หาอนุพันธ์ได้ที่ $f(a)$ จะได้ว่า $g o f$ หาอนุพันธ์ได้ที่ a และ $(g o f)'(a) = g'(f(a))\ f'(a)$

ถ้า $f = \{(x, u) \mid u = f(x)\}$

$g = \{(u, y) \mid y = g(u)\}$

เราอาจเขียนแทน $(g o f)'(x) = g'(f(x))\ f'(x)$ ด้วย

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

จากกฎลูกโซ่จะได้ $\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} \cdot \frac{d}{dx}(f(x))$

ใบกิจกรรมที่ 7

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนหาอนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชัน และอนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิทได้

คำสั่ง จงหาอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $y = x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 3$
2. $y = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{5}}$
3. $y = 2 + 3x$
4. $y = \sqrt{x}$
5. $y = (x + 2)(3x - 1)$
6. $y = x^2 - 2x + 5$
7. $y = 2x^2 - 3x + 4$
8. $y = x^2$
9. $y = 2x$
10. $y = 2x^2 + x$
11. $y = \sqrt{2-3x}$
12. $y = \sqrt{5x+2}$
13. $y = (3x - 1)(2x + 5)$
14. $y = (x - 1)^3 (x + 2)^4$
15. $y = (x^3 - 3x)^4$
16. $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$
17. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$
18. $y = (3 + 4x - x^2)^2$
19. $y = \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{4}{\sqrt{x}}$
20. $y = 2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$
21. $y = x\sqrt{3-2x^2}$
22. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - x^2$
23. $y = 2\sqrt{x} - x^{\frac{3}{2}}$
24. $y = (x + \dfrac{1}{\sqrt{x}})^2$
25. $y = \dfrac{(x^2+3)^2}{2x^{\frac{3}{2}}}$
26. $y = \dfrac{5\sqrt{x} - 3x^2}{\sqrt{x}}$
27. $y = \sqrt{2x - x^2}$
28. $y = f(x) = x^2(x^5 - 1)$
29. $y = \sqrt[3]{x^3 + 3x}$
30. $f(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$

แบบฝึกหัดเสริม

1. จงหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   1) $f(x) = 3x + 1$

....

....

....

....

   2) $f(x) = x^2 - 2x + 5$

....

....

....

....

   3) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

....

....

....

....

   4) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$

....

....

....

....

5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

....

....

....

....

2. จงหาอนุพันธ์อันดับที่ 3 ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 4$

....

....

....

....

2) $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 6$

....

....

....

....

3) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

....

....

....

....

3. กำหนด $y = (x+1)^3$ จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$

....

....

....

....

....

....

4. กำหนด $y = \sqrt{x+1}$ จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$

....

....

....

....

....

....

5. กำหนด $f(x) = (1-3x)^3$ จงหา $f''(1)$

....

....

....

....

....

....

แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 7

วิชา คณิตศาสตร์ **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

เรื่อง อนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชัน และอนุพันธ์ของฟังก์ชันคอมโพสิท **เวลา 30 นาที**

คะแนนเต็ม 10 คะแนน

คำสั่ง ให้แสดงวิธีทำเป็นขั้นตอน

จงหาอนุพันธ์อันดับสอง และอันดับสามของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = x^2 + 2x + 5$

....

....

....

....

....

2. $f(x) = \sqrt{x}$

....

....

....

....

....

3. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 10$

....

....

....

....

....

4. $y = (1 - 5x)^6$

....

....

....

....

....

5. $y = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 + 1}}$

....

....

....

....

....

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8

เรื่อง **การประยุกต์ของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 4 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนสามารถหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชันโดยใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชันได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 นักเรียนสามารถหาค่าต่ำสุดหรือสูงสุดของฟังก์ชันได้
1.2 นักเรียนสามารถหาค่าต่ำสุดสัมพัทธ์หรือค่าสูงสุดสัมพัทธ์
1.3 นักเรียนสามารถแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดของฟังก์ชันได้

2. แนวความคิดหลัก

ประโยชน์อย่างหนึ่งของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน คือ ใช้ในการหาจุดสูงสุดสัมพัทธ์ และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

3. เนื้อหาสาระ

ทฤษฎีบท เมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง S ใดๆ

1. ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก x ในช่วง S แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันลดบนช่วง S
2. ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก x ในช่วง S แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง S

บทนิยาม ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ ถ้ามีช่วง $(a, b) \subset D_f$ และ $c \in (a, b)$ โดยที่ $f(c) > f(x)$ สำหรับทุก x ในช่วง (a, b) ที่ $x \neq c$

ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ ถ้ามีช่วง $(a, b) \subset D_f$ และ $c \in (a, b)$ โดยที่ $f(c) < f(x)$ สำหรับทุก x ในช่วง (a, b) ที่ $x \neq c$

ทฤษฎีบท กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง S ใดๆ และ c เป็นค่าวิกฤตของ f ซึ่ง $f'(c) = 0$

1. ถ้า $f''(c) > 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
2. ถ้า $f''(c) < 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

บทนิยาม ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ที่ $x = c$
ถ้า $f(c) > f(x)$ สำหรับทุก x ในโดเมนของ f ที่ $x \neq c$
ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ ที่ $x = c$
ถ้า $f(c) < f(x)$ สำหรับทุก x ในโดเมนของ f ที่ $x \neq c$

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

4.1 ครูทบทวนคำว่า "ค่าของฟังก์ชัน" และให้นักเรียนหาค่าต่ำสุดและสูงสุดของฟังก์ชัน เช่น

1) ถ้า $y = f(x) = x^2$ แล้ว ค่าของ y หรือ f(x) มีค่าต่ำสุด หรือสูงสุดเท่าใด
2) ถ้า $y = -x^2 + 5$ แล้ว y มีค่าต่ำสุด หรือสูงสุดเท่าใด
3) ถ้า $y = x^2 + 4x + 6$ แล้ว y มีค่าต่ำสุด เป็นเท่าใด

จัดให้อยู่ในรูป $y = (x+2)^2 + 2$ หรือเขียนกราฟแล้วหาจุดยอด โดยใช้สูตร

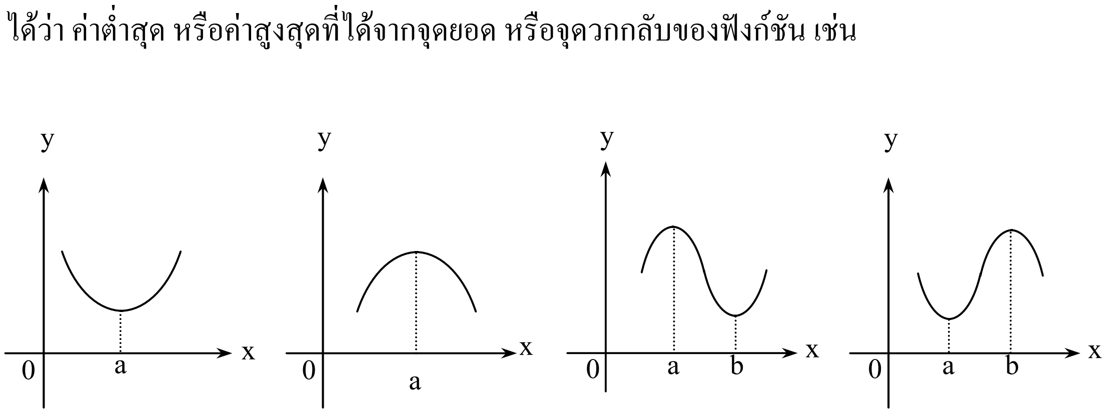
$$x = -\frac{b}{2a}\ ,\quad y = c - \frac{b^2}{4a}$$

ขั้นสอน

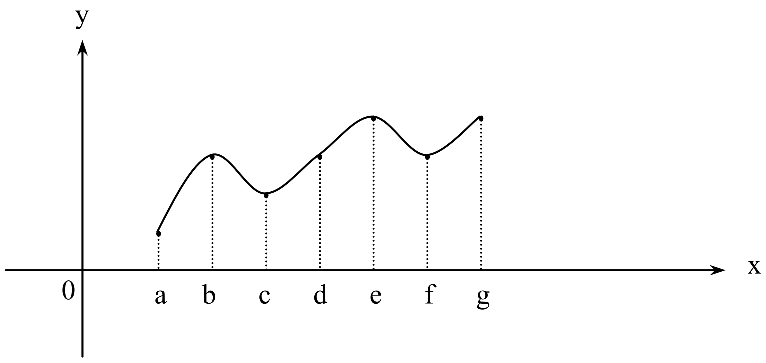
4.2 ครูกำหนดฟังก์ชันในรูปที่จะหาค่าต่ำสุดหรือสูงสุดได้ยาก ถ้าใช้วิธีดังกล่าวข้างต้น เช่น ฟังก์ชัน $y = 3x^4 - 2x^3 + x - \frac{1}{5}$ ครูแนะนำว่า เราสามารถใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชันแก้ปัญหาประเภทนี้ได้ หลังจากนั้นครูทบทวน "ฟังก์ชันเพิ่ม" "ฟังก์ชันลด" เพื่อให้นักเรียนพิจารณาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งของกราฟ ของฟังก์ชันเพิ่มหรือลด โดยใช้กราฟประกอบคำอธิบาย

4.3 ครูบอกทฤษฎีบทที่ใช้การพิจารณาว่า ฟังก์ชันเพิ่มหรือลดโดยอาศัยอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้

4.4 ครูให้นักเรียนพิจารณาค่าต่ำสุด หรือค่าสูงสุด จากกราฟที่กำหนดให้ เพื่อให้นักเรียนสรุปได้ว่า ค่าต่ำสุด หรือค่าสูงสุดที่ได้จากจุดยอด หรือจุดวกกลับของฟังก์ชัน เช่น



4.5 ครูเขียนกราฟใหม่ดังรูป เพื่อให้นักเรียนสรุปว่า



จุดที่กราฟวกกลับนั้น บางครั้งไม่ใช่จุดที่ให้ค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดเสมอไป
แต่เป็นค่าต่ำสุด หรือค่าสูงสุดในช่วงหนึ่ง ๆ เท่านั้น

ครูตกลงกับนักเรียนว่า ค่าต่ำสุด หรือค่าสูงสุดที่พิจารณาโดยเทียบเคียงกับค่าข้างเคียงทั้งซ้ายและขวา จะเรียก **“ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์”** และ **“ค่าสูงสุดสัมพัทธ์”** ตามลำดับ ซึ่งเป็นค่าต่ำสุด หรือค่าสูงสุด ณ จุดที่กราฟวกกลับนั่นเอง

4.6 ครูบอกนิยาม ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์

4.7 ครูเขียนกราฟของฟังก์ชันหลายๆ ฟังก์ชัน ให้นักเรียนช่วยกันตอบว่า จุดใดเป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ และจุดใดเป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์

4.8 ครูบอกนักเรียนว่า นอกจากจะหาจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือจุดสูงสุดสัมพัทธ์ โดยพิจารณาจากกราฟแล้ว ยังสามารถหาจุดดังกล่าวได้ โดยพิจารณาจากอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้

