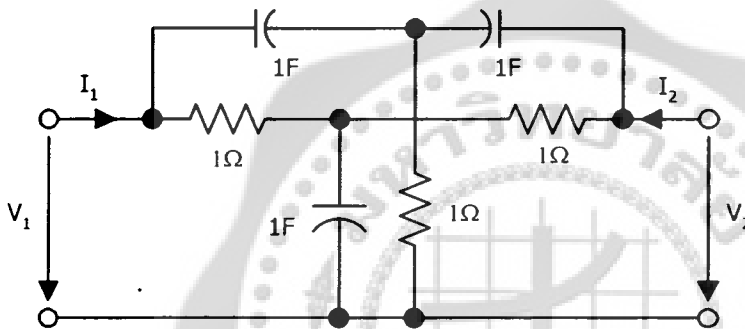


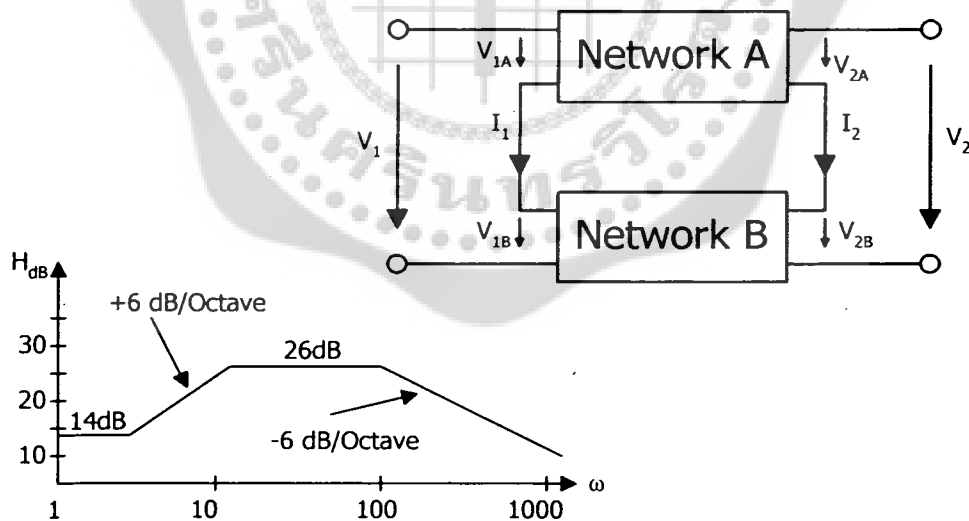
เอกสารประกอบการสอนวิชา

วศฟ. 214

การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า 2



13 กพ. 2550



ศิริพงษ์ ฉายสินธุ์

ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์

มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ องครักษ์

คำนำ

เอกสารประกอบการสอนเล่มนี้ เรียบเรียงขึ้นมาเพื่อใช้ประกอบการสอนวิชา วศฟ. 214 การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า 2 สำหรับนิสิตภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ ชั้นปีที่ 2 ทั้งภาคปกติ และภาคสมทบ หลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต โดยใช้เวลาในการศึกษาภาคบรรยาย 3 คาบต่อสัปดาห์ โดยวิชานี้เป็นวิชาที่ต่อเนื่องมาจากวิชาวศฟ. 212 การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า 1

ศิริพงษ์ ฉายสินธ์

siripong@swu.ac.th



สารบัญ

	หน้า
คำนำ	ข
สารบัญ	ค
ประมวลการสอน	ฉ
บทที่ 1. คุณลักษณะวงจรจ่ายไฟฟ้า	1
1.1 คุณลักษณะวงจรจ่ายไฟฟ้า	1
1.2 ทรี	2
1.3 ทิศทางของสาขา	3
1.4 โอเรียนเต็ลกราฟ	4
1.5 คัดเซต	5
1.6 คัดเซตพื้นฐาน	5
บทที่ 2. การวิเคราะห์วงจรจ่ายไฟฟ้า	9
2.1 การวิเคราะห์วงจรจ่ายไฟฟ้าแบบแรงดัน โนด	9
2.2 ขั้นตอนการวิเคราะห์วงจรจ่ายไฟฟ้าแบบแรงดัน โนด	9
2.3 การวิเคราะห์วงจรจ่ายไฟฟ้าแบบกระแสลูป	11
2.4 ขั้นตอนการวิเคราะห์วงจรจ่ายไฟฟ้าแบบกระแสลูป	12
2.5 การวิเคราะห์วงจรจ่ายไฟฟ้าแบบกระแสเมช	14
2.6 ขั้นตอนการวิเคราะห์วงจรจ่ายไฟฟ้าแบบกระแสเมช	14
บทที่ 3. ลาปลาซ	18
3.1 การแปลงลาปลาซ	18
3.2 คุณสมบัติของการแปลงลาปลาซ	19
3.3 คุณสมบัติเชิงเส้น	19
3.4 คุณสมบัติการเลื่อน	20
3.5 คุณสมบัติการคูณด้วย t^n	20
3.6 การหารด้วย t	20
3.7 การแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน	21
3.8 การแปลงลาปลาซของอินทิกรัล	21
3.9 ฟังก์ชันคาบ	21

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บทที่ 3. ลาปลาซ (ต่อ)	
3.10 การแปลงลาปลาซของฟังก์ชันขั้นบันไดแบบหน่วย	23
3.11 การเขียนฟังก์ชันขั้นบันไดจากฟังก์ชันที่กำหนดให้	23
3.12 การแปลงลาปลาซผกผัน	25
3.13 คุณสมบัติของการแปลงลาปลาซผกผัน	25
3.14 คุณสมบัติเชิงเส้น	25
3.15 คุณสมบัติการเลื่อนแบบที่ 1	25
3.16 คุณสมบัติการเลื่อนแบบที่ 2	25
3.17 การแปลงลาปลาซผกผันของอนุพันธ์ของ ฟังก์ชัน	26
3.18 ทฤษฎีบทผลการประสาน	26
3.19 เศษส่วนย่อย	27
บทที่ 4. การประยุกต์ลาปลาซในวงจรจ่ายไฟฟ้า	29
4.1 การแปลงลาปลาซของแหล่งจ่าย	29
4.2 การแปลงลาปลาซของ R L และ C	30
บทที่ 5. Network Function	40
5.1 ฟังก์ชันโอนย้าย	40
5.2 ไครวิ่งพอยท์ฟังก์ชัน	42
5.3 Network Function ของวงจรจ่าย 2 ทาง	45
บทที่ 6. สมการสถานะ และความถี่ธรรมชาติ	50
6.1 สมการสถานะ	50
6.2 การเขียนสมการสถานะของวงจรจ่าย	51
6.3 การสร้างสมการสถานะของวงจรจ่าย	51
6.4 ความถี่ธรรมชาติ	55
บทที่ 7. วงจรจ่ายสองทาง	61
7.1 Z พารามิเตอร์	61
7.2 Y พารามิเตอร์	63
7.3 H พารามิเตอร์	65

510 เลข 1260 20 9
 ความ
 network function Post

สารบัญ (ต่อ)

	หน้าที่
บทที่ 7.	วงจรจ่ายสองทาง (ต่อ)
	7.4 T พารามิเตอร์ 67
	7.5 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าพารามิเตอร์ของวงจรจ่ายสองทาง 69
บทที่ 8.	การเชื่อมต่อวงจรจ่ายสองทาง 72
	8.1 การเชื่อมต่อวงจรจ่ายสองทางแบบอนุกรม 72
	8.2 การเชื่อมต่อวงจรจ่ายสองทางแบบขนาน 74
	8.3 การเชื่อมต่อวงจรจ่ายสองทางแบบลูกโซ่ 77
บทที่ 9.	โพล ซีโร และเสถียรภาพของวงจร 81
	9.1 โพล และซีโร 81
	9.2 นิยามของโพล และซีโร 82
	9.3 เสถียรภาพ 86
บทที่ 10.	การตอบสนองความถี่ และ โบริคพลอท 91
	10.1 การตอบสนองความถี่ 91
	10.2 โบริคพลอท 93
บทที่ 11.	การวิเคราะห์สถานะคงตัวของวงจรที่ใช้คลื่นชาयน์เป็นสัญญาณ 99
	อินพุท
	11.1 คลื่นรูปชาयน์ 99
	11.2 เฟสเซอร์ 103
	11.3 ความสัมพันธ์ระหว่างเฟสเซอร์กับ R L และ C 104
	11.4 อิมพีแดนซ์ 104
	11.5 แอดมิตแตนซ์ 105
เอกสารอ้างอิง	107

ประมวลการสอน
ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ องค์กร

รหัสวิชา วศฟ 214 (EE 214) ชื่อวิชา การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า II 3(3-0)

บรรพวิชา วศฟ 210 (EE 210) ชื่อวิชา การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า I 3(3-0)

สถานภาพของวิชา ชั้นปีที่ 2

ผู้สอน อาจารย์ศิริพงษ์ ฉายสินธ์ (siripong@swu.ac.th)

ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2548

คำอธิบายรายวิชา องค์ประกอบต่าง ๆ ของวงจรไฟฟ้า วงจรไฟฟ้าเชิงเส้นที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าโดยอาศัยสถานะคงที่ เมื่อให้สัญญาณรูปไซน์ (Sinusoidal Signal) ทฤษฎีโครงข่ายไฟฟ้าแบบกราฟ การวิเคราะห์โดยใช้เมทริกซ์ และ โนด สมการสถานะ ความถี่ธรรมชาติ ฟังก์ชันของโครงข่ายไฟฟ้า วงจรไฟฟ้า 4 ขั้ว ฟังก์ชันแบบโพซิทีฟเรียล (positive real) การสังเคราะห์แบบไดรฟ์พอยท์ตัวประกอบที่มีอาร์แอล (R-L) อาร์ซีแอล (R-C-L) การสังเคราะห์ของวงจรที่มีจุดต่อ 2 ขั้ว และ 4 ขั้ว การสังเคราะห์วงจรฟอสเตอร์และแมคคอลลิน

วัตถุประสงค์ของวิชา

1. เพื่อให้เข้าใจถึงเหตุผลที่ต้องเรียนวิชาการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า II
2. เพื่อให้เข้าใจถึงนิยามของวิชาการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า II
3. เพื่อให้เข้าใจถึงนิยามและหลักการของแต่ละเรื่อง
4. เพื่อให้สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับงานจริงได้

กิจกรรมการเรียนการสอน

1. เขียนบนกระดานพร้อมกับการอธิบาย
2. ใช้แผ่นใสประกอบการอธิบาย
3. ใช้แผ่นใสประกอบการเขียนบนกระดาน พร้อมกับการอธิบาย
4. ตรวจสอบความเข้าใจโดยการถามตอบในห้องเรียน
5. มอบหมายแบบฝึกหัดให้กลับไปทำที่บ้าน

การวัดผลและการประเมินผลผู้เรียน

1. การเข้าห้องเรียน การถามตอบ การแต่งกาย การบ้านและพฤติกรรมที่แสดงออก	20 %
2. สอบย่อย	10 %
3. สอบกลางภาค	30 %
4. สอบปลายภาค	<u>40 %</u>
รวม	<u>100 %</u>

(นิสิตที่ลงทะเบียนตัดเกรดร่วมกัน พิจารณาตัดเกรดจากคะแนนรวมทั้งหมด โดยใช้วิธีอิงเกณฑ์ ถ้าคะแนนรวมต่ำกว่า 40 % ผลการเรียนจะได้เกรด E (ไม่ผ่าน) ในกรณีที่นิสิตเข้าชั้นเรียนต่ำกว่า 80 % ของเวลาเรียนจะไม่มีสิทธิ์สอบและได้รับเกรด E)

หนังสือที่ใช้สอน

1. ตำราหลัก Hayt, William H., Kemmerly, Jack E., Durbin, Steven M., Engineering Circuit Analysis 6th ed. McGraw-Hill, 2002.
2. ตำรารอง Thomas, Roland E., Rosa, Albert J., The Analysis and Design of Linear Circuits. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ 07632, 1994.

Sudhakar A., Shyammohan S P., Circuits and Network Analysis and Synthesis. Tata McGraw-Hill, 1995.

Stanley, William D., Network Analysis with Applications 3rd ed. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ 07458, 2000.

โกศล โอฬารไพโรจน์, การวิเคราะห์วงจรจ่าย. สมาคมส่งเสริมเทคโนโลยี (ไทย-ญี่ปุ่น), 2542.

ศิริพงษ์ ฉายสินธุ์, การวิเคราะห์วงจรและโครงข่ายไฟฟ้าด้วยโปรแกรม PSpice. คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ องครักษ์, 2546

แผนการสอน

ลำดับ ที่	หัวข้อที่จะสอน	จุดประสงค์เชิง พฤติกรรม	วิธีสอนและ กิจกรรม
1	บทที่ 1 คุณลักษณะวงจรขั้วไฟฟ้า 1.1 คุณลักษณะวงจรขั้วไฟฟ้า 1.2 ทรี 1.3 ทิศทางของสาขา 1.4 โอเรียนเต็ลกราฟ 1.5 คัดเซตพื้นฐาน	1. เพื่อให้เข้าใจถึงนิยามและหลักการของแต่ละเรื่อง 2. สามารถคำนวณและประยุกต์ใช้งานได้	1. ใช้แผ่นใสประกอบกับการเขียนบนกระดานพร้อมกับอธิบาย 2. ตรวจสอบความเข้าใจโดยการถามตอบ 3. ให้นักเรียน
2-3	บทที่ 2 การวิเคราะห์วงจรขั้วไฟฟ้า 2.1 การวิเคราะห์วงจรขั้วไฟฟ้าแบบแรงดันโนด 2.2 ขั้นตอนการวิเคราะห์วงจรขั้วไฟฟ้าแบบแรงดันโนด 2.3 การวิเคราะห์วงจรขั้วไฟฟ้าแบบกระแสลูป 2.4 ขั้นตอนการวิเคราะห์วงจรขั้วไฟฟ้าแบบกระแสลูป 2.5 การวิเคราะห์วงจรขั้วไฟฟ้าแบบกระแสเมช 1.2 ขั้นตอนการวิเคราะห์วงจรขั้วไฟฟ้าแบบกระแสเมช	1. เพื่อให้เข้าใจถึงนิยามและหลักการของแต่ละเรื่อง 2. สามารถคำนวณและประยุกต์ใช้งานได้	1. ใช้แผ่นใสประกอบกับการเขียนบนกระดานพร้อมกับอธิบาย 2. ตรวจสอบความเข้าใจโดยการถามตอบ 3. ให้นักเรียน
4-5	บทที่ 3 ลาปลาซ 3.1 การแปลงลาปลาซ 3.2 คุณสมบัติของการแปลงลาปลาซ 3.3 คุณสมบัติเชิงเส้น 3.4 คุณสมบัติการเลื่อน	1. เพื่อให้เข้าใจถึงนิยามและหลักการของแต่ละเรื่อง	1. ใช้แผ่นใสประกอบกับการเขียนบนกระดานพร้อมกับอธิบาย

ลำดับ ที่	หัวข้อที่จะสอน	จุดประสงค์เชิง พฤติกรรม	วิธีสอนและ กิจกรรม
4-5 (ต่อ)	บทที่ 3 ลาปลาซ (ต่อ) 3.5 คุณสมบัติการคูณด้วย t^n 3.6 การหารด้วย t 3.7 การแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน 3.8 การแปลงลาปลาซของอินทิกรัล 3.9 ฟังก์ชันคาบ 3.10 การแปลงลาปลาซของของฟังก์ชันขั้นบันไดแบบหน่วย 3.11 การเขียนฟังก์ชันขั้นบันไดจากฟังก์ชันที่กำหนดให้ 3.12 การแปลงลาปลาซผกผัน 3.13 คุณสมบัติของการแปลงลาปลาซผกผัน 3.14 คุณสมบัติเชิงเส้น 3.15 คุณสมบัติการเลื่อนแบบที่ 1 3.16 คุณสมบัติการเลื่อนแบบที่ 2 3.17 การแปลงลาปลาซผกผันของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน 3.18 ทฤษฎีบทผลการประสาน 3.19 เศษส่วนย่อย	2. สามารถคำนวณและประยุกต์ใช้งานได้	2. ตรวจสอบความเข้าใจโดยการถามตอบ 3. ให้การบ้าน
6	บทที่ 4 การประยุกต์ลาปลาซในวงจรจ่ายไฟฟ้า 4.1 การแปลงลาปลาซของแหล่งจ่าย 4.2 การแปลงลาปลาซของ R L และ C	1. เพื่อให้เข้าใจถึงนิยามและหลักการของแต่ละเรื่อง 2. สามารถคำนวณและประยุกต์ใช้งานได้	1. ใช้แผ่นใสประกอบกับการเขียนบนกระดานพร้อมกับอธิบาย 2. ตรวจสอบความเข้าใจโดยการถามตอบ

สัปดาห์ ที่	หัวข้อที่จะสอน	จุดประสงค์เชิง พฤติกรรม	วิธีสอนและ กิจกรรม
6 (ต่อ)	บทที่ 4 การประยุกต์ลูปลาซในวงจรขั้วไฟฟ้า (ต่อ)		3. ให้การบ้าน
7	บทที่ 5 Network Function 5.1 ฟังก์ชันโอนย้าย 5.2 ไครว้พอยท์ฟังก์ชัน 5.3 Network Function ของวงจรขั้ว 2 ทาง	1. เพื่อให้เข้าใจถึงนิยามและหลักการของแต่ละเรื่อง 2. สามารถคำนวณและประยุกต์ใช้งานได้	1. ใช้แผ่นใสประกอบกับการเขียนบนกระดานพร้อมอธิบาย 2. ตรวจสอบความเข้าใจโดยการถามตอบ 3. ให้การบ้าน
8	บทที่ 6 สมการสถานะ และความถี่ธรรมชาติ 6.1 สมการสถานะ 6.2 การเขียนสมการสถานะของวงจรขั้ว 6.3 การสร้างสมการสถานะของวงจรขั้ว 6.4 ความถี่ธรรมชาติ	1. เพื่อให้เข้าใจถึงนิยามและหลักการของแต่ละเรื่อง 2. สามารถคำนวณและประยุกต์ใช้งานได้	1. ใช้แผ่นใสประกอบกับการเขียนบนกระดานพร้อมอธิบาย 2. ตรวจสอบความเข้าใจโดยการถามตอบ 3. ให้การบ้าน
9	สอบกลางภาค	ตรวจสอบความพร้อมในการเรียน	ตรวจสอบความเข้าใจสอบ 3 ชั่วโมง

สัปดาห์ ที่	หัวข้อที่จะสอน	จุดประสงค์เชิง พฤติกรรม	วิธีสอนและ กิจกรรม
10-11	บทที่ 7 วงจรจ่ายสองทาง 7.1 Z พารามิเตอร์ 7.2 Y พารามิเตอร์ 7.3 H พารามิเตอร์ 7.4 T พารามิเตอร์ 7.5 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าพารามิเตอร์ ของวงจรจ่ายสองทาง	1. เพื่อให้เข้าใจถึงนิยามและหลักการของแต่ละเรื่อง 2. สามารถคำนวณและประยุกต์ใช้งานได้	1. ใช้แผ่นใสประกอบกับการเขียนบนกระดานพร้อมกับการอธิบาย 2. ตรวจสอบความเข้าใจโดยการถามตอบ 3. ให้นักเรียน
12	บทที่ 8 การเชื่อมต่อวงจรจ่ายสองทาง 8.1 การเชื่อมต่อวงจรจ่ายสองทางแบบอนุกรม 8.2 การเชื่อมต่อวงจรจ่ายสองทางแบบขนาน 8.3 การเชื่อมต่อวงจรจ่ายสองทางแบบลูกโซ่	1. เพื่อให้เข้าใจถึงนิยามและหลักการของแต่ละเรื่อง 2. สามารถคำนวณและประยุกต์ใช้งานได้	1. ใช้แผ่นใสประกอบกับการเขียนบนกระดานพร้อมกับการอธิบาย 2. ตรวจสอบความเข้าใจโดยการถามตอบ 3. ให้นักเรียน
13	บทที่ 9 โพล ซีโร และเสถียรภาพของวงจร 9.1 นิยามของโพล และซีโร 9.2 เสถียรภาพ	1. เพื่อให้เข้าใจถึงนิยามและหลักการของแต่ละเรื่อง 2. สามารถคำนวณและประยุกต์ใช้งานได้	1. ใช้แผ่นใสประกอบกับการเขียนบนกระดานพร้อมกับการอธิบาย 2. ตรวจสอบความเข้าใจโดยการถามตอบ

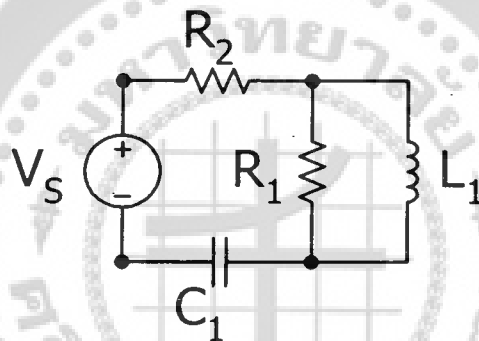
สัปดาห์ ที่	หัวข้อที่จะสอน	จุดประสงค์เชิง พฤติกรรม	วิธีสอนและ กิจกรรม
13(ต่อ)	บทที่ 9 โพล ซีโร และเสถียรภาพของวงจร (ต่อ)		3. ให้การบ้าน
14	บทที่ 10 การตอบสนองความถี่ และโบคพลอท 10.1 การตอบสนองความถี่ 10.2 โบคพลอท	1. เพื่อให้เข้าใจถึงนิยามและหลักการของแต่ละเรื่อง 2. สามารถคำนวณและประยุกต์ใช้งานได้	1. ใช้แผ่นใสประกอบกับการเขียนบนกระดานพร้อมคำอธิบาย 2. ตรวจสอบความเข้าใจโดยการถามตอบ 3. ให้การบ้าน
15	บทที่ 11 การวิเคราะห์สถานะคงตัวของวงจรที่ใช้คลื่นไซน์เป็นสัญญาณอินพุต 11.1 คลื่นรูปไซน์ 11.2 เฟสเซอร์ 11.3 ความสัมพันธ์ระหว่างเฟสเซอร์กับ R L และ C 11.4 อิมพีแดนซ์ 11.5 แอดมิตแตนซ์	1. เพื่อให้เข้าใจถึงนิยามและหลักการของแต่ละเรื่อง 2. สามารถคำนวณและประยุกต์ใช้กับงานจริงได้ 2. ตรวจสอบความพร้อมในการเรียน	1. ใช้แผ่นใสประกอบกับการเขียนบนกระดานพร้อมคำอธิบาย 2. ตรวจสอบความเข้าใจโดยการถามตอบ 3. ให้การบ้าน
16	สอบปลายภาค	ตรวจสอบความเข้าใจ	สอบ 3 ชั่วโมง

บทที่ 1.

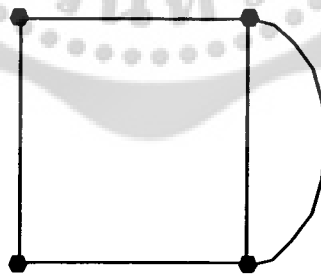
คุณลักษณะวงจรขั้วไฟฟ้า

1.1 คุณลักษณะวงจรขั้วไฟฟ้า

วงจรขั้วไฟฟ้า จะประกอบไปด้วยองค์ประกอบวงจร เช่น แหล่งจ่าย, ความต้านทาน, ตัวเหนี่ยวนำ, ตัวเก็บประจุ เป็นต้น ซึ่งสามารถแทนองค์ประกอบเหล่านี้ด้วยกราฟของวงจรเพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์วงจร ดังรูปที่ 1.1 ซึ่งวงจรขั้วไฟฟ้าจะประกอบไปด้วย โหนด 4 โหนด และมี 5 สาขา



รูปที่ 1.1 แสดงวงจรขั้วไฟฟ้าที่มี 4 โหนด 5 สาขา



รูปที่ 1.2 แสดงกราฟของวงจรรูปที่ 1.1

การเขียนกราฟของวงจรจะเขียนกราฟเชื่อมระหว่าง โหนด 2 โหนด ซึ่งก็คือ สาขาของวงจรขั้วไฟฟ้า โดยกราฟแต่ละเส้นแทนองค์ประกอบของวงจรแต่ละตัว ดังรูปที่ 1.2 จะมีกราฟ 5 เส้น แทนอุปกรณ์ในวงจรในแต่ละสาขา

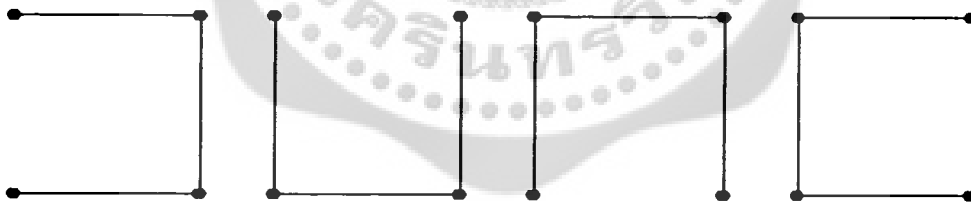
1.2 ทรี (Tree)

ทรีของกราฟคือ จำนวนของสาขาที่ต่อโนดทุก ๆ โนดเข้าด้วยกันโดยตรง หรือโดยอ้อมก็ได้แต่จะต้องไม่ครบรูป นั่นคือทรีจะเป็นกราฟย่อยของกราฟทั้งวงจร ซึ่งมีโนดอยู่ทุกโนดแต่ไม่ครบรูป โดยการเขียนทรีมีขั้นตอนคือ

1. กำหนดโนดทุก ๆ โนดให้ครบ
2. เขียนสาขาเชื่อมต่อแต่ละโนดทุก ๆ โนดเข้าด้วยกัน โดยไม่ให้ครบรูป

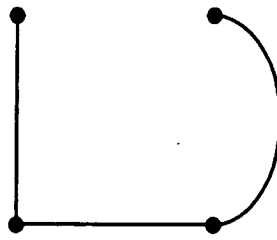
โดยทั่วไปกราฟของวงจรจะประกอบด้วยทรีหลาย ๆ ทรี จากรูปที่ 1.3 แสดงกราฟของวงจรซึ่งประกอบด้วย 4 โนด 4 สาขา จะสามารถเขียนทรีได้ 4 แบบ ดังรูปที่ 1.4

รูปที่ 1.3 แสดงกราฟของวงจร

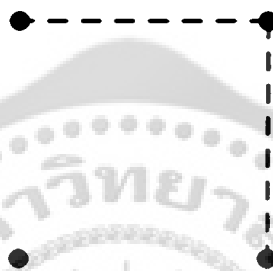


รูปที่ 1.4 แสดงทรีของกราฟวงจรแบบต่าง ๆ

จากรูปที่ 1.4 โนดทุกโนดจะถูกต่อเข้าด้วยกันแต่จะไม่ครบรูป และสาขาที่ไม่ถูกเลือกเขียนเป็นทรีจะเรียกว่า ลิงค์ (Link) ซึ่งจากรูปที่ 1.2 ซึ่งเป็นกราฟวงจรย่อยของรูปที่ 1. สามารถเขียนทรีโดยแสดงเป็นเส้นทึบดังรูป 1.5 และเขียนลิงค์โดยแสดงเป็นเส้นประดังรูปที่ 1.6



รูปที่ 1.5 แสดงตรีของกราฟรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.6 แสดงลิ้งค์ของกราฟรูปที่ 1.2

จำนวนของลิ้งค์ขึ้นอยู่กับ โหนด และสาขาของกราฟวงจร โดยมีค่าคือ

$$L = b - n + 1$$

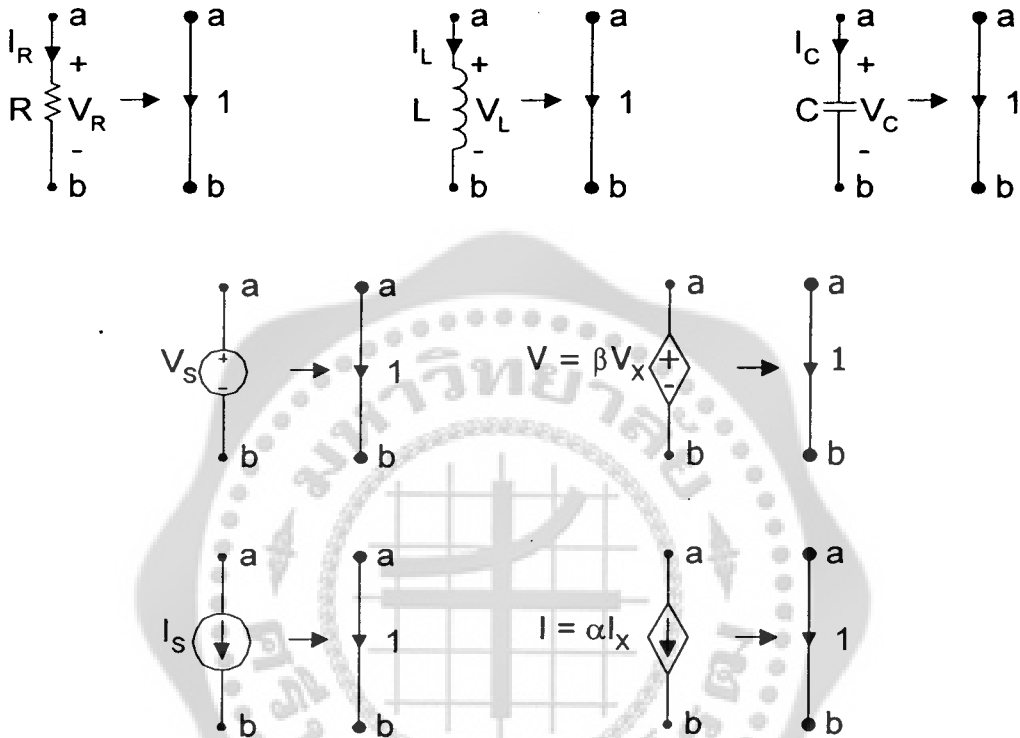
เมื่อ L คือ ลิ้งค์ของกราฟวงจร
 b คือ จำนวนสาขาของวงจร
 n คือ จำนวนโหนดของวงจร

จากรูปที่ 1.2 $b = 5, n = 4$ นั่นคือ $L = 2$ ดังนั้นลิ้งค์ของกราฟวงจรรูปที่ 1.2 จึงมี 2 สาขาดังรูปที่ 1.6

1.3 ทิศทางของสาขา

ในการเขียนวงจรจ่ายไฟฟ้าด้วยกราฟวงจร โดยในแต่ละเส้นกราฟคือการแทนแต่ละสาขาของวงจรจ่ายไฟฟ้าโดยในวงจรจ่ายไฟฟ้าแต่ละสาขาจะเป็นองค์ประกอบทางไฟฟ้าซึ่งแสดงพฤติกรรมตามค่าขององค์ประกอบนั้น เช่น ในแต่ละสาขาจะมีกระแสไฟฟ้าไหลผ่าน มีแรงดันตกคร่อมตัวองค์ประกอบนั้น ๆ เป็นต้น นอกจากการกำหนดทิศทางของสาขาแล้ว ยังต้องกำหนดหมายเลข