4.9 ครูแสดงวิธีการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ โดยใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชันอันดับ 1 และอนุพันธ์อันดับ 2

4.10 ครูกำหนดฟังก์ชันให้ นักเรียนหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ดังวิธีการในข้อ 4.9 พร้อมทั้งศึกษาจากใบความรู้ที่ 8

4.11 ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 8.1

4.12 ครูแนะนำให้นักเรียนรู้จักคำว่า “ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์” และ “ค่าสูงสุดสัมบูรณ์” แล้วครูบอกบทนิยาม

4.13 ครูกำหนดฟังก์ชัน แล้วให้นักเรียนช่วยกันหาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์หรือค่าสูงสุดสัมบูรณ์

4.14 ครูยกตัวอย่างโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าต่ำสุด หรือค่าสูงสุด ซึ่งสามารถแก้ได้โดยใช้อนุพันธ์

4.15 ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 8.2

4.16 ครูตรวจสอบความถูกต้องของการทำกิจกรรมในใบกิจกรรม 8.2 และอธิบายเพิ่มเติมในส่วนที่นักเรียนยังไม่เข้าใจ

4.17 ให้นักเรียนทำแบบทดสอบรายจุดประสงค์ 8

4.18 ให้นักเรียนทำแบบทดสอบเพื่อประเมินตนเองหลังเรียน (2)

5. แหล่งเรียนรู้

- ใบความรู้ที่ 8
- ใบกิจกรรมที่ 8.1 และ 8.2
- แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 8
- แบบทดสอบเพื่อประเมินตนเองหลังเรียน (2)

6. กระบวนการวัดและการประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	นักเรียนตอบคำถามถูกต้องเป็นส่วนใหญ่
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	นักเรียนสนใจเข้าร่วมกิจกรรมด้วยดี
3. ทำโจทย์ตรวจสอบความเข้าใจ	นักเรียนทำถูกต้องเกิน 80%
4. ทำโจทย์แบบฝึกหัด	นักเรียนทำแบบฝึกหัดเกิน 90%
5. ทำแบบทดสอบรายจุดประสงค์	นักเรียนทำถูกต้องไม่ต่ำกว่า 4 ข้อ
6. ทำแบบทดสอบก่อน / หลังเรียน	นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียนถูกต้องไม่ต่ำกว่า 12 ข้อ

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....

....

....

ใบความรู้ที่ 8

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าต่ำสุด หรือสูงสุดของฟังก์ชันได้

เนื้อหา

- ขั้นตอนในการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์จากฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่กำหนดให้

1. หา $f'(x)$
2. ให้ $f'(x) = 0$ หาค่า x ที่ทำให้สมการดังกล่าวเป็นจริง
3. หาค่า x ที่ทำให้ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้
4. จากข้อ 2 และข้อ 3 จุดที่ x เท่ากับค่าดังกล่าว คือ จุดวิกฤต ซึ่งจุดดังกล่าวนี้จะเป็นกรณีใด กรณีหนึ่ง ใน 3 กรณีต่อไปนี้

    จุดดังกล่าวเป็นจุดที่ทำให้เกิดค่าสูงสุดสัมพัทธ์
    จุดดังกล่าวเป็นจุดที่ทำให้เกิดค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
    จุดดังกล่าวเป็นจุดที่ไม่ทำให้เกิดค่าสูงสุดสัมพัทธ์และไม่ทำให้เกิดค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

5. เพื่อที่จะได้ข้อสรุปที่แน่นอนว่าจะเป็นกรณีใดๆ เราต้องเอาจุดวิกฤตดังกล่าวไปตรวจสอบ ซึ่งวิธีตรวจสอบมีอยู่ 2 วิธี คือ

วิธีที่ 1 ตรวจสอบโดยพิจารณาจากความชันของเส้นสัมผัส

(1) ถ้าความชันของเส้นสัมผัสเปลี่ยนจากบวกไปเป็นลบ จุดวิกฤตดังกล่าวจะทำให้เกิดค่าสูงสุดสัมพัทธ์

(2) ถ้าความชันของเส้นสัมผัสเปลี่ยนจากลบไปเป็นบวก จุดวิกฤตดังกล่าวจะทำให้เกิดค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

(3) นอกเหนือจากข้อ (1) และข้อ (2) ข้างต้น จุดวิกฤตดังกล่าวจะไม่ทำให้เกิดค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และไม่ทำให้เกิดค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

วิธีที่ 2 ตรวจสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับสอง

ต้องหา $f''(x)$ แล้วนำค่า x จากจุดวิกฤตไปแทนค่า x ใน $f''(x)$

(1) ถ้าผลที่ได้ทำให้ $f''(x) > 0$ แสดงว่าจุดวิกฤตดังกล่าวทำให้เกิดค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

(2) ถ้าผลที่ได้ทำให้ $f''(x) < 0$ แสดงว่าจุดวิกฤตดังกล่าวทำให้เกิดค่าสูงสุดสัมพัทธ์

(3) ถ้าผลที่ได้ทำให้ $f''(x) = 0$ แสดงว่าการตรวจสอบด้วยวิธีนี้ใช้ไม่ได้ ต้องย้อนกลับไปใช้วิธีที่ 1 คือ ตรวจสอบความชันของเส้นสัมผัส

ใบกิจกรรมที่ 8.1

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าต่ำสุด หรือสูงสุดของฟังก์ชันได้

จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ของฟังก์ชันแต่ละข้อต่อไปนี้ (ถ้ามี)

1. $f(x) = x^2 + 3$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^2 + 3$

$f'(x) = 2x$ (ความชันของเส้นสัมผัส ณ จุดใดๆ บนเส้นโค้ง)

ให้ $f'(x) = 0$ จะได้ $2x = 0$, $x = 0$

ในกรณี $x = 0$ เป็นจุดวิกฤต .... ①

จาก $f'(x) = 2x$ จะเห็นว่าสามารถหา $f'(x)$ ได้ทุกค่าของ x

ที่เป็นจำนวนจริง ดังนั้นในกรณีไม่มีจุดวิกฤต .... ②

จาก ① และ ② จุดวิกฤตมีจุดเดียว คือ $x = 0$

การตรวจสอบ

ถ้า $x = -1$ จะได้ $f'(x) = 2(-1) = -2$

ความชันของเส้นสัมผัสที่ $x = -1$ มีค่าเป็นลบ

ถ้า $x = 1$ จะได้ $f'(x) = 2(1) = 2$

ความชันของเส้นสัมผัสที่ $x = 1$ มีค่าเป็นบวก

แสดงว่า จุดวิกฤตดังที่กล่าว ทำให้เกิดค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

จาก $f(x) = x^2 + 3$

ถ้า $x = 0$ จะได้ $f(x) = 3$

ดังนั้นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ $= 3$

2. $f(x) = -3x^2 - 2$

....

....

....

....

....

....

....

....

3. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 2$

....

....

....

....

....

....

....

....

4. $f(x) = -3x^{\frac{2}{3}} + 2$

....

....

....

....

....

....

....

5. $f(x) = x^2 + 2x - 5$

....
....
....
....
....
....
....
....

6. $f(x) = -x^2 + x + 6$

....
....
....
....
....
....
....

7. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

....
....
....
....
....
....
....
....

ใบกิจกรรมที่ 8.2

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับค่าต่ำสุด หรือสูงสุดของฟังก์ชันได้

วิธีการหาค่าสูงสุด และค่าต่ำสุด เมื่อพบโจทย์ประเภทบรรยายมีขั้นตอนดังนี้

(1) อ่านโจทย์แล้วพยายามสร้างฟังก์ชันในรูป $y = f(x)$ โดยยึดหลักว่า ต้องการสิ่งใดมากที่สุด หรือน้อยที่สุด ให้สิ่งนั้น คือ y

(2) ให้สิ่งที่แปรเปลี่ยนในโจทย์เป็น x

(3) หาค่า y' และให้ $y' = 0$

(4) ดำเนินการตามวิธีในใบความรู้ที่ 8

1. เลขสองจำนวนบวกกันได้ 20 และคูณกันได้ค่ามากที่สุด จงหาเลขสองจำนวนนั้น

วิธีทำ ให้เลขสองจำนวนเป็น x และ $20 - x$

ให้ y = ผลคูณของเลขสองจำนวนนั้น

$y = x(20 - x) = 20x - x^2$

เพราะว่าต้องการให้ y มีค่ามากที่สุด

จาก $y = 20x - x^2$ จะได้ $y' = 20 - 2x$

ให้ $20 - 2x = 0$ จะได้ $x = 10$

เลขสองจำนวนนั้น คือ 10 และ 10

2. ต้องการใช้ลวดหนามยาว 200 เมตร เพื่อล้อมที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งด้านหนึ่งอยู่ติดริมฝั่งแม่น้ำและไม่ต้องล้อมรั้ว ถามว่าที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้จะมีพื้นที่มากที่สุด เมื่อมีด้านกว้างและด้านยาวเป็นเท่าไร

....

....

....

....

....

....

3. แผ่นสังกะสีรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแห่งหนึ่งกว้าง 10 นิ้ว และยาว 16 นิ้ว ต้องการตัดมุมทั้งสี่ออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเท่ากันทุกมุม แล้วพับส่วนที่เหลือเป็นกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากฝาเปิด จะต้องตัดมุมทั้งสี่เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละเท่าไร กล่องจึงจะมีปริมาตรมากที่สุด

....

....

....

....

....

....

4. สามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีด้านทั้งสามยาว 90, 120 และ 150 หน่วย จงหาความยาว และความกว้างของด้านของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีพื้นที่มากที่สุด ที่บรรจุอยู่ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปนี้

....

....

....

....

....

....

5. กล่องกระดาษทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากฝาปิดกล่องหนึ่ง ด้านยาวยาวเป็นสองเท่าของด้านกว้าง และกล่องใบนี้มีพื้นที่ผิวเท่ากับ 192 ตารางนิ้ว กล่องใบนี้จะมีขนาดเท่าไรจึงจะมีปริมาตรมากที่สุด

....

....

....

....

....

....

6. สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุอยู่ในวงกลม ซึ่งมีรัศมียาว 5 นิ้ว จะมีพื้นที่มากที่สุดเท่าใด

....

....

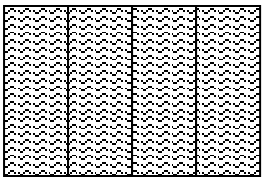
....

....

....

....

7.



ชายคนหนึ่งมีไม้ระแนงสำหรับทำรั้วได้ยาว 80 เมตร เขาต้องการล้อมบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้าพร้อมทั้งกั้นเป็น 4 ช่องเท่าๆ กันดังรูป พื้นที่มากที่สุดที่เขาจะล้อมได้รวมทั้งสิ้นเป็นเท่าไร

....

....

....

....

....

....

8. ปกติพ่อค้าเสื้อยืดผู้หนึ่ง ถ้าเขาขายเสื้อยืดไปราคาตัวละ 25 บาท เขาจะขายได้วันละ 500 ตัว แต่ถ้าเขาขายไปราคาตัวละ 24 บาท เขาจะขายวันละ 600 ตัว และถ้าเขาขายไปราคาตัวละ 23 บาท เขาจะขายได้วันละ 700 ตัว เป็นอัตราเช่นนี้เสมอไป จงหาว่าวันที่เขาขายเสื้อได้เงินมากที่สุด เขาตั้งราคาขายตัวละเท่าไร

....

....

....

....

....

....

9. ณรงค์รับผ้าเช็ดตัวมาขายครั้งละ 120 ผืน ปรากฏว่าถ้าเขาขายผืนละ 40 บาท เขาจะขายได้หมด แต่ถ้าเขาขายผืนละ 41 บาท เขาจะขายได้เพียง 118 ผืน เหลือ 2 ผืน ถ้าเขาขายไปผืนละ 42 บาท เขาจะขายได้ 116 ผืน เหลือ 4 ผืน และถ้าเขาขายไปผืนละ 43 บาท จะขายได้ 114 ผืน เหลือ 6 ผืน เป็นเช่นนี้ตลอดไป อยากทราบว่า ถ้าจะขายให้ได้เงินมากที่สุดเขาควรขายในราคาผืนละเท่าไร

....

....

....

....

....

10. โรงกลั่นน้ำมันแห่งหนึ่ง มีกำลังผลิตอยู่ระหว่าง 5,000 บาร์เรล ถึง 10,000 บาร์เรลต่อวัน ถ้ากลั่นน้ำมันวันละ 5,000 บาร์เรล จะได้กำไรบาร์เรลละ 75 บาท แต่ถ้ากลั่นเกินจากวันละ 5,000 บาร์เรลนี้ ผลกำไรคิดเป็นบาทจะลดลงบาร์เรลละ 0.01 เพื่อให้ได้กำไรสูงสุด ควรกลั่นน้ำมันวันละเท่าไร

....

....

....

....

....

11. ขว้างก้อนหินก้อนหนึ่งจากที่สูง 9.8 เมตร ขึ้นไปในอากาศตามแนวดิ่งด้วยความเร็วต้น 19.6 เมตรต่อวินาที ความสูงของก้อนหินจากพื้นดินเมื่อเวลาผ่านไป t วินาที หาจากสมการ $s = -4.9t^2 + 19.6t + 9.8$ จงหาว่าก้อนหินขึ้นไปได้สูงสุดเป็นระยะทางเท่าใด และในเวลาเท่าใด

....

....

....

....

....

....

แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 8

วิชา คณิตศาสตร์ **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

เรื่อง การประยุกต์ของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน **เวลา 50 นาที** **คะแนนเต็ม 10 คะแนน**

คำสั่ง ให้แสดงวิธีทำเป็นขั้นตอน

① จงหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และต่ำสุดสัมพัทธ์ ของฟังก์ชันต่อไปนี้ (ถ้ามี)

1) $f(x) = -3x^2 - 2$

....

....

....

....

....

....

2) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 2$

....

....

....

....

....

3) $f(x) = -3x^{\frac{2}{3}} + 2$

....

....

....

....

....

② ให้แสดงวิธีทำเป็นขั้นตอน

1) จงหาจำนวนเต็มบวกสองจำนวน ซึ่งรวมกันเท่ากับ 8 และผลบวกของกำลังสามของแต่ละจำนวนมีค่าน้อยที่สุด

....

....

....

....

....

....

....

....

2) หอคอยแห่งหนึ่งสูง 96 ฟุต ขว้างก้อนหินก้อนหนึ่งขึ้นไปในอากาศจากยอดหอคอยตามแนวดิ่งด้วยความเร็วต้น 80 ฟุตต่อวินาที จงหา

(1) เวลาที่ก้อนหินขึ้นไปสูงสุด

(2) ระยะทางที่ก้อนหินขึ้นไปสูงสุด

(3) ความเร็วของก้อนหินเมื่อตกถึงพื้นดิน

ถ้า $s = V_0t - 16t^2$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุตามแนวดิ่ง ด้วยความเร็วต้น V_0

....

....

....

....

....

....

....

....

แบบทดสอบเพื่อประเมินตนเองหลังเรียน (2)

วัตถุประสงค์ เพื่อเปรียบเทียบความก้าวหน้าในการเรียนรู้ของนักเรียนเรื่อง **“อนุพันธ์ของฟังก์ชัน”** ซึ่งจะทำให้ทราบว่าหลังจากที่ได้ดำเนินการสอนตามแผนการสอนที่ได้จัดทำขึ้น นักเรียนมีความรู้ถึงเกณฑ์ที่ได้กำหนดไว้หรือไม่

คำชี้แจง ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกที่สุด แล้วตอบลงในกระดาษคำตอบ

1. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ $f(x)$ เมื่อ x เปลี่ยนจาก x ไปเป็น $x+h$ คือ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ถ้า $f(x) = 4x+1$ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x)$ เมื่อ x เปลี่ยนจาก 2 ไปเป็น 5 มีค่าเท่ากับข้อใด

   ก. 4 ข. $\frac{14}{3}$

   ค. 12 ง. 14

2. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = x^2(x-3)+2$ คือ ข้อใด

   ก. $2x$ ข. $3x^2-6x$

   ค. $3x^2-6x+2$ ง. $2x(x-3)$

3. กำหนด $f(x) = 3x+1$, $g(x) = x^2$ $\frac{d}{dx}(g\circ f)(x)$ คือ ข้อใด

   ก. $18x-16$ ข. $18x+16$

   ค. $16x+8$ ง. $16x-8$

4. อนุพันธ์ของ $f(x)$ เมื่อ $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}}$ คือ ข้อใด

   ก. $2x^{\frac{1}{3}}$ ข. $2x^{-\frac{1}{3}}$

   ค. $\frac{2}{x^3}$ ง. $3x^{\frac{1}{3}}$

5. วัตถุเคลื่อนที่ตามสมการ $S = t^3-2t+5$ ความเร็วขณะเวลา t ใดๆ คือข้อใด

   ก. $3t$ ข. $6t$

   ค. $3t^2+5$ ง. $3t^2-2$

6. ถ้ากำหนด $S = t^3 - 3t^2 + 4t + 8$ ความเร็วขณะเวลา $t = 2$ ใดๆ คือข้อใด

ก. -4	ข. 2
ค. 4	ง. 12

7. กำหนด $S = t^5 - t^4 + t^3 + 2t - 1$ ความเร่งขณะเวลา $t = 1$ คือข้อใด

ก. -4	ข. 6
ค. 11	ง. 14

8. จากสมการ $y = 3x^3 - 4x^2 - x + 9$ ความชันของเส้นโค้งที่จุด $(-2, 5)$ คือข้อใด

ก. 51	ข. 20
ค. 12	ง. -21

9. จากสมการ $y = 3x^2 - 5x + 1$ สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งนี้ที่จุด $(1, -1)$ คือข้อใด

ก. $y = x$	ข. $y = x - 1$
ค. $y = x - 2$	ง. $y = x + 1$

10. สมการเส้นตรงซึ่งตั้งฉากกับเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $xy = 4$ ณ จุดสัมผัส $(-1, -4)$ คือข้อใด

ก. $4x - y + 8 = 0$

ข. $4x + y - 8 = 0$

ค. $4x + y + 8 = 0$

ง. $x - 4y - 15 = 0$

11. ถ้า $f(x) = 5x^3 - 3x^5$ แล้ว $f'(x)$ และ $f''(x)$ คือข้อใด

ก. $5x^2 - 3x^4,\ 5x - 3x^3$

ข. $15x^2 - 15x^4,\ 30x - 60x^3$

ค. $5x^4 - 3x^6,\ 5x^5 - 3x^7$

ง. $15x^3 - 15x^4,\ 15x - 15x^3$

12. ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $y = 7 - 6x - x^2$ คือข้อใด

ก. 16 ข. 7

ค. –3 ง. –20

13. จาก $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$ ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน คือข้อใด

ก. –4 และ 8 ข. 4 และ –8

ค. –8 และ –4 ง. –4 และ –8

14. ถ้าผลบวกของเลขสองจำนวน คือ 12 และผลคูณของเลขสองจำนวนนี้มีค่ามากที่สุด เลขสองจำนวนนี้ คือข้อใด

ก. 7 , 5 ข. 9 , 3

ค. 8 , 4 ง. 6 , 6

15. ในการวิจัยยาชนิดหนึ่งพบว่า เมื่อนำยานี้มา 10 cc. ทดลองฉีดเข้าไปในคนใดคนหนึ่ง จะพบว่าหลังจากนั้น x ชั่วโมง ความดันโลหิตของคนๆ นั้นเปลี่ยนไปตามสมการ $f(x) = \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x$ สมการนี้เป็นจริงเฉพาะ เมื่อ $0 \le x \le 6$ เพราะจะหมดฤทธิ์ยาหลังจากฉีดยาแล้ว 6 ชั่วโมง ภายใน 6 ชั่วโมงพบว่า ความดันโลหิตของผู้นั้นเป็นไป ดังข้อใด

ก. ลดลงใน 2 ชั่วโมงแรก และเพิ่มขึ้นใน 2 ชั่วโมงถัดมา แล้วลดลงใน 2 ชั่วโมงสุดท้าย

ข. เพิ่มขึ้นใน 2 ชั่วโมงแรก และลดลงใน 2 ชั่วโมงถัดมา แล้วเพิ่มขึ้นใน 2 ชั่วโมงสุดท้าย

ค. ลดลงต่ำสุดเมื่อเวลาผ่านไป 2 ชั่วโมง และเพิ่มขึ้นภายใน 4 ชั่วโมงสุดท้าย

ง. เพิ่มขึ้นสูงเมื่อเวลาผ่านไป 2 ชั่วโมง และลดลงต่ำภายใน 4 ชั่วโมงสุดท้าย

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9

เรื่อง **กระบวนการตรงกันข้ามกับการหาอนุพันธ์** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 4 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนแก้ปัญหาเกี่ยวกับโอเปอเรชันที่ตรงข้ามกับการหาอนุพันธ์ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 เมื่อกำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ให้ นักเรียนหาฟังก์ชันได้

1.2 เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้ นักเรียนหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันได้

1.3 เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้ นักเรียนหาอินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชันได้

2. แนวความคิดหลัก

การอินติเกรด เป็นการดำเนินการที่ตรงข้ามกับอนุพันธ์ กล่าวคือ ถ้ากำหนดอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ เราต้องหา $y = f(x)$ ***จะเรียกผลที่ได้นี้ว่า เป็น อินทิกรัล***

3. เนื้อหาสาระ

3.1 สมการเชิงอนุพันธ์

3.2 หลักเกณฑ์ของโอเปอเรชันตรงข้ามกับการหาอนุพันธ์ (ถ้า $\frac{dy}{dx} = x^n$, $n \neq -1$ แล้ว $y = \frac{x^{n+1}}{m+1} + c$)

3.3 วิธีการใช้โอเปอเรชันตรงข้ามกับการหาอนุพันธ์

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

4.1 ให้นักเรียนทำแบบทดสอบเพื่อประเมินตนเองก่อนเรียน (3)