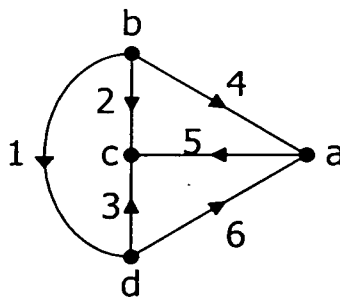
ของสาขากำกับสาขานั้น ๆ ด้วยเพื่อป้องกันการสับสนในการคำนวณ และให้ง่ายต่อการตรวจสอบ
วงจรดังรูปที่ 1.7



รูปที่ 1.7 แสดงการเขียนกราฟวงจรของอุปกรณ์ต่าง ๆ

1.4 โอเรียนเต็ดกราฟ (Oriented Graph)

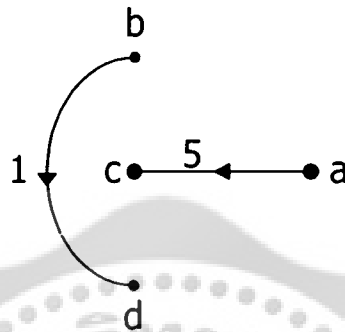
โอเรียนเต็ดกราฟ คือการกำหนดหมายเลขของสาขา และทิศทางของกระแสในกราฟ
วงจรดังรูปที่ 1.8



รูปที่ 1.8 แสดงโอเรียนเต็ดกราฟ

1.5 คัดเซต

คัดเซต คือจำนวนสาขาของกราฟวงจรที่น้อยที่สุดเมื่อถูกตัด หรือย้ายออกจากโอเรียนเต็ลกราฟ แล้วทำให้โอเรียนเต็ลกราฟแยกออกเป็น 2 ส่วน ดังรูปที่ 1.9 คัดเซตของโอเรียนเต็ลกราฟรูปที่ 1.8 ก็คือสาขา 2, 3, 4, 6 เมื่อนำคัดเซตเหล่านี้ออกโอเรียนเต็ลกราฟก็จะถูกแยกเป็น 2 ส่วน

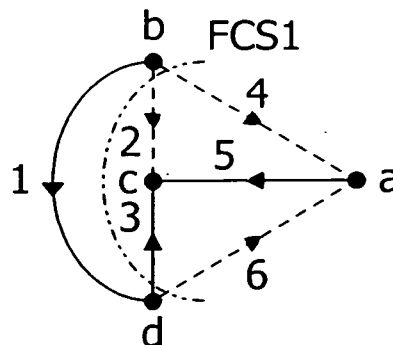


รูปที่ 1.9 แสดงโอเรียนเต็ลกราฟที่ถูกแยกออกเป็น 2 ส่วน

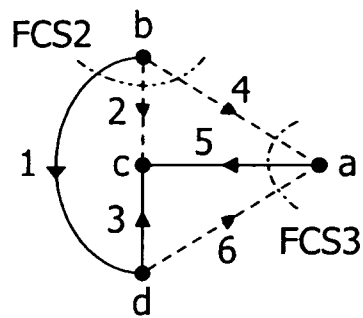
1.6 คัดเซตพื้นฐาน (Fundamental Cut Set : FCS)

คัดเซตพื้นฐาน คือคัดเซตที่ประกอบด้วยสาขาที่ประกอบด้วยทรีเพียงสาขาเดียว แต่จะมีสาขาลิ่งค์เท่าไรก็ได้ โดยมีวิธีการหาดังนี้

1. เลือกทรีจากกราฟวงจรเพียงที่เดียว
2. เลือกสาขาลิ่งค์ที่ต่อกับสาขาทรีที่เลือกไว้จากข้อ 1. ที่ทำให้กราฟวงจรแยกเป็นกราฟย่อย 2 กราฟ
3. เขียนเส้นตัดผ่านสาขาทรี และผ่านลิงค์ที่เลือกไว้ในข้อ 1. และ 2. โดยเส้นตัดผ่านจะต้องไม่ตัดผ่านสาขาที่ถูกตัดผ่านแล้วอีก

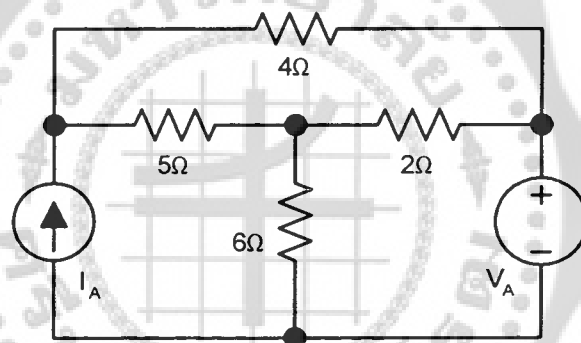


รูปที่ 1.10 แสดงคัดเซตพื้นฐานซึ่งมีสาขา 5 ที่เป็นทรีประกอบอยู่ของกราฟวงจรรูปที่ 1.8



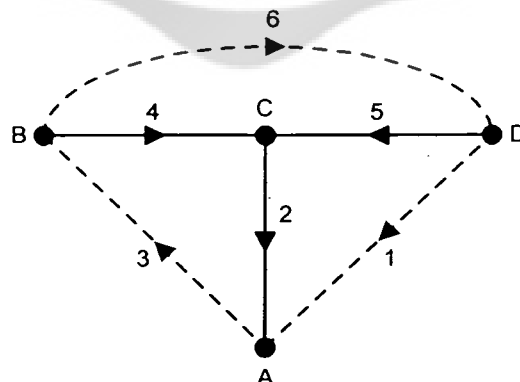
รูปที่ 1.11 คัดเซตพื้นฐานที่มีสาขา 1 และ 2 ในทรีประกอบอยู่

ตัวอย่างที่ 1.1 จงเขียนคัตเซตพื้นฐานของวงจร



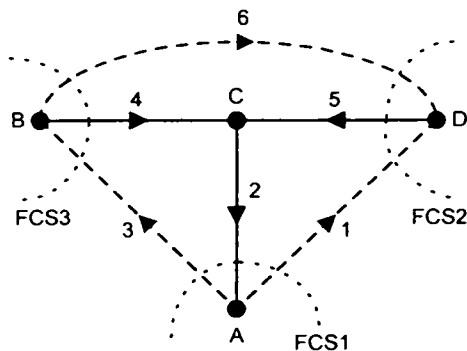
วิธีทำ

แบบที่ 1. เขียนกราฟของวงจร สร้างทรีและลิงค์



โดย อ.ศิริพงษ์ ฉายสินธ์

ลากเส้นตัดผ่านเพื่อหาคัดเซตพื้นฐาน



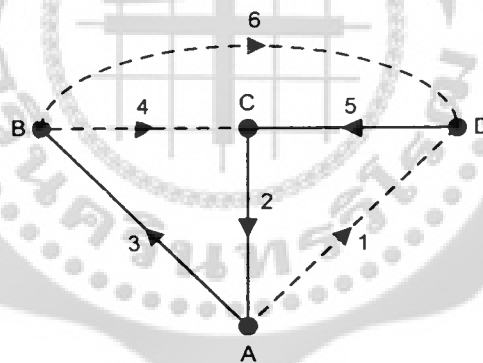
ได้คัดเซตพื้นฐานคือ

$$\text{FCS 1} = [1, 2, 3]$$

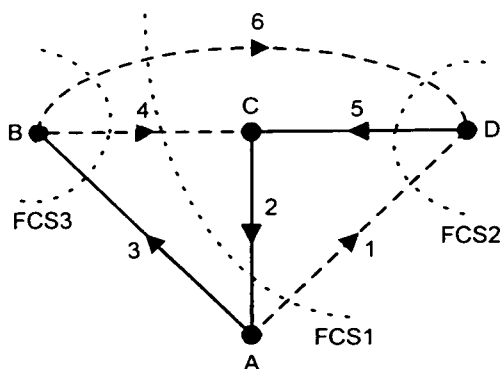
$$\text{FCS 2} = [1, 5, 6]$$

$$\text{FCS 3} = [3, 4, 6]$$

แบบที่ 2. เขียนกราฟของวงจร สร้างทรีและลิงค์



ลากเส้นตัดผ่านเพื่อหาคัดเซตพื้นฐาน



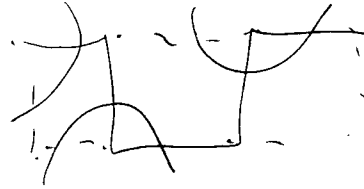
โดย อ.ศิริพงษ์ ฉายสินธ์

ได้ตัดเซตพื้นฐานคือ

$$\text{FCS } 1 = [1, 2, 6]$$

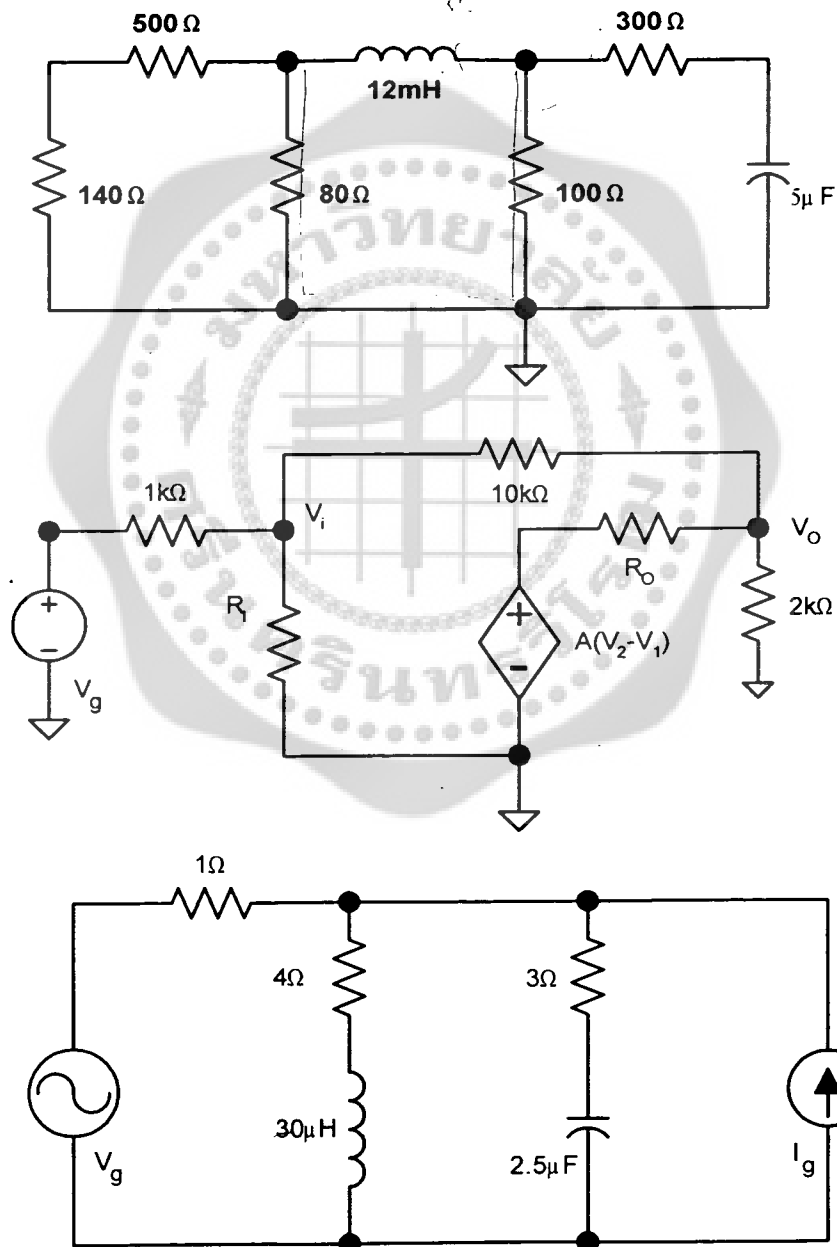
$$\text{FCS } 2 = [1, 5, 6]$$

$$\text{FCS } 3 = [3, 4, 6]$$



การบ้าน

1. จงเขียนคัตเซตพื้นฐานของวงจรต่อไปนี้



บทที่ 2.

การวิเคราะห์วงจรจ่ายไฟฟ้า

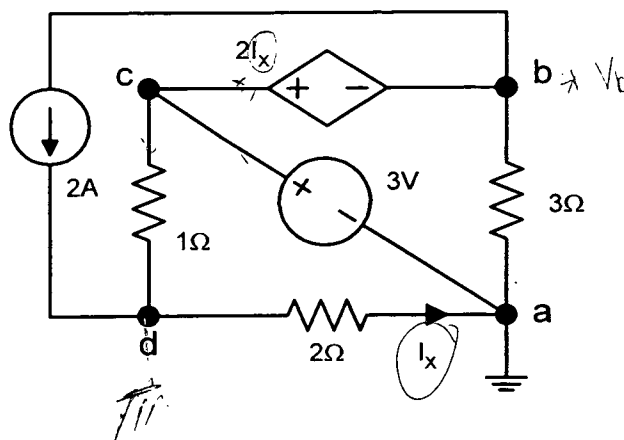
2.1 การวิเคราะห์วงจรจ่ายไฟฟ้าแบบแรงดันโนด

วงจรจ่ายไฟฟ้าที่ประกอบด้วยโนดจำนวน n โหนด สามารถใช้กฎ KCL เขียนสมการแรงดันโนดได้จำนวน $n-1$ สมการ โดยใช้คัตเซตพื้นฐานเป็นตัวแบ่งโนด ซึ่งในกราฟวงจรจะมีคัตเซตพื้นฐานจำนวน $n-1$ ดังนั้นจำนวนสมการแรงดันโนดจะมีจำนวนเท่ากับจำนวนคัตเซตพื้นฐาน

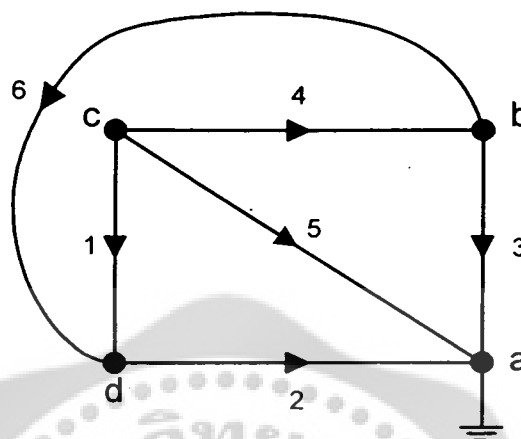
2.2 ขั้นตอนการวิเคราะห์วงจรจ่ายไฟฟ้าแบบแรงดันโนด

1. จากวงจรจ่ายไฟฟ้ากำหนดโนดอ้างอิง และเขียนกราฟวงจรของวงจรจ่ายไฟฟ้า
2. ใช้กฎ KCL เขียนสมการแรงดันโนดที่โนดแต่ละโนดในวงจรจ่ายไฟฟ้า
3. ใช้กฎของโอห์มเขียนค่ากระแสในแต่ละสาขา โดยให้อยู่ในเทอมของแรงดันโนด โดยใช้หลักการที่ว่าทิศทางที่กระแสไหลเข้าอุปกรณ์จะมีเครื่องหมายบวก (+) และกระแสไหลออกจากอุปกรณ์จะมีเครื่องหมายลบ (-)
4. นำค่ากระแสที่ได้จากข้อที่ 3 แทนลงในสมการตามข้อที่ 2
5. นำสมการที่ได้จากข้อที่ 4 มาหาค่าแรงดันโนด

ตัวอย่างที่ 2.1 จงคำนวณหาค่าแรงดัน (V_b และ I_x) โดยใช้การวิเคราะห์วงจรจ่ายไฟฟ้าแบบแรงดันโนด



วิธีทำ เขียนกราฟวงจร และเลือกโนด a เป็นโนดอ้างอิง



เมื่อเลือกโนด a เป็นโนดอ้างอิง

$$V_c = V_s = 3V$$

ใช้กฎ KCL เขียนสมการแรงดันโนดที่โนด b และโนด d

$$\text{Node b} \quad I_4 - I_3 - I_6 = 0$$

$$\text{Node d} \quad I_1 - I_2 + I_6 = 0$$

หาค่ากระแสแต่ละสาขาโดยใช้กฎของโอห์ม

$$\text{ที่โนด b} \quad I_4 - \frac{V_b}{R_3} - I_6 = 0$$

$$\text{ที่โนด d} \quad \frac{V_c - V_d}{R_1} - \frac{V_d}{R_2} + I_6 = 0$$

$$\frac{V_c}{R_1} - \frac{V_d}{R_1} - \frac{V_d}{R_2} + I_6 = 0$$

จากวงจร

$$V_c - V_b = 2I_x$$

เมื่อ

$$I_x = \frac{V_d}{R_2}$$

ดังนั้น

$$V_c - V_b = \frac{2V_d}{R_2}$$

$$V_b = V_c - \frac{2V_d}{R_2} \quad (1)$$

ที่โนด d สามารถหา V_d ได้เลยโดยการแทนค่าอุปกรณ์

$$\frac{3}{1} - \frac{V_d}{1} - \frac{V_d}{2} + 2 = 0$$

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)V_d = 5$$

$$V_d = \frac{10}{3}V$$

แทนค่า V_d ในสมการ (1) หาค่า V_b

$$V_b = -\frac{1}{3}V$$

$$\therefore I_x = \frac{V_d}{R_2} = \frac{10/3}{2} = \frac{5}{3}A$$

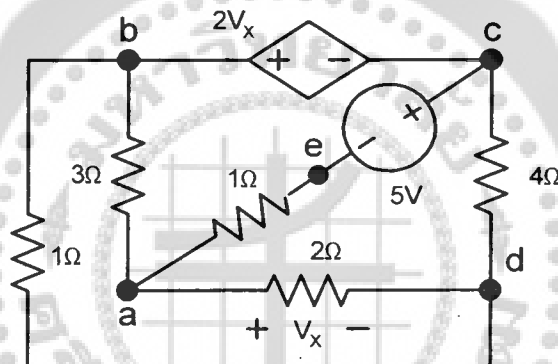
2.3 การวิเคราะห์วงจรขั้วไฟฟ้าแบบกระแสลูป

วิธีการเขียนสมการโดยใช้กฎ KVL มาเขียนสมการแรงดันซึ่งเกิดขึ้นในลูปแต่ถ้าทริของวงจรที่เลือกเมื่อนำลิ่งค์เข้าไปต่อทริแล้วเกิดสาขาทะลุ หรืออยู่ในวงรอบของลูป การเขียนสมการโดยใช้ KVL จะเขียนเป็นสมการลูป

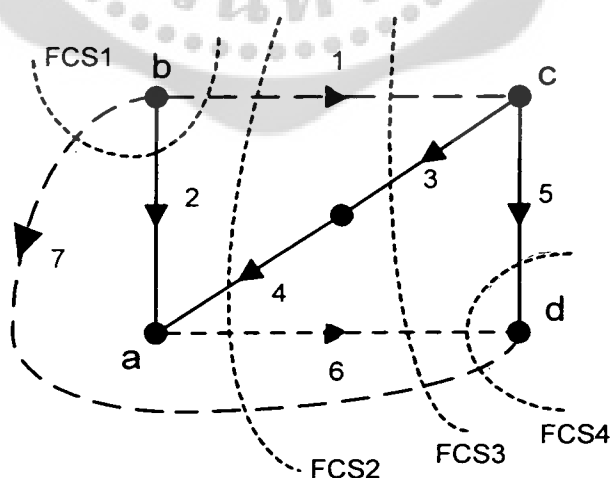
2.4 ขั้นตอนการวิเคราะห์วงจรข่ายไฟฟ้าแบบกระแสลูป

1. จากวงจรข่ายไฟฟ้าเขียนกราฟวงจรและเลือกทรีจากกราฟวงจร
2. ใช้กฎ KCL เขียนสมการจากสาขาตัดเซตพื้นฐานของแต่ละคัตเซต
3. สร้างลูปพื้นฐานใช้กฎ KVL เขียนสมการในลูปพื้นฐานจำนวน $b-n+1$
4. หาค่าแรงดันของสมการลูปพื้นฐานโดยใช้กฎของโอห์ม
5. แก้สมการที่ได้จากข้อที่ 4 ได้ค่ากระแสลูป และนำไปหากระแสและแรงดันของแต่ละสาขาต่อไป

ตัวอย่างที่ 2.2 จงคำนวณหาค่าแรงดัน V_x โดยใช้การวิเคราะห์วงจรข่ายไฟฟ้าแบบกระแสลูป



วิธีทำ เขียนกราฟวงจร กำหนดทรีและลิงค์

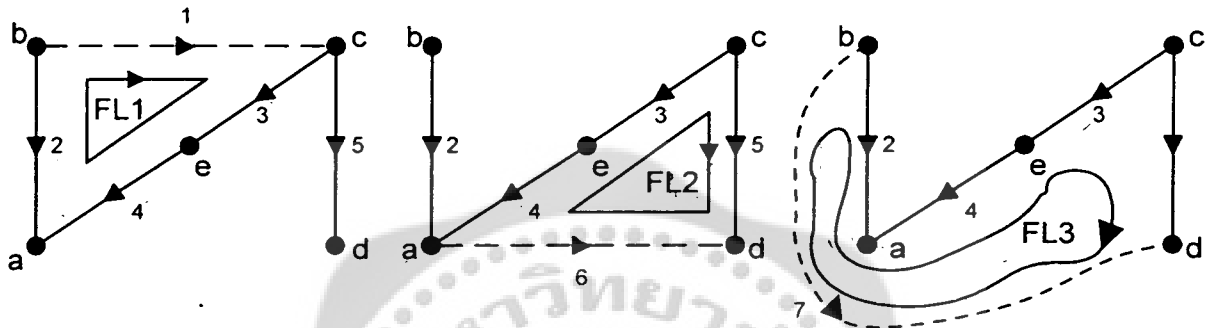


ใช้กฎ KCL เขียนสมการจากสาขาตัดเซตพื้นฐานของแต่ละคัตเซต

$$\text{FCS1} \quad I_1 + I_2 + I_7 = 0$$

$$\begin{array}{ll} \text{FCS2} & I_1 + I_6 + I_7 - I_4 = 0 \\ \text{FCS3} & I_1 + I_6 + I_7 - I_3 = 0 \\ \text{FCS4} & I_5 + I_6 + I_7 = 0 \end{array}$$

สร้างลูปพื้นฐานจากกราฟวงจร จะเกิดลูปพื้นฐาน 3 ลูป



ใช้กฎ KVL เขียนสมการลูปพื้นฐาน

$$\begin{array}{ll} \text{FL1} & V_1 + V_3 + V_4 - V_2 = 0 \\ \text{FL2} & V_5 - V_6 - V_4 - V_3 = 0 \\ \text{FL3} & V_2 - V_4 - V_3 + V_5 - V_7 = 0 \end{array}$$

หาค่าแรงดันสาขาต่าง ๆ จากกฎของโอห์ม และสมการตัดเซตพื้นฐาน

$$\begin{aligned} V_1 &= 2V_x & \text{เมื่อ } V_x &= 2I_6 & \text{ดังนั้น } V_1 &= 4I_6 \\ V_5 &= 4I_5 = -4I_6 - 4I_7 & \text{เนื่องจาก } I_5 &= -I_6 - I_7 \\ V_2 &= 3I_2 = -3I_1 - 3I_7 & \text{เนื่องจาก } I_2 &= -I_1 - I_7 \\ V_6 &= 2I_6 = V_x \\ V_3 &= 5 \\ V_4 &= 1I_4 = 1(I_1 + I_6 + I_7) & \text{เนื่องจาก } I_4 &= I_1 + I_6 + I_7 \\ V_7 &= 1I_7 \end{aligned}$$

นำค่าแรงดันสาขาต่าง ๆ ที่คำนวณได้แทนค่าลงในสมการลูปพื้นฐาน

$$\begin{array}{ll} \text{FL1} & 2(2I_6) + (5) + (I_1 + I_6 + I_7) - (-3I_1 - 3I_7) = 0 \\ & 4I_1 + 5I_6 + 4I_7 = -5 \end{array}$$

$$\begin{aligned}\text{FL2} \quad & (-4I_6 - 4I_7) - (2I_6) - (I_1 + I_6 + I_7) - (5) = 0 \\ & -I_1 - 7I_6 - 5I_7 = 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{FL3} \quad & (-3I_1 - 3I_7) - (I_1 + I_6 + I_7) - (5) + (-4I_6 - 4I_7) - I_7 = 0 \\ & -4I_1 - 5I_6 - 9I_7 = 5\end{aligned}$$

นำมาเขียนเป็นสมการเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 4 \\ -1 & -7 & -5 \\ -4 & -5 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_6 \\ I_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ทำการแก้สมการเมทริกซ์เพื่อหาค่า I_1 , I_6 และ I_7 จะได้ผลลัพธ์คือ

$$I_1 = -0.435 \text{ A}$$

$$I_6 = -0.652 \text{ A}$$

$$I_7 = 0$$

ดังนั้น

$$V_x = 2I_6 = 2(-0.652) = -1.304 \text{ V}$$

2.5 การวิเคราะห์วงจรจ่ายไฟฟ้าแบบกระแสเมช

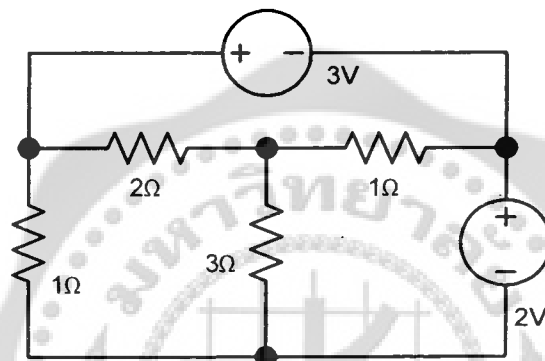
วิธีการเขียนสมการโดยใช้กฎ KVL มาเขียนสมการแรงดันซึ่งเกิดขึ้นในลูป โดยวงจรจะต้องเป็นวงจรระนาบเดียวซึ่งจะไม่มีสาขาใด ๆ ทับซ้อนสาขาอื่น ๆ

2.6 ขั้นตอนการวิเคราะห์วงจรจ่ายไฟฟ้าแบบกระแสเมช

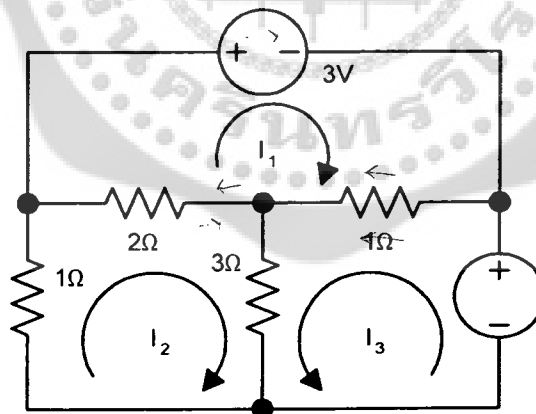
การวิเคราะห์วงจรจ่ายไฟฟ้าแบบกระแสเมช จะได้แรงดันลูปในเทอมของกระแสที่สมมุติขึ้นมา โดยเขียนสมการด้วยกฎ KVL จะคล้ายกับการวิเคราะห์วงจรจ่ายไฟฟ้าแบบกระแสลูป แต่จะต่างกันตรงที่ในแบบกระแสลูปจะพิจารณาเพียงลูปเดียวโดยไม่มีกระแสส่วนอื่นมาเกี่ยวข้อง แต่วิธีกระแสเมช จะต้องนำผลของกระแสในลูปอื่นมาร่วมพิจารณาด้วย โดยมีขั้นตอนการวิเคราะห์วงจรจ่ายไฟฟ้าแบบกระแสเมชดังนี้

1. สมมุติทิศทางกระแสเมฆที่ไหลในวงจร
2. ใช้กฎ KVL เขียนสมการแต่ละลูปที่ได้จากการสมมุติกระแสเมฆ
3. จัดสมการที่ได้จากข้อที่ 2 กำหนดให้ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าเป็นกระแสเมฆ
4. แก้สมการที่ได้จากข้อที่ 3 เพื่อหาค่ากระแสเมฆ
5. นำค่ากระแสเมฆที่คำนวณได้ไปหาค่าอื่น ๆ ตามแต่โจทย์กำหนด

ตัวอย่างที่ 2.3 จงหาค่ากระแสที่ไหลผ่านตัวต้านทาน $2\ \Omega$ และ $3\ \Omega$



วิธีทำ สมมุติทิศทางกระแสเมฆที่ไหลในวงจร



ใช้กฎ KVL เขียนสมการแต่ละลูปที่ได้จากการสมมุติกระแสเมฆ

$$\begin{aligned} \text{Loop1} \quad (1+2)I_1 - 2I_2 + 1I_3 &= -3V \\ 3I_1 - 2I_2 + I_3 &= -3V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Loop2} \quad -2I_1 + (1+2+3)I_2 + 3I_3 &= 0V \\ -2I_1 + 6I_2 + 3I_3 &= 0V \end{aligned}$$

Loop3

$$1I_1 + 3I_2 + (1+3)I_3 = 2V$$

$$I_1 + 3I_2 + 4I_3 = 2V$$

นำมาเขียนเป็นสมการแมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ทำการแก้สมการแมทริกซ์เพื่อหาค่า I_1 , I_2 และ I_3 จะได้ผลลัพธ์คือ

$$I_1 = -6.27 \text{ A}$$

$$I_2 = -5 \text{ A}$$

$$I_3 = 5.82 \text{ A}$$

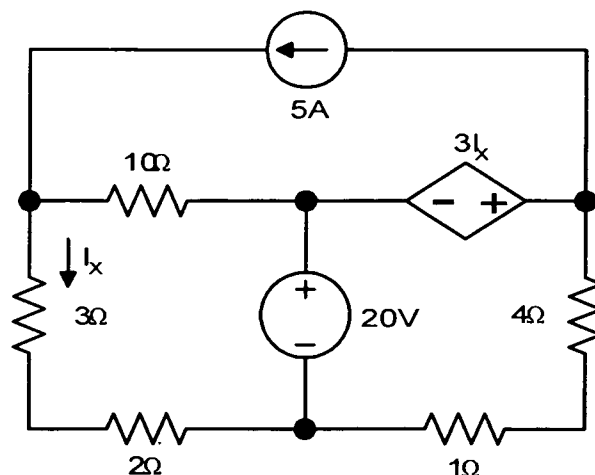
ดังนั้น ค่ากระแสที่ไหลผ่านตัวต้านทาน $2\ \Omega$ มีค่าเท่ากับ

$$I_{2\Omega} = I_1 - I_2 = -6.27 - (-5) = -1.27 \text{ A}$$

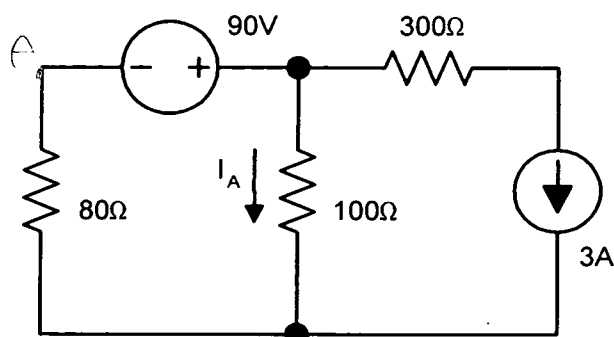
ค่ากระแสที่ไหลผ่านตัวต้านทาน $3\ \Omega$ มีค่าเท่ากับ

$$I_{3\Omega} = I_2 + I_3 = -5 + 5.82 = 0.82 \text{ A}$$

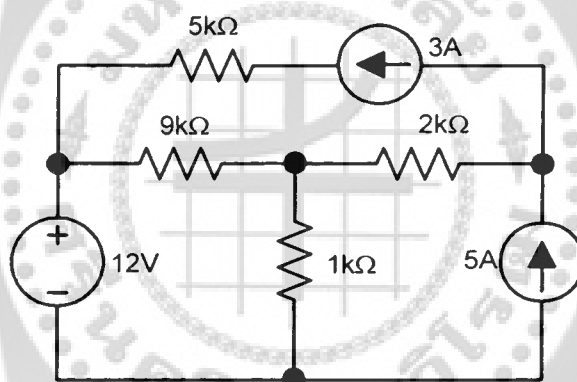
การบ้าน

1. จงคำนวณหาค่ากระแส I_x โดยใช้การวิเคราะห์วงจรขั้วไฟฟ้าแบบแรงดันโนด

2. จงคำนวณหาค่ากระแส I_A โดยใช้การวิเคราะห์วงจรขั้วไฟฟ้าแบบกระแสลูป



3. จงคำนวณหาค่ากระแสที่ไหลผ่านตัวต้านทาน $1\text{ k}\Omega$ และ $2\text{ k}\Omega$ โดยใช้การวิเคราะห์วงจรขั้วไฟฟ้าแบบกระแสเมช



บทที่ 3.

ลาปลาซ

3.1 การแปลงลาปลาซ

นิยาม ให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งหาค่าได้เป็นจำนวนจริง ที่นิยามไว้สำหรับทุกค่าจริงบวกของ t ถ้า S เป็นตัวแปรจริงซึ่งทำให้ $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ หาค่าได้ จะเรียก $F(s)$ นี้ว่าผลการแปลงลาปลาซของ $f(t)$ เขียนแทนด้วย $L\{f(t)\}$

นั่นคือ

$$L\{f(t)\} = F(s) \\ = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

ตัวอย่างที่ 3.1

$$L\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-st} dt \\ = -\frac{1}{s} \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-st} \Big|_0^R \\ = -\frac{1}{s} \lim_{R \rightarrow \infty} [e^{-sR} - 1] = \frac{1}{s}$$

ตัวอย่างที่ 3.2

$$L\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{at} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-(s-a)t} dt \\ = -\frac{1}{s-a} \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-(s-a)t} \Big|_0^R \\ = -\frac{1}{s-a} \lim_{R \rightarrow \infty} [e^{-(s-a)R} - 1] \quad s > a \\ = \frac{1}{s-a}$$

ตัวอย่างที่ 3.3

$$L\{\sin at\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \sin at dt \\ = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-st} \sin at dt$$

เนื่องจาก $\int e^{ax} \sin bx dx = e^{ax} \frac{(b \sin bx - a \cos bx)}{a^2 + b^2}$

ดังนั้น $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-st} \sin at dt = \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-sR} \left(\frac{a \cos at + s \sin at}{s^2 + a^2} \right) \Big|_0^R$

$$= \frac{1}{s^2 + a^2} \lim_{R \rightarrow \infty} [e^{-sR} (a \cos aR + s \sin aR - (a + 0))]$$

$$= \frac{a}{s^2 + a^2}$$

3.2 คุณสมบัติของการแปลงลาปลาซ

1. คุณสมบัติเชิงเส้น
2. คุณสมบัติการเลื่อน
3. การคูณด้วย t^n
4. การหารด้วย t
5. การแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
6. การแปลงลาปลาซของอินทิกรัล

3.3 คุณสมบัติเชิงเส้น

$$L\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1 L\{f(t)\} + c_2 L\{g(t)\}$$

ตัวอย่างที่ 3.4

$$L\{\sin(4t - 3)\} = L\{\sin 4t \cos 3 - \cos 4t \sin 3\}$$

$$= \cos 3 L\{\sin 4t\} - \sin 3 L\{\cos 4t\}$$

$$= (\cos 3) \left(\frac{4}{s^2 + 16} \right) - (\sin 3) \left(\frac{s}{s^2 + 16} \right)$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

3.4 คุณสมบัติการเลื่อน

ถ้า $L\{f(t)\} = F(s)$

แล้ว $L\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$

ตัวอย่างที่ 3.5 $L\{e^{3t} \cos 4t\} \because L\{\cos 4t\} = \frac{s}{s^2 + 16} = F(s)$

$$\therefore L\{e^{3t} \cos 4t\} = F(s-3) \\ = \frac{s-3}{(s-3)^2 + 16}$$

3.5 คุณสมบัติการคูณด้วย t^n

ถ้า $L\{f(t)\} = F(s)$

แล้ว $L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$

ตัวอย่างที่ 3.6

$$L\{\cos t\} \because L\{\cos t\} = \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$\therefore L\{t \cos t\} = (-1)^1 \frac{d\left(\frac{s}{s^2 + 1}\right)}{ds} \\ = (-1) \frac{(s^2 + 1)(1) - (s)(2s)}{(s^2 + 1)^2}$$

3.6 การหารด้วย t

ถ้า $L\{f(t)\} = F(s)$

แล้ว $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u) du$

ตัวอย่างที่ 3.7

$$L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} \because L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1} = F(s)$$

$$\therefore L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^\alpha F(u) du = \int_s^\alpha \frac{1}{u^2 + 1} du \\ = \lim_{R \rightarrow \alpha} \int_s^R \frac{1}{u^2 + 1} du$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{R \rightarrow \alpha} \tan^{-1} u \Big|_s^R \\
 &= \lim_{R \rightarrow \alpha} (\tan^{-1} R - \tan^{-1} s) \\
 &= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s
 \end{aligned}$$

3.7 การแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - s^{n-3}f''(0) \dots \dots \dots - f^{(n-1)}(0)$$

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

$$L\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf'(0) - f''(0)$$

$$L\{f'''(t)\} = s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

3.8 การแปลงลาปลาซของอินทิกรัล

ถ้า $L\{f(t)\} = F(s)$

แล้ว $L\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$

ตัวอย่างที่ 3.8

$$L\left\{e^{-3t} \int_0^t \sin 2t dt\right\}$$

ขั้นที่ 1. $L\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2 + 4} = 2(s^2 + 4)^{-1}$

ขั้นที่ 2. $L\{t \sin 2t\} = (-1)^1 (-2)(s^2 + 4)^{-2} (2s) = \frac{4s}{(s^2 + 4)^2}$

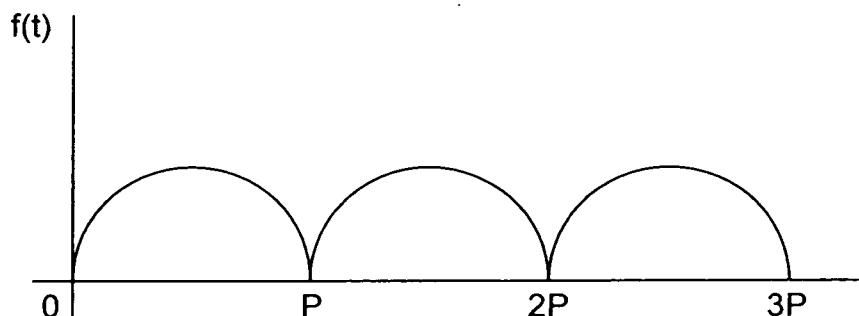
ขั้นที่ 3. $L\left\{\int_0^t \sin 2t\right\} = \left(\frac{1}{s}\right) \left(\frac{4s}{(s^2 + 4)^2}\right) = \frac{4}{(s^2 + 4)^2}$

ขั้นที่ 4. $L\left\{e^{-3t} \int_0^t \sin 2t dt\right\} = \frac{4}{[(s + 3)^2 + 4]^2}$

3.9 ฟังก์ชันเป็นคาบ

นิยาม ฟังก์ชัน $f(t)$ จะเป็นฟังก์ชันคาบ ก็ต่อเมื่อเป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้ทุกค่าจริง t และถ้ามีเลขจำนวนบวก P ซึ่งทำให้ $f(t+P) = f(t)$ ทุกค่าจริง t

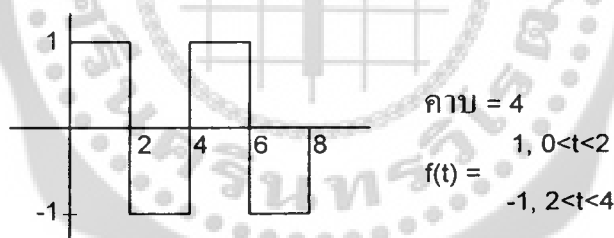
กราฟของฟังก์ชันเป็นคาบที่มีความเท่ากับ P จะมีลักษณะซ้ำกันในช่วงความยาว P



ให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคาบซึ่งมีคาบเท่ากับ P และเป็นฟังก์ชันที่มีความยาวต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บนช่วงที่มีความยาว P จะได้ว่า

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-Ps}} \int_0^P e^{-Pst} f(t) dt$$

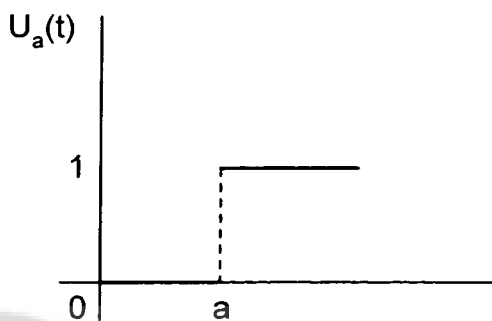
ตัวอย่างที่ 3.9 จงแปลงลาปลาซของ Square Wave



$$\begin{aligned} \therefore L\{f(t)\} &= \frac{1}{1 - e^{-4s}} \int_0^4 e^{-st} f(t) dt \\ &= \frac{1}{1 - e^{-4s}} \left[\int_0^2 e^{-st} (1) dt + \int_2^4 e^{-st} (-1) dt \right] \\ &= \frac{1}{1 - e^{-4s}} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^2 + \frac{1}{s} e^{-st} \Big|_2^4 \right] \\ &= \left(\frac{1}{s} \right) \left(\frac{1}{1 - e^{-4s}} \right) [-(e^{-2s} - 1) + (e^{-4s} - e^{-2s})] \end{aligned}$$

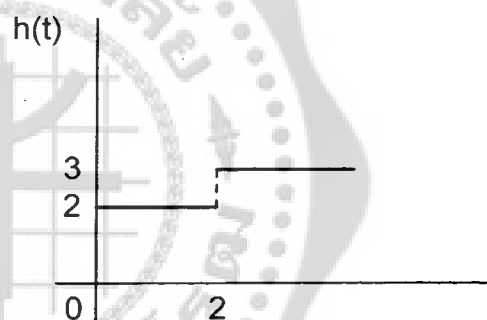
3.10 การแปลงลาปลาซของฟังก์ชันขั้นบันไดแบบหน่วย (Unit Step Function)

ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย นิยามโดย

$$U(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases} \quad \text{เมื่อ } a \geq 0$$


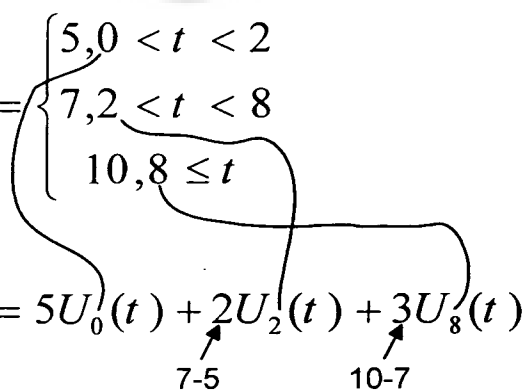
ฟังก์ชันขั้นบันไดอื่นสามารถเขียนเป็น ผลบวกของฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วยได้ เช่น

$$h(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 2 \\ 3, & 2 \leq t \end{cases}$$

$$h(t) = 2U_0(t) + U_2(t)$$


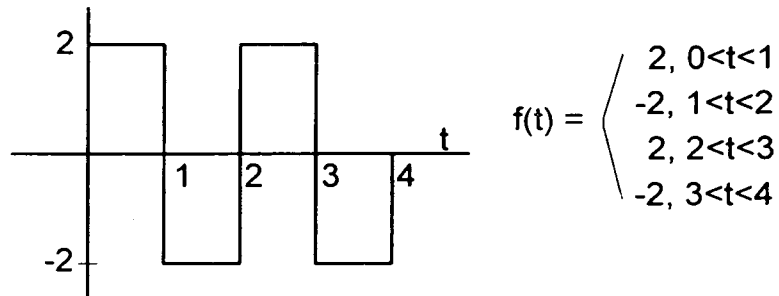
3.11 การเขียนฟังก์ชันขั้นบันไดจากฟังก์ชันที่กำหนดให้

$$f(t) = \begin{cases} 5, & 0 < t < 2 \\ 7, & 2 < t < 8 \\ 10, & 8 \leq t \end{cases}$$

$$f(t) = 5U_0(t) + \underset{7-5}{2}U_2(t) + \underset{10-7}{3}U_8(t)$$


ตัวอย่างที่ 3.10

จากฟังก์ชันที่กำหนดให้เขียนให้อยู่ในเทอมของฟังก์ชันขั้นบันไดแบบหน่วยและหา $L\{f(t)\}$



$$\therefore f(t) = 2U_0(t) - 4U_1(t) + 4U_2(t) - 4U_3(t) + \dots$$

$$L\{f(t)\} = 2L\{U_0(t)\} - 4L\{U_1(t)\} + 4L\{U_2(t)\} - 4L\{U_3(t)\} + \dots$$

$$= \frac{2e^{-0s}}{s} - \frac{4e^{-1s}}{s} + \frac{4e^{-2s}}{s} - \frac{4e^{-3s}}{s} + \dots$$

$$= \frac{2}{s} - \frac{4}{s}(e^{-s} - e^{-s} + e^{-s} - \dots)$$

$$= \frac{2}{s} - \frac{4}{s} \left(\frac{e^{-s}}{1 + e^{-s}} \right)$$

ตารางการแปลงเข้าลาปลาซที่สำคัญ

$f(t)$	$L\{f(t)\}$
1	$1/s$
t	$1/s^2$
t^2	$2!/s^3$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s-a)$
$\cos at$	$s/(s^2 + a^2)$
$\sin at$	$a/(s^2 + a^2)$
$\cosh at$	$s/(s^2 - a^2)$
$\sinh at$	$a/(s^2 - a^2)$

3.12 การแปลงลาปลาซผกผัน

นิยาม ให้ $L\{f(t)\}=F(s)$ จะกล่าวว่า $f(t)$ เป็นผลจากการแปลงผกผันลาปลาซของ $F(s)$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$

3.13 คุณสมบัติของการแปลงลาปลาซผกผัน

1. คุณสมบัติเชิงเส้น
2. คุณสมบัติการเลื่อน
3. การแปลงลาปลาซผกผันของอนุพันธ์ ของฟังก์ชัน
4. ทฤษฎีผลการประสาน
5. การใช้หลักการเศษส่วนย่อย

3.14 คุณสมบัติเชิงเส้น

$$L^{-1}\{c_1F(s) + c_2G(s)\} = c_1L^{-1}\{F(s)\} + c_2L^{-1}\{G(s)\}$$

ตัวอย่างที่ 3.11

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2} - \frac{2s}{s^2+9} + \frac{1}{s-3}\right\} &= 4L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} \\ &= 4t - 2\cos 3t + e^{3t} \end{aligned}$$

3.15 คุณสมบัติการเลื่อนแบบที่ 1

$$\text{ถ้า } L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

$$\text{แล้ว } L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$$

ตัวอย่างที่ 3.12

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^3}\right\} = \frac{e^{2t}}{2!}L^{-1}\left\{\frac{(1)2!}{s^3}\right\} = \frac{1}{2}e^{2t}t^2$$

3.16 คุณสมบัติการเลื่อนแบบที่ 2

$$\text{ถ้า } L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

$$\text{แล้ว } L^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)U_a(t)$$

ตัวอย่างที่ 3.13

$$L^{-1}\left\{\frac{se^{-\pi s}}{s^2+4}\right\} \because L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} = \cos 2t = f(t)$$

$$\begin{aligned}\therefore L^{-1}\left\{e^{-s\pi} \cdot \frac{s}{s^2 + 4}\right\} &= f(t - \pi)U_{\pi}(t) \\ &= \cos 2(t - \pi)U_{\pi}(t) \\ &= \cos(2t - 2\pi)U_{\pi}(t)\end{aligned}$$

3.17 การแปลงลาปลาซผกผันของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

$$\text{ถ้า } L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

$$\text{แล้ว } L^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n f(t) \text{ เมื่อ } n = 1, 2, 3, \dots$$

จากทฤษฎีนี้จะเขียนว่า

$$f(t) = \frac{1}{(-1)^n} \cdot \frac{1}{t^n} L^{-1}\{F^{(n)}(s)\}$$

ถ้า $n = 1$,

$$f(t) = -1 \cdot \frac{1}{t} L^{-1}\{F'(s)\}$$

ตัวอย่างที่ 3.14

$$\begin{aligned}L^{-1}\{\cot^{-1}s\} &= -\frac{1}{t} L^{-1}\left\{\frac{d \cot^{-1}s}{ds}\right\} \\ &= -\frac{1}{t} L^{-1}\left\{\frac{-1}{1+s^2}\right\} \\ &= \frac{1}{t} L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} \\ &= \frac{1}{t} \sin t\end{aligned}$$

3.18 ทฤษฎีบทผลการประสาน (Convolution InteGral)

$$\text{ถ้า } L^{-1}\{F(s)\} = f(t), L^{-1}\{G(s)\} = g(t) \text{ จะได้ว่า}$$

$$L^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} = \int_0^t f(u)g(t-u)du$$

ตัวอย่างที่ 3.15

$$\begin{aligned}
 L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} &= L^{-1}\left\{\underbrace{\frac{1}{s}}_{F(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{s^2+1}}_{G(s)}\right\} \\
 L^{-1}\{F(s)\} &= L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1 = f(t) \\
 L^{-1}\{G(s)\} &= L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t = g(t) \\
 \therefore L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} &= \int_0^t f(u)g(t-u)du \\
 &= \int_0^t 1 \sin(t-u)du \\
 &= \left[-\cos(t-u) \right]_0^t \\
 &= -\cos(t-t) + \cos(t-0) \\
 &= -\cos 0 + \cos t \\
 &= -1 + \cos t \\
 &= \cos t - 1
 \end{aligned}$$

3.19 เศษส่วนย่อย (Partial Fractions)

ตัวอย่างที่ 3.16

$$\begin{aligned}
 L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^3+s^2-6s}\right\} \\
 \frac{s+1}{s^3+s^2-6s} &= \frac{s+1}{s(s^2+s-6)} = \frac{s+1}{s(s+3)(s-2)} \\
 &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s-2} \\
 &= \frac{A(s+3)(s-2) + B(s)(s-2) + C(s)(s+3)}{s(s+3)(s-2)}
 \end{aligned}$$

$$\therefore s+1 = A(s+3)(s-2) + B(s)(s-2) + C(s)(s+3) \quad \dots(1)$$

$$\text{แทนค่า } s=-3 \text{ ใน(1)} \longrightarrow -2=15B \quad \therefore B = -\frac{2}{15}$$

แทนค่า $s=2$ ใน(1) $\longrightarrow 3=10C \quad \therefore C = \frac{3}{10}$

แทนค่า $s=0$ ใน(1) $\longrightarrow 1=-6A \quad \therefore A = -\frac{1}{6}$

$$\therefore \frac{s+1}{s^3+s^2-6s} = \frac{-1/6}{s} + \frac{-2/15}{s+3} + \frac{3/10}{s-2}$$

$$\begin{aligned} \therefore L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^3+s^2-6s}\right\} &= -\frac{1}{6}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{2}{15}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + \frac{3}{10}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} \\ &= -\frac{1}{6} \cdot (1) - \frac{2}{15}e^{-3t} + \frac{3}{10}e^{2t} \\ &= -\frac{1}{6} - \frac{2}{15}e^{-3t} + \frac{3}{10}e^{2t} \end{aligned}$$

การบ้าน

1. จงแปลงเข้าลาปลาซของฟังก์ชัน

$$\begin{aligned} f(t) &= t \quad \text{เมื่อ } 0 < t < 1 \\ &= 0 \quad \text{เมื่อ } t > 1 \end{aligned}$$

2. จงแปลงลาปลาซผกผัน

2.1 $L^{-1}\left\{\frac{s^2+s+1}{s^3+8s^2+15s}\right\}$ ใช้วิธีเศษส่วนย่อย

2.2 $L^{-1}\left\{\frac{5}{(s+1)^2}\right\}$ ใช้วิธีเศษส่วนย่อย

2.3 $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+2)}\right\}$ ทฤษฎีบทผลการประสาน

บทที่ 4.

การประยุกต์ลาปลาซในวงจรจ่ายไฟฟ้า

4.1 การแปลงลาปลาซของแหล่งจ่าย

แหล่งจ่ายที่เป็นค่าคงที่ หรือเป็นกระแส แรงดันไฟฟ้ากระแสตรง

$$v(t) = 12V \rightarrow L\{i(t)\} = V(s) = \frac{12}{s}$$

$$i(t) = 3A \rightarrow L\{i(t)\} = I(s) = \frac{3}{s}$$

แหล่งจ่ายที่เป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

$$v(t) = Ae^{-at} \rightarrow L\{v(t)\} = V(s) = \frac{A}{(s+a)}$$

$$i(t) = Ae^{-at} \rightarrow L\{i(t)\} = I(s) = \frac{A}{(s+a)}$$

แหล่งจ่ายที่เป็นฟังก์ชันไซน์ซายด์

$$v(t) = \sin \omega t \rightarrow L\{v(t)\} = L\{A \sin \omega t\} = V(s) = \frac{A\omega}{(s^2 + \omega^2)}$$

$$i(t) = \cos \omega t \rightarrow L\{i(t)\} = L\{A \cos \omega t\} = I(s) = \frac{As}{(s^2 + \omega^2)}$$

แหล่งจ่ายที่เป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลคูณกับฟังก์ชันไซน์ซายด์

$$v(t) = Ae^{-at} \sin \beta t \rightarrow L\{v(t)\} = L\{Ae^{-at} \sin(\beta t)\} = V(s) = \frac{A\beta}{(s+a)^2 + \beta^2}$$

$$i(t) = Ae^{-at} \cos \beta t \rightarrow L\{i(t)\} = L\{Ae^{-at} \cos \beta t\} = I(s) = \frac{As}{(s+a)^2 + \beta^2}$$

4.2 การแปลงลาปลาซของ R, L และ C

ตัวต้านทาน

แรงดันตกคร่อม

$$V_R(t) = Ri_R(t)$$

$$L\{V_R(t)\} = V_R(s) = RI_R(s)$$

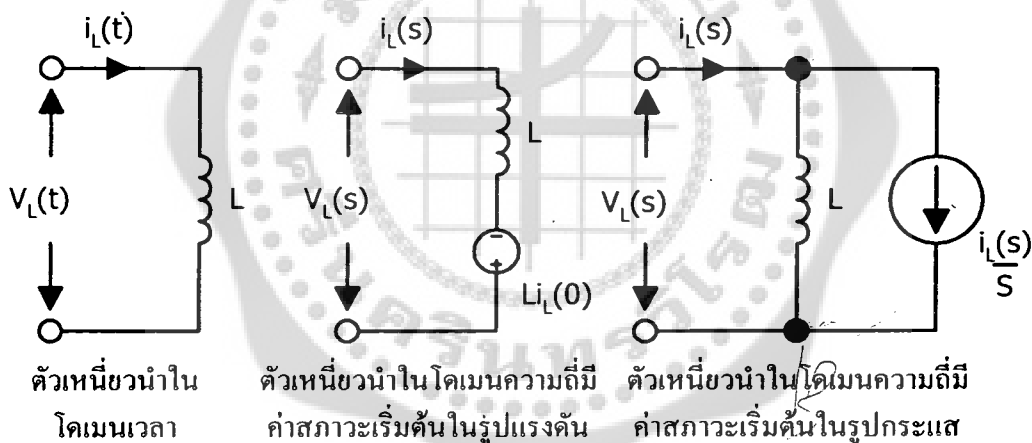
กระแสไหลผ่าน

$$L\{i_R(t)\} = I_R(s)$$

$$i_R(t) = \frac{V_R(t)}{R}$$

$$L\{i_R(t)\} = I_R(s) = \frac{V_R(s)}{R}$$

ตัวเหนี่ยวนำ



แรงดันตกคร่อม

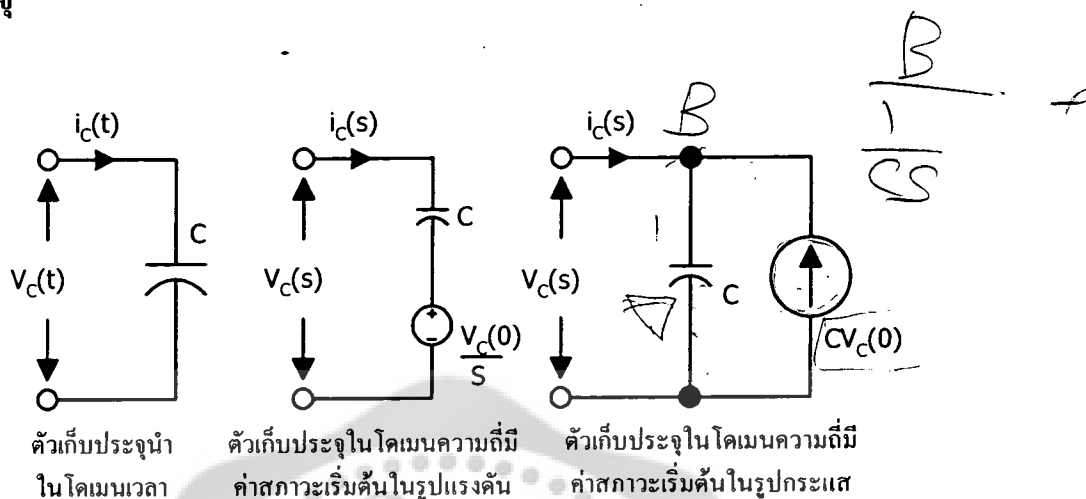
$$V_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$L\{V_L(t)\} = V_L(s) = sLI(s) - Li_L(0) \quad \text{loop}$$

กระแสไหลผ่าน

$$I_L(s) = \frac{V_L(s)}{sL} + \frac{i_L(0)}{s} \quad \text{Node}$$

ตัวเก็บประจุ



แรงดันตกคร่อม

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C dt$$

$$L\{v_C(t)\} = V_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{v_C(0)}{s}$$

Loop

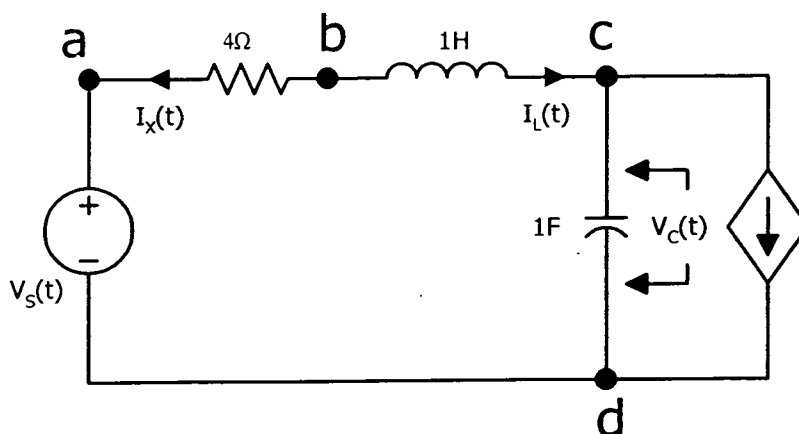
กระแสไหลผ่าน

$$I_C(s) = sCV_C(s) - Cv_C(0)$$

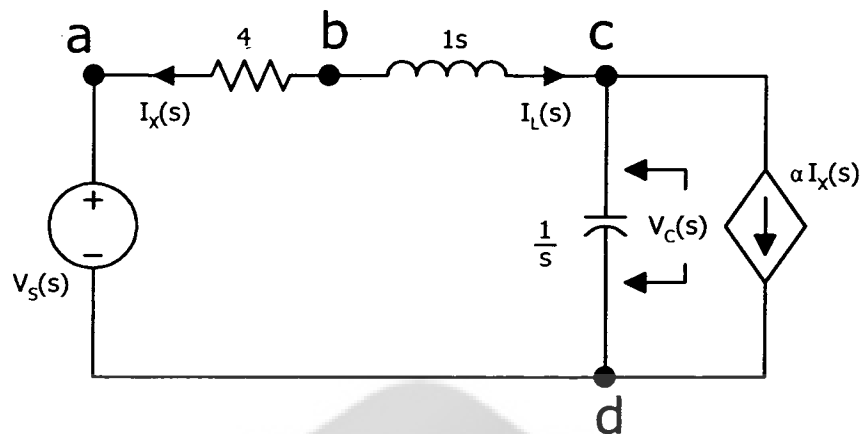
Node.