ขั้นสอน

4.2 ครูเขียนแผนภาพ พร้อมยกตัวอย่างดังนี้

$$\boxed{\text{กำหนด } y = f(x) \text{ ให้}} \xrightarrow{\text{ใช้วิธีการหาอนุพันธ์}} \boxed{\text{ผลลัพธ์ คือ } f'(x)}$$

เช่น ถ้า $f(x) = x^2$ แล้ว $f'(x) = 2x$ หรือถ้า $f(x) = x^5$ แล้ว $f'(x) = 5x^4$

4.3 ครูบอกนักเรียนว่า จะศึกษาวิธีการที่กระทำย้อนกลับ กับการหาอนุพันธ์ ซึ่งเรียกว่า ***การอินทิเกรต*** วิธีการดังกล่าวคือ การหาฟังก์ชัน $y = f(x)$ เมื่อกำหนด $f'(x)$ มาให้ ดังแผนภาพ

ผลลัพธ์ที่ต้องการหา คือ $y = f(x)$	$\xleftarrow{\text{อินทิเกรต}}$	โจทย์กำหนด $f'(x)$ ให้

4.4 ครูให้นักเรียนสังเกต การหาอนุพันธ์ของ x^n จะพบว่า อนุพันธ์ของ $x^n = nx^{n-1}$ (เลขชี้กำลังของ x จะลดลง 1 เสมอ) ถ้าเป็นการกระทำที่ย้อนกลับคือ การอินทิเกรต เลขชี้กำลังจะต้องมีค่าเพิ่มขึ้น 1 เสมอ ครูยกตัวอย่างประกอบ

จาก $2x \xrightarrow{\text{อินทิเกรต}}$ จะได้ x^2

$x \xrightarrow{\text{อินทิเกรต}}$ จะได้ $\frac{x^2}{2}$

$3x^2 \xrightarrow{\text{อินทิเกรต}}$ จะได้ x^3

จากตัวอย่าง ทำให้ทราบว่า

จาก $\boxed{x^n \text{ อินทิเกรต จะได้ } \frac{x^{n+1}}{n+1} \ ; n \neq -1}$

ขั้นต่อไป ให้นักเรียนพิจารณา ดังนี้

$x^2 + 0 \xrightarrow{\text{หาอนุพันธ์}} 2x$ $\quad x^2 + 1 \xrightarrow{\text{หาอนุพันธ์}} 2x$ $\quad x^2 + 7 \xrightarrow{\text{หาอนุพันธ์}} 2x$ $\quad x^2 - 9 \xrightarrow{\text{หาอนุพันธ์}} 2x$

จากตัวอย่าง นักเรียนจะพบว่า $\boxed{2x}$ อาจมาจากการหาอนุพันธ์ของ $x^2 + 0$, $x^2 + 1$, $x^2 + 7$ หรือ $x^2 - 9$ ก็ได้ สิ่งเหมือนกัน คือ $\boxed{x^2}$ ต่างกันที่ $\boxed{\text{ค่าคงตัว}}$ ซึ่งนำมาบวก ถ้าเราไม่ทราบแหล่งที่มาว่าบวกด้วยจำนวนใด ให้บวกด้วย C ไว้ โดยที่ C เป็นค่าคงตัวใดๆ นั่นคือ

จาก $2x \xrightarrow{\text{อินทิเกรต}}$ จะได้ $x^2 + C$

จาก $x^n \xrightarrow{\text{อินทิเกรต}}$ จะได้ $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ ; n \neq -1$

เมื่อ C เป็นค่าคงตัว

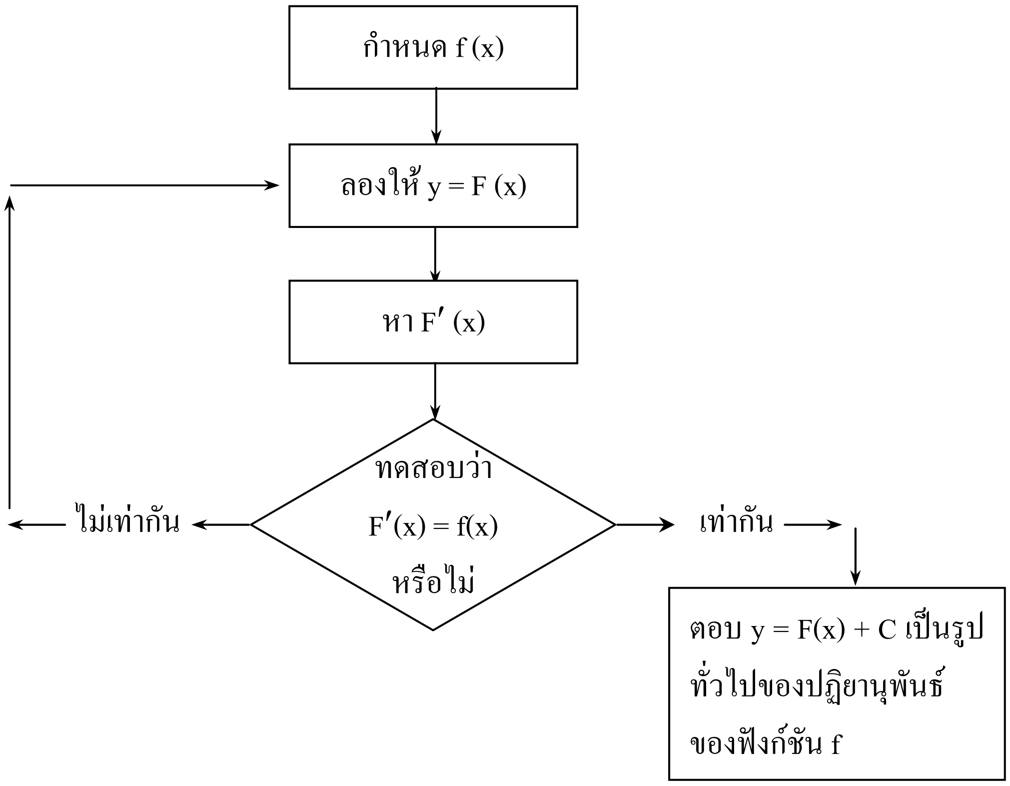
เราเรียก $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ว่า เป็นปฏิยานุพันธ์ของ x^n

4.5 ครูสรุป โดยทั่วไป ถ้า f เป็นฟังก์ชันโดยที่

$f'(x) = x^n$ แล้ว จะได้ว่า ปฏิยานุพันธ์ของ $f'(x)$ คือ

$$f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{เมื่อ C เป็นค่าคงตัว และ } n \neq -1$$

4.6 นักเรียนและครูช่วยกันสรุปขั้นตอนในการหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้แผนภูมิ ดังนี้



4.7 ครูยกตัวอย่าง การหาปฏิยานุพันธ์หลายๆ ตัวอย่าง พร้อมทั้งพิจารณาปัญหาการเคลื่อนที่ของวัตถุในแนวเส้นตรง ขณะเวลา t ใดๆ เช่น ถ้า $S = t^3 + 3t^2$ เป็นสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุที่เคลื่อนที่ได้ระยะทาง S เมตร ในเวลา t วินาที จากเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน จะหาได้ว่า

$$\frac{dS}{dt} = V = 3t^2 + 6t \text{ เมตร/วินาที}$$

(บอกได้ว่าในขณะเวลา t ใดๆ วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $3t^2 + 6t$ เมตร/วินาที)

ในทางกลับกัน ถ้าเราทราบว่า ในขณะเวลา t ใดๆ วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว V เมตร/วินาที โดยที่ $V = 3t^2 + 6t$ แล้ว เราสามารถใช้แผนภูมิในข้อ 4.6 หาได้ว่า ในขณะเวลา t ใดๆ นั้น วัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทางเท่าใด

4.8 ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 9

4.9 ครูและนักเรียนร่วมกันตรวจสอบความถูกต้องของกิจกรรมในใบกิจกรรมที่ 9

4.10 ให้นักเรียนทำแบบทดสอบรายจุดประสงค์ 9

5. แหล่งเรียนรู้

- ใบกิจกรรมที่ 9
- แผนภูมิ
- แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 9
- แบบทดสอบเพื่อประเมินตนเองก่อนเรียน (3)

6. กระบวนการวัดและการประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	นักเรียนตอบคำถามถูกต้องเป็นส่วนใหญ่
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	นักเรียนสนใจและร่วมกิจกรรมด้วยดี
3. ทำโจทย์ตรวจสอบความเข้าใจ	นักเรียนทำถูกต้องเกิน 80%
4. ทำโจทย์แบบฝึกหัด	นักเรียนทำแบบฝึกหัดทุกข้อ
5. ทำแบบทดสอบรายจุดประสงค์	นักเรียนทำถูกต้องทุกข้อ
6. ทำแบบทดสอบก่อน / หลังเรียน	นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียนด้วยความสนใจ

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

....

....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....

....

....

....

....

ใบกิจกรรมที่ 9

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อกำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ให้นักเรียนหาฟังก์ชันได้

1. จากสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ จงหาฟังก์ชัน f

    1.1 $f'(x) = x^6$ จะได้ $f(x) =$ ....

    1.2 $f'(x) = x^{10}$ จะได้ $f(x) =$ ....

    1.3 $f'(x) = x^{-8}$ จะได้ $f(x) =$ ....

    1.4 $f'(x) = x-2$ จะได้ $f(x) =$ ....

    1.5 $f'(x) = x^{\frac{3}{2}}$ จะได้ $f(x) =$ ....

2. จงหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

    2.1 $f(x) = 5x$

    ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = \frac{5x^2}{2} + C$; เมื่อ C เป็นค่าคงตัว

    2.2 $f(x) = x^2$

    2.3 $f(x) = x^3\sqrt{x}$

    2.4 $f(x) = x^{-3}$

    2.5 $f(x) = \frac{1}{x^7}$

แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 9

วิชา คณิตศาสตร์ **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

เรื่อง การหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน **เวลา 20 นาที** **คะแนนเต็ม 10 คะแนน**

คำสั่ง ให้แสดงวิธีทำเป็นขั้นตอน

1. จงหาปฏิยานุพันธ์จากอนุพันธ์ดังต่อไปนี้

   (1) $\frac{dy}{dx} = 200x^4$

   (2) $f'(x) = 6x - 24$

2. จงหาฟังก์ชัน F เมื่อกำหนด $F'(x) = 3x^2$

3. จงหาปฏิยานุพันธ์ของ f เมื่อ $f(x) = x$

แบบทดสอบเพื่อประเมินตนเองก่อนเรียน (3)

วัตถุประสงค์ เพื่อประเมินพื้นฐานความรู้เดิมของนักเรียน เรื่อง ***"การอินติเกรต"*** ซึ่งจะทำให้นักเรียนได้สำรวจตนเองว่ามีพื้นฐานความรู้เกี่ยวกับเนื้อหาเหล่านี้มากน้อยเพียงใด

คำชี้แจง ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกที่สุด แล้วตอบในกระดาษคำตอบ

1. ปฏิยานุพันธ์ของ x^{-8} คือข้อใด

   ก. $-8x^{-9} + C$ ข. $-8x^{-7} + C$

   ค. $\frac{-x^{-7}}{7} + C$ ง. $\frac{-x^{-8}}{8} + C$

2. กำหนด $\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 2$, ฟังก์ชัน y คือข้อใด