ตัวอย่างการวิเคราะห์วงจรจ่ายโดยใช้เทคนิคลาปลาซ

ตัวอย่างที่ 4.1 จงคำนวณหาค่า $V_C(t)$ โดยใช้การวิเคราะห์วงจรจ่ายไฟฟ้าแบบกระแสลูป เมื่อ $V_S(t) = U(t)$ และสถานะเริ่มต้นทั้งหมดเป็นศูนย์ และ $\alpha = 2$



วิธีทำ

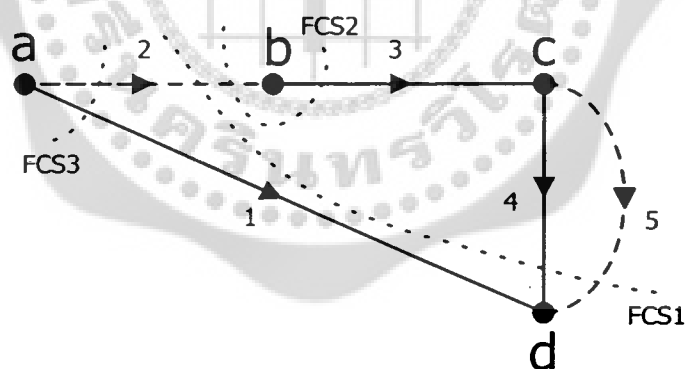


เขียนกราฟของวงจรและตัดเซตพื้นฐาน

FCS1 $-I_2 + I_4 + I_5 = 0$

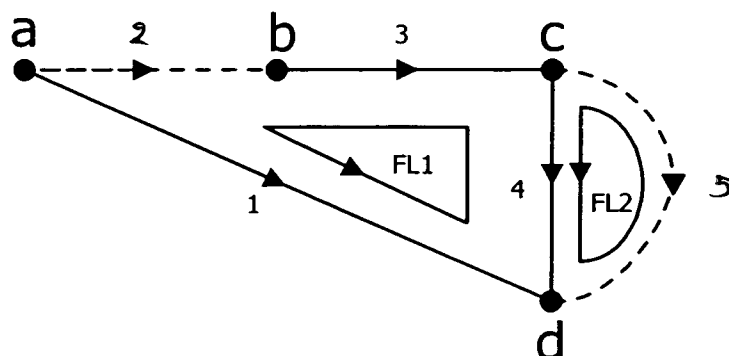
FCS2 $-I_2 + I_3 = 0$

FCS3 $-I_2 - I_1 = 0$



โดย อ.ศิริพงษ์ ฉายสินธ์

เขียนสมการรูปพื้นฐาน



FL1 $V_2 + V_3 + V_4 - V_1 = 0$

FL2 $-V_4 + V_5 = 0$

หาค่าแรงดัน และกระแสในสาขาค้าง ๆ ของวงจรในรูปลาปลาซ

$$V_1 = V_s \rightarrow V_1(s) = \frac{1}{s}$$

$$V_2 = RI_2 \rightarrow V_2(s) = 4I_2(s)$$

$$V_3 = L \frac{dI_3(t)}{dt} \rightarrow V_3(s) = S(1)I_3(s) - (1)I(0) = SI_3(s)$$

$$V_4 = \frac{1}{C} \int_0^t I_4(t) dt \rightarrow V_4(s) = \frac{1}{(1)s} I_4(s) + \frac{V_C(0)}{s} = \frac{1}{s} I_4(s)$$

$$I_5 = \alpha I_x \quad \text{เมื่อ } I_x = -I_2 \quad \text{ดังนั้น } I_5 = -I_2 \rightarrow I_5(s) = -2I_2(s)$$

$$I_2 = I_3 \rightarrow I_2(s) = I_3(s)$$

$$I_4 = I_2 - I_5 \rightarrow I_4(s) = 3I_3(s)$$

แทนค่าที่ได้ลงในสมการรูปพื้นฐาน

$$1 = A(S+3) + B(S+1)$$

$$S = -3; 1 = 0 + B(-3+1)$$

$$B = -\frac{1}{2}$$

$$S = -1; 1 = A(-1+3) + 0$$

$$A = \frac{1}{2}$$

$$4I_3(s) + sI_3 + \frac{1}{s}(3I_3(s)) = \frac{1}{s}$$

$$I_3(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$$

$$L^{-1}[I_3(s)] = \frac{1/2}{s+1} + \frac{-1/2}{s+3}$$

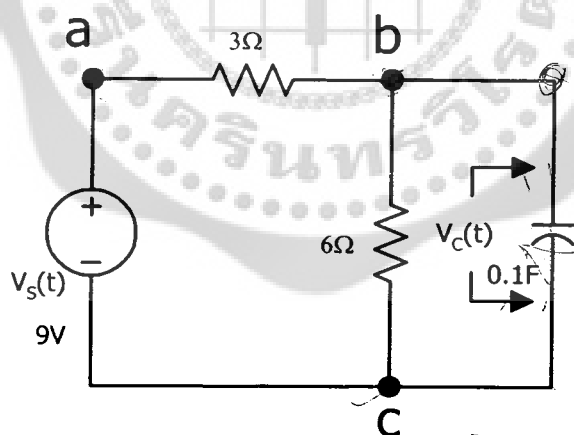
$$1 = A(S+3) + B(S+1)$$

$$I_3(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \text{ A}$$

จาก $I_4 = 3I_3 \therefore I_4(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-3t} \text{ A}$

$$\begin{aligned} V_4(t) &= \frac{1}{C} \int_0^t I_4(t) dt = \int_0^t \left(\frac{3}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-3t} \right) dt \\ &= \left(-\frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \right) \Big|_0^t \\ &= \left(-\frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \right) - \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= 1 - \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \\ \therefore V_C(t) &= 1 - \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \text{ V} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4.2 จงคำนวณหาค่า $V_C(t)$ โดยใช้การวิเคราะห์ห้วงจรข่ายไฟฟ้าแบบแรงดันโนด เมื่อ $V_S(t) = 9\text{V}$ และสถานะเริ่มต้น $V_C(0) = 2\text{V}$



$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{10}{5} \text{ A} \\ V_S &= \frac{10}{5} \text{ V} \end{aligned}$$

วิธีทำ

เขียนกราฟของวงจร กำหนดให้โนด C เป็นโนดอ้างอิง

เมื่อเลือกโนด c เป็นโนดอ้างอิง

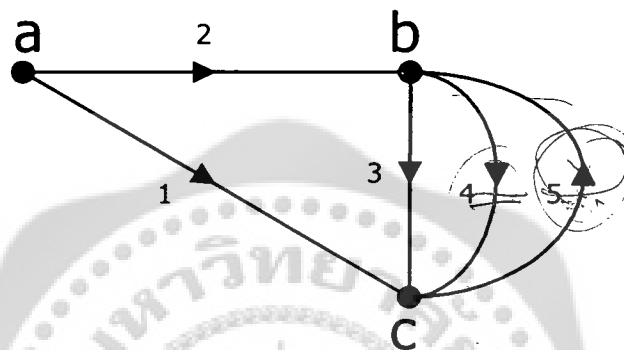
$$I_4 = (0.15 \text{ V} / 8 \rightarrow 0.2)$$

$$I_2 - I_3 - I_4 = 0$$

$$V_a = V_s = \frac{9}{s}V$$

ใช้กฎ KCL เขียนสมการแรงดัน โหนดที่ โหนด b

$$I_2 - I_3 - I_4 + I_5 = 0$$



$$I_2 = \frac{V_a - V_b}{3} \rightarrow I_2(s) = \frac{V_a(s) - V_b(s)}{3}$$

$$I_3 = \frac{V_b}{6} \rightarrow I_3(s) = \frac{V_b(s)}{6}$$

$$I_4 = C \frac{dV_b(t)}{dt} = (0.1) \frac{dV_b(t)}{dt} \rightarrow I_4(s) = \frac{sV_b(s)}{10}$$

แทนค่าลงในสมการโหนด

$$\left(\frac{V_a(s)}{3} - \frac{V_b(s)}{3} \right) - \left(\frac{V_b(s)}{6} \right) - \left(\frac{sV_b(s)}{10} \right) + 0.2 = 0$$

$$\left(\frac{s+5}{10} \right) V_b(s) = \frac{V_a(s)}{3} + 0.2$$

เมื่อ $V_a = \frac{9}{s} V$ แทนค่าในสมการโนดที่ได้

$$\left(\frac{s+5}{10}\right)V_b(s) = \frac{9}{3s} + 0.2$$

$$\left(\frac{s+5}{10}\right)V_b(s) = \frac{9+0.6s}{3s}$$

$$(3s^2 + 15s)V_b(s) = 6s + 90$$

$$V_b(s) = \frac{6s + 90}{3(s^2 + 5s)}$$

$$= \frac{2s + 30}{s^2 + 5s}$$

$$= \frac{2(s+15)}{s(s+5)}$$

$$L^{-1}[V_b(s)] = L^{-1}\left[\frac{2(s+15)}{s(s+5)}\right] = \left[\frac{6}{s} + \frac{-4}{s+5}\right]$$

$$= 6 - 4e^{-5t} V$$

$$\therefore V_c(t) = V_b(t) = 6 - 4e^{-5t} V$$

$$As + B(s+5) = 2(s+15)$$

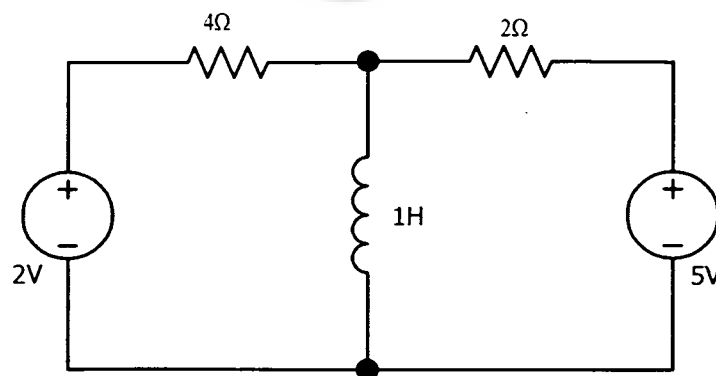
$$s=0: 0 + 5B = 30$$

$$B = 6$$

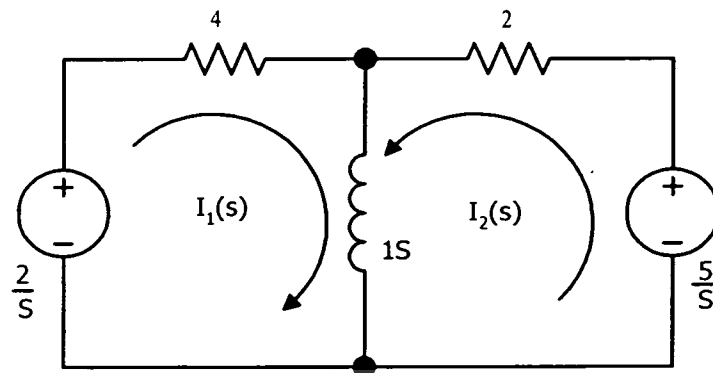
$$s=-5: -5A + 0 = 30$$

$$A = -6$$

ตัวอย่างที่ 4.3 จงคำนวณหาค่ากระแสไหลผ่านตัวต้านทาน 2 โอห์ม โดยใช้การวิเคราะห์ห้วงจรข่ายไฟฟ้าแบบกระแสเมช และสถานะเริ่มต้นทั้งหมดในวงจรเป็นศูนย์



วิธีทำ สมมุติทิศทางกระแสที่ไหลในวงจร



ใช้กฎ KVL เขียนสมการแต่ละลูปที่ได้จากการสมมุติกระแส

$$\text{Loop1} \quad (s + 4)I_1(s) + sI_2(s) = \frac{2}{s}$$

$$\text{Loop2} \quad sI_1(s) + (s + 2)I_2(s) = \frac{5}{s}$$

นำมาเขียนเป็นสมการเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} s + 4 & s \\ s & s + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{s} \\ \frac{5}{s} \end{bmatrix}$$

$(6s + 4) \text{ det}$

ทำการแก้สมการเมทริกซ์เพื่อหาค่า $I_2(s)$

$$I_2(s) = \frac{5/2}{s} + \frac{3}{s + \frac{4}{3}}$$

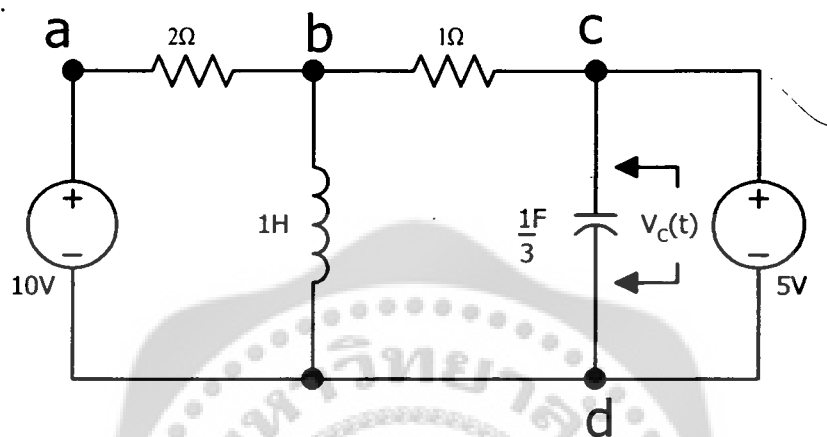
$\frac{5}{2} \rightarrow \frac{3}{s} \rightarrow \frac{3}{s} \rightarrow \frac{3}{s} \rightarrow \frac{3}{s}$

$$L^{-1}[I_2(s)] = L^{-1}\left[\frac{5/2}{s} + \frac{3}{s + \frac{4}{3}}\right] = \frac{5}{2} + 3e^{-\frac{4}{3}t}$$

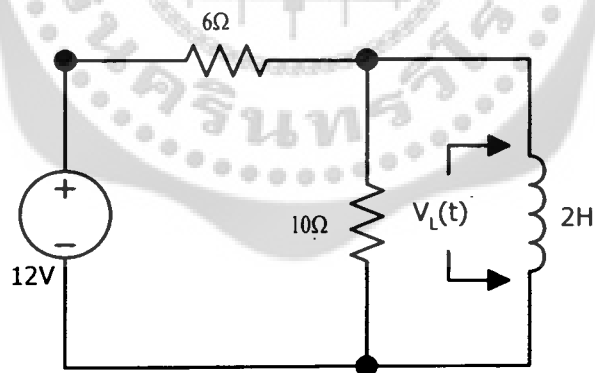
$$I_2(t) = I_{2\Omega} = \frac{5}{2} + 3e^{-\frac{4}{3}t} A$$

การบ้าน

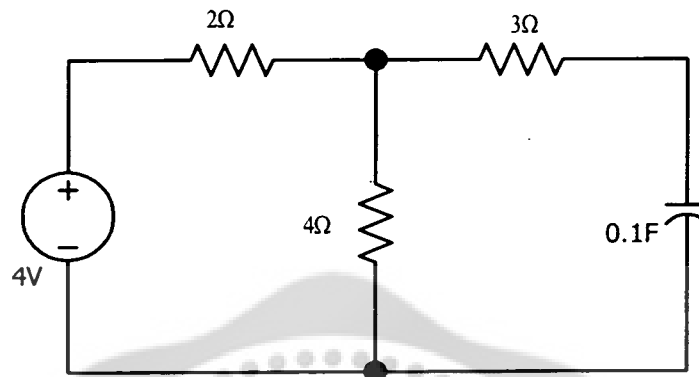
1. จงคำนวณหาค่า $V_C(t)$ โดยใช้การวิเคราะห์วงจรขั้วไฟฟ้าแบบกระแสลูป และสถานะเริ่มต้นทั้งหมดเป็นศูนย์



2. จงคำนวณหาค่า $V_L(t)$ โดยใช้การวิเคราะห์วงจรขั้วไฟฟ้าแบบแรงดันโนด เมื่อ $V_S(t) = 12V$ และสถานะเริ่มต้น $I_L(0) = 2A$



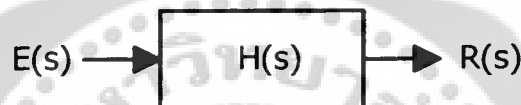
3. จงคำนวณหาค่ากระแสไหลผ่านตัวต้านทาน 2 โอห์ม โดยใช้การวิเคราะห์วงจรขั้วไฟฟ้าแบบกระแสเมช และสถานะเริ่มต้นทั้งหมดในวงจรเป็นศูนย์



บทที่ 5.

Network Function

Network Function เป็นฟังก์ชันใด ๆ ที่ใช้ในการเปรียบเทียบตัวแปรของสัญญาณทางด้านอินพุตของวงจรกับตัวแปรของสัญญาณทางด้านเอาต์พุตของวงจรในรูปแบบลาปลาซ (S โดเมน) โดยมีข้อกำหนดว่า สถานะเริ่มต้นทั้งหมดของวงจรมีค่าเท่ากับศูนย์และจะต้องไม่คำนึงถึงค่าความต้านทานของแหล่งจ่าย (Impedance Source) สามารถเขียนเป็นบล็อกไดอะแกรมดังรูปที่ 1.



รูปที่ 1. แสดงบล็อกไดอะแกรม Network Function

$E(s)$ คือ Excitation ของวงจร

$R(s)$ คือ Response ของวงจร

$H(s)$ คือ Network Function ของวงจร

นั่นคือ

$$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)}$$

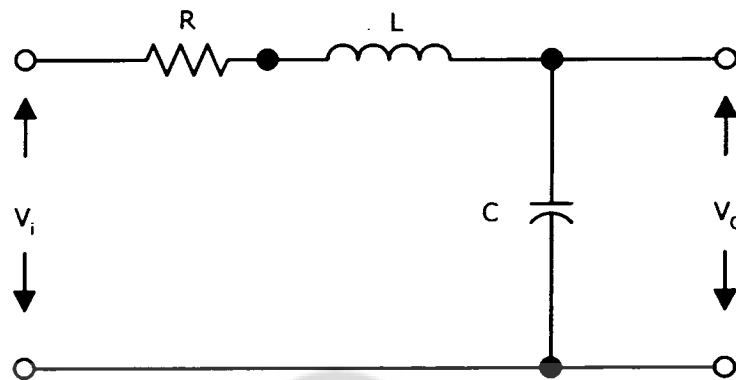
สำหรับ Network Function นั้นสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 แบบโดยขึ้นอยู่กับสัญญาณอินพุตที่ป้อนเข้าไปแล้วได้สัญญาณเอาต์พุตอะไรออกมา นั่นคือ

1. ฟังก์ชันโอนย้าย (Transfer Function)
2. ไดรฟ์พอยต์ฟังก์ชัน (Driving Point Function)

5.1 ฟังก์ชันโอนย้าย

ฟังก์ชันโอนย้ายคืออัตราส่วนของแรงดัน/กระแสทางด้านอินพุต ต่อแรงดัน/กระแสที่ได้ทางด้านเอาต์พุต โดยในส่วนของฟังก์ชันโอนย้ายสามารถที่จะแบ่งออกไปได้อีก 2 แบบคือ

1. Current Gain ($\alpha(s)$) คืออัตราส่วนของกระแสเอาต์พุตต่อกระแสอินพุต
2. Voltage Gain ($G(s)$) คืออัตราส่วนของแรงดันเอาต์พุตต่อแรงดันอินพุต

ตัวอย่างที่ 5.1 จงเขียนฟังก์ชัน Voltage Gain ($G(s)$) ของวงจร

วิธีทำ

เขียนสมการแรงดันด้านอินพุต

$$V_i(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

เขียนสมการแรงดันด้านเอาต์พุต

$$V_o(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

เมื่อสถานะเริ่มต้นทั้งหมดเป็นศูนย์ และแปลงให้อยู่ในรูป s โดเมน

$$\begin{aligned} V_i(s) &= RI(s) + LS \cdot I(s) + \frac{1}{Cs} \cdot I(s) \\ &= \left(R + Ls + \frac{1}{Cs}\right) I(s) \end{aligned}$$

$$V_o(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{Cs} I(s)}{\left(R + Ls + \frac{1}{Cs}\right) I(s)}$$

โดย อ.ศิริพงษ์ ฉายสินธ์

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{1}{Cs}}{R + Ls + \frac{1}{Cs}} \\
 &= \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}
 \end{aligned}$$

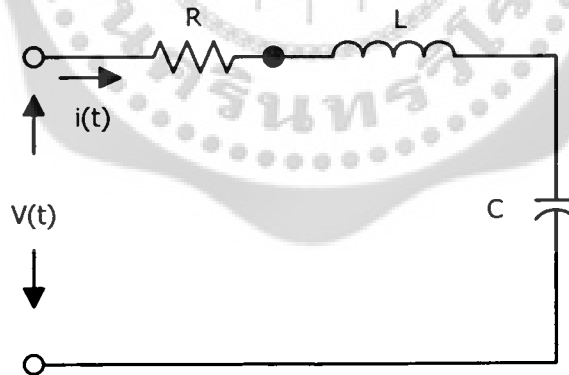
Handwritten notes and crossed-out equations are visible in the background of this block.

5.2 ไครวิงพอยต์ฟังก์ชัน

ไครวิงพอยต์ฟังก์ชันคืออัตราส่วนของแรงดัน/กระแสเอาต์พุต ต่อกระแส/แรงดันอินพุต โดยไครวิงพอยต์ฟังก์ชันสามารถแบ่งออกเป็นได้อีก 2 แบบคือ

1. ไครวิงพอยต์อิมพีแดนซ์ฟังก์ชัน (Impedance : $Z(s)$) คืออัตราส่วนของแรงดันเอาต์พุต ต่อกระแสอินพุต
2. ไครวิงพอยต์แอดมิตแตนซ์ฟังก์ชัน (Admittance : $Y(s)$) คืออัตราส่วนของกระแสเอาต์พุตต่อแรงดันอินพุต

ตัวอย่างที่ 5.2 จงคำนวณหาค่าไครวิงพอยต์อิมพีแดนซ์ และไครวิงพอยต์แอดมิตแตนซ์ของวงจร



วิธีทำ

เขียนสมการแรงดัน

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = V(t)$$

แปลงให้อยู่ในรูป S โดเมน และเมื่อสภาวะเริ่มต้นทั้งหมดเป็นศูนย์

$$RI(s) + Ls \cdot I(s) + \frac{1}{Cs} \cdot I(s) = V(s)$$

โดย อ.ศิริพงษ์ ฉายสินธุ์

$$(R + Ls + \frac{1}{Cs})I(s) = V(s)$$

ไครวิงพอยต์อิมพีแดนซ์ $Z(s)$ คือ

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = R + Ls + \frac{1}{Cs}$$

$$= \frac{RCs + LCs^2 + 1}{Cs}$$

โดย C ขยายลบ

$$= \frac{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}{s}$$

$$= L \left[\frac{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}{s} \right] = L \left[\frac{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}{s} \right]$$

ไครวิงพอยต์แอดมิตแตนซ์ $Y(s)$ คือ

$$Y(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{R + Ls + \frac{1}{Cs}}$$

$$= \frac{1}{RCs + LCs^2 + 1}$$

$$= \frac{Cs}{RCs + LCs^2 + 1}$$

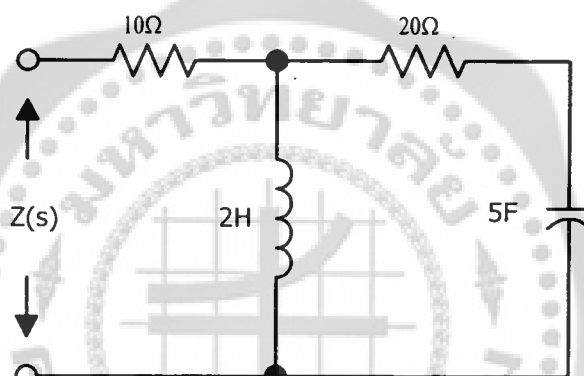
$$= \frac{s}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}$$

$$= \frac{1}{L} \left(\frac{s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \right)$$

$$\text{หรือ } Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{L \left(\frac{S^2 + R/Ls + 1/LC}{s} \right)}$$

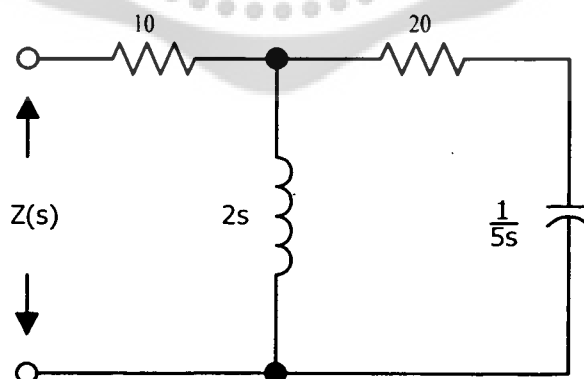
$$= \frac{1}{L} \left(\frac{s}{S^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \right)$$

ตัวอย่างที่ 5.3 จงคำนวณหาค่า $Z(s)$



วิธีทำ

เขียนวงจรในรูป s โดเมน

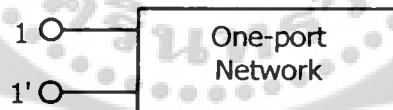


$$Z(s) = 10 + \left(2s \parallel \left(20 + \frac{1}{5s} \right) \right)$$

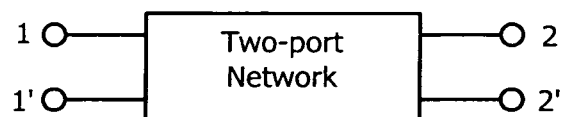
$$\begin{aligned}
 &= 10 + \frac{2s(20 + 1/5s)}{2s + 20 + 1/5s} \\
 &= \frac{20s + 200 + \frac{2}{s} + 40s + \frac{2}{5}}{\frac{10s^2 + 100s + 1}{5s}} \\
 &= \frac{100s^2 + 1000s + 10 + 200s^2 + 2s}{10s^2 + 100s + 1} \\
 &= \frac{300s^2 + 1002s + 10}{10s^2 + 100s + 1}
 \end{aligned}$$

5.3 Network Function ของวงจรข่าย 2 ทาง

จากหัวข้อก่อนหน้านี้ลักษณะของวงจรข่ายจะเป็นวงจรข่ายทางเดียว (One-port Network) ซึ่งลักษณะวงจรจะมีขั้วต่อภายนอกเพียงด้านเดียวดังรูปที่ 5.2 แต่สำหรับวงจรข่าย 2 ทาง (Two-port Network) จะมีลักษณะวงจรที่มีขั้วต่อภายนอก 2 ด้านดังรูปที่ 5.3 ดังนั้น Network Function ของวงจรข่าย 2 ทางจึงมีได้ดังนี้



รูปที่ 5.2 แสดงบล็อกไดอะแกรม One-port Network



รูปที่ 5.3 แสดงบล็อกไดอะแกรม Two-port Network

ฟังก์ชันโอนย้าย

Current Gain $\alpha_{12}(s) = \frac{I_1(s)}{I_2(s)}$: อัตราส่วนกระแสพอร์ต์ 1 ต่อกระแสพอร์ต์ 2

$\alpha_{21}(s) = \frac{I_2(s)}{I_1(s)}$: อัตราส่วนกระแสพอร์ต์ 2 ต่อกระแสพอร์ต์ 1

Voltage Gain $G_{12}(s) = \frac{V_1(s)}{V_2(s)}$: อัตราส่วนแรงดันพอร์ต์ 1 ต่อแรงดันพอร์ต์ 2

$G_{21}(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$: อัตราส่วนแรงดันพอร์ต์ 2 ต่อแรงดันพอร์ต์ 1

ไครวิงพอยด์ฟังก์ชัน

ไครวิงพอยด์อิมพีแดนซ์ฟังก์ชัน

$Z_{11}(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)}$: อัตราส่วนแรงดันพอร์ต์ 1 ต่อกระแสพอร์ต์ 1

$Z_{22}(s) = \frac{V_2(s)}{I_2(s)}$: อัตราส่วนแรงดันพอร์ต์ 2 ต่อกระแสพอร์ต์ 2

$Z_{21}(s) = \frac{V_2(s)}{I_1(s)}$: อัตราส่วนแรงดันพอร์ต์ 2 ต่อกระแสพอร์ต์ 1

$Z_{12}(s) = \frac{V_1(s)}{I_2(s)}$: อัตราส่วนแรงดันพอร์ต์ 1 ต่อกระแสพอร์ต์ 2

ไครวิงพอยด์แอดมิตแตนซ์ฟังก์ชัน

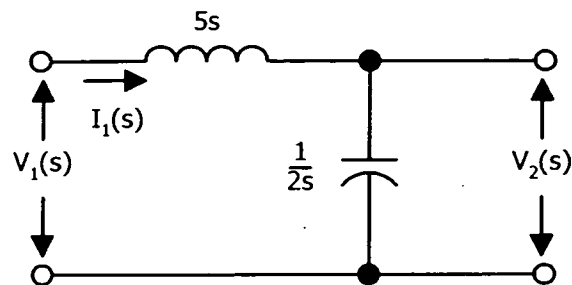
$Y_{11}(s) = \frac{I_1(s)}{V_1(s)}$: อัตราส่วนกระแสพอร์ต์ 1 ต่อแรงดันพอร์ต์ 1

$Y_{22}(s) = \frac{I_2(s)}{V_2(s)}$: อัตราส่วนกระแสพอร์ต์ 2 ต่อแรงดันพอร์ต์ 2

$Y_{21}(s) = \frac{I_2(s)}{V_1(s)}$: อัตราส่วนกระแสพอร์ต์ 2 ต่อแรงดันพอร์ต์ 1

$Y_{12}(s) = \frac{I_1(s)}{V_2(s)}$: อัตราส่วนกระแสพอร์ต์ 1 ต่อแรงดันพอร์ต์ 2

ตัวอย่างที่ 5.4 จงคำนวณหาค่า $G_{21}(s)$, $Z_{21}(s)$ และ $Y_{11}(s)$ ของวงจร



วิธีทำ

ใช้กฎ KVL เขียนสมการแรงดันที่พอร์ตทั้ง 2

$$V_1(s) = I_1(s) \left[5s + \frac{1}{2s} \right]$$

$$V_2(s) = I_1(s) \left[\frac{1}{2s} \right]$$

ดังนั้น

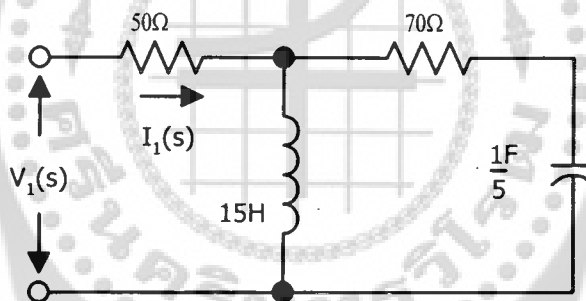
$$\begin{aligned} G_{21}(s) &= \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{1}{2s} I_1(s)}{\left[5s + \frac{1}{2s} \right] I_1(s)} \\ &= \frac{\frac{1}{2s}}{5s + \frac{1}{2s}} \\ &= \frac{\frac{1}{2s}}{\frac{10s^2 + 1}{2s}} \\ &= \frac{1}{10s^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{21}(s) &= \frac{V_2(s)}{I_1(s)} = \frac{\frac{1}{2s} I_1(s)}{I_1(s)} \\ &= \frac{1}{2s} \end{aligned}$$

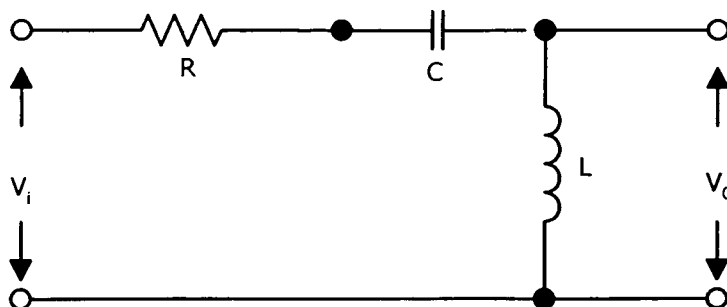
$$\begin{aligned}
 Y_{11}(s) &= \frac{I_1(s)}{V_1(s)} = \frac{I_1(s)}{\left[5s + \frac{1}{2s}\right] I_1(s)} \\
 &= \frac{1}{5s + \frac{1}{2s}} \\
 &= \frac{1}{\frac{10s^2 + 1}{2s}} \\
 &= \frac{2s}{10s^2 + 1}
 \end{aligned}$$

การบ้าน

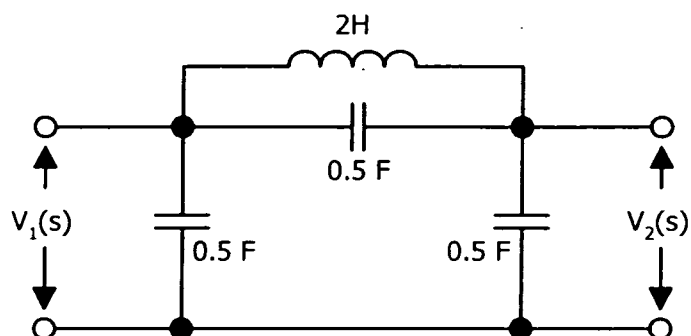
1. จงคำนวณหาค่าไครวงพอยต์อิมพีแดนซ์ และไครวงพอยต์แอดมิตแตนซ์ของวงจร



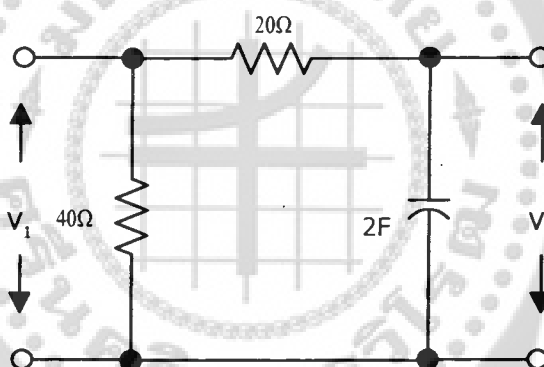
2. จงคำนวณหาค่า Voltage Gain (G(s)) ของวงจร



3. จงคำนวณหาค่า Voltage Gain : $G_{21}(s)$ และ โครวงพอยต์อิมพีแดนซ์ : $Z_{21}(s)$



4. จงคำนวณหาค่า Voltage Gain : $G_{21}(s)$ และ โครวงพอยต์อิมพีแดนซ์ : $Z_{21}(s)$

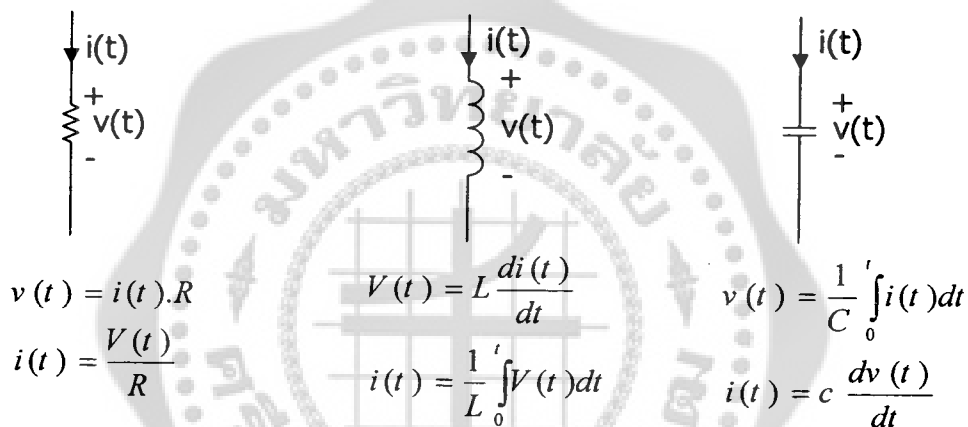


บทที่ 6.

สมการสถานะ และความถี่ธรรมชาติ

6.1 สมการสถานะ (State Variable Equation)

พฤติกรรมขององค์ประกอบแบบต่าง ๆ ของวงจรจ่าย สามารถแทนพฤติกรรมเหล่านั้นได้ด้วยสมการอนุพันธ์ โดยองค์ประกอบแต่ละตัวจะมีสมการอนุพันธ์ดังรูปที่ 6.1



$v(t) = i(t) \cdot R$ $i(t) = \frac{v(t)}{R}$	$V(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ $i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t V(t) dt$	$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$ $i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$
---	---	---

รูปที่ 6.1 แสดงพฤติกรรมขององค์ประกอบแบบต่าง ๆ ในรูปสมการ

การวิเคราะห์วงจรที่ประกอบไปด้วยตัวเหนี่ยวนำ และตัวเก็บประจุ สามารถทำได้โดยเขียนสมการของวงจรจ่ายด้วยสมการอนุพันธ์ และแก้สมการอนุพันธ์หาค่าตัวแปรที่ต้องการทราบค่า โดยอันดับของสมการอนุพันธ์ของวงจรจ่ายขึ้นอยู่กับจำนวนองค์ประกอบที่สะสมพลังงานในวงจรจ่าย ซึ่งถ้าในวงจรจ่ายประกอบด้วยองค์ประกอบที่สะสมพลังงานเพียงตัวเดียวการเขียนสมการวงจรจะได้สมการอนุพันธ์อันดับ 1 แต่ถ้าในวงจรจ่ายประกอบด้วยองค์ประกอบที่สะสมพลังงาน 2 ตัว การเขียนสมการวงจรจะได้สมการอนุพันธ์อันดับ 2 เป็นต้น

ดังนั้นถ้าพิจารณาพฤติกรรมของวงจรทั้งหมดโดยจะพิจารณาตัวแปรทั้งหมดในวงจรพร้อมกัน ซึ่งตัวแปรที่จะนำมาเขียนวงจรคือ ตัวแปรสถานะ (State Variable) โดยตัวแปรสถานะในวงจรคือ ค่าแรงดันของตัวเก็บประจุ และค่ากระแสที่ตัวเหนี่ยวนำ โดยเขียนสมการของตัวแปรแต่ละตัวให้อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับ 1 การวิเคราะห์วงจรทำได้โดยแก้สมการอนุพันธ์อันดับ 1 หาค่าตัวแปรแต่ละตัวโดยไม่ต้องแก้สมการอนุพันธ์อันดับสูงโดยสมการนี้เรียกว่า สมการสถานะ

6.2 การเขียนสมการสถานะของวงจรจ่าย

สมการสถานะของวงจรจ่ายเขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์สถานะดังสมการที่ 6.1

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (6.1)$$

หรือ

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

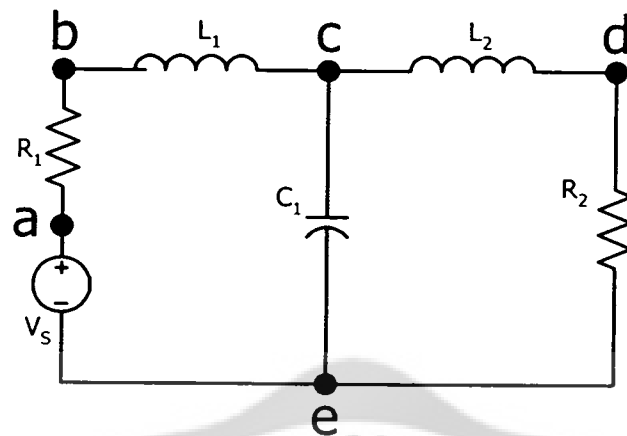
เมื่อ	$\dot{x}$	เป็นอนุพันธ์ของเมทริกซ์ตัวแปรสถานะ
	A	เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$
	x	เป็นเมทริกซ์คอลัมน์ ซึ่งประกอบด้วยแรงดันตัวเก็บประจุ และกระแสที่ ตัวเหนี่ยวนำ
	B	เป็นเมทริกซ์ร่วม ซึ่งจะเชื่อมโยงกับอินพุตที่ป้อนเข้ามาในวงจร
	u	เป็นสัญญาณอินพุต

6.3 การสร้างสมการสถานะของวงจรจ่าย

สมการสถานะของวงจรจ่ายมีขั้นตอนการเขียนสมการดังนี้

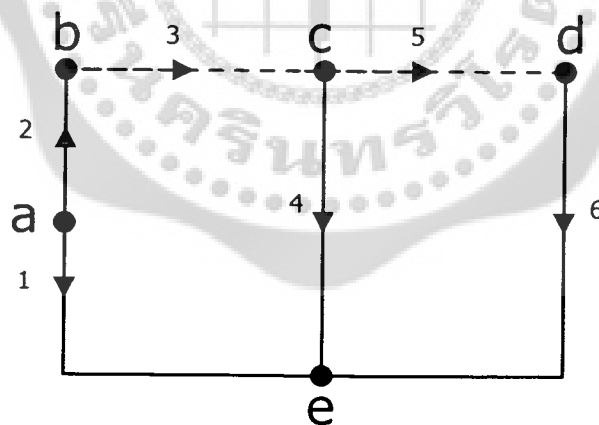
1. เขียนกราฟวงจรจากวงจรจ่าย และหาจำนวนของตัวแปรสถานะ เมื่อจำนวนตัวแปรสถานะคือผลรวมของจำนวนตัวเก็บประจุ และตัวเหนี่ยวนำทั้งหมดในวงจร
2. เลือกทรีจากกราฟวงจร โดยทรีประกอบด้วยตัวเก็บประจุทุกตัวในวงจร แต่ต้องไม่มีตัวเหนี่ยวนำและถ้าเป็นไปได้ไม่ควรมีแหล่งจ่ายอยู่ในทรี
3. เขียนสมการแรงดันของตัวเก็บประจุที่คัดเซตพื้นฐาน และเขียนสมการกระแสของตัวเหนี่ยวนำในรูปพื้นฐาน
4. จัดสมการใหม่ เพื่อให้ได้สมการอนุพันธ์อันดับ 1 จำนวน N สมการ

ตัวอย่างที่ 6.1 จงเขียนสมการสถานะของวงจรข้าง

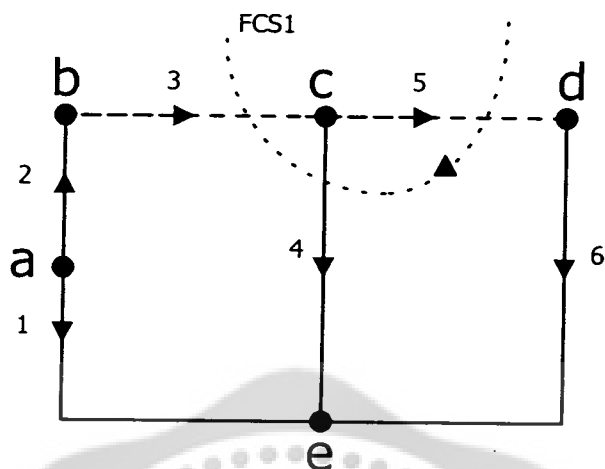


วิธีทำ

เขียนกราฟของวงจรโดยเลือกทรีให้มีตัวเก็บประจุ และลิงค์เป็นตัวเหนี่ยวนำ ได้ตัวแปรสถานะคือ V_{C1} , I_{L1} และ I_{L2}



เขียนคัตเซตพื้นฐานโดยเลือกทรีที่เป็นตัวเก็บประจุ



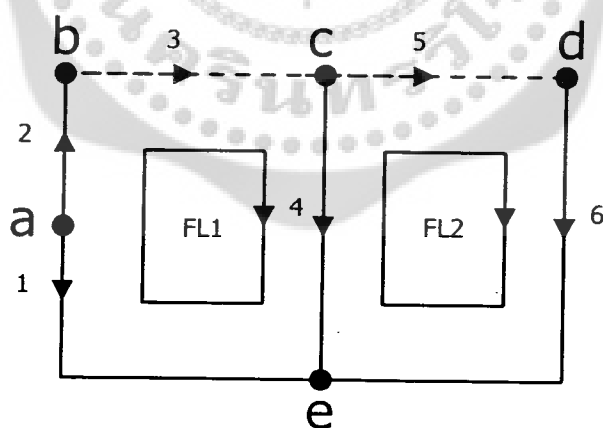
ใช้ KCL เขียนสมการคัตเซตพื้นฐานดังสมการที่ 6.1

$$I_4 + I_5 - I_3 = 0$$

$$I_4 = I_3 - I_5$$

(6.1)

เขียนลูปพื้นฐานโดยใช้ลิ่งค์ที่เป็นตัวเหนี่ยวนำ



ใช้ KVL เขียนสมการลูปพื้นฐาน

FL1 $V_2 + V_3 + V_4 - V_1 = 0$

$$V_3 = V_1 - V_2 - V_4$$

(6.2)

FL2 $V_5 + V_6 - V_4 = 0$

$$V_5 = V_4 - V_6$$

(6.3)

เขียนสมการแรงดัน และกระแสในสาขาต่าง ๆ

$$V_1 = V_s$$

$$V_2 = R_1 I_1 = R_1 I_{L1}$$

$$V_3 = L_1 \frac{di_{L1}}{dt}$$

$$V_4 = V_c$$

$$V_5 = L_2 \frac{di_{L2}}{dt}$$

$$V_6 = R_2 I_2 = R_2 I_{L2}$$

นำค่าสมการแรงดัน และกระแสในสาขาต่าง ๆ ที่ได้แทนในสมการคัตเซตพื้นฐาน และสมการลูปพื้นฐาน

สมการคัตเซตพื้นฐาน

$$C_1 \frac{dV_{C1}}{dt} = I_{L1} - I_{L2}$$

$$\frac{dV_{C1}}{dt} = \frac{1}{C_1} I_{L1} - \frac{1}{C_1} I_{L2}$$

สมการลูปพื้นฐาน ลูป 1

$$L_1 \frac{dI_{L1}}{dt} = V_s - R_1 I_{L1} - V_{C1}$$

$$\frac{dI_{L1}}{dt} = -\frac{1}{L_1} V_{C1} - \frac{R_1}{L_1} I_{L1} + \frac{1}{L_1} V_s$$

สมการลูปพื้นฐาน ลูป 2

$$L_2 \frac{dI_{L2}}{dt} = V_{C1} - R_2 I_{L2}$$

$$\frac{dI_{L2}}{dt} = \frac{1}{L_2} V_{C1} - \frac{R_2}{L_2} I_{L2}$$

นำสมการคัตเซทพื้นฐาน และสมการลูปพื้นฐานที่แทนค่าได้มาเขียนเป็นสมการสถานะ

$$\begin{bmatrix} \frac{dV_{C_1}}{dt} \\ \frac{dI_{L_1}}{dt} \\ \frac{dI_{L_2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_1} \\ -\frac{1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{L_1} & 0 & -\frac{R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C_1} \\ I_{L_1} \\ I_{L_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_1} \\ 0 \end{bmatrix} V_s$$

* 6.4 ความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequency) *

ในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าอันดับ 2 ซึ่งมีรูปแบบสมการการตอบสนองดังสมการที่ 6.4

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x) \quad * \quad (6.4)$$

คำตอบของสมการอันดับ 2 จะประกอบไปด้วย

1. คำตอบเอกพันธ์ ซึ่งก็คือการตอบสนองธรรมชาติ (Natural Response) โดยเป็นผลมาจากอุปกรณ์ในวงจร
2. คำตอบโดยเฉพาะ ซึ่งก็คือการตอบสนองบังคับ (Force Response) โดยเป็นผลมาจากแหล่งจ่ายที่ต่ออยู่ในวงจร

การหาค่าการตอบสนองธรรมชาติทำได้โดยการหาค่าสมการคุณสมบัติ (Characteristic Equation) ของสมการอันดับ 2 โดยไม่คำนึงถึงค่า $f(x)$ ดังนั้นจากสมการอันดับ 2 ดังสมการที่ 6.4 จะมีค่าสมการคุณสมบัติดังสมการที่ 6.5

$$(a_2 s^2 + a_1 s + a_0) = 0 \quad (6.5)$$

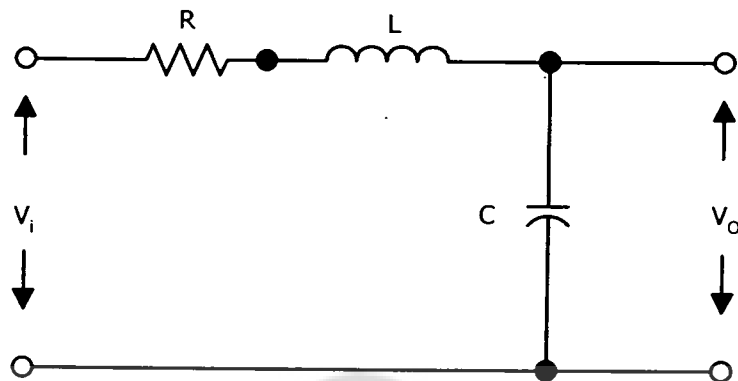
และค่ารากของสมการคุณสมบัติจะมีค่าดังสมการที่ 6.6

$$s_1, s_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} \quad (6.6)$$

ค่ารากของสมการจะมีชื่อเรียกว่าความถี่ธรรมชาติ โดยค่ารากของสมการจะแบ่งออกได้ เป็น 4 กรณี โดยที่ a_1, a_2 จะเป็นค่าคงที่ ที่ต้องหาจากค่าสภาวะเริ่มต้น

- กรณีที่ 1. เมื่อ $s_1 \neq s_2$ การตอบสนองของวงจรจะมีลักษณะเป็น Over Damp
คำตอบของสมการคือ $k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$
- กรณีที่ 2. เมื่อ $s_1 = s_2$ การตอบสนองของวงจรจะมีลักษณะเป็น Critically Damp
คำตอบของสมการคือ $(k_1 + k_2 t) e^{s t}$ เมื่อ $s = s_1 = s_2$
- กรณีที่ 3. เมื่อ s_1 และ s_2 เป็นเลขจำนวนเชิงซ้อนและเป็นค่า Conjugate Complex ซึ่ง
กันและกัน $s_1 = p + jq$, $s_2 = p - jq$ การตอบสนองของวงจรจะมีลักษณะเป็น
Under Damp
คำตอบของสมการคือ $e^{pt} (k_1 \cos qt + k_2 \sin qt)$
- กรณีที่ 4. เมื่อ s_1 และ s_2 เป็นเลขจำนวนเชิงซ้อนและเป็นค่า Conjugate Imaginary
ซึ่งกันและกัน $s_1 = +jq$, $s_2 = -jq$ การตอบสนองของวงจรจะมีลักษณะเป็น
Oscillate
คำตอบของสมการคือ $k_1 \cos qt + k_2 \sin qt$

ตัวอย่างที่ 6.2 จงหาสมการคุณสมบัติ และค่าความถี่ธรรมชาติของวงจรจากฟังก์ชันโอนย้าย $G(s)$



วิธีทำ

เขียนสมการแรงดันด้านอินพุต

$$V_i(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

เขียนสมการแรงดันด้านเอาต์พุต

$$V_o(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

เมื่อสภาวะเริ่มต้นทั้งหมดเป็นศูนย์ และแปลงให้อยู่ในรูป S โดเมน

$$\begin{aligned} V_i(s) &= RI(s) + LS \cdot I(s) + \frac{1}{Cs} \cdot I(s) \\ &= \left(R + Ls + \frac{1}{Cs} \right) I(s) \end{aligned}$$

$$V_o(s) = \frac{1}{Cs} \cdot I(s)$$

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{Cs} \cdot I(s)}{\left(R + Ls + \frac{1}{Cs} \right) I(s)} \\ &= \frac{\frac{1}{Cs}}{R + Ls + \frac{1}{Cs}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

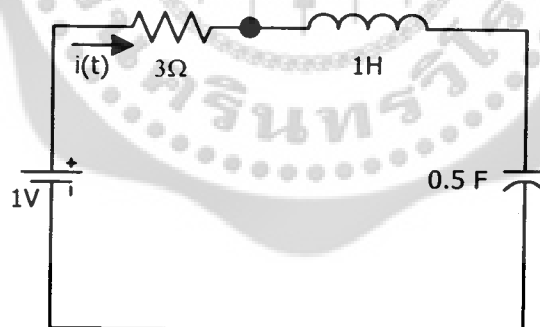
พิจารณาเฉพาะส่วนของสมการ $G(s)$ นั่นคือ $s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}$

สมการคุณสมบัตินี้จะมีค่าเท่ากับ $s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$

และค่าความถี่ธรรมชาติมีค่าเท่ากับ

$$s_1, s_2 = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4(1)\left(\frac{1}{LC}\right)}}{2(1)}$$

ตัวอย่างที่ 6.3) วงจรอันดับ 2 เมื่อสภาวะเริ่มต้นทั้งหมดเป็นศูนย์ จงคำนวณหาค่าการตอบสนอง $i(t)$ ของวงจรเป็นแบบใด



วิธีทำ

เขียนสมการแรงดันจากกฎ KVL

$$V(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

แปลงให้อยู่ในรูป s โดเมน

$$V(s) = RI(s) + LS \cdot I(s) + \frac{1}{Cs} \cdot I(s)$$

$$= (R + Ls + \frac{1}{Cs})I(s)$$

$$= \left(\frac{LCs^2 + RCs + 1}{Cs} \right) I(s)$$

แทนค่า

$$\frac{1}{s} = \left(\frac{(1)(0.5)s^2 + (3)(0.5)s + 1}{(0.5)s} \right) I(s)$$

$$0.5 = ((0.5)s^2 + (1.5)s + 1)I(s)$$

2 คูณตลอด

$$1 = (s^2 + 3s + 2)I(s)$$

$$I(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

สมการคุณลักษณะคือ

$$s^2 + 3s + 2 = 0$$

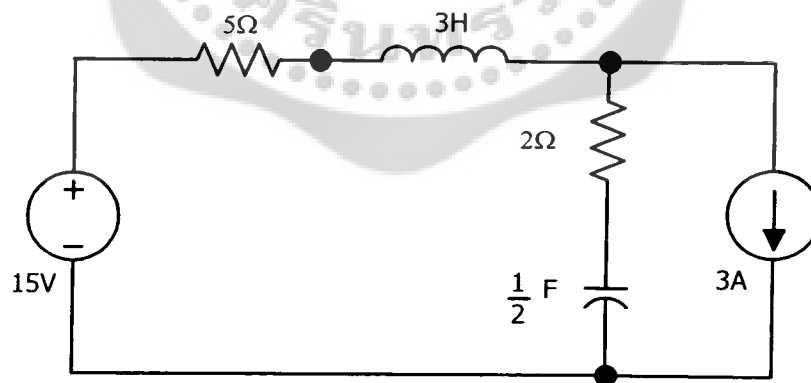
ความถี่ธรรมชาติคือ

$$s_1 = -1, s_2 = -2$$

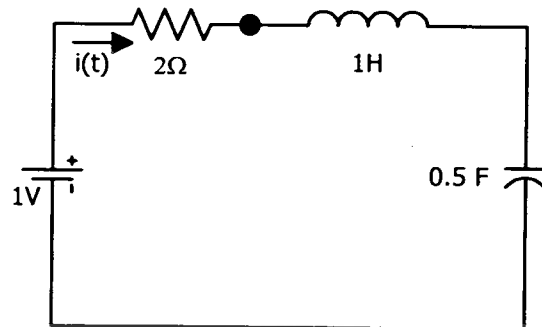
เมื่อ $s_1 \neq s_2$ การตอบสนองของวงจรจะมีลักษณะเป็น Over Damp

การบ้าน

1. จงเขียนสมการสภาวะของวงจรข้าง



2. จงคำนวณหาค่าการตอบสนอง $i(t)$ ของวงจรเป็นแบบใด



บทที่ 7

วงจรขั้วสองทาง

วงจรไฟฟ้าโดยทั่วไปอาจมีความยุ่งยากซับซ้อนของวงจรที่ประกอบอยู่ภายใน แต่อย่างไรก็ตามหากแต่จะพิจารณาเฉพาะความสัมพันธ์ของตัวแปรค่าแรงดัน หรือค่ากระแส เปรียบเทียบกันระหว่างด้านอินพุตและเอาต์พุต ซึ่งจะเรียกค่าตัวแปรจากความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้ว่าค่าพารามิเตอร์ของวงจรขั้ว 2 ทาง (Two Port Network) วงจรขั้ว 2 ทางแบ่งค่าพารามิเตอร์ออกได้ 4 แบบคือ

1. Z พารามิเตอร์ (Impedance Parameter)
2. Y พารามิเตอร์ (Admittance Parameter)
3. H พารามิเตอร์ (Hybrid Parameter)
4. T พารามิเตอร์ (Transmission Parameter)

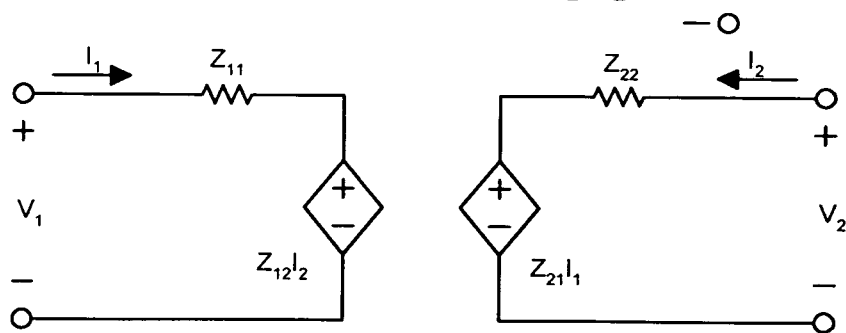
7.1 Z พารามิเตอร์

โครงสร้างของวงจรภายใน Z พารามิเตอร์แสดงดังรูปที่ 11.1 ซึ่งสามารถหาค่าสมการของ Z พารามิเตอร์มีดังนี้

$$Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 = V_1$$

$$Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 = V_2$$

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$



รูปที่ 7.1 แสดงโครงสร้างของวงจร Z พารามิเตอร์

การหาค่า Z พารามิเตอร์แต่ละตัวสามารถทำได้ดังนี้

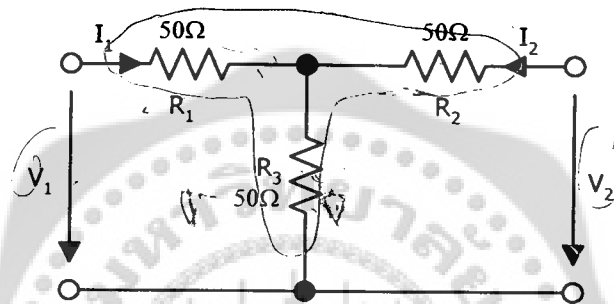
$$Z_{11} = V_1/I_1 \text{ เมื่อ } I_2 = 0 : \text{input impedance}$$

$$Z_{21} = V_2/I_1 \text{ เมื่อ } I_2 = 0 : \text{forward tranfer impedance}$$

$$Z_{12} = V_1/I_2 \text{ เมื่อ } I_1 = 0 : \text{reverse tranfer impedance}$$

$$Z_{22} = V_2/I_2 \text{ เมื่อ } I_1 = 0 : \text{output impedance}$$

ตัวอย่างที่ 7.1 จงคำนวณหาค่า Z พารามิเตอร์



วิธีทำ

จากวงจรเป็นวงจรข่ายแบบ T เขียนสมการแรงดันได้คือ

$$(R_1 + R_3)I_1 + R_3I_2 = V_1$$

$$R_3I_1 + (R_2 + R_3)I_2 = V_2$$

จากสมการ Z พารามิเตอร์

$$Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 = V_1$$

$$Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 = V_2$$

เทียบรูปแบบจะได้ Z พารามิเตอร์คือ

$$Z_{11} = R_1 + R_3 = 100 \, \Omega$$

$$Z_{21} = R_3 = 50 \, \Omega$$

$$Z_{12} = R_3 = 50 \, \Omega$$

$$Z_{22} = R_2 + R_3 = 100 \, \Omega$$

หรือพิจารณาตามหลักการ

เมื่อพอร์ทด้าน V_2 เป็วงจร ($I_2 = 0$)

$$Z_{11} = V_1/I_1$$

$$V_1 = (R_1 + R_3)I_1$$

$$Z_{11} = R_1 + R_3 = 100 \, \Omega$$

ดังนั้น

และ

$$V_2 = I_1 R_3$$

$$Z_{21} = R_3 = 50 \Omega$$

เมื่อพอร์ทด้าน V_1 เปิดวงจร ($I_1 = 0$)

$$Z_{22} = V_2 / I_2$$

ดังนั้น

$$V_2 = (R_2 + R_3) I_2$$

$$Z_{22} = R_2 + R_3 = 100 \Omega$$

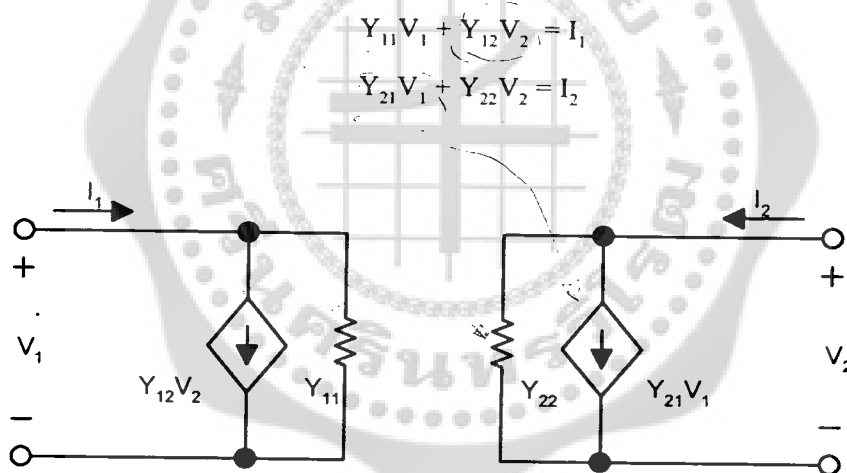
และ

$$V_1 = I_2 R_3$$

$$Z_{12} = R_3 = 50 \Omega$$

7.2 Y พารามิเตอร์

โครงสร้างของวงจรภายใน Y พารามิเตอร์แสดงดังรูปที่ 7.2 ซึ่งสามารถหาค่าสมการของ Y พารามิเตอร์มีดังนี้



รูปที่ 7.2 แสดงโครงสร้างของวงจร Y พารามิเตอร์

การหาค่า Y พารามิเตอร์แต่ละตัวสามารถทำได้ดังนี้

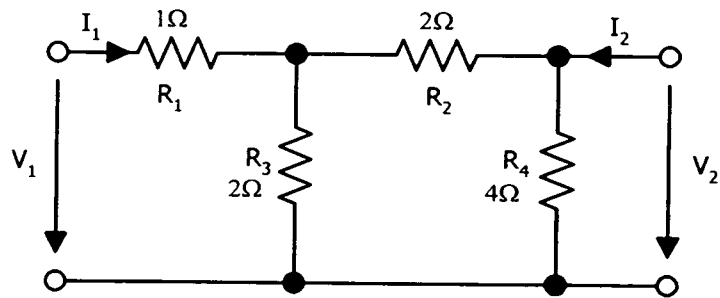
$Y_{11} = I_1 / V_1$ เมื่อ $V_2 = 0$: input admittance vs short port 2