   ก. $y = x^4 + C$ ข. $y = x^4 - 2x + C$

   ค. $y = 4x^2 - x + 4$ ง. $y = x^4 + 2x + C$

3. กำหนด $f'(x) = 3x$, $f(x)$ คือข้อใด

   ก. $\frac{3x^2}{2} + C$ ข. 3

   ค. $3x^2 + C$ ง. $\frac{2x^3}{3} + C$

4. ถ้า $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ แล้ว $\int f(x)dx$ คือข้อใด

   ก. $6x^2 - 6x + C$ ข. $\frac{1}{2}x^4 - x^3 + x + C$

   ค. $\frac{2}{3}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + x + C$ ง. $\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + x + C$

5. $\int (3x^2 + 3)dx$ คือข้อใด

   ก. $x^3 + 3x^2 + C$ ข. $3x^3 + 3x + C$

   ค. $x^3 + 3x + C$ ง. $3x^2 + 3x + C$

6. กำหนด $f'(x) = |x|$ และ $f(0) = 0$, $f(x)$ คือข้อใด

   ก. $x|x|$ ข. $\frac{x}{2}|x|$

   ค. $\frac{1}{2}|x|$ ง. $|x|$

7. ถ้า $\frac{dy}{dx} = 2x - 3$ และ $y = 2$ เมื่อ $x = 3$ ค่าของ y เมื่อ $x = 5$ คือข้อใด

   ก. 12 ข. 13

   ค. 10 ง. 11

8. กำหนดความชันของเส้นโค้งที่จุด (x , y) ใดๆ บนเส้นโค้งเท่ากับ $4x - 1$ ถ้าเส้นโค้งผ่านจุด $(-1 , 2)$ สมการเส้นโค้งคือข้อใด

ก. $y = 4x^2 - x - 4$ ข. $y = 2x^2 - x + 1$

ค. $y = 4x^2 - x + 4$ ง. $y = 2x^2 - x - 1$

9. สมการเส้นโค้งที่มี $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x^2$ และผ่านจุด $(0 , 2)$ กับ $(-1 , 3)$ คือข้อใด

ก. $\frac{x^4}{2} - \frac{x}{2} - 2$ ข. $\frac{x^4}{2} + \frac{x}{2} - 2$

ค. $\frac{x^4}{2} - \frac{x}{2} + 2$ ง. $\frac{x^4}{2} + \frac{x}{2} + 2$

10. $\int_0^1 x dx$ คือข้อใด

ก. 0 ข. $\frac{1}{2}$

ค. $\frac{1}{4}$ ง. 1

11. ค่าของ $\int_1^5 (7 - x)dx$ คือข้อใด

ก. 16 ข. 15

ค. 32 ง. 41

12. $\int_{-1}^1 (x^2 + x + 2)dx$ คือข้อใด

ก. $\frac{2}{3}$ ข. 1

ค. $4\frac{2}{3}$ ง. 28

13. ข้อใดถูกต้อง

ก. $\int_2^2 (2x + 3)dx = 0$ ข. $\int_1^3 (x^2 - 2x)dx = \int_3^1 (x^2 - 2x)dx$

ค. $\int_{-2}^2 (2x - 2)dx = \int_{-2}^0 (2x - 2)dx + \int_0^2 (2x - 2)dx$ ง. ถูกต้องตั้งแต่ข้อ ก - ค

14. พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 6x^2$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 1$ และแกน x คือข้อใด

ก. 1 ตารางหน่วย ข. 2 ตารางหน่วย

ค. 3 ตารางหน่วย ง. 6 ตารางหน่วย

15. พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟ $y = 4 - x^2$ กับแกน x คือข้อใด

ก. 0 ตารางหน่วย ข. $\frac{8}{3}$ ตารางหน่วย

ค. $\frac{16}{3}$ ตารางหน่วย ง. $\frac{32}{3}$ ตารางหน่วย

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10

เรื่อง **อินทิกรัลไม่จำกัดเขต** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนสามารถหาโอเปอเรชันที่ตรงข้ามกับการหาอนุพันธ์ได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้ นักเรียนหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันได้

2. แนวความคิดหลัก

โดยทั่วไป ถ้า f เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f'(x) = x^n$ แล้วจะได้ว่า ปฏิยานุพันธ์ของ $f'(x)$ คือ $f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว และ $n \neq -1$ และ $\int f'(x)dx = f(x) + C$ เรียก $\int f'(x)dx$ ว่า อินทิกรัลไม่จำกัดเขต

3. เนื้อหาสาระ

- นิยามอินทิกรัลไม่จำกัดเขต
- สูตรและสมบัติของอินทิกรัลไม่จำกัดเขต

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

4.1 ครูทบทวนการหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน จากนิยามปฏิยานุพันธ์ที่ว่า ปฏิยานุพันธ์ของ $f'(x)$ คือ $f(x)$ ซึ่งเท่ากับ $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \,; n \neq -1$

ขั้นสอน

4.2 ครูบอกนักเรียนว่า เพื่อความสะดวกจะใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้แทนการอินติเกรด หรือการหาปฏิยานุพันธ์

$$\text{จาก } x^n \xrightarrow{\text{อินติเกรด}} \text{ จะได้ } \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;\ n \neq -1$$

ใช้สัญลักษณ์แทน คือ

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \; ; n \neq -1$$ นั่นคือ

$$\boxed{\int f'(x)dx = f(x) + C}$$ และเรียก

$\int f'(x)dx$ ว่า **อินทิกรัลไม่จำกัดเขต**

4.3 ครูบอกบทนิยามของอินทิกรัลไม่จำกัดเขต

4.4 ครูแจกใบความรู้ที่ 10 และบอกสูตรอินทิกรัลไม่จำกัดเขต แล้วให้นักเรียนลองพิสูจน์บางสูตร โดยครูผู้สอนแสดงแนวการพิสูจน์ให้ดู เพื่อชี้ให้นักเรียนเห็นว่าสูตรดังกล่าวนี้ สามารถพิสูจน์ได้ตามบทนิยาม แต่ในที่นี้ควรเป็นการนำสูตรดังกล่าวไปใช้

4.5 ครูยกตัวอย่าง การนำสูตรอินทิกรัลไม่จำกัดเขตไปใช้ทุกสูตร

4.6 ครูยกตัวอย่างโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับ สมการของเส้นโค้ง สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ใช้การอินทิกรัลไปเกี่ยวข้อง

4.7 ครูให้ข้อสังเกตว่า

(1) ถ้าอนุพันธ์ของฟังก์ชันอยู่ในรูป $\frac{dy}{dx} = x^n$ แล้วให้หาฟังก์ชันเดิม โดยใช้สูตร $y = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \; ; \; n \neq -1$ นั้น จะเห็นว่าหาฟังก์ชันนี้ไม่ได้ เมื่อ $n = -1$ ดังนั้น ในการกำหนดอนุพันธ์ของฟังก์ชันให้ จะต้องไม่อยู่ในรูป $\frac{1}{x}$ หรือ $\frac{1}{ax+b}$ เมื่อ a , b เป็นจำนวนจริงที่ $a \neq 0$

(2) ในเรื่องอินทิกรัลไม่จำกัดเขต เช่น

$$\begin{aligned}\int (x^2 + 2x)dx &= \frac{x^3}{3} + c_1 + 2\left[\frac{x^2}{2} + c_2\right] \\ &= \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + C_1 + 2C_2 \\ &= \frac{x^3}{3} + x^2 + C \qquad \text{เมื่อ } C_1 + 2C_2 = C\end{aligned}$$

ครูเน้นว่า ในการหาค่า $\int x^2 dx$ จะได้ค่าคงตัว คือ C_1 และในการหาค่า $\int 2x dx$ จะได้ค่าคงตัว คือ $2C_2$ ซึ่งค่าคงตัวที่เกิดขึ้นนี้มีหลายค่า เรานิยมเขียนสรุปรวม โดยใช้ C เพียงค่าเดียว ซึ่งในที่นี้หมายถึง $C_1 + 2C_2$ นั่นเอง

4.8 ให้นักเรียนฝึกหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขต โดยใช้สูตร จากการทำใบกิจกรรมที่ 10

4.9 ครูและนักเรียนช่วยกันตรวจสอบความถูกต้องของกิจกรรมจากใบกิจกรรมที่ 10 ของนักเรียนและอธิบายเพิ่มเติมในส่วนที่นักเรียนยังไม่เข้าใจ

4.10 ทำแบบทดสอบวัดรายจุดประสงค์ 10

5. แหล่งเรียนรู้

- ใบความรู้ที่ 10
- ใบกิจกรรมที่ 10
- แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 10

6. กระบวนการวัดและการประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	นักเรียนตอบคำถามถูกต้องเป็นส่วนใหญ่
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	นักเรียนสนใจและร่วมกิจกรรมด้วยดี
3. ทำโจทย์ตรวจสอบความเข้าใจ	นักเรียนทำถูกต้องเกิน 90%
4. ทำโจทย์แบบฝึกหัด	นักเรียนทำแบบฝึกหัดเกิน 90%
5. ทำแบบทดสอบรายจุดประสงค์	นักเรียนทำถูกไม่ต่ำกว่า 5 ข้อ
6. ทำแบบทดสอบก่อน / หลังเรียน	–

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

....

....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....

....

....

....

....

ใบความรู้ที่ 10

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้ นักเรียนหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันได้

เนื้อหา

- สูตร และสมบัติของอินทิกรัลไม่จำกัดเขต

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$$

$$\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

ตัวอย่าง

$$\int 5dx = 5x + C$$

$$\int x^3dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\int 3x^5dx = \frac{3(x^{5+1})}{5+1} + C = \frac{3x^6}{6} + C = \frac{1}{2}x^6 + C$$

$$\int (x^2 + 5x^5)dx = \int x^2dx + \int x^5dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{6} + C$$

จาก $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

1. สัญลักษณ์ $\int$ เรียกว่า **เครื่องหมายอินทิกรัล** (integration sign)
2. f(x) เรียกว่า **ตัวถูกอินติเกรต** (integrate)
3. เรียกขบวนการหาอินทิกรัลของ f(x) ว่า **การอินติเกรต** (integration)
4. เรียกค่าคงตัว C ว่า **ค่าคงตัวสำหรับการอินติเกรต**
5. เรียกสมการซึ่งมีอนุพันธ์ของฟังก์ชันปรากฏอยู่ว่า **สมการเชิงอนุพันธ์** (differential equation) และเรียกการหาฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์สอดคล้องสมการอนุพันธ์ว่า **การแก้สมการเชิงอนุพันธ์**

ใบกิจกรรมที่ 10

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้ นักเรียนหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันได้

1. จงหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของแต่ละข้อต่อไปนี้ และตรวจสอบด้วยว่าถูกต้องหรือไม่ โดยใช้การหาอนุพันธ์ย้อนกลับ

1) $\int 7dx = 7\int dx = 7x + C$

$\frac{d}{dx}(7x - C) = \frac{d}{dx}(7x) + \frac{d}{dx}(C) = 7$

2) $\int x^6 dx$ = ………………………………………………………………………………..