$Y_{21} = I_2 / V_1$ เมื่อ $V_2 = 0$: forward transfer admittance vs short port 2

$Y_{12} = I_1 / V_2$ เมื่อ $V_1 = 0$: reverse transfer admittance vs short port 1

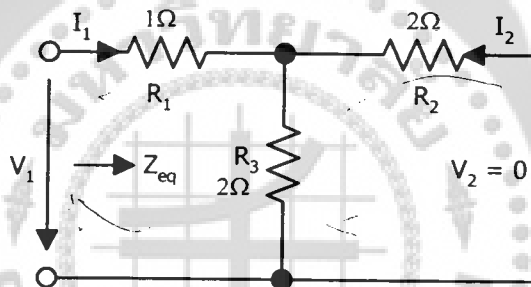
$Y_{22} = I_2 / V_2$ เมื่อ $V_1 = 0$: output admittance vs short port 1

ตัวอย่างที่ 7.2 จงคำนวณหาค่า Y พารามิเตอร์



วิธีทำ

เมื่อพอร์ต์ด้าน V_2 ลัดวงจร ($V_2 = 0$) วงจรภายในจะมีรูปเป็น



$$V_1 = I_1 Z_{eq}$$

$$Z_{eq} = R_1 + (R_2 / R_3) = 2 \Omega$$

$$Y_{11} = I_1 / V_1 = 1/2 \text{ S}$$

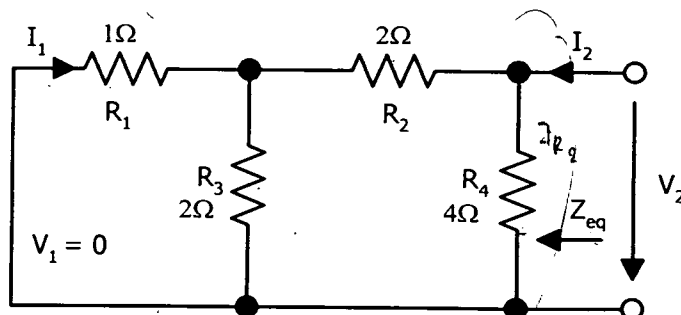
เมื่อพอร์ต์ด้าน V_2 ลัดวงจร

$$Y_{21} = I_2 / V_1$$

$$-I_2 = I_1 [R_3 / (R_2 + R_3)] = (1/2) I_1$$

$$Y_{21} = [-(1/2) I_1] / [2 I_1] = -(1/4) \text{ S}$$

เมื่อพอร์ต์ด้าน V_1 ลัดวงจร ($V_1 = 0$) วงจรภายในจะมีรูปเป็น



$$V_2 = I_2 Z_{eq}$$

$$Z_{eq} = [(R_1 // R_3) + R_2] // R_4 = 8/5 \Omega$$

$$Y_{22} = I_2 / V_2 = 5/8 S$$

เมื่อพอร์ตด้าน V_1 ลัดวงจร

$$Y_{12} = I_1 / V_2$$

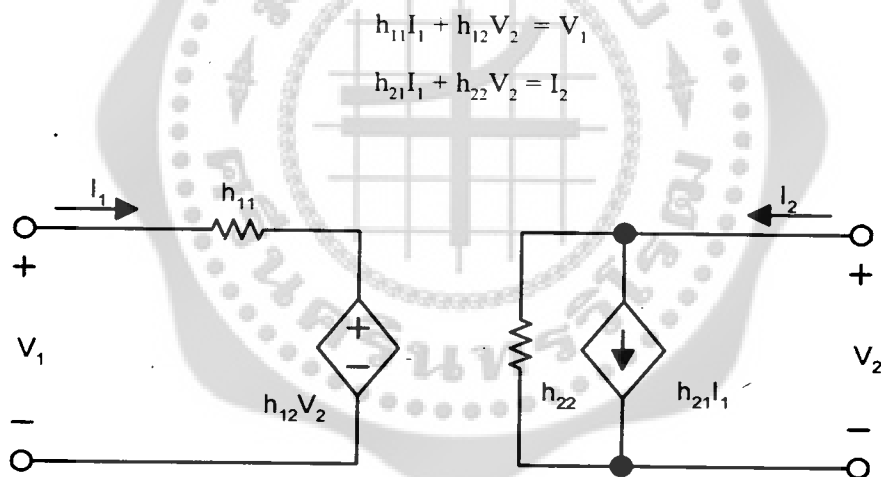
$$I_{R2} = I_2 [R_4 / [(R_1 // R_3) + R_2] + R_4] = (3/5) I_2$$

$$-I_1 = I_{R2} [R_2 / (R_1 + R_2)] = (2/5) I_2$$

$$Y_{12} = [-(2/5) I_2] / [(8/5) I_2] = -(1/4) S$$

7.3 H พารามิเตอร์

โครงสร้างของวงจรภายใน H พารามิเตอร์แสดงดังรูปที่ 11.13 ซึ่งสามารถหาค่าสมการของ H พารามิเตอร์มีดังนี้



รูปที่ 7.3 แสดงโครงสร้างของวงจร H พารามิเตอร์

การหาค่า H พารามิเตอร์แต่ละตัวสามารถทำได้ดังนี้

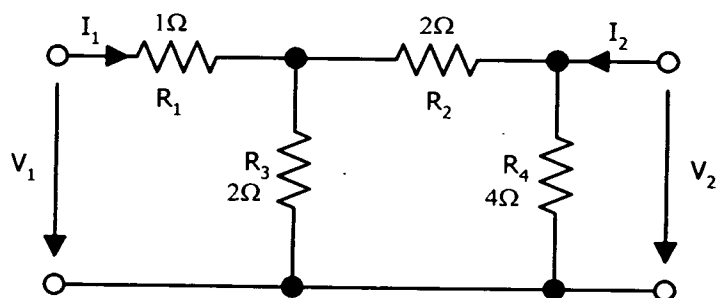
$h_{11} = V_1 / I_1$ เมื่อ $V_2 = 0$: input impedance

$h_{21} = I_2 / I_1$ เมื่อ $V_2 = 0$: forward current gain

$h_{12} = V_1 / V_2$ เมื่อ $I_1 = 0$: inverse voltage gain

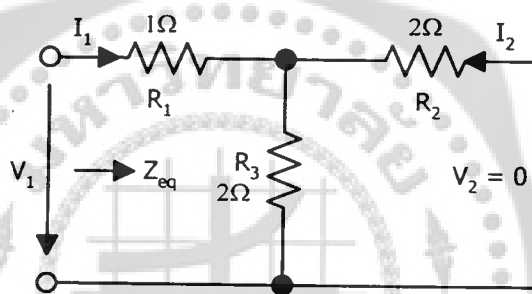
$h_{22} = I_2 / V_2$ เมื่อ $I_1 = 0$: output admittance

ตัวอย่างที่ 7.3 จงคำนวณหาค่า H พารามิเตอร์



วิธีทำ

เมื่อพอร์ทด้าน V_2 ลัดวงจร ($V_2 = 0$) วงจรข้างจะมีรูปเป็น



$$V_1 = I_1 Z_{eq}$$

$$Z_{eq} = R_1 + (R_2 / R_3) = 2 \Omega$$

$$h_{11} = V_1 / I_1 = 2 \Omega$$

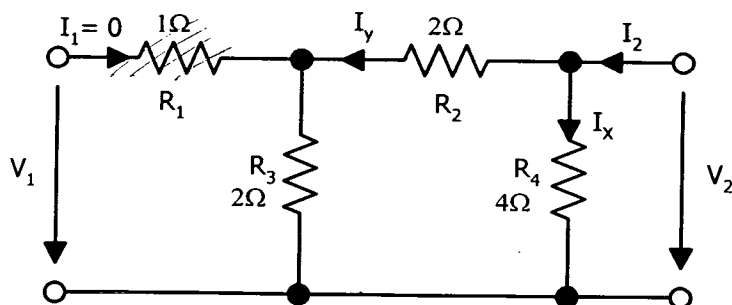
เมื่อพอร์ทด้าน V_2 ลัดวงจร

$$h_{21} = I_2 / I_1$$

$$-I_2 = I_1 [R_3 / (R_2 + R_3)] = (1/2) I_1$$

$$h_{21} = [-(1/2) I_1] / [I_1] = -(1/2)$$

เมื่อพอร์ทด้าน V_1 เปิดวงจร ($I_1 = 0$) วงจรข้างจะมีรูปเป็น



$$V_1 = (2)I_y ; I_y = I_2/2$$

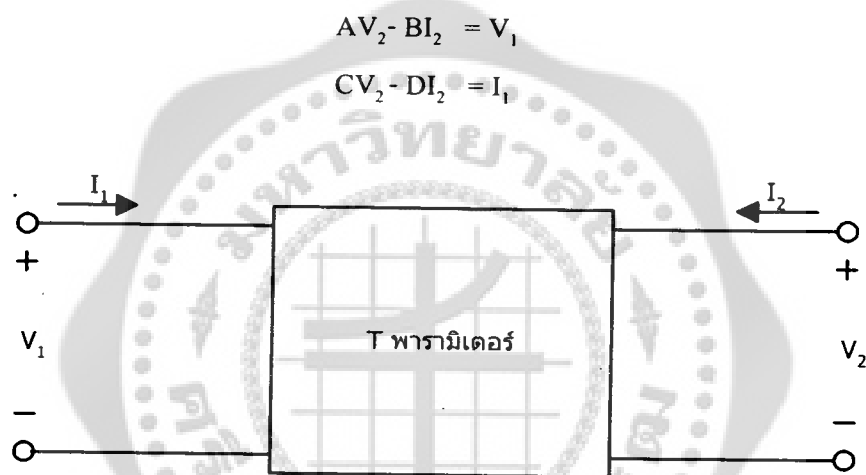
$$V_2 = (4)I_x ; I_x = I_2/2$$

$$h_{12} = V_1/V_2 = 1/2$$

$$h_{22} = I_2/V_2 = 1/2 \text{ S}$$

7.4 T พารามิเตอร์

โครงสร้างของวงจรภายใน T พารามิเตอร์แสดงดังรูปที่ 7.4 ซึ่งสามารถหาค่าสมการของ T พารามิเตอร์ได้ดังนี้



รูปที่ 7.4 แสดงโครงสร้างของวงจร T พารามิเตอร์

การหาค่า T พารามิเตอร์แต่ละตัวสามารถทำได้ดังนี้

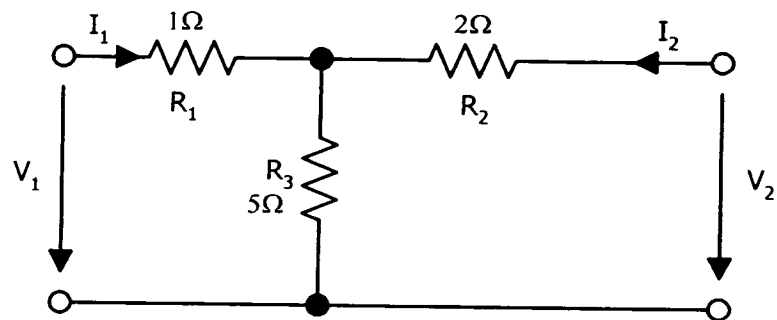
$$A = V_1/V_2 \text{ เมื่อ } I_2 = 0$$

$$B = V_1/-I_2 \text{ เมื่อ } V_2 = 0$$

$$C = I_1/V_2 \text{ เมื่อ } I_2 = 0$$

$$D = I_1/-I_2 \text{ เมื่อ } V_2 = 0$$

ตัวอย่างที่ 7.4 จงคำนวณหาค่า T พารามิเตอร์



วิธีทำ

เมื่อพอร์ทด้าน V_2 เปิดวงจร ($I_2 = 0$) วงจรภายในจะมีรูปดังต่อไปนี้

$$A = V_1/V_2$$

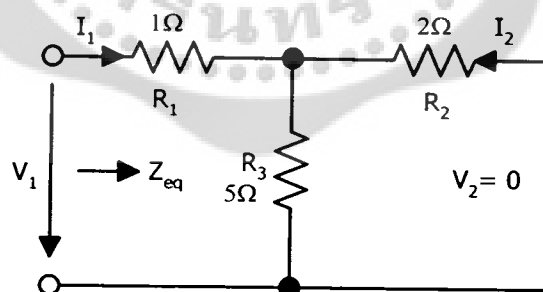
$$V_1 = (6)I_1$$

$$V_2 = (5)I_1$$

$$A = 6/5$$

$$C = I_1/V_2 = I_1/(5)I_1 = 1/5 \text{ S}$$

เมื่อพอร์ทด้าน V_2 สลัดวงจร ($V_2 = 0$) วงจรภายในจะมีรูปเป็น



$$B = V_1/I_2 \quad R_1 + (R_2 \parallel R_3) = 1 + \left(\frac{5 \times 2}{5+2} \right)$$

$$I_1 = (7/17)V_1$$

$$-I_2 = (5/7)I_1 = (5/17)V_1$$

$$B = 17/5 \Omega$$

$$D = I_1/-I_2 = 7/5$$

7.5 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าพารามิเตอร์ของวงจรข่าย 2 ทาง

ในบางครั้งการวิเคราะห์วงจรข่าย 2 ทางค่าพารามิเตอร์แบบหนึ่งจะเหมาะกับงานประเภทหนึ่งแต่ไม่เหมาะกับงานอีกประเภท แต่มีความจำเป็นต้องใช้วงจรข่ายเดียวกัน ดังนั้นจึงมีความจำเป็นที่จะต้องทราบความสัมพันธ์กันระหว่างพารามิเตอร์แบบต่าง ๆ เพื่อใช้ในกรณีที่ทราบค่าพารามิเตอร์แบบหนึ่งก็สามารถหาค่าพารามิเตอร์แบบอื่น ๆ ได้ ดังรูปที่ 7.4 ซึ่งการจะใช้พารามิเตอร์แบบใดนั้นจะขึ้นอยู่กับงานที่นำไปใช้คือ

Z พารามิเตอร์ จะใช้ในการคำนวณหาค่าสำหรับงานความถี่ต่ำ

Y พารามิเตอร์ จะใช้ในการคำนวณหาค่าสำหรับงานความถี่สูง

H พารามิเตอร์ จะใช้ในการคำนวณหาค่าสำหรับงานความถี่ปานกลาง

T พารามิเตอร์ จะใช้ในการคำนวณหาค่าสำหรับงานส่งกำลังไฟฟ้า

	$[Z]$	$[Y]$	$[H]$	$[T]$
$[Z]$	$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta Y} \begin{bmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{22}} \begin{bmatrix} \Delta h & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{C} \begin{bmatrix} A & \Delta T \\ 1 & D \end{bmatrix}$
$[Y]$	$\frac{1}{\Delta Z} \begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -h_{12} \\ h_{21} & \Delta h \end{bmatrix}$	$\frac{1}{B} \begin{bmatrix} D & -\Delta T \\ -1 & A \end{bmatrix}$
$[H]$	$\frac{1}{Z_{22}} \begin{bmatrix} \Delta Z & Z_{12} \\ -Z_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{Y_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -Y_{12} \\ Y_{21} & \Delta Y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{D} \begin{bmatrix} B & \Delta T \\ -1 & C \end{bmatrix}$
$[T]$	$\frac{1}{Z_{21}} \begin{bmatrix} Z_{11} & \Delta Z \\ 1 & Z_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{Y_{21}} \begin{bmatrix} -Y_{22} & -1 \\ -\Delta Y & -Y_{11} \end{bmatrix}$	$-\frac{1}{h_{21}} \begin{bmatrix} \Delta h & h_{11} \\ h_{22} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

$$\Delta Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$$

เมื่อ $\Delta Y = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$

$$\Delta h = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}$$

$$\Delta T = AD - BC$$

รูปที่ 7.4 แสดงความสัมพันธ์ของพารามิเตอร์แบบต่าง ๆ

ตัวอย่างที่ 7.5 จากตัวอย่างที่ 7.2 จงแปลงค่าพารามิเตอร์จาก Y พารามิเตอร์ที่คำนวณได้เป็น H พารามิเตอร์ โดยใช้วิธีความสัมพันธ์กันระหว่างพารามิเตอร์

วิธีทำ

จากตัวอย่างที่ 7.2 ค่า Y พารามิเตอร์ที่คำนวณได้คือ

$$Y_{11} = 1/2 \text{ S}$$

$$Y_{21} = -(1/4) \text{ S}$$

$$Y_{22} = 5/8 \text{ S}$$

$$Y_{12} = -(1/4) \text{ S}$$

ทำการแปลงเป็น H พารามิเตอร์ตามความสัมพันธ์

$$[H] = \frac{1}{Y_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -Y_{12} \\ Y_{21} & \Delta Y \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta Y &= Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21} \\ &= (1/2)(5/8) - (-1/4)(-1/4) = 1/4 \end{aligned}$$

$$[H] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$h_{11} = 2 \Omega$$

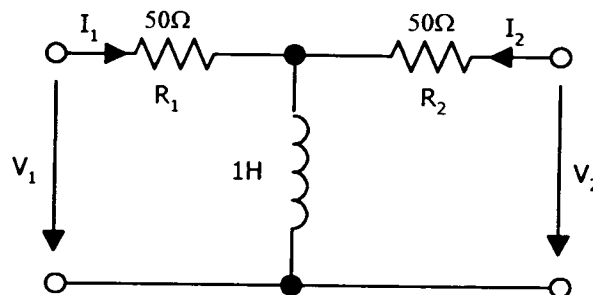
$$h_{21} = -(1/2)$$

$$h_{12} = 1/2$$

$$h_{22} = 1/2 \text{ S}$$

การบ้าน

1. จงคำนวณหาค่า Z พารามิเตอร์ และ Y พารามิเตอร์



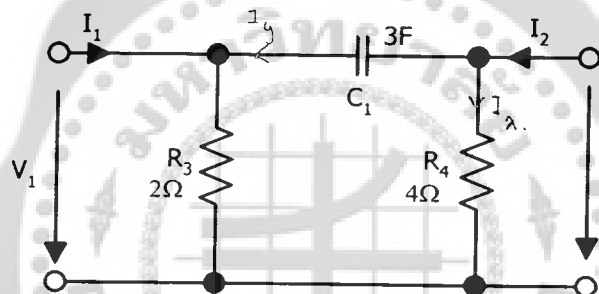
$$I_1 (50 + s) + s I_2 = V_1$$

$$s I_1 + (50 + s) I_2 = V_2$$

$$\begin{pmatrix} 50+s & s \\ s & 50+s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta Z = \begin{vmatrix} 50+s & s \\ s & 50+s \end{vmatrix} = (50+s)^2 - s^2 = 100s + 2500$$

2. จงคำนวณหาค่า H พารามิเตอร์ และ T พารามิเตอร์



$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{50+s}{100s+2500}$$

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = \frac{s}{100s+2500}$$

$$Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} = \frac{s}{100s+2500}$$

$$Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} = \frac{50+s}{100s+2500}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= I_1 Z \\ Z &= R_3 \parallel C_1 \\ &= \frac{2 \parallel \frac{1}{3s}}{2 + \frac{1}{3s}} \\ &= \frac{2/3s}{(6s+1)/3s} \\ &= \frac{2}{6s+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= 2 I_1 \\ I_1 &= \frac{V_1}{2} \\ I_2 &= \frac{V_2}{4} \\ V_2 &= 4 I_2 \\ I_2 &= \frac{V_2}{4} \\ I_1 &= \frac{V_1}{2} \\ I_2 &= \frac{V_2}{4} \\ I_1 &= \frac{V_1}{2} \\ I_2 &= \frac{V_2}{4} \end{aligned}$$

$$h_{11} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{2}{6s+1}$$

$$h_{12} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{12s}{18s+1} \right) \frac{1}{4} \left(\frac{18s+1}{6s+1} \right) = \frac{6s}{6s+1}$$

$$h_{21} = \frac{I_2}{I_1}$$

$$h_{22} = \frac{I_2}{V_2} = \frac{4}{18s+1} = \frac{24s+4}{18s+1}$$

$$\begin{aligned} -I_2 &= (R_3 \parallel C_1 \parallel R_4) I_1 \\ &= 2 / \left(\frac{1}{3s} + 2 \right) \\ &= 8s / 6s+1 \end{aligned}$$

$$h_{21} = -\frac{8s}{6s+1}$$

บทที่ 8

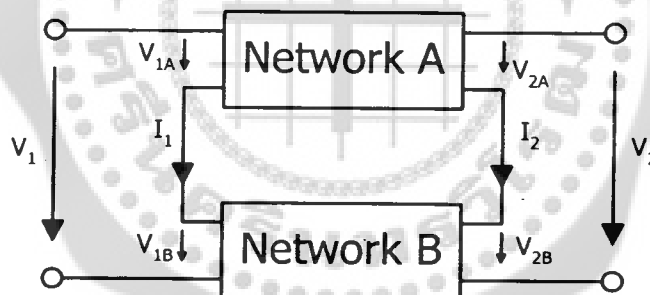
การเชื่อมต่อวงจรขั้วสองทาง

การเชื่อมต่อวงจรขั้วสองทางสามารถเชื่อมต่อได้ 3 แบบคือ

- แบบอนุกรม (Series)
- แบบขนาน (Parallel)
- แบบลูกโซ่ (Cascade)

8.1 การเชื่อมต่อวงจรขั้วสองทางแบบอนุกรม

ถ้ามีการเชื่อมต่อแบบอนุกรมวงจรขั้วสองทางแต่ละชุดจะใช้การหาพารามิเตอร์เป็นแบบ Z พารามิเตอร์เสียก่อน โดยรูปแบบการต่อวงจรขั้วสองทางแบบอนุกรมแสดงดังรูปที่ 8.1



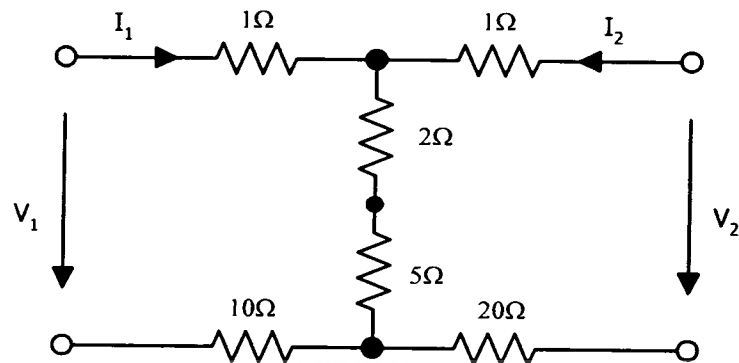
รูปที่ 8.1 แสดงการต่อวงจรขั้วสองทางแบบอนุกรม

มีรูปแบบของการคำนวณคือ

$$[Z]_T = [Z]_A + [Z]_B$$

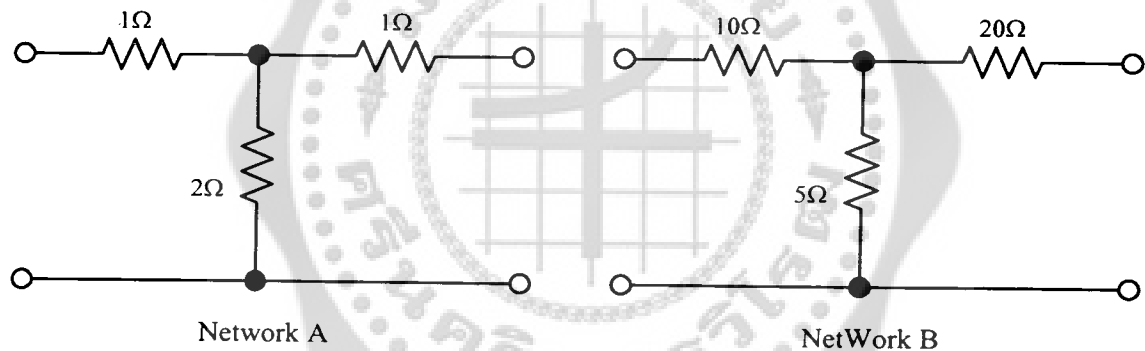
$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Z_{11A} + Z_{11B}) & (Z_{12A} + Z_{12B}) \\ (Z_{21A} + Z_{21B}) & (Z_{22A} + Z_{22B}) \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 8.1 จงคำนวณหา Z พารามิเตอร์



วิธีทำ

จากวงจรข้างที่กำหนดให้วงจรข้างมีการเชื่อมต่อกันแบบอนุกรม นั่นคือ



วงจรข่าย A

$$Z_{11A} = 3 \Omega \quad Z_{21A} = 2 \Omega \quad Z_{12A} = 2 \Omega \quad Z_{22A} = 3 \Omega$$

วงจรข่าย B

$$Z_{11B} = 15 \Omega \quad Z_{21B} = 5 \Omega \quad Z_{12B} = 5 \Omega \quad Z_{22B} = 25 \Omega$$

วงจรข่ายรวม

$$Z_{11} = Z_{11A} + Z_{11B} = 18 \Omega$$

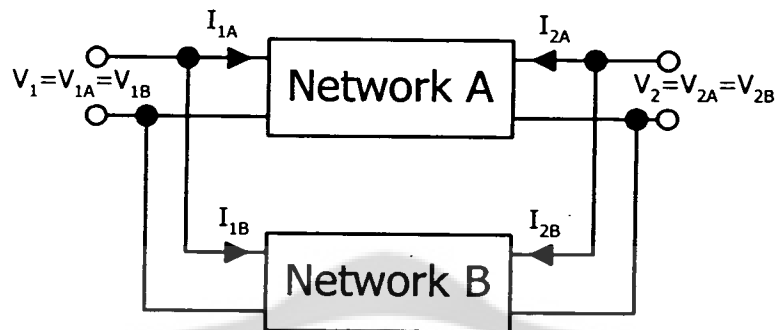
$$Z_{21} = Z_{21A} + Z_{21B} = 7 \Omega$$

$$Z_{12} = Z_{12A} + Z_{12B} = 7 \Omega$$

$$Z_{22} = Z_{22A} + Z_{22B} = 28 \Omega$$

8.2 การเชื่อมต่อวงจรข่ายสองทางแบบขนาน

ถ้ามีการเชื่อมต่อแบบขนานวงจรข่ายสองทางแต่ละชุดจะการใช้การหาพารามิเตอร์เป็นแบบ Y พารามิเตอร์เสียก่อน โดยรูปแบบการต่อวงจรข่ายสองทางแบบขนานแสดงดังรูปที่ 8.2



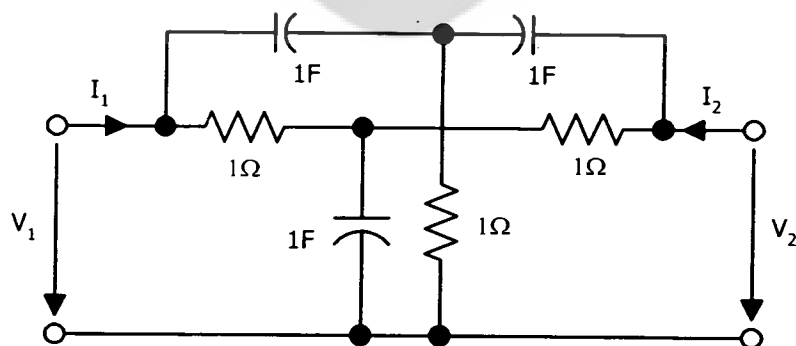
รูปที่ 8.2 แสดงการต่อวงจรข่ายสองทางแบบขนาน

มีรูปแบบของการคำนวณคือ

$$[Y]_T = [Y]_A + [Y]_B$$

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Y_{11A} + Y_{11B}) & (Y_{12A} + Y_{12B}) \\ (Y_{21A} + Y_{21B}) & (Y_{22A} + Y_{22B}) \end{bmatrix}$$

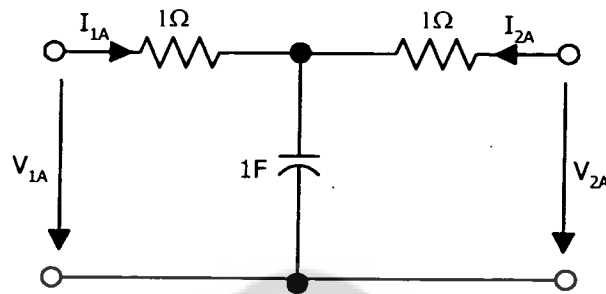
ตัวอย่างที่ 8.2 จงคำนวณหา Y พารามิเตอร์



วิธีทำ

จากวงจรขั้วที่กำหนดให้วงจรขั้วมีการเชื่อมต่อกันแบบขนานนั้นคือ

วงจรขั้ว A



$$\left(1 + \frac{1}{s}\right)I_{1A}(s) + \frac{1}{s}I_{2A}(s) = V_{1A}(s)$$

$$\frac{1}{s}I_{1A}(s) + \left(1 + \frac{1}{s}\right)I_{2A}(s) = V_{2A}(s)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{s+1}{s} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & \frac{s+1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1A}(s) \\ I_{2A}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1A}(s) \\ V_{2A}(s) \end{bmatrix}$$

$$[Z]_A = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & \frac{s+1}{s} \end{bmatrix}; \Delta Z = \frac{s^2 + 2s + 1 - 1}{s^2} = \frac{s+2}{s}$$

$\left(\frac{s+1}{s} \times \frac{s+1}{s}\right) - \left(\frac{1}{s} \times \frac{1}{s}\right)$

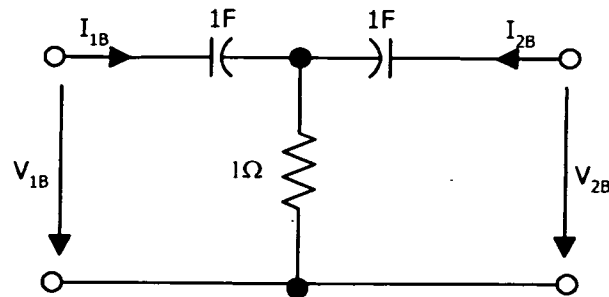
$$Y_{11A} = \frac{Z_{22}}{\Delta Z} = \frac{(s+1)/s}{(s+2)/s} = \frac{s+1}{s+2}$$

$$Y_{21A} = -\frac{Z_{21}}{\Delta Z} = \frac{-1/s}{(s+2)/s} = -\frac{1}{s+2}$$

$$Y_{12A} = -\frac{Z_{12}}{\Delta Z} = \frac{-1/s}{(s+2)/s} = -\frac{1}{s+2}$$

$$Y_{22A} = \frac{Z_{11}}{\Delta Z} = \frac{(s+1)/s}{(s+2)/s} = \frac{s+1}{s+2}$$