3) $\int 8t^3 dt$ = ………………………………………………………………………………..

4) $\int (2x + 1)dx$ = ………………………………………………………………………………..

5) $\int \frac{dx}{4x^3}$ = ………………………………………………………………………………..

2. จงหา

1) $\int 2dx$ ………………………………………………………………………………..

2) $\int xdx$ ………………………………………………………………………………..

3) $\int 2xdx$ ………………………………………………………………………………..

4) $\int x^2 dx$ ………………………………………………………………………………..

5) $\int 3x^2 dx$ ………………………………………………………………………………..

6) $\int x^3 dx$ ………………………………………………………………………………..

7) $\int (x+5)dx$ ………………………………………………………………………………..

8) $\int (3x^2+2x-5)dx$ ………………………………………………………………………………..

9) $\int (4x^3-3x^2+2x-4)dx$ ………………………………………………………………………

10) $\int \frac{1}{x^2}\,dx$ ……………………………………………………………………………..

11) $\int \frac{1}{x^3}\,dx$ ……………………………………………………………………………..

12) $\int \sqrt{x}\,dx$ ……………………………………………………………………………..

13) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$ ……………………………………………………………………………..

14) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ ……………………………………………………………………………..

15) $\int (x + \frac{1}{x^2})dx$ ……………………………………………………………………………..

16) $\int (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})dx$ ……………………………………………………………………………..

17) $\int (\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}})dx$ ……………………………………………………………………………..

18) $\int (\frac{x+2}{x^3})dx$ ……………………………………………………………………………..

19) $\int x(x+4)dx$ ……………………………………………………………………………..

20) $\int x^2(x^2-4)dx$ ……………………………………………………………………………..

21) $\int \sqrt{x}(x+2)dx$ ……………………………………………………………………………..

22) $\int (x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{2}{3}})dx$ ……………………………………………………………………………..

3. กำหนด $f'(x) = 4x$ และ $f(1) = 3$ จงหา $f(x)$

……

……

……

……

4. กำหนด $f''(x) = 6x - 8$, $f'(0) = 2$ และ $f(1) = 4$ จงหา $f(x)$

……

……

……

……

5. ถ้าความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณ จุด (x, y) ใดๆ เท่ากับ $2x + 4$ และเส้นโค้ง $y = f(x)$ นี้ผ่านจุด $(1, 6)$ จงหาสมการของเส้นโค้ง $y = f(x)$

....

....

....

....

....

....

....

....

6. อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงจากจุดตั้งต้นจุดหนึ่งด้วยความเร่ง $6t^2$ ฟุต/(วินาที)^2 เมื่อ t เป็นเวลามีหน่วยเป็นวินาที s เป็นระยะทางหน่วยเป็นฟุต จงหาว่าอนุภาคเคลื่อนที่ไปได้ระยะทางเท่าไร เมื่อ $t = 2$ วินาที

....

....

....

....

....

....

....

....

แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 10

วิชา คณิตศาสตร์ **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

เรื่อง อินทิกรัลไม่จำกัดเขต **เวลา 30 นาที** **คะแนนเต็ม 10 คะแนน**

คำสั่ง ให้แสดงวิธีทำเป็นขั้นตอน

1. $\int x^{10}dx$

2. $\int 7x\,dx$

3. $\int (x^2 + 3x^{\frac{1}{2}} - 4x - 5)dx$

4. $\int (\frac{x^3 - 3}{x^2})dx$

5. ถ้าอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณ จุด (x, y) ใดๆ เท่ากับ 2 ความชันเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่ $x = 0$ เท่ากับ -2 และเส้นโค้งนี้ผ่านจุด $(1, 4)$ จงหาสมการเส้นโค้ง $y = f(x)$

6. รถยนต์คันหนึ่งแล่นมาด้วยความเร็ว 15 ไมล์ต่อชั่วโมง ถ้ารถยนต์คันนี้ชะลอความเร็วให้ลดลง 0.8 ฟุต/(วินาที)^2 จงหาว่ารถยนต์คันนี้จะไปได้ไกลเท่าไรจึงจะหยุดนิ่ง

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11

เรื่อง **อินทิกรัลจำกัดเขต** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 2 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

นักเรียนสามารถหาโอเปอเรชันที่ตรงข้ามกับการหาอนุพันธ์จำกัดเขตได้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้ นักเรียนหาอินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชันได้

2. แนวความคิดหลัก อินทิกรัลจำกัดเขต

ถ้าให้ F(x) เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f (x) อินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชันต่อเนื่อง f บนช่วง x = a ถึง x = b คือ

$$\int_a^b f(x)d(x) = F(x)\Big|_a^b$$

$$= F(b) - F(a)$$

เมื่อ $F'(x) = f(x)$

3. เนื้อหาสาระ

สมบัติของอินทิกรัลจำกัดเขต

4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

4.1 ครูทบทวนเรื่องปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยกำหนดฟังก์ชัน f แล้วให้นักเรียนหารูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f เช่น

ครูกำหนด $f_1(x) = x^2 + 4$ และ $f_2(x) = -x^4$

นักเรียนควรบอกได้ว่า รูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f คือ

$$F_1(x) = \frac{x^3}{3} + 4x + C \quad \text{และ}$$

$$F_2(x) = -\frac{x^5}{5} + C \quad \text{เมื่อ C เป็นค่าคงตัว}$$

4.2 ครูทบทวนเรื่องฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [a, b]

ขั้นสอน

4.3 ครูแนะนำสัญลักษณ์ $\int_a^b f(x)dx$ ที่ใช้แทนอินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชันต่อเนื่อง f บนช่วง [a, b] และแนะนำวิธีการหาค่า $\int_a^b f(x)dx$ โดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของอินทิกรัลแคลคูลัส หลังจากนั้นครูและนักเรียนช่วยกันสรุปว่า เมื่อกำหนดฟังก์ชัน f ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [a, b] มาให้จะหาอินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชัน f ได้ดังนี้

1) หา F(x) ซึ่งเป็นรูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f

2) หา F(b) – F(a)

3) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

4.4 ครูกำหนดฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [a, b] และให้นักเรียนฝึกหาอินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชัน ตามวิธีการในข้อ 4.3

ครูกำหนด $f(x) = x^2 + 2,\ x \in [1, 2]$

นักเรียนควรหา F(x) ซึ่งเป็นปฏิยานุพันธ์ของ f (x) ได้ คือ

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x + C$$

จากนั้นนักเรียนควรหาได้ว่า

$$F(2) = \frac{2^3}{3} + 2(2) + C = \frac{20}{3} + C$$

$$F(1) = \frac{1^3}{3} + 2(1) + C = \frac{7}{3} + C$$

$$\int_1^2 f(x)dx = F(2) - F(1) = \frac{13}{3}$$

4.5 ครูฝึกให้นักเรียนหาอินทิกรัลจำกัดเขตในทำนองเดียวกันนี้หลายๆ ฟังก์ชัน และให้นักเรียนสังเกตว่าเมื่อหาฟังก์ชัน F ซึ่งเป็นรูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้แล้ว หา F(b) – F(a) นั้น ค่าคงตัว C จะลบกันหมดไป ดังนั้น เพื่อประหยัดเวลาในการคำนวณ ไม่จำเป็นต้องเขียนค่าคงตัว C

4.6 ครูและนักเรียนช่วยกันตรวจสอบความถูกต้องของกิจกรรมในใบกิจกรรม 11 ของนักเรียนและอธิบายเพิ่มเติมในส่วนที่นักเรียนยังไม่เข้าใจ

4.7 ทำแบบทดสอบวัดรายจุดประสงค์ 11

5. แหล่งเรียนรู้

- ใบความรู้ที่ 11
- ใบกิจกรรมที่ 11
- แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 11

6. กระบวนการวัดและการประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	นักเรียนตอบคำถามถูกต้องเป็นส่วนใหญ่
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	นักเรียนสนใจและร่วมกิจกรรมด้วยดี
3. ทำโจทย์ตรวจสอบความเข้าใจ	นักเรียนทำแบบฝึกหัดถูกต้องเกิน 90%
4. ทำโจทย์แบบฝึกหัด	นักเรียนทำแบบฝึกหัดทุกข้อ
5. ทำแบบทดสอบรายจุดประสงค์	นักเรียนทำถูกทุกข้อ
6. ทำแบบทดสอบก่อน / หลังเรียน	–

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

....

....

....

....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....

....

....

....

....

....

....

ใบความรู้ที่ 11

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้ นักเรียนหาจุดอินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชันได้

อินทิกรัลจำกัดเขต

1. ถ้าให้ F(x) เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f(x) อินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชันต่อเนื่อง f บนช่วง x = a ถึง x = b คือ

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

$$= F(b) - F(a)$$

เมื่อ $F'(x) = f(x)$

เรียก a ว่า ขอบล่าง และเรียก b ว่า ขอบบน

2. $\int_a^b f(x)dx = 0$

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ เมื่อ $c \in [a,b]$

5. $\int_a^b f(x)dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว

6. $\int_a^b kdx = k(b-a)$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว

7. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

ใบกิจกรรมที่ 11

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้ นักเรียนหาจุดอินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชันได้

① จงหาอินทิกรัลจำกัดเขตของแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\int_{1}^{4} 3\,dx$

....

....

....

2. $\int_{1}^{3} (3x^2 + x - 2)\,dx$

....

....

....

3. $\int_{-1}^{2} (6x^2 + 1)\,dx$

....

....

....

4. $\int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,dx$

....

....

....

5. $\int_0^4 \sqrt{x}\, dx$

....

....

....

6. $\int_0^4 x\,(x+1)^2\, dx$

....

....

....

7. $\int_2^4 x^2\,(x-4)\, dx$

....

....

....

8. $\int_0^4 \sqrt{x}\,(x+2)\, dx$

....

....

....

9. $\int_{-1}^1 x^2\,(x+1)^2\, dx$

....

....

....

10. $\int_{-1}^1 (-x^3 + x^2 - x + 1)\, dx$

....

....

....

② จงใช้สมบัติของอินทิกรัลตรวจสอบว่าข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ

1. $\int_{-4}^{3} 3\,dx \quad = \quad 18$

....

....

....

....

....

2. $\int_{3}^{4} \frac{1}{x^2}\,dx \quad = \quad -\int_{4}^{3} x^{-2}\,dx$

....

....

....

....

....

แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 11

วิชา คณิตศาสตร์ **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

เรื่อง อินทิกรัลจำกัดเขต **เวลา 30 นาที** **คะแนนเต็ม 10 คะแนน**

คำสั่ง จงแสดงวิธีทำเป็นขั้นตอน

1. จงหาอินทิกรัลจำกัดเขตของแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $\int_1^5 (7 - x)\, dx$

(2) $\int_0^9 \frac{1}{2}\sqrt{x}\, dx$

2. จงใช้สมบัติของอินทิกรัล ตรวจสอบว่าข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ

(1) $\int_2^2 (8 + 3x)\, dx = 0$

(2) $\int_0^7 3x^2\, dx = 3\int_0^7 x^3\, dx$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12

เรื่อง **พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง** ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

วิชา คณิตศาสตร์ เวลา 3 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

หาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของฟังก์ชันที่กำหนดให้

1. จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ ในช่วงที่กำหนดให้ได้

2. แนวความคิดหลัก

เมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ A เป็นพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของ f จาก $x = a$ ถึง $x = b$ และแกน x

1. ถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในช่วง $[a, b]$ แล้ว

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

2. ถ้า $f(x) \leq 0$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในช่วง $[a, b]$ แล้ว
   A เป็นพื้นที่ใต้แกน x และ

$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

3. เนื้อหาสาระ

- ทฤษฎีบท พื้นที่ใต้เส้นโค้ง
- ความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ใต้เส้นโค้งกับอินทิกรัลจำกัดเขต

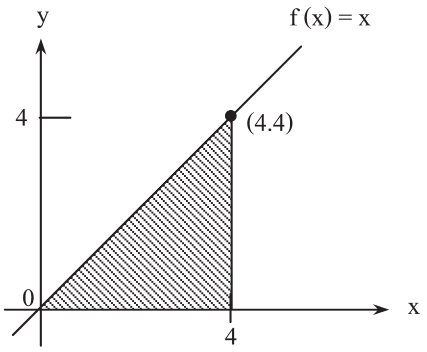
4. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

4.1 พิจารณากราฟของ $f(x) = x$ จากความรู้เกี่ยวกับการหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ครูกับนักเรียนช่วยกันหาพื้นที่ระหว่างกราฟ $f(x) = x$ กับแกน x

ตั้งแต่ $x = 0$ ถึง $x = 4$, พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $= \frac{1}{2} \times$ ฐาน $\times$ สูง

จะได้พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$ ตารางหน่วย



ขั้นสอน

4.2 ครูให้นักเรียนหาอินทิกรัลจำกัดเขต ของ f(x) ตั้งแต่ x = 0 ถึง x = 4 จะได้ดังนี้

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 x\,dx$$

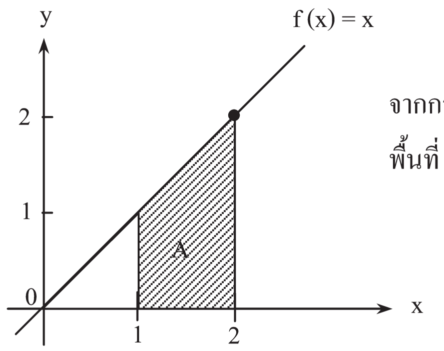
$$= \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^4 = \frac{4^2}{2} - 0 = 8$$

จะพบว่า $\int_0^4 x\,dx$ = พื้นที่ระหว่างกราฟ

f(x) = x กับแกน x ตั้งแต่ x = 0 ถึง x = 4 นั่นเอง

ครูสรุปว่าโดยทั่วๆ ไปแล้ว อินทิกรัลจำกัดเขต $\int_a^b f(x)\,dx$ คือ พื้นที่ระหว่าง เส้นโค้งกับแกน x ตั้งแต่ x = a ถึง x = b ดังทฤษฎีบท

4.3 ครูบอกทฤษฎีบทเกี่ยวกับพื้นที่ภายใต้เส้นโค้ง แล้วยกตัวอย่างการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง โดยพื้นที่ที่หาอยู่เหนือแกน x เช่น



จากกราฟครูบอกนักเรียนว่า
พื้นที่ $A = \int_1^2 f(x)\,dx$

ให้นักเรียนหาค่า $\int_1^2 f(x)\,dx$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{3}{2}$ ดังนั้น พื้นที่ A = $\frac{3}{2}$ ตารางหน่วย

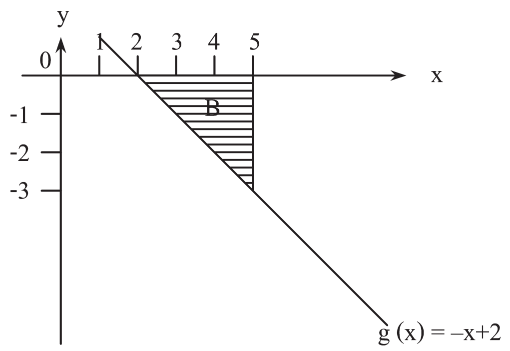
แล้วให้นักเรียนตรวจสอบ โดยการหาพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู A

4.4 ครูกำหนดฟังก์ชันเส้นตรง และฟังก์ชันเส้นโค้งหลาย ๆ ฟังก์ชัน แล้วให้นักเรียนฝึกหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของเส้นตรง หรือเส้นโค้งนั้น เช่น

กำหนด $f(x) = 6x - x^2$ จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งนี้ กับแกน x ตั้งแต่ $x = 1$ ถึง $x = 4$ (เขียนกราฟประกอบ)

กำหนด $f(x) = x^2 + 1$ จงหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้ง $f(x) = x^2 + 1$ กับแกน x ตั้งแต่ $x = 1$ ถึง $x = 2$ (เขียนกราฟประกอบด้วย)

4.5 ครูกำหนดพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง โดยพื้นที่ที่หานั้นอยู่ภายใต้แกน x เช่น



ให้นักเรียนหาพื้นที่ B จาก $\int_2^5 g(x)\,dx = -\frac{9}{2}$ จากนั้นครูให้นักเรียนสังเกตว่า ค่าที่หาได้มีค่าเป็นลบ แต่ในความเป็นจริง การคำนวณพื้นที่ใดๆ จะเป็นค่าบวกเสมอ ดังนั้น ครูบอกนักเรียนว่า การคำนวณหาพื้นที่ใต้แกน x จาก $x = a$ ถึง $x = b$ จะหาจาก

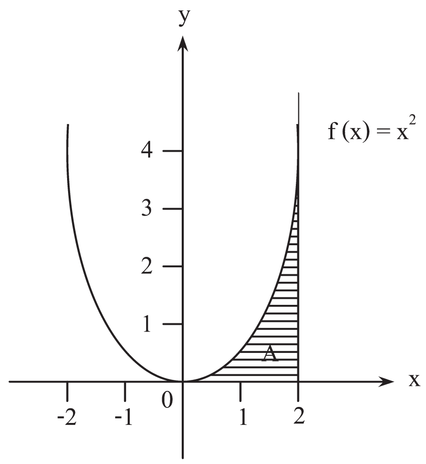
$$\boxed{-\int_a^b f(x)\,dx}$$

ซึ่งนักเรียนสามารถศึกษาได้จากใบความรู้ที่ 12

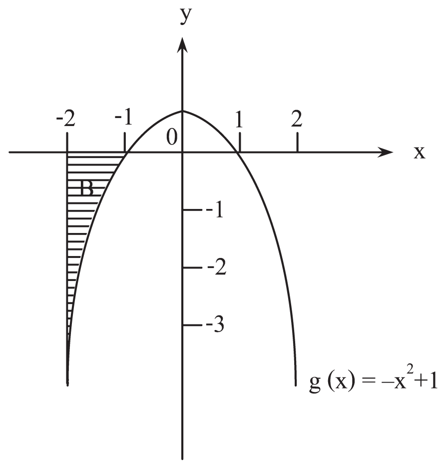
4.6 ครูสรุปว่า ในกรณีที่ $f(x) \leq 0$ พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน x ตั้งแต่ $x = a$ ถึง $x = b$ หาได้จาก

$$\boxed{\int_b^a [-f(x)]\,dx \text{ หรือ } -\int_a^b f(x)\,dx}$$

4.7 ครูกำหนดพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง ที่อยู่เหนือแกน x และอยู่ใต้แกน x แล้วให้นักเรียนฝึกหา เช่น



จากกราฟครูให้นักเรียนฝึกหาพื้นที่ A จาก $\int_0^2 x^2\,dx$ (พื้นที่ A = $\frac{8}{3}$ ตารางหน่วย)



จากกราฟให้นักเรียนฝึกหาพื้นที่ B จาก $-\int_{-2}^{-1}(-x^2+1)\,dx$

4.8 ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 12

4.9 ครูและนักเรียนช่วยกันตรวจสอบความถูกต้องของกิจกรรมจากใบกิจกรรมที่ 12 และอธิบายเพิ่มเติมเพื่อแก้ไขส่วนที่นักเรียนยังไม่เข้าใจ

4.10 ทำแบบทดสอบรายจุดประสงค์ 12

4.11 ให้นักเรียนทำแบบทดสอบเพื่อประเมินตนเองหลังเรียน (3)

5. แหล่งเรียนรู้

- ใบความรู้ที่ 12
- ใบกิจกรรมที่ 12
- แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 12
- แบบทดสอบเพื่อประเมินตนเองหลังเรียน (3)

6. กระบวนการวัดและการประเมินผล

การวัดผล	การประเมินผล
1. สังเกตจากการตอบคำถาม	นักเรียนตอบคำถามถูกต้องเป็นส่วนใหญ่
2. สังเกตจากการร่วมกิจกรรม	นักเรียนสนใจและร่วมกิจกรรมด้วยดี
3. ทำโจทย์ตรวจสอบความเข้าใจ	นักเรียนทำแบบฝึกหัดถูกต้องเกิน 90%
4. ทำโจทย์แบบฝึกหัด	นักเรียนทำแบบฝึกหัดทุกข้อ
5. ทำแบบทดสอบรายจุดประสงค์	นักเรียนทำถูกต้องทุกข้อ
6. ทำแบบทดสอบก่อน / หลังเรียน	นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียนได้ถูกต้องไม่ต่ำกว่า 12 ข้อ

7. บันทึกหลังสอน

....

....

....

....

8. กิจกรรมเสนอแนะ

....

....

....

....