วงจรขั้ว B



$$[Z]_B = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s} & 1 \\ 1 & \frac{s+1}{s} \end{bmatrix}; \Delta Z = \frac{s^2 + 2s + 1 - s^2}{s^2} = \frac{2s + 1}{s^2}$$

$$Y_{11B} = \frac{Z_{22}}{\Delta Z} = \frac{(s+1)/s}{(2s+1)/s^2} = \frac{s(s+1)}{2s+1}$$

$$Y_{21B} = -\frac{Z_{21}}{\Delta Z} = -\frac{1}{(2s+1)/s^2} = -\frac{s^2}{2s+1}$$

$$Y_{12B} = -\frac{Z_{12}}{\Delta Z} = -\frac{1}{(2s+1)/s^2} = -\frac{s^2}{2s+1}$$

$$Y_{22B} = \frac{Z_{11}}{\Delta Z} = \frac{(s+1)/s}{(2s+1)/s^2} = \frac{s(s+1)}{2s+1}$$

$$Y_{11T} = Y_{11A} + Y_{11B} = \frac{s+1}{s+2} + \frac{s(s+1)}{2s+1} = \frac{s^3 + 5s^2 + 5s + 1}{2s^2 + 5s + 2}$$

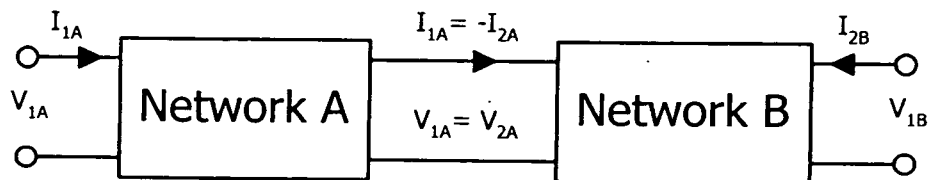
$$Y_{21T} = Y_{21A} + Y_{21B} = -\frac{1}{s+2} - \frac{s^2}{2s+1} = -\frac{s^3 - 2s^2 - 2s + 1}{2s^2 + 5s + 2}$$

$$Y_{12T} = Y_{12A} + Y_{12B} = -\frac{1}{s+2} - \frac{s^2}{2s+1} = -\frac{s^3 - 2s^2 - 2s + 1}{2s^2 + 5s + 2}$$

$$Y_{22T} = Y_{22A} + Y_{22B} = \frac{s+1}{s+2} + \frac{s(s+1)}{2s+1} = \frac{s^3 + 5s^2 + 5s + 1}{2s^2 + 5s + 2}$$

8.3 การเชื่อมต่อวงจรขั้วสองทางแบบลูกโซ่

ถ้ามีการเชื่อมต่อแบบลูกโซ่วงจรขั้วสองทางแต่ละชุดจะใช้การหาพารามิเตอร์เป็นแบบ T พารามิเตอร์เสียก่อน โดยรูปแบบการต่อวงจรขั้วสองทางแบบขนานแสดงดังรูปที่ 8.3



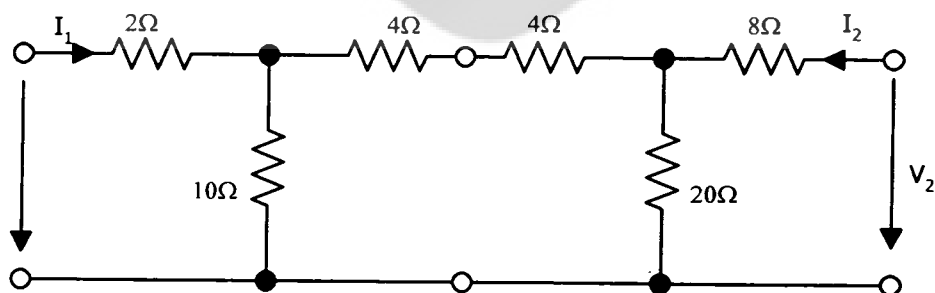
รูปที่ 8.3 แสดงการต่อวงจรขั้วสองทางแบบขนาน

มีรูปแบบของการคำนวณคือ

$$[T]_T = [T]_A [T]_B$$

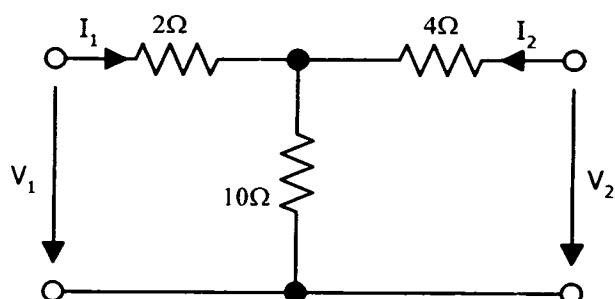
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} (A_A A_B + B_A C_B) & (A_A B_B + B_A D_B) \\ (C_A A_B + D_A C_B) & (C_A B_B + D_A D_B) \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 8.3 จงคำนวณหา T พารามิเตอร์



วิธีทำ

วงจรขั้ว A



จัดให้อยู่ในรูป T พารามิเตอร์

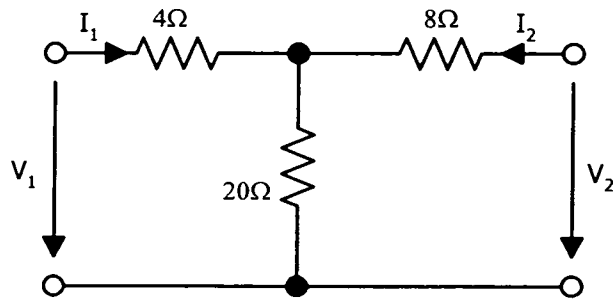
ดังนั้น

และ

T พารามิเตอร์คือ

$$[T]_A = \begin{bmatrix} 1.2 & 6.8 \\ 0.1 & 1.4 \end{bmatrix}$$

วงจรขั้ว B



$$24I_1 + 20I_2 = V_1$$

$$20I_1 + 28I_2 = V_2$$

จัดให้อยู่ในรูป T พารามิเตอร์

$$AV_2 - BI_2 = V_1$$

$$CV_2 - DI_2 = I_1$$

ดังนั้น

$$V_2 - 28I_2 = 20I_1 \quad \div 20$$

$$0.05V_2 - 1.4I_2 = I_1$$

และ

$$24(0.05V_2 - 1.4I_2) + 20I_2 = V_1$$

$$1.2V_2 - 13.6I_2 = V_1$$

T พารามิเตอร์คือ

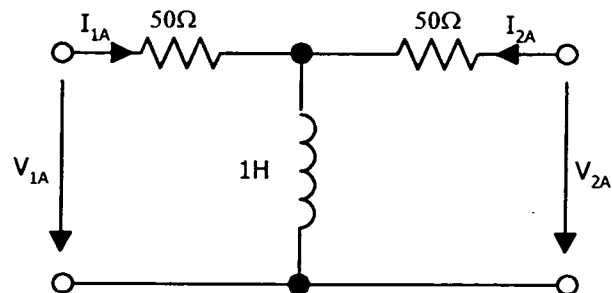
$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1.2 & 13.6 \\ 0.05 & 1.4 \end{bmatrix}$$

$$[T]_T = \begin{bmatrix} (A_A A_B + B_A C_B) & (A_A B_B + B_A D_B) \\ (C_A A_B + D_A C_B) & (C_A B_B + D_A D_B) \end{bmatrix}$$

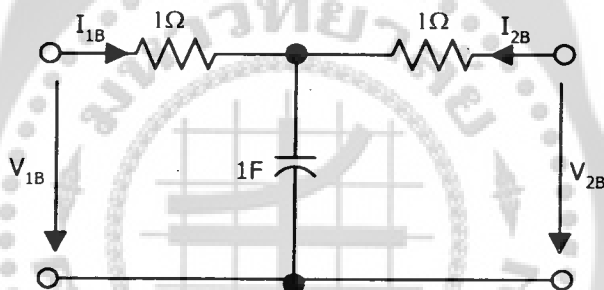
$$[T]_T = \begin{bmatrix} (1.2)(1.2) + (6.8)(0.05) & (1.2)(13.6) + (6.8)(1.4) \\ (0.1)(1.2) + (1.4)(0.05) & (0.1)(13.6) + (1.4)(1.4) \end{bmatrix}$$

$$[T]_T = \begin{bmatrix} 1.78 & 28.84 \\ 0.12 & 3.32 \end{bmatrix}$$

การบ้าน



Network A



Network B

1. จงคำนวณหา Z พารามิเตอร์เมื่อวงจ้าย่อยเชื่อมต่อกันแบบอนุกรม
2. จงคำนวณหา Y พารามิเตอร์เมื่อวงจ้าย่อยเชื่อมต่อกันแบบขนาน
3. จงคำนวณหา T พารามิเตอร์เมื่อวงจ้าย่อยเชื่อมต่อกันแบบลูกโซ่

บทที่ 9

โพล ซีโร่ และเสถียรภาพของวงจร

9.1 โพล และ ซีโร่ (Pole and Zero)

$H(s)$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเศษส่วนของสมการ Polynomial คือ

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{c_0 s^m + c_1 s^{(m-1)} + c_2 s^{(m-2)} + \dots c_{(m-1)} s + c_m}{d_0 s^n + d_1 s^{(n-1)} + d_2 s^{(n-2)} + \dots d_{(n-1)} s + d_n} \\ &= k \frac{[s^m + a_1 s^{(m-1)} + \dots a_{(m-1)} s + a_m]}{[s^n + b_1 s^{(n-1)} + \dots b_{(n-1)} s + b_n]} \\ &= k \frac{P(s)}{Q(s)} \end{aligned}$$

โดย

$P(s) \Rightarrow$ สมการ Numerator Equation ; หาเป็น order of $P(s)$

$Q(s) \Rightarrow$ สมการ Denominator Equation ; หาเป็น order of $Q(s)$

$k \Rightarrow$ Scale Function

นอกจากนี้ $H(s)$ ยังสามารถแยกสมการเป็นแบบ Root Factor ได้เช่นกัน

$$k \frac{(s - z_1)(s - z_2)(s - z_3) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) \dots (s - p_n)}$$

โดย $z_i (1 \leq i \leq m)$ เป็นรากของสมการ $P(s) = 0$ มีชื่อเรียกว่า Zero Roots

$p_j (1 \leq j \leq n)$ เป็นรากของสมการ $Q(s) = 0$ มีชื่อเรียกว่า Pole Roots

9.2 นิยามของโพล และซีโร

- นิยามที่ 1. $H(s)$ จะมีค่าคงที่ได้ก็ต่อเมื่อค่า s ในสมการนั้น ๆ มีค่าคงที่
 นิยามที่ 2. ค่าโพล และซีโร อาจเป็นค่า Real หรือ Complex Conjugate ก็ได้
 นิยามที่ 3. ใน $H(s)$ ใด ๆ ให้ถือว่าจำนวนโพล และซีโรที่เกิดขึ้นมีจำนวนเท่ากันเสมอ
 นิยามที่ 4. ค่าซีโร ของ $H(s)$ จะเป็นส่วนที่ระบุค่า Amplitude ของ $H(t)$ นั้น โดยอ้อม
 ค่าโพล ของ $H(s)$ จะเป็นส่วนที่ระบุค่า Function ของ $H(t)$ เนื่องจาก

$$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)}$$

ดังนั้นหาก

$$\begin{aligned} H(s) &= k \frac{[s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_m]}{[s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n]} \\ &= k \frac{[(s - Z_1)(s - Z_2) \dots (s - Z_n)]}{[(s - P_1)(s - P_2) \dots (s - P_n)]} \\ &= K \left[\frac{k_1}{(s - P_1)} + \frac{k_2}{(s - P_2)} + \dots + \frac{k_n}{(s - P_n)} \right] \end{aligned}$$

$$\therefore H(t) = k \{k_1 e^{P_1 t} + k_2 e^{P_2 t} + \dots + k_n e^{P_n t}\}$$

ดังนั้นสถานะเสถียรภาพ (Stability) ของวงจรสามารถตรวจสอบได้จากค่าโพลเท่านั้น

ตัวอย่างที่ 9.1 จงหาดำแหน่งของโพล และซีโร ที่เกิดจากสมการ

$$H(t) = \underbrace{[e^{-2t} + \cos 2t - \sin 2t]}_{(\text{ไปเวลาแล้ว } s = -2)}$$

วิธีทำ

แปลงให้อยู่ในรูปลาปลาซ

$$H(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{s}{s^2+4} - \frac{2}{s^2+4}$$

$$= \frac{1}{(s+2)(s^2+4)} \quad \text{Zero.}$$

$$= \frac{2s^2}{(s+2)(s+j2)(s-j2)}$$

$$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

จากสมการ

มีซีโร 2 ตัวคือ

มีโพล 3 ตัวคือ

$$P(s) = s^2 \rightarrow \text{ไม่สมการ, ได้ค่า } (s)$$

$$Z_1 = Z_2 = 0 \text{ เขียนแทนด้วย "O"}$$

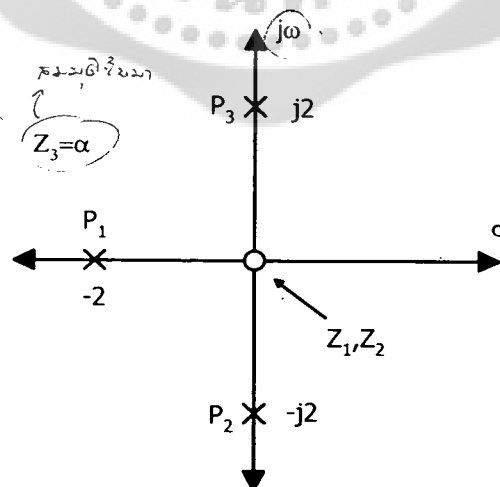
$$Q(s) = (s+2)(s+j2)(s-j2)$$

$$P_1 = -2$$

$$P_2 = -j2$$

$$P_3 = j2$$

เขียนแทนด้วย "X"



*** จำนวนซีโรกับโพล จะต้องเท่ากันเสมอ ถ้าไม่เท่าให้สมมติทางด้านซ้ายของแกนตั้ง (jw)

ตัวอย่างที่ 9.2 จงหาตำแหน่งของโพลและซีโร ที่เกิดจากสมการ

$$H(s) = \frac{5s(s^2 + 2s + 10)}{(s^2 + 4)(s + 4)^2}$$

วิธีทำ

จากสมการ

$$k = 5$$

$$P(s) = s(s^2 + 2s + 10)$$

$$= s[s + (1 - j3)][s + (1 + j3)]$$

มีซีโร 3 ตัวคือ

$$Z_1 = 0$$

$$Z_2 = -1 + j3$$

$$Z_3 = -1 - j3$$

$$Q(s) = (s^2 + 4)(s + 4)^2$$

$$= (s + j2)(s - j2)(s + 4)(s + 4)$$

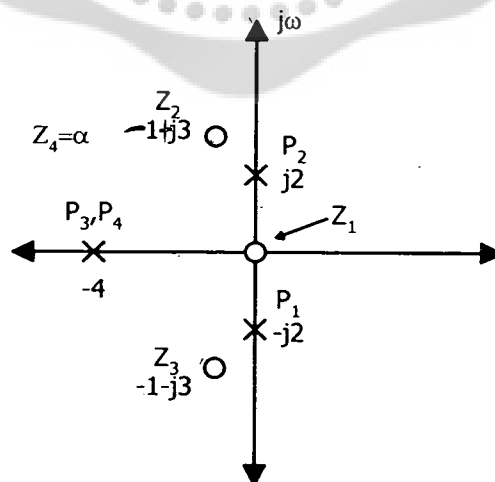
มีโพล 4 ตัวคือ

$$P_1 = -j2$$

$$P_2 = j2$$

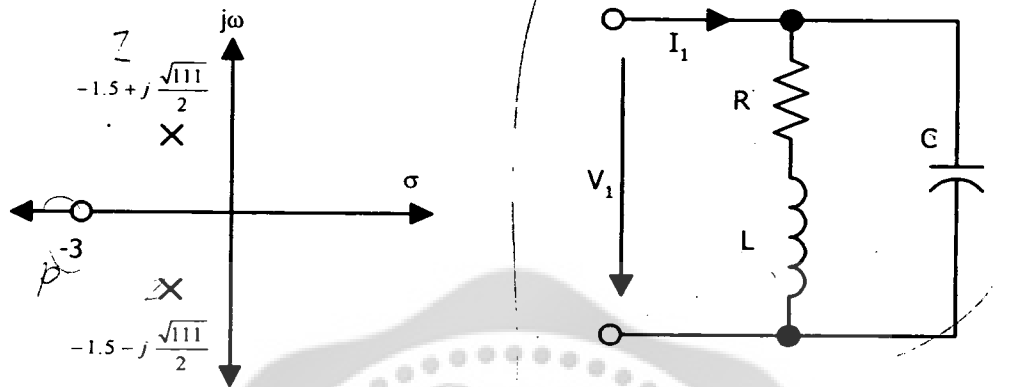
$$P_3 = -4$$

$$P_4 = -4$$



ตัวอย่างที่ 9.3 จากวงจร $Z_{11}(s)$ มีโพล และซีโร้ดั่งแผนภาพ S-Plane จงคำนวณหาค่า R, L และ C เมื่อ $Z_{11}(0) = 2$ โอห์ม

วิธีทำ



จากแผนภาพ S-Plane

$$Z_{11}(s) = \frac{k(s - Z_1)}{(s - P_1)(s - P_2)}$$

แทนค่าตำแหน่งโพล และซีโร้

$$\begin{aligned} Z_{11}(s) &= \frac{k(s + 3)}{[s + (1.5 + j \frac{\sqrt{111}}{2})][s + (1.5 - j \frac{\sqrt{111}}{2})]} \\ &= \frac{k(s + 3)}{s^2 + 3s + 30} \end{aligned}$$

หาค่า k โดยกำหนดให้ $s = 0$

$$Z_{11}(0) = \frac{k(0 + 3)}{0 + 0 + 30}$$

$$k = 20$$

ดังนั้น

$$Z_{11}(s) = \frac{20(s + 3)}{s^2 + 3s + 30}$$

จากวงจร

$$\begin{aligned} Z_{11}(s) &= \frac{(R + Ls)(1/Cs)}{(R + Ls) + (1/Cs)} \\ &= \frac{R + Ls}{LCs^2 + RCs + 1} \end{aligned}$$

$$\frac{R + Ls}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$\frac{1}{LC} \cdot \frac{(s + R/L)}{s^2 + R/Ls + 1/LC} = \frac{1}{C} \cdot \frac{(s + R/L)}{s^2 + R/Ls + 1/LC}$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ $Z_{11}(s)$ จาก S-plane และจากวงจร

$$\frac{1}{C} = 20 \Rightarrow C = 0.05F$$

$$\frac{1}{LC} = 30 \Rightarrow L = 0.66H$$

$$\frac{R}{L} = 3 \Rightarrow R = 2\Omega$$

9.3 เสถียรภาพ (Stability)

วงจรที่มีเสถียรภาพคือจะพบว่าการตอบสนองทางเอาต์พุตซึ่งมี Transient แบบใด ๆ ก็ตามแต่่วงจรจะเข้าสู่สภาวะคงตัว (Steady state) ได้เอง ซึ่งถ้าพิจารณาค่าแห่งของโพล จะพบว่าโพลจะอยู่ทางด้านซ้ายของ S-plane แต่ถ้าโพลใด ๆ อยู่ในด้านขวาของ S-plane แล้ว การตอบสนองทางเอาต์พุตจะไม่สามารถเข้าสู่สภาวะคงตัวได้ ซึ่งจะเรียกว่าวงจรขยับอยู่ในสภาวะไม่เสถียรภาพ (Unstable)

การตรวจสอบสภาวะเสถียรภาพสามารถทำได้ 2 วิธี

- ถอด Roots factor ของ Denominator Equation ; $Q(s)$ ของ $H(s)$
- ใช้วิธีของ Routh Criteria ช่วยคำนวณ ใช้กับวงจรตั้งแต่ Order 2 ขึ้นไป

วิธีของ Routh Criteria

ขั้นตอนที่ 1. เขียนสมการ $Q(s)$ โดยเรียงลำดับ Order ของ s ตั้งแต่ s^n จนถึง s^0

$$Q(s) = b_0s^n + b_1s^{n-1} + b_2s^{n-2} + \dots + b_{n-1}s^1 + b_n$$

ขั้นตอนที่ 2. นำสัมประสิทธิ์ทุกตัวมาเขียนลงในตาราง 2 Row

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & b_0 & b_2 & b_4 & b_6 & \dots \\ s^{n-1} & b_1 & b_3 & b_5 & b_7 & \dots \end{array}$$

ขั้นตอนที่ 3. คำนวณหาค่าประกอบใน Row ที่ 3

เขียนเป็นสัญลักษณ์

$$s^{n-2} \left| \begin{array}{ccc} \frac{b_1 b_2 - b_0 b_3}{b_1} & \frac{b_1 b_4 - b_0 b_5}{b_1} & \frac{b_1 b_6 - b_0 b_7}{b_1} & \dots \end{array} \right.$$

$$s^{n-2} \left| \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 & \dots \end{array} \right.$$

ขั้นตอนที่ 4. คำนวณหาค่าประกอบใน Row ที่ 4 และ Row ต่อไปจนถึง Row ที่ s^0

เขียนเป็นสัญลักษณ์

$$s^{n-3} \left| \begin{array}{ccc} \frac{c_1 b_3 - c_2 b_1}{c_1} & \frac{c_1 b_5 - c_3 b_1}{c_1} & \frac{c_1 b_7 - c_4 b_1}{c_1} & \dots \end{array} \right.$$

$$s^{n-3} \left| \begin{array}{ccc} d_1 & d_2 & d_3 & \dots \end{array} \right.$$

ขั้นตอนที่ 5. เขียนสัมประสิทธิ์และองค์ประกอบที่คำนวณได้ทุกตัวลงในตารางจะได้ตามฟอร์ม

s^n	b_0	b_2	b_4	b_6	.
s^{n-1}	b_1	b_3	b_5	b_7	.
s^{n-2}	c_1	c_2	c_3	.	.
s^{n-3}	d_1	d_2	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
s^0	.	.	.	.	.

ขั้นตอนที่ 6. พิจารณาเครื่องหมายขององค์ประกอบทุกตัวในช่อง Column ที่ 1 เท่านั้น

- ถ้าองค์ประกอบทุกตัวมีเครื่องหมายเดียวกันแสดงว่า โพลทุกตัวอยู่ด้านซ้ายของ S-plane แสดงว่าวงจรจ่ายเสถียรภาพ (stable)
- ถ้ามีการเปลี่ยนแปลงของเครื่องหมายจำนวน i ครั้ง นั่นคือมีโพลอยู่ด้านขวาของ S-plane จำนวน i ตัวเช่นกัน แสดงว่าวงจรจ่ายไม่เสถียรภาพ (Unstable)

- ถ้ามีค่า 0 เกิดขึ้นใน Column ที่ 1 (โดยต้องคำนวณหาองค์ประกอบถึง Row ที่ s^0 แล้ว) แสดงว่าวงจรข่าย **Oscillation** (มีโพลอยู่ที่แกน $j\omega$)

ตัวอย่างที่ 9.3 จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันโอนย้ายที่กำหนดให้เสถียรภาพหรือไม่

วิธีทำ

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s^3 + s^2 + 3s + 8}$$

จากฟังก์ชันโอนย้าย $Q(s) = s^3 + s^2 + 3s + 8$

s^3	1	3	8
s^2	1	8	
s^1	-5	8	
s^0	8		

Handwritten calculations:

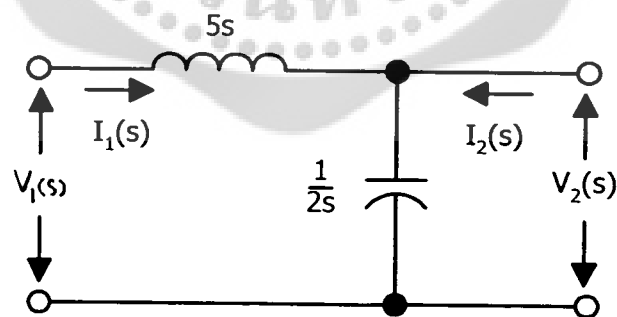
$$-5(8) - 8 = -48 - 8 = -56$$

$$C_1 \quad b_3 - c_2 \quad b_1$$

$$\frac{-56}{C_1}$$

จากการคำนวณโดยวิธีของ Routh Criteria ปรากฏว่าที่ Column ที่ 1 มีการเปลี่ยนแปลงเครื่องหมาย ดังนั้นแสดงว่าวงจรข่ายไม่เสถียรภาพ

ตัวอย่างที่ 9.4 จงคำนวณหาค่า $G_{21}(s)$ ของวงจรแล้วตรวจสอบด้วยว่าเสถียรภาพหรือไม่



วิธีทำ

ใช้กฎ KVL เขียนสมการแรงดันที่พอร์ตทั้ง 2

$$V_1(s) = I_1(s) \left[5s + \frac{1}{2s} \right]$$

$$V_2(s) = I_1(s) \left[\frac{1}{2s} \right]$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} G_{21}(s) &= \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{1}{2s} I_1(s)}{\left[5s + \frac{1}{2s} \right] I_1(s)} \\ &= \frac{\frac{1}{2s}}{5s + \frac{1}{2s}} \\ &= \frac{\frac{1}{2s}}{10s^2 + 1} \\ &= \frac{1}{10s^2 + 1} \end{aligned}$$

ตรวจสอบเสถียรภาพ

วิธี S-plane

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{10} \left[\frac{1}{s^2 + 0.1} \right] \\ &= \frac{1}{10} \left[\frac{1}{(s + j \frac{\sqrt{0.4}}{2})(s - j \frac{\sqrt{0.4}}{2})} \right] \end{aligned}$$

จาก H(s) ที่ได้มีโพลอยู่ 2 ตัว ซึ่งอยู่บนแกน jW ของ S-plane ดังนั้นวงจร Oscillation

วิธีของ Routh Criteria

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & 0.1 \\ s^1 & 0 & 0 \\ s^0 & 0 & \end{array}$$

จากการคำนวณโดยวิธีของ Routh Criteria ปรากฏว่าที่ Column ที่ 1 มี 0 เกิดขึ้นใน Column ที่ 1 แสดงว่าวงจร Oscillation

การบ้าน

1. จงคำนวณหาตำแหน่งโพล และซีโรว์บน S-plane ของสมการที่กำหนดให้

$$H(s) = \frac{3s}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$

2. จากสมการ $Q(s)$ ที่กำหนดให้จงตรวจสอบว่าเสถียรภาพหรือไม่โดยวิธีของ Routh Criteria

$$Q(s) = s^5 + 3s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 6s + 1$$



บทที่ 10

การตอบสนองความถี่ และโบคพลอท

10.1 การตอบสนองความถี่

ในวงจรไฟฟ้าใด ๆ ที่ต้องใช้งานตอบสนองต่อเวลา หรือต่อความถี่เช่นวงจรควบคุม หรือ วงจรกรองความถี่ เป็นต้น โดยวงจรเหล่านั้นต้องคำนึงถึงการตอบสนองของ Network Function ของวงจรในเชิงความถี่ ก่อนนำมาใช้งานเสมอ โดยจะเห็นได้ว่าสมการ Network Function นั้น $H(s)$ เป็นตัวบ่งบอกพฤติกรรมของการตอบสนองของเอาต์พุต ตามสมการ

$$R(s) = E(s) \cdot H(s)$$

ดังนั้นถ้าพิจารณา Network Function ในเชิงการตอบสนองความถี่ก็สามารถทำได้ด้วยการ แทนค่า s ด้วย $j\omega$ ลงในสมการ $H(s)$ ของวงจรมานั้น ๆ ซึ่งสมการ $H(j\omega)$ นี้จะสามารถแบ่งออกได้ เป็น 2 ส่วนคือ

$$H(j\omega) = \text{Re}(j\omega) + jX(j\omega)$$

$H(j\omega) \Rightarrow$ Network Function ในรูป $j\omega$

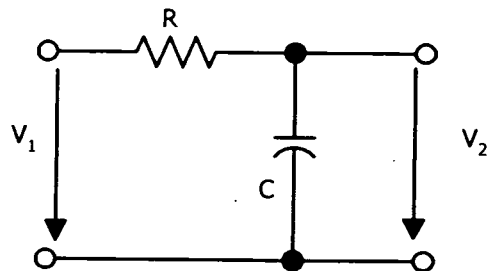
$\text{Re}(j\omega) \Rightarrow$ Real part

$X(j\omega) \Rightarrow$ Imaginary part

ดังนั้นจะได้การตอบสนองทางขนาด (Magnitude) และเฟส (Phase) คือ

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}(j\omega)^2 + X(j\omega)^2}$$
$$\theta(j\omega) = \tan^{-1} \frac{X(j\omega)}{\text{Re}(j\omega)}$$

ตัวอย่างที่ 10.1 จงวาดกราฟการตอบสนองทั้งขนาดและเฟสของ $G_{21}(s)$ ของวงจร



วิธีทำ

$$G_{21} = V_2/V_1; V_2 = V_1 \times \frac{1/Cs}{R + 1/Cs} = V_1 \times \frac{1/Cs}{RCs + 1} = V_1 \times \frac{1}{RCs + 1}$$

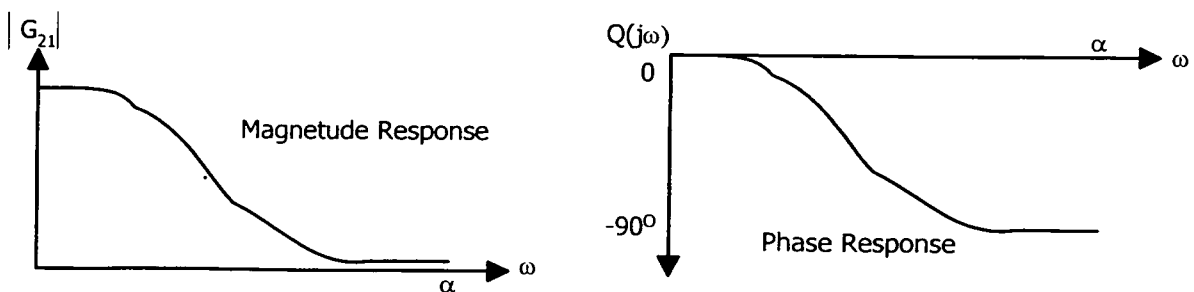
$$G_{21}(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

$$G_{21}(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1}$$

$$|G_{21}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}$$

$$\theta(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega RC)$$

วาดกราฟการตอบสนองทั้งขนาดและเฟสของ $G_{21}(s)$ ของวงจรได้คือ



การตอบสนองความถี่ของ $|H(j\omega)|$ นั้นสามารถเขียนขนาด (Magnitude) ในหน่วยเดซิเบล (Decibel ; dB) ได้ด้วย เนื่องจากมีความสัมพันธ์กันดังสมการ