ใบความรู้ที่ 12

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ ในช่วงที่กำหนดให้

เนื้อหา

- **พื้นที่ภายใต้เส้นโค้ง**

1. ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ และ $f(x) \geq 0$ แล้ว พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน x เส้นตรง $x = a$ และเส้นตรง $x = b$ คือ

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\,dx}$$

2. ในกรณีที่ $f(x) \leq 0$ พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน x ตั้งแต่ $x = a$ ถึง $x = b$ หาได้จาก

$$\boxed{\int_a^b [-f(x)]\,dx \text{ หรือ } -\int_a^b f(x)\,dx}$$

ใบกิจกรรมที่ 12

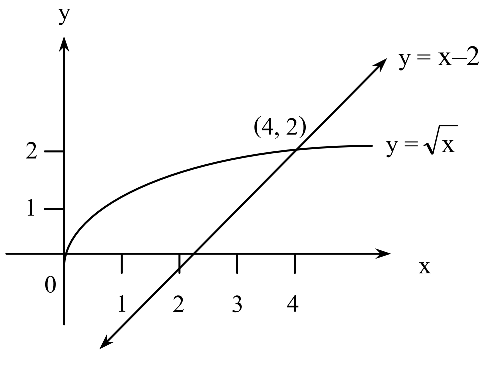
จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ ในช่วงที่กำหนดให้

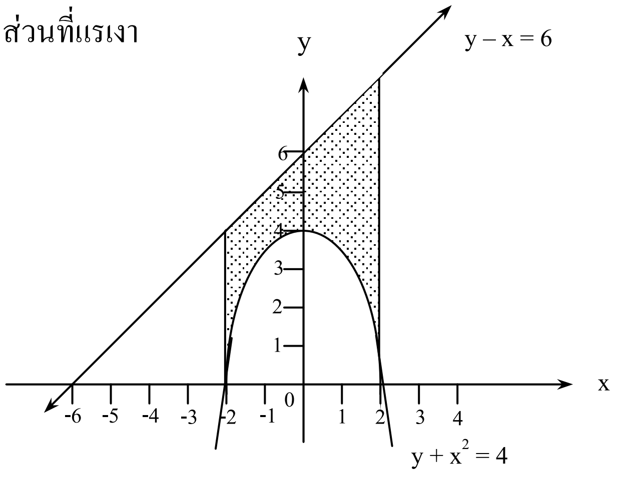
1. จงหาพื้นที่ระหว่างกราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้ กับแกน x เขียนกราฟด้วย
   - (1) $y = 2x + 4$ ตั้งแต่ $x = 1$ ถึง $x = 3$
   - (2) $y = 3x^2$ ตั้งแต่ $x = 1$ ถึง $x = 2$
   - (3) $y = x^2 + 2$ ตั้งแต่ $x = -1$ ถึง $x = 0$
   - (4) $y = 4 - x^2$ ตั้งแต่ $x = -1$ ถึง $x = 2$

2. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x) = \sqrt{x}$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 4$

3. จากรูป จงหาพื้นที่ส่วนที่แรเงา



4. จากรูป จงหาพื้นที่ส่วนที่แรเงา



แบบทดสอบรายจุดประสงค์ 12

วิชา คณิตศาสตร์ **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

เรื่อง พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง **เวลา 30 นาที** **คะแนนเต็ม 10 คะแนน**

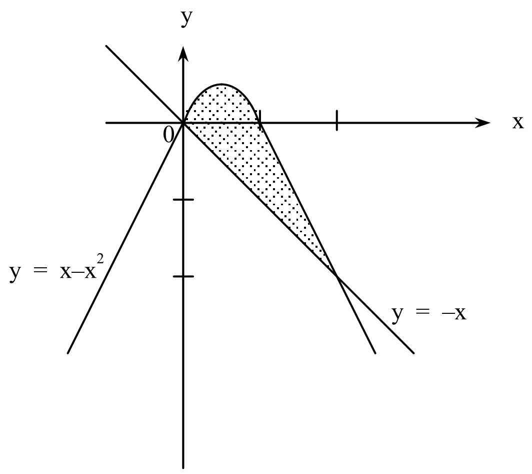
คำสั่ง จงแสดงวิธีทำเป็นขั้นตอนพร้อมทั้งเขียนกราฟ

1. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x+1$ จาก $x = -2$ ถึง $x = 1$

2. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 9-x^2$ จาก $x = -3$ ถึง $x = 3$

3. จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $f(x) = x^2-2x$ กับแกน x ตั้งแต่ $x = -1$ ถึง $x = 2$

4.



จากรูป เป็นกราฟของ $y = x-x^2$ ตัดกับ $y = -x$ จงหาพื้นที่ส่วนที่แรเงา

แบบทดสอบเพื่อประเมินตนเองหลังเรียน (3)

วัตถุประสงค์

เพื่อเปรียบเทียบความก้าวหน้าในการเรียนรู้ของนักเรียน เรื่อง ***"การอินติเกรด"*** ซึ่งจะทำให้ทราบว่าหลังจากที่ได้ดำเนินการสอนตามแผนการสอนที่ได้จัดทำขึ้น นักเรียนมีความรู้ตามเกณฑ์ที่ได้กำหนดไว้หรือไม่

คำชี้แจง ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกที่สุด แล้วตอบในกระดาษคำตอบ

1. ปฏิยานุพันธ์ของ x^{-8} คือข้อใด

   ก. $-8x^{-9} + C$ ข. $-8x^{-7} + C$

   ค. $-\frac{x^{-7}}{7} + C$ ง. $-\frac{x^{-8}}{8} + C$

2. กำหนด $\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 2$ ฟังก์ชัน y คือข้อใด

   ก. $y = x^4 + C$

   ข. $y = x^4 - 2x + C$

   ค. $y = 4x^2 - x + 4$

   ง. $y = x^4 + 2x + C$

3. กำหนด $f'(x) = 3x$, $f(x)$ คือข้อใด

   ก. $\frac{3x^2}{2} + C$ ข. 3

   ค. $3x^2 + C$ ง. $\frac{2x^3}{3} + C$

4. ถ้า $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ แล้ว $\int f(x)\,dx$ คือข้อใด

   ก. $6x^2 - 6x + C$

   ข. $\frac{1}{2}x^4 - x^3 + x + C$

   ค. $\frac{2}{3}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + x + C$

   ง. $\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + x + C$

5. $\int (3x^2 + 3)\, dx$ คือข้อใด

ก. $x^3 + 3x^2 + C$ ข. $3x^3 + 3x + C$

ค. $x^3 + 3x + C$ ง. $3x^2 + 3x + C$

6. กำหนด $f'(x) = |x|$ และ $f(0) = 0$, $f(x)$ คือข้อใด

ก. $x|x|$ ข. $\frac{x}{2}|x|$

ค. $\frac{1}{2}|x|$ ง. $|x|$

7. ถ้า $\frac{dy}{dx} = 2x - 3$ และ $y = 2$ เมื่อ $x = 3$ ค่าของ y เมื่อ $x = 5$ คือข้อใด

ก. 12 ข. 13

ค. 10 ง. 11

8. กำหนดความชันของเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใดๆ บนเส้นโค้งเท่ากับ $4x - 1$ ถ้าเส้นโค้งผ่านจุด (–1, 2) สมการเส้นโค้ง คือข้อใด

ก. $y = 4x^2 - x - 4$

ข. $y = 2x^2 - x + 1$

ค. $y = 4x^2 - x + 4$

ง. $y = 2x^2 - x - 1$

9. สมการเส้นโค้งที่มี $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x^2$ และผ่านจุด (0 , 2) กับ (-1 , 3) คือข้อใด

ก. $\frac{x^4}{2} - \frac{x}{2} - 2$ ข. $\frac{x^4}{2} + \frac{x}{2} - 2$

ค. $\frac{x^4}{2} - \frac{x}{2} + 2$ ง. $\frac{x^4}{2} + \frac{x}{2} + 2$

10. $\int_0^1 x\,dx$ คือข้อใด

ก. 0 ข. $\frac{1}{2}$

ค. $\frac{1}{4}$ ง. 1

11. ค่าของ $\int_1^5 (7-x)\,dx$ คือข้อใด

ก. 16 ข. 15

ค. 32 ง. 41

12. $\int_{-1}^1 (x^2+x+2)\,dx$ คือข้อใด

ก. $\frac{2}{3}$ ข. 1

ค. $4\frac{2}{3}$ ง. 28

13. ข้อใดถูกต้อง

ก. $\int_2^2 (2x+3)\,dx = 0$

ข. $\int_1^3 (x^2-2x)\,dx = -\int_3^1 (x^2-2x)\,dx$

ค. $\int_{-2}^2 (2x-2)\,dx = \int_{-2}^0 (2x-2)\,dx + \int_0^2 (2x-2)\,dx$

ง. ถูกต้องตั้งแต่ข้อ ก – ค

14. พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = 6x^2$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 1$ และแกน x คือข้อใด

ก. 1 ตารางหน่วย ข. 2 ตารางหน่วย

ค. 3 ตารางหน่วย ง. 6 ตารางหน่วย

15. พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟ $y = 4-x^2$ กับแกน x คือข้อใด

ก. 0 ตารางหน่วย ข. $\frac{8}{3}$ ตารางหน่วย

ค. $\frac{16}{3}$ ตารางหน่วย ง. $\frac{32}{3}$ ตารางหน่วย

ผู้ดำเนินการ

ที่ปรึกษา :

รศ.ธงทอง จันทรางศุ	เลขาธิการสภาการศึกษา
นางสาวสุทธาสินี วัชรบูล	รองเลขาธิการสภาการศึกษา
รศ.ดร.สำอาง หิรัญบูรณะ	ข้าราชการบำนาญ ที่ปรึกษาโครงการฯ
ดร.รุ่งเรือง สุขาภิรมย์	ผู้ตรวจราชการกระทรวงศึกษาธิการ ที่ปรึกษาโครงการฯ
ดร.จิรพรรณ ปุณเกษม	ผู้อำนวยการสำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้

ผู้เรียบเรียง :

นายสันติพร ตันติหาชัย โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัยสตูล จังหวัดสตูล

ผู้ตรวจทาน :

รองศาสตราจารย์อาริสา รัตนเพ็ชร์	มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์	หัวหน้าคณะวิจัย
ดร.ศุภวรรณ เลิศไกร	มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์	
นายเอธัสวัฒน์ คำมณี	มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์	
นางสาวสุธิตา มณีชัย	มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์	

คณะอาจารย์ผู้สอนคณิตศาสตร์โรงเรียนที่เข้าร่วมโครงการฯ จากโรงเรียนดังต่อไปนี้

- โรงเรียนหาดใหญ่วิทยาลัย จังหวัดสงขลา
- โรงเรียนมหาวชิราวุธ จังหวัดสงขลา
- โรงเรียนบูรณะรำลึก จังหวัดตรัง
- โรงเรียนจุฬาภรณราชวิทยาลัย จังหวัดสตูล
- โรงเรียนสุราษฎร์ธานี จังหวัดสุราษฎร์ธานี
- โรงเรียนพุนพินพิทยาคม จังหวัดสุราษฎร์ธานี
- โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาภาคใต้ จังหวัดนครศรีธรรมราช

ผู้พิจารณารายงาน :

นางสาวสุนันทา นิลสิทธิ์สถาพร โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา กรุงเทพฯ

ผู้รับผิดชอบโครงการ :

นายรวิช ตาแก้ว	หัวหน้ากลุ่มงานพัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษ
นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา	ประจำกลุ่มงานฯ
นายศิริรัตน์ ชำนาญกิจ	ประจำกลุ่มงานฯ

บรรณาธิการ :

นายรวิช ตาแก้ว
นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา

บรรณาธิการร่วม :

นางสาวบุญเทียม ศิริปัญญา

เรียบเรียงและจัดทำรายงาน :

นางสาวกิ่งกาญจน์ เมฆา

เพื่อเป็นการใช้ทรัพยากรของชาติให้คุ้มค่า
หากท่านไม่ใช้หนังสือเล่มนี้แล้ว
โปรดมอบให้ผู้อื่นนำมาใช้ประโยชน์ต่อไป

กลุ่มพัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนที่มีความสามารถพิเศษ
สำนักมาตรฐานการศึกษาและพัฒนาการเรียนรู้
สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา (สกศ.)
99/20 ถนนสุโขทัย เขตดุสิต กรุงเทพฯ 10300
โทรศัพท์ : 0-2668-7123 ต่อ 2530
โทรสาร : 0-2243-1129, 0-2668-7329
เว็บไซต์ : http://www.onec.go.th
http://www.thaigifted.org

บันทึก