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log |H(j\omega)|$$

10.2 โบทพลอต

ในการพลอตกราฟผลการตอบสนองความถี่เป็นการพลอตขนาดของการตอบสนองต่อความถี่ ซึ่งมีความยุ่งยากหากช่วงการตอบสนองมีช่วงกว้าง ดังนั้นวิธีการ โบทพลอตจึงสามารถแก้ปัญหาได้โดยการแปลงขนาดและความถี่ให้อยู่ในรูปของลอการิทึม โดยวิธี โบทพลอตอาจเรียกว่าการพลอตแอสซิมโทต หรือการพลอตเส้นสมมุติ

เมื่อมีฟังก์ชันโอนย้าย $H(s)$ ที่อยู่ในรูปของ s โดเมน ให้แทน s ด้วย $j\omega$ หลังจากนั้นหาค่าขนาด และมุมเฟส โดยในอันดับแรกจะพิจารณาศูนย์ที่ $s = -a$ โดยมีฟังก์ชันโอนย้ายคือ

$$H(s) = 1 + \frac{s}{a}$$

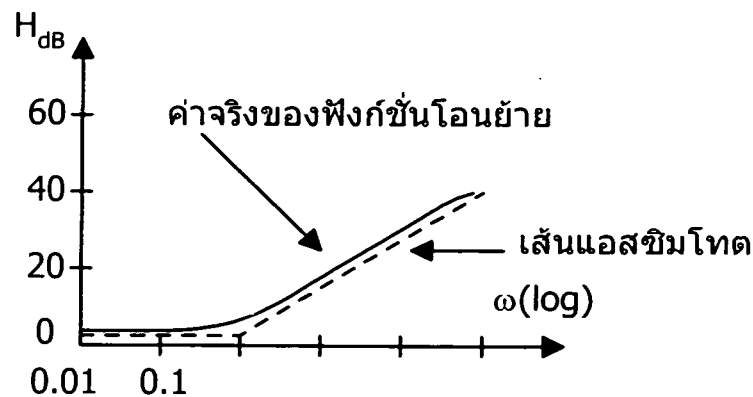
$$|H(j\omega)| = \left| 1 + \frac{j\omega}{a} \right| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\omega}{a} \right)^2}$$

$$|H_{dB}| = 20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{a} \right| = 20 \log \sqrt{1^2 + \left(\frac{\omega}{a} \right)^2}$$

การเขียนโบตพลอตอันดับแรกต้องหาเส้นทางเดินของกราฟผลการตอบสนองโดยพิจารณาช่วงความถี่ของผลการตอบสนองว่า อยู่ ณ ตำแหน่งความถี่ใดแล้วพิจารณาจุดความถี่ที่มีค่าน้อยกว่าค่าความถี่ของผลการตอบสนอง 10 เท่า สำหรับอีกจุดคือ พิจารณาจุดความถี่ที่มีค่ามากกว่าค่าความถี่ของผลการตอบสนอง 10 เท่า เช่นจากรูปที่ 10.1 เส้นปะที่แกนนอนเมื่อ $\omega \ll a$ และจุดหักกราฟอยู่ที่ $\omega = a$

$$\text{เมื่อ } \omega \ll a \quad H_{dB} = 20 \log 1 = 0dB$$

$$\omega \gg a \quad H_{dB} = 20 \log \frac{\omega}{a} dB$$



รูปที่ 10.1 แสดงรูปการเขียนโบดพลอต

รูปเส้นแอสซิมโทตของฟังก์ชันโอนย้ายจากรูปที่ 10.1 มีค่าดังนี้

$\omega = a$	$\Rightarrow$	$H_{dB} = 0dB$
$\omega = 10a$	$\Rightarrow$	$H_{dB} = 20dB$
$\omega = 100a$	$\Rightarrow$	$H_{dB} = 40dB$

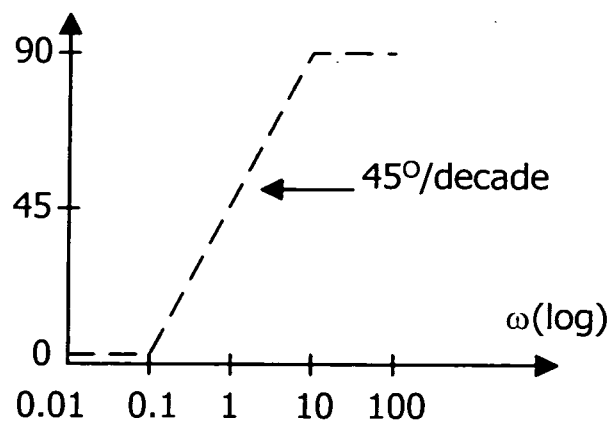
ดังนั้นค่า H_{dB} จะมีค่าเพิ่มขึ้น 20dB เมื่อ ω มีค่าเพิ่มขึ้น 10 เท่า เส้นแอสซิมโทตจะมีความชัน 20dB/decade และ H_{dB} จะมีค่าเพิ่มขึ้น 6dB เมื่อ ω มีค่าเพิ่มขึ้น 2 เท่าเส้นแอสซิมโทตจะมีความชัน 6dB/octave และจากรูปที่ 10.1 จะพบว่าเส้นแอสซิมโทต 2 เส้นจะตัดกันที่ $\omega = a$ จุดนี้จะเรียกว่า จุดกึ่งทอพอ หรือจุดความถี่ครึ่งกำลัง (Half Power Frequency)

ต่อไปจะพิจารณาขนาดของผลตอบสนองของฟังก์ชันโอนย้ายโดยมุมของฟังก์ชันโอนย้ายคือ

$$\angle H(j\omega) = \angle \left(1 + \frac{j\omega}{a} \right) = \tan^{-1} \frac{\omega}{a}$$

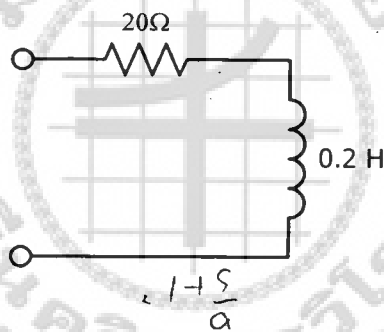
จากสมการจะเขียนเส้นแอสซิมโทตได้ 3 เส้นดังรูปที่ 10.2 โดยแต่ละเส้นคือ

$\omega \ll a$	$\Rightarrow$	$\angle H(j\omega) = 0^\circ ; (\omega < 0.1a)$
$\omega \gg a$	$\Rightarrow$	$\angle H(j\omega) = 90^\circ ; (\omega > 10a)$
$\omega = a$	$\Rightarrow$	$\angle H(j\omega) = 45^\circ$



รูปที่ 10.2 แสดงรูปโคมพล็อตในส่วนมุมของการตอบสนอง

ตัวอย่างที่ 10.2 จงเขียนโคมไดอะแกรมของ Z_{11} ของวงจรดังรูป



วิธีทำ

$$Z_{11} = H(s) = 20 + 0.2s$$

$$= 20 \left(1 + \frac{s}{100} \right)$$

$$H(j\omega) = 20 \left(1 + \frac{j\omega}{100} \right)$$

$$H_{dB} = 20 \log 20 \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{100} \right)^2}$$

ที่ $\omega \ll 100$ กำหนดให้ $\omega = 10$

$$H_{dB} = 20 \log 20 \sqrt{1 + \left(\frac{10}{100} \right)^2}$$

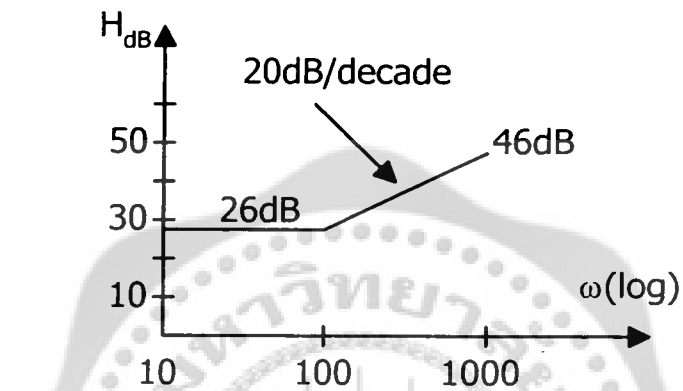
$$= 20 \log 20$$

$$\approx 26dB$$

โดย อ.ศิริพงษ์ ฉายสินธ์

ที่ $\omega \gg 100$ กำหนดให้ $\omega = 1,000$

$$\begin{aligned}
 H_{dB} &= 20 \log 20 \sqrt{1 + \left(\frac{1000}{100}\right)^2} \\
 &= 20 \log 20 \sqrt{100} \\
 &\approx 46 \text{ dB}
 \end{aligned}$$

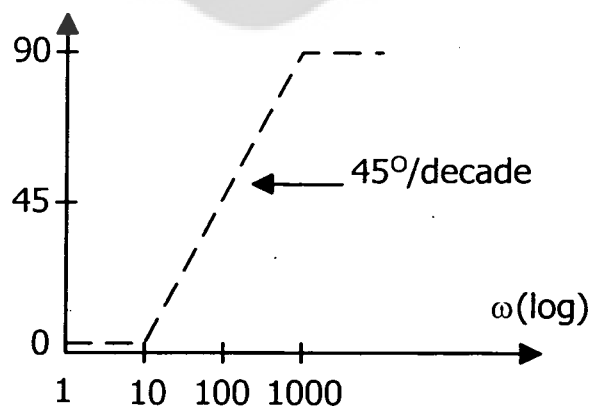


$$\text{ang}H(j\omega) = \text{ang}\left(1 + \frac{j\omega}{100}\right) = \tan^{-1} \frac{\omega}{100}$$

$$\omega < 10 \Rightarrow \text{ang}H(j\omega) = 0^\circ$$

$$\omega = 100 \Rightarrow \text{ang}H(j\omega) = 45^\circ$$

$$\omega = 1,000 \Rightarrow \text{ang}H(j\omega) = 90^\circ$$



ตัวอย่างที่ 10.3 จงเขียนโบดไดอะแกรม $|H(j\omega)|$ ของ $H(s)$ ที่กำหนดให้

$$H(s) = \frac{2000(s+4)}{s^2 + 116s + 1600}$$

วิธีทำ

$$H(s) = \frac{2000(s+4)}{(s+16)(s+100)}$$

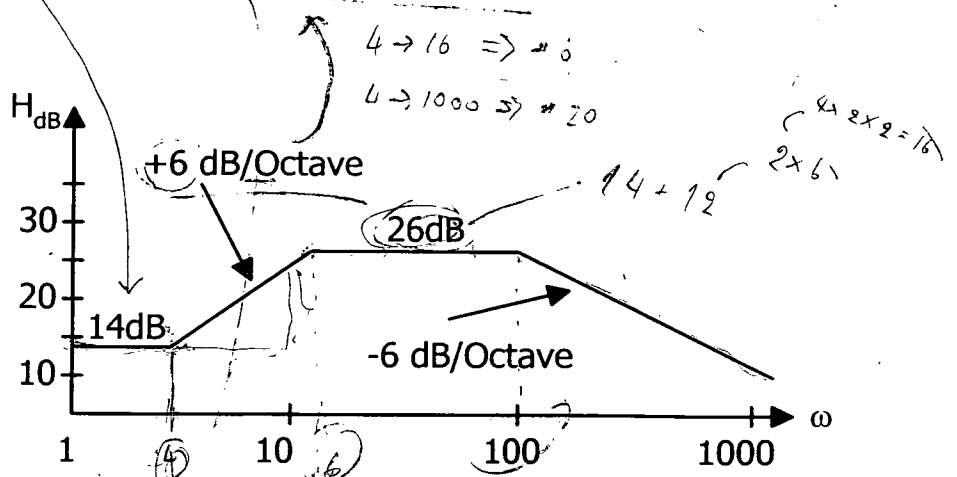
$$= \frac{2000 \times 4 \left(\frac{s}{4} + \frac{4}{4} \right)}{16 \left(\frac{s}{16} + \frac{16}{16} \right) \times 100 \left(\frac{s}{100} + \frac{100}{100} \right)}$$

$$= \frac{5 \left(1 + \frac{s}{4} \right)}{\left(1 + \frac{s}{16} \right) \left(1 + \frac{s}{100} \right)}$$

$$H(j\omega) = \frac{5 \left(1 + \frac{j\omega}{4} \right)}{\left(1 + \frac{j\omega}{16} \right) \left(1 + \frac{j\omega}{100} \right)}$$

$$H_{dB} = 20 \log 5 + 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{4} \right)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{16} \right)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{100} \right)^2}$$

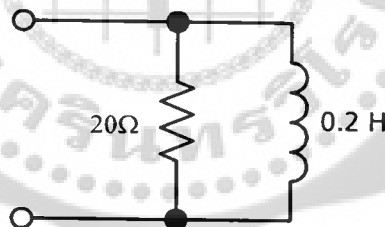
$$= 14 + 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{4} \right)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{16} \right)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{100} \right)^2}$$



จากรูปโบคไดอะแกรม H_{dB} ที่คำนวณได้ค่าตอบสนองต่ำสุดด้านความถี่ต่ำจะอยู่ที่ 14 dB และมีการเปลี่ยนแปลงค่าตอบสนองอยู่ 3 ความถี่คือ 4 rad/s, 16 rad/s และ 100 rad/s โดยมี 1 numerator และ 2 denominator เมื่อพล็อตโบคไดอะแกรม กำหนดให้ความถี่ต่ำสุดอยู่ที่ $\omega = 1$ rad/s และความถี่สูงสุดอยู่ที่ $\omega = 100$ rad/s ที่ค่าความถี่ต่ำ $\omega < 4$ rad/s ค่าการตอบสนองมีขนาด 14 dB และมีจะเปลี่ยนแปลงอยู่ที่ $\omega = 4$ rad/s โดยเป็นค่าของ numerator ดังนั้นการตอบสนองจะมีค่าเพิ่มขึ้น +6 dB/octave หรือ +20 dB/decade ถึงจุด $\omega = 16$ rad/s ซึ่งช่วงระหว่าง $\omega = 4$ rad/s กับ $\omega = 16$ rad/s นี้ค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงเท่ากับ $2 \times 6 = 12$ dB การตอบสนองที่จุด $\omega = 16$ rad/s จะมีค่าเท่ากับ $14 \text{ dB} + 12 \text{ dB} = 26 \text{ dB}$ ซึ่งจุดที่ 2 นี้เป็นค่า denominator ตามหลักแล้วค่าการตอบสนองจะต้องลดลง -6 dB/octave แต่เนื่องจากเป็นค่าต่อเนื่องมาจากค่า numerator ดังนั้นค่าการตอบสนองก็จะมีค่าคงที่คือ 0 dB/octave เนื่องจากการหักล้างกัน (+6 dB/octave กับ -6 dB/octave) โดยค่าการตอบสนองจะคงที่ไปถึงจุด $\omega = 100$ rad/s ซึ่งจุดที่ 3 นี้เป็นค่า denominator ดังนั้นค่าการตอบสนองก็จะลดลง -6 dB/octave

การบ้าน

1. จงเขียนโบคไดอะแกรมของ Z_{in} ของวงจรดังรูป ทั้งขนาดและมุมเฟส



2. จงเขียนโบคไดอะแกรม $|H(j\omega)|$ ของ $H(s)$ ที่กำหนดให้

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 4}{s^3 + 20s^2 + 100s}$$

$$s^2 + 2s + 4$$

$$s^3 + 20s^2 + 100s$$

$$s^2 + 2s + 4$$

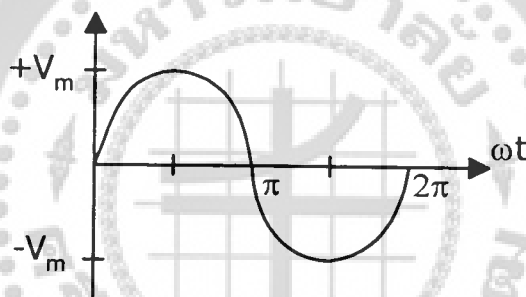
บทที่ 11

การวิเคราะห์สถานะคงตัวของวงจรที่ใช้คลื่นรูปไซน์เป็นสัญญาณอินพุต

11.1 คลื่นรูปไซน์

คลื่นรูปไซน์มีคุณสมบัติที่ถูกกำหนดโดยสมการ (10.1)

$$V(t) = V_m \sin(\omega t) \quad (11.1)$$



เมื่อ

V_m คือ ค่าสูงสุด หรือขนาดของคลื่น

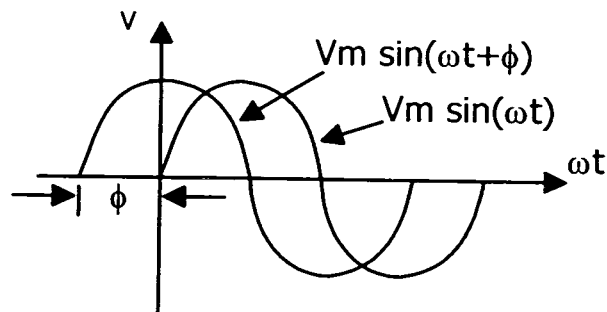
ω คือ ค่าความถี่ในหน่วย เรเดียน/วินาที

t คือ ค่าคาบเวลาที่ใช้ไปเพื่อให้คลื่นเปลี่ยนไปจนครบ 1 รอบ

สำหรับสมการที่สมบูรณ์ยิ่งขึ้นของคลื่นรูปไซน์ดังสมการ (11.2) คือ

$$V(t) = V_m \sin(\omega t + \phi) \quad (11.2)$$

โดย ϕ คือค่าของมุมเฟสที่ใช้อธิบายรูปคลื่นที่ใช้พิจารณาอยู่เมื่อเปรียบเทียบกับรูปคลื่นอ้างอิงว่ามี การเลื่อนไปทางใด และเป็นมุมกี่องศาเรเดียน



คลื่นรูปไซน์สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันโคไซน์ ดังสมการ (11.3) คือ

$$V(t) = V_m \cos(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}) \quad (11.3)$$

ถ้ากำหนดให้ $\theta = \phi - \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} V(t) &= V_m \cos(\omega t + \phi) \\ &= [V_m \cos\theta \cos\omega t] - [V_m \sin\theta \sin\omega t] \end{aligned}$$

โดยถ้าใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติจากสมการ (11.4)

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j \sin\omega t \quad (11.4)$$

จะพบว่า

$$\cos\omega t = \text{Re}\{e^{j\omega t}\}$$

$$\sin\omega t = \text{Im}\{e^{j\omega t}\}$$

สัญญาณรูปไซน์ที่มีค่าเชิงซ้อนจะมีรูปแบบดังสมการ (11.5)

$$V(t) = V e^{j\omega t} \quad (11.5)$$

เมื่อกำหนดให้ค่า V ซึ่งเป็นค่าตัวเลขเชิงซ้อนว่า เฟเซอร์ ซึ่งเขียนในรูปแบบสมบรูณ์ได้ในลักษณะ ดังสมการ (11.6)

$$V = V_m e^{j\phi} \quad (11.6)$$

เมื่อ V_m เป็นค่าขนาดของ V

$$V_m = |V| = \sqrt{[\text{Re}(V)]^2 + [\text{Im}(V)]^2}$$

และ ϕ เป็นเฟสของ V

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\text{Im}(V)}{\text{Re}(V)}$$

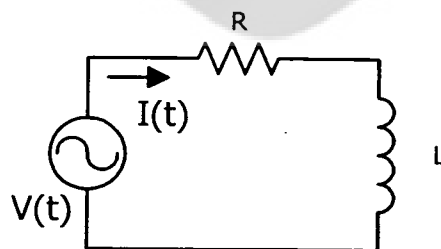
เขียนสมการ V ใหม่ได้ดังสมการ (11.7)

$$\begin{aligned} V(t) &= V_m e^{j\phi} e^{j\omega t} \\ &= V_m e^{j(\omega t + \phi)} \\ &= V_m \cos(\omega t + \phi) + jV_m \sin(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (11.7)$$

หรือเขียนในรูป Polar Form ดังสมการ (11.8)

$$V(t) = V_m \angle \phi \quad (11.8)$$

ตัวอย่างที่ 11.1 จากวงจร RL เมื่อสัญญาณกระตุ้นเป็นสัญญาณจำนวนจริง $V(t) = V_m \cos \omega t$ จงคำนวณหาค่า $I(t)$



วิธีทำ

จาก

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} V(t) &= V_m \cos \omega t \\ &= \text{Re}(V_m e^{j\omega t}) \end{aligned}$$

สมมติให้กระแสที่ต้องการทราบค่ามีขนาด I_m และมีมุมเฟส ϕ

ดังนั้น
$$I(t) = \text{Re}(I_m e^{j(\omega t + \phi)})$$

จาก KVL

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V(t)$$

แทนค่า $V(t)$ และ $I(t)$

$$R \text{Im} e^{j(\omega t + \phi)} + L \frac{d \text{Im} e^{j(\omega t + \phi)}}{dt} = V_m e^{j\omega t}$$

$$R \text{Im} e^{j(\omega t + \phi)} + j\omega L \frac{d \text{Im} e^{j(\omega t + \phi)}}{dt} = V_m e^{j\omega t}$$

$e^{j\omega t}$ หารตลอด

$$R \text{Im} e^{j\phi} + j\omega L \text{Im} e^{j\phi} = V_m$$

$$\text{Im} e^{j\phi} (R + j\omega L) = V_m$$

$$\text{Im} e^{j\phi} = V_m / (R + j\omega L)$$

เขียน $R + j\omega L$ ในรูป Polar Form

$$\begin{aligned} R + j\omega L &= \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \angle \tan^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right) \\ &= Z \angle \phi \quad \Omega \end{aligned}$$

เขียน $R + j\omega L$ ในรูปเอ็กซ์โพเนนเชียล

$$R + j\omega L = Z e^{j\phi} \quad \Omega$$

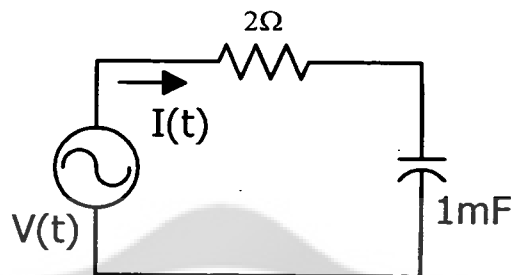
$$\begin{aligned} \text{Im} e^{j\phi} &= \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \angle \tan^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right)} \\ &= \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{-j \tan^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right)} \end{aligned}$$

จาก

$$\begin{aligned} I(t) &= \text{Re}(I_m e^{j(\omega t + \phi)}) \\ &= \text{Im} \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

$$= \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos[\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)]$$

ตัวอย่างที่ 11.2 จากวงจร จงหาค่าแรงดันที่จ่ายให้กับวงจร เมื่อกระแสไหลในวงจรเท่ากับ $4e^{j800t}$



วิธีทำ

กำหนดให้

$$V(t) = \text{Re}[V_m e^{j(800t - \phi)}]$$

จาก KVL

$$Ri + \frac{1}{C} \int i dt = V(t)$$

แทนค่า

$$2 \times 4e^{j800t} + \frac{1}{1 \times 10^{-3}} \int 4e^{j800t} dt = V_m e^{j(800t - \phi)}$$

$$8e^{j800t} + \frac{4000}{j800} e^{j800t} = V_m e^{j(800t - \phi)}$$

$$8e^{j800t} - j5e^{j800t} = V_m e^{j(800t - \phi)}$$

e^{j800t} หารดลอด

$$8 - j5 = V_m e^{-j\phi}$$

$$V_m e^{-j\phi} = 9.43 \angle -32^\circ$$

$$= 9.43 e^{-j32}$$

$$V(t) = 9.43 e^{j(800t - 32^\circ)} V$$

11.2 เฟสเซอร์

การบอกขนาดของแรงดันและกระแสในฟังก์ชันซายน์ของความถี่นั้น จะใช้ตัวแปร 2 ค่า คือขนาด และมุมเฟส ซึ่งเรียกว่า เฟสเซอร์ ดังเช่นถ้ามีสมการฟังก์ชันซายน์บริสุทธิ์ดังสมการ

$$I(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$= \text{Re}[I_m e^{j(\omega t + \phi)}]$$

ค่าเฟสเซอร์ของ $I(t)$ คือ

$$I = I_m e^{j\phi}$$

$$= I_m \angle \phi$$

ตัวอย่างที่ 11.3 ถ้ามีค่ากระแสคงสมการ $I(t) = 5\sin(377t + 150^\circ)$ จงเขียนในรูปโดเมนความถี่วิธีทำ

ถ้าเป็นฟังก์ชัน $\sin$ ให้เปลี่ยนเป็นฟังก์ชัน $\cos$ จาก $\sin \omega t = \cos(\omega t - 90^\circ)$

ดังนั้น

$$5\sin(377t + 150^\circ) = 5\sin(377t + 150^\circ - 90^\circ)$$

$$= 5\cos(377t + 60^\circ)$$

เขียนในรูปโดเมนความถี่ (เฟสเซอร์) $= 5 \angle 60^\circ \text{ A}$

11.3 ความสัมพันธ์ระหว่างเฟสเซอร์กับ R, L และ C

Time Domain		Frequency Domain	
	$v(t) = Ri(t)$		$\bar{V} = R\bar{I}$
	$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$		$\bar{V} = j\omega L\bar{I}$
	$v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$		$\bar{V} = \frac{1}{j\omega C}\bar{I}$

11.4 อิมพีแดนซ์

อิมพีแดนซ์ คืออัตราส่วนระหว่างแรงดันเฟสเซอร์ และกระแสเฟสเซอร์เขียนแทนด้วย $\bar{Z}$ มีหน่วยเป็น โอห์ม (Ω) อิมพีแดนซ์ไม่ใช่เฟสเซอร์ และไม่สามารถแปลงให้อยู่ในรูปโดเมนเวลาด้วยการคูณด้วย $e^{j\omega t}$

$$Z = R + jX$$

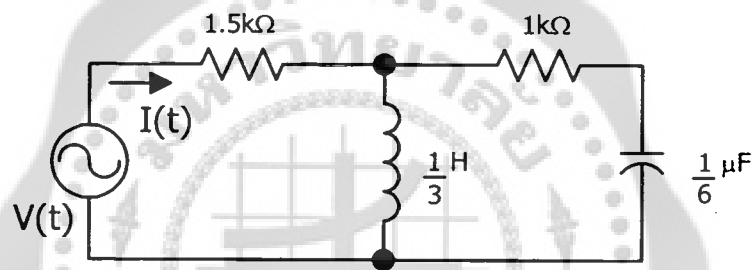
$$\begin{array}{lll} \text{เมื่อ } X \text{ ก็คือ} & X_L = \omega L & \text{หรือ} & X_C = 1/\omega C \\ \text{ดังนั้น} & j\omega L = jX_L & \text{และ} & 1/j\omega C = -jX_C \end{array}$$

11.5 แอดมิตแตนซ์

แอดมิตแตนซ์ คืออัตราส่วนกลับของอิมพีแดนซ์ เขียนแทนด้วย $\bar{Y}$ มีหน่วยเป็นซีเมนส์ (S)

$$Y = G + jB = 1/Z = 1/(R + jX)$$

ตัวอย่างที่ 11.4 จงคำนวณหาค่า $I(t)$ เมื่อ $V(t) = 40\sin 3000t$



วิธีทำ

$$\begin{aligned} V(t) &= 40\sin 3000t \\ &= 40\cos(3000t - 90^\circ) \\ V &= 40 \angle -90^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

$$jX_L = j\omega L = j3000(1/3) = j1000 \Omega = j1 \text{ k}\Omega$$

$$-jX_C = 1/j\omega C = 1/[j3000(1/6)(10^{-6})] = -j2000 \Omega = -j2 \text{ k}\Omega$$

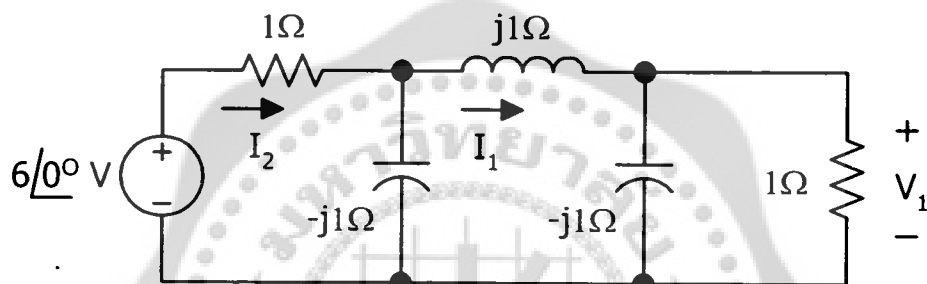
$$\begin{aligned} \bar{Z} &= 1.5\text{k}\Omega + \frac{j1\text{k}\Omega \times (1\text{k}\Omega - j2\text{k}\Omega)}{j1\text{k}\Omega + (1\text{k}\Omega - j2\text{k}\Omega)} \\ &= 1.5\text{k}\Omega + \frac{2\text{k}\Omega + j1\text{k}\Omega}{1\text{k}\Omega - j1\text{k}\Omega} \\ &= 1.5\text{k}\Omega + 0.5\text{k}\Omega + j1.5\text{k}\Omega \\ &= (2 + j1.5)\text{k}\Omega \\ &= 2.5 \angle 36.87^\circ \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{40 \angle -90^\circ}{2.5 \angle 36.87^\circ} = 16 \angle -126.87^\circ$$

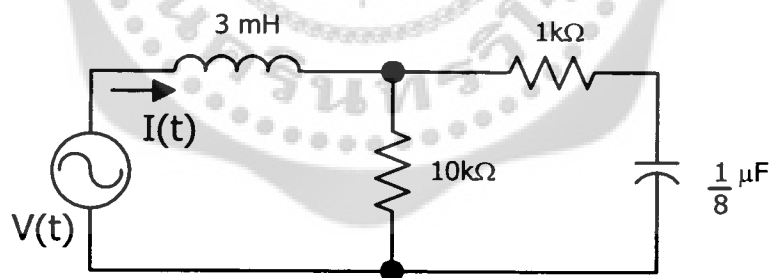
$$I(t) = 16 \cos(3000t - 126.87^\circ) \text{ mA}$$

การบ้าน

1. จงคำนวณหาค่า V_1



2. จงคำนวณหาค่ากระแสที่ไหลผ่าน C เมื่อ $V(t) = 10\sin 200t$ V



เอกสารอ้างอิง

1. Hayt, William H., Kemmerly, Jack E., Durbin, Steven M., Engineering Circuit Analysis 6th ed. McGraw-Hill, 2002.
2. Thomas, Roland E., Rosa, Albert J., The Analysis and Design of Linear Circuits. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ 07632, 1994.
3. Sudhakar A., Shyammohan S P., Circuits and Network Analysis and Synthesis. Tata McGraw-Hill, 1995.
4. Stanley, William D., Network Analysis with Applications 3rd ed. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ 07458, 2000.
5. โกศล โอฬารไพโรจน์, การวิเคราะห์วงจรข่าย. สมาคมส่งเสริมเทคโนโลยี (ไทย-ญี่ปุ่น), 2542.